C. R. Acad. Sc. Paris
Théorie des groupes/*Group Theory*
Algèbre/*Algebra*

Arithmétique des groupes algébriques linéaires sur certains corps géométriques de dimension deux

Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE
C.N.R.S., U.M.R. 8628, Mathématiques, Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, F-91405 Orsay, France
Courriel : colliot@math.u-psud.fr

Philippe GILLE
C.N.R.S., U.M.R. 8628, Mathématiques, Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, F-91405 Orsay, France
Courriel : Philippe.Gille@math.u-psud.fr

Raman PARIMALA
School of Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, Homi Bhabha Road, Colaba, Mumbai 400005, Inde
Courriel : parimala@math.tifr.res.in

Résumé. Dans cette note on s'intéresse aux groupes algébriques linéaires définis sur un corps de l'un des types suivants : corps de fonctions algébriques de deux variables sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, et corps des fractions d'un anneau local excellent intègre strictement hensélien de dimension deux, de corps résiduel de caractéristique zéro. Ces corps sont de dimension cohomologique deux. A tout corps K de l'un de ces types on associe une famille naturelle de complétés K_v par rapport à des valuations v discrètes de rang un.

Nous observons que sur tout tel corps les espaces homogènes de groupes linéaires satisfont la plupart des propriétés connues lorsque le corps de base est un corps de nombres totalement imaginaire (principe de Hasse, finitude de la R-équivalence).

Arithmetic of linear algebraic groups over certain geometric fields of dimension two

Abstract. Let k be an algebraically closed field of characteristic zero. Let K be either a function field in two variables over k or the fraction field of a 2-dimensional, excellent, strictly henselian local domain with residue field k. To any such field one associates completions with respect to a natural family of discrete valuations of K. We show that homogeneous spaces of connected linear algebraic groups over such a field K satisfy most properties familiar in the context of number fields: Hasse principle, finiteness of R-equivalence.

English abridged version.

Our first result deals with Galois cohomology of semisimple algebraic groups defined over certain fields of cohomological dimension at most 2; its proof proceeds by a case-by-case analysis, and groups of types ${}^2A_n$ and ${}^2D_n$ are the difficult cases to handle.

Theorem 1 *Let K be a field of characteristic zero such that $\mathrm{cd}K \leq 2$. Suppose that over any finite extension of K, exponent and index of central simple algebras coincide. Then for any isogeny $1 \to \mu \to \tilde{G} \to G \to 1$ such that $\tilde{G}$ is semisimple simply connected and G adjoint, the boundary map $H^1(K,G) \to H^2(K,\mu)$ is onto.*

Let k be an algebraically closed field of characteristic zero. We consider a field K of characteristic zero of one of the following types :

(gl) function field in two variables over k;

(ll) quotient field of an excellent, 2-dimensional, henselian local domain A with residue field k;

(sl) field of Laurent series in one variable over a field of cohomological dimension 1.

For fields K of the above three types, Serre's conjecture II is almost proved (cf. §2).

Theorem 2 *Let K be a field of type (ll) or (sl). Let G/K be a semisimple simply connected group. Then $H^1(K,G)=1$. If G/K has no E_8–factors, the same conclusion holds for fields of type (gl).*

Theorems 1 and 2 give the classification of semisimple algebraic groups over such fields. If G/K is as in Theorem 2 with the additional property that it contains no factor of type A_n, rationality results of Platonov-Chernousov [PCh] imply that G/K is a rational variety.

Theorem 2 is used further to show some local-global principles in analogy with the Hasse principle for imaginary number fields. For fields of type (gl) or (ll), codimension 1 points of all models define a set Ω_K of rank 1 discrete valuations; we denote by K_v the completion of K for $v \in \Omega_K$. For the type (*ll*), one has a local-global principle [A3, COP] for the Brauer group, i.e. an injection $Br(K) \hookrightarrow \prod_{v\in\Omega_K} Br(K_v)$.

Theorem 3 *Let K be a field of type (ll) or (gl). Let G/K be a connected linear algebraic group, without E_8–factor in case (gl).*

a) The intersection $Ш^1(K,G)$ of the kernels of the maps $H^1(K,G) \to H^1(K_v,G)$ for $v \in \Omega_K$ is a finite set.

b) If K has type (ll) and G is semisimple adjoint or absolutely almost simple, then $Ш^1(K,G)=1$.

c) Assume K has type (ll) and let X be a projective homogenous space over G. If $X(K_v)\neq\emptyset$ for all $v\in\Omega_K$, then $X(K)\neq\emptyset$.

d) Let $S\subset\Omega_K$ be a finite set of places. Then the closure of $G(K)$ under the diagonal map $G(K)\to\prod_{v\in S}G(K_v)$ (where each $G(K_v)$ is equipped by the K_v–topology) is a normal subgroup of finite index in $\prod_{v\in S}G(K_v)$.

We also prove certain finiteness results for R-equivalence classes in $G(K)$ (cf. §4).

Theorem 4 *Let K be a field of type (ll), (sl) ou (gl). Let G/K be a connected linear algebraic group. If K has type (gl), suppose further that G has no factor of type E_8. Then the group $G(K)/R$ is a finite abelian group.*

If G/K is semisimple simply connected, we use Yanchevskiĭ's results [Ya1,Ya2] for showing that $G(K)/R$ is actually trivial. We then proceed by reduction to the semisimple simply connected case ([G1]), [G2]) and the result follows from the fact that the group $H^1(K,F)$ is finite for any flasque torus F/K (see §3).

1. Les corps considérés et leurs propriétés fondamentales (rappels)

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. On considère un corps K de caractéristique zéro de l'un des types suivants :

(gl) Un corps de fonctions K de deux variables sur le corps k, c'est-à-dire le corps des fonctions $K=k(X)$ d'une surface connexe, projective et lisse X sur le corps k.

(ll) Le corps des fractions K d'un anneau local A, excellent, intègre, strictement hensélien de dimension deux, de corps résiduel k.

(sl) Un corps $K = l((t))$, corps de séries formelles d'une variable sur un corps l de dimension cohomologique 1. On s'intéressera principalement aux cas où l est soit le corps des fonctions d'une courbe sur k, soit le corps des séries formelles en une variable $k((u))$; dans ces cas le corps l est même C_1' (Tsen, Lang; voir [Pf]).

On s'intéresse aux propriétés suivantes d'un corps K (de caractéristique nulle) :

(a) Le corps K est un corps C_2'.

(b) La dimension cohomologique $\mathrm{cd}K$ est au plus 2.

(c) La norme réduite est surjective : pour toute extension finie de corps L/K et toute L-algèbre simple centrale D, tout élément de L^* est une norme réduite de D^*.

(d) Indice et exposant des algèbres simples centrales coïncident: pour toute extension finie de corps L/K et toute L-algèbre simple centrale D, l'indice de D/L coïncide avec son exposant, c'est-à-dire avec l'ordre de sa classe dans le groupe de Brauer de L.

(e) La dimension cohomologique $\mathrm{cd}K_{ab}$ de l'extension abélienne maximale K_{ab} de K est au plus 1.

Grâce à des travaux classiques et à des résultats de Merkur'ev et Suslin ([MS], [Su]), on sait que la propriété (a) implique la propriété (b), et que (b) et (c) sont équivalentes. Par ailleurs, l'hypothèse (a) implique l'énoncé (d) pour les algèbres d'indice 2-primaire ou 3-primaire (Artin *et al.*, [A2]). La combinaison de (b) et (d) (pour les algèbres 2-primaires) implique que toute forme quadratique de rang au moins 5 est isotrope (cf. [COP]).

Les corps de type (gl) sont de dimension cohomologique 2 ([Se]), ils sont d'ailleurs C_2' (Lang, voir [Pf]). Sur de tels corps, exposant et indice coïncident donc pour les algèbres d'indice 2-primaire ou 3-primaire.

Les corps de type (ll) sont de dimension cohomologique 2 (cas particulier d'un théorème de M. Artin [A1]). Qu'indice soit égal à exposant est un résultat plus récent (Artin [A3]; voir [COP] pour l'énoncé le plus général). On montre dans [COP] que l'on a $\mathrm{cd}K_{ab} \leq 1$.

Les corps de type (sl) sont de dimension cohomologique 2 ([Se]). On vérifie aisément que sur toute extension finie d'un tel corps, indice et exposant des algèbres simples centrales coïncident. On a aussi la propriété $\mathrm{cd}K_{ab} \leq 1$. Si l est un corps C_1', alors le corps $l((t))$ est C_2' (voir [Pf]).

Soit K un corps de type (gl) sur le corps k, et soit X un modèle de K, i.e. une surface projective et lisse de corps des fractions K. On note Ω_X l'ensemble des anneaux de valuation discrète $A \subset K$ obtenus par localisation de X en un point de codimension un. On note Ω la réunion des Ω_X, pour X parcourant tous les modèles de K/k. Le complété de K en une telle valuation est de la forme $k(C)((u))$, i.e. de type (sl), avec $l = k(C)$ un corps C_1'.

Pour un corps K de type (ll), défini comme le corps des fractions d'un anneau local intègre A, on sait (Abhyankhar, Lipman) qu'il existe un schéma régulier intègre X équipé d'un morphisme projectif birationnel $X \to \mathrm{Spec}(A)$. On note Ω_X l'ensemble des anneaux de valuation discrète de K obtenus par localisation de X en un point de codimension un. On note Ω la réunion des Ω_X pour X parcourant tous les modèles $X \to \mathrm{Spec}(A)$. Le complété de K en une telle valuation est de type (sl), i.e. de la forme $l((t)))$, avec soit $l \simeq k((u))$ soit $l \simeq k(C)$ (corps des fonctions d'une courbe projective et lisse C sur k).

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de changement de base propre (SGA 4). Il sera utilisé au §6.

Théorème 1.1 ([A3]; [COP]) *Soit K un corps de type (ll). Pour tout modèle projectif régulier $X \to \mathrm{Spec}(A)$, le noyau de l'application diagonale* $\mathrm{Br}(K) \to \oplus_{v\in\Omega_X}\mathrm{Br}(K_v)$ *est trivial. Il en est a fortiori de même du noyau de l'application diagonale* $\mathrm{Br}(K) \to \prod_{v\in\Omega}\mathrm{Br}(K_v)$.

2. Groupes simplement connexes

Le théorème suivant (conjecture II de Serre pour les corps ici considérés) regroupe de nombreux résultats. Il est établi dans [COP] dans le cas (ll).

Théorème 2.1 *Soit K un corps de type (ll) ou (sl), et soit G un K-groupe semi-simple simplement connexe. Alors l'ensemble $H^1(K,G)$ est réduit à l'élément trivial. Il en est de même dans le cas (gl) sous l'hypothèse que G ne contient pas de facteur de type E_8.*

Indications sur la démonstration Une réduction classique permet de ne considérer que les groupes absolument presque simples. La conjecture II de Serre a été établie par Merkur'ev-Suslin (voir [Su]) pour ${}^1A_n$ et par Bayer-Parimala [BP] pour tous les groupes classiques sur un corps de dimension cohomologique 2. Notons que le cas (sl), comme celui des nombres p-adiques, admet une preuve uniforme via la théorie de Bruhat-Tits ([BT], th. 4.7). Comme, pour les autres corps considérés, exposant et indice coïncident pour les algèbres centrales simples 2-primaires ou 3-primaires, la méthode de [G] donne le théorème pour les groupes D_4 trialitaires et les groupes de type E_6 et E_7. (La coïncidence de l'exposant et de l'indice permet par ailleurs une simplification des démonstrations de [BP].) Enfin, lorsque la condition $\mathrm{cd}K_{ab} \leq 1$ est satisfaite, la méthode de [G] donne le résultat pour les groupes de types E_8.

Remarque Une autre méthode a été proposée par V. I. Chernousov; elle imite la preuve du principe de Hasse sur les corps de nombres.

Théorème 2.2 *Soit K un corps de caractéristique zéro, satisfaisant $\mathrm{cd}K \leq 2$. Supposons que sur toute extension finie de K exposant et indice des algèbres coïncident. Alors, pour toute isogénie $1 \to \mu \to \tilde{G} \to G \to 1$ avec $\tilde{G}$ semi-simple simplement connexe et G adjoint, le bord $H^1(K,G) \to H^2(K,\mu)$ est une application surjective.*

Nous établissons ce théorème par une analyse cas par cas. Les cas ${}^2A_n$ et ${}^2D_n$ sont particulièrement ardus. Pour les algèbres de type autre que A_n, on n'utilise la coïncidence de l'exposant et de l'indice que pour les algèbres 2-primaires ou 3-primaires.

Le théorème ci-dessus (vide pour les cas G_2, F_4, E_8) s'applique directement aux corps de type (ll) et de type (sl). Par la remarque ci-dessus, il s'applique aux corps (gl) si G ne contient pas de facteur de type A_n.

Le théorème suivant est essentiellement dû à Platonov et Chernousov ([PCh]); la rationalité dans certains cas remonte à Cayley.

Théorème 2.3 *Soit K un corps de type (ll) ou (sl), et soit G un K-groupe semi-simple simplement connexe. Si G est sans facteur de type A_n, alors G est un groupe K-isotrope, et c'est un groupe K-rationnel (la K-variété sous-jacente est K-birationnelle à un espace affine). Le même énoncé vaut si K est un corps de type (gl) et G ne contient de facteur ni de type A_n ni de type E_8.*

Indications sur la démonstration On utilise la classification des groupes fournie par le théorème 2.1. Pour les types B_n et D_n, l'isotropie provient de l'isotropie des formes quadratiques à 5 variables. Pour les types G_2, F_4, E_8, la trivialité de $H^1(K,G)$ implique que tout tel groupe est déployé. Pour les autres types simples exceptionnels, l'isotropie se démontre avec le théorème 2.2. Dans [PCh], §12, Platonov et Chernousov établissent la K-rationalité des K-groupes semi-simples simplement connexes sans facteur A_n, lorsque K est un corps p-adique ou un corps de nombres totalement imaginaire. Leur démonstration repose uniquement sur les propriétés suivantes : trivialité de $H^1(K,G)$ et isotropie des groupes non de type A_n. Elle s'applique donc ici.

Rappelons ([CS1], [G1]) que pour un K-groupe linéaire connexe G, le sous-groupe normal des K-points R-équivalents à $1 \in G(K)$ est le groupe formé des $x \in G(K)$ tels qu'il existe un

K-morphisme $\varphi : U \to G$ avec U ouvert de la droite affine sur K et x et 1 dans l'image de $U(K) \to G(K)$.

Théorème 2.4 (Yanchevskiĭ) *Soit K un corps de caractéristique nulle, de dimension cohomologique 2. Soit G un K-groupe semi-simple simplement connexe de type A_n. Alors le groupe $G(K)/R$ est trivial.*

Indications sur la démonstration Si G est une forme interne de A_n, soit $G = SL(n, D)$ pour D/K une algèbre simple centrale à division, et $n \geq 1$, alors $G(K)/R$ est le quotient $SK_1(D)$ du groupe des unités D^* par le groupe des commutateurs (résultat valable sur tout corps et déduit par Voskresenskiĭ d'un résultat de Platonov). Sous l'hypothèse que la norme réduite est surjective, satisfaite pour $\mathrm{cd}K \leq 2$, Yanchevskiĭ [Ya2] montre $SK_1(D) = 1$. Pour les formes externes de A_n, voir [Ya1], Théorèmes 1.1 et 2.1.

Les théorèmes 2.3 et 2.4 impliquent immédiatement le

Théorème 2.5 *Soit K un corps de type (ll) ou de type (sl). Soit G un K-groupe semi-simple simplement connexe. Alors $G(K)/R = 1$. Le même énoncé vaut lorsque G est de type (gl), sous l'hypothèse que G ne contient pas de facteur de type E_8.*

3. Les groupes de type multiplicatif et leur cohomologie

On dit ici qu'un corps k, de caractéristique zéro, est à cohomologie finie si pour tout module galoisien fini M sur k, tous les groupes de cohomologie galoisienne sont finis (exemples : un corps algébriquement clos, le corps des réels, un corps p-adique, un corps de séries formelles en une variable sur un tel corps).

On renvoie à [CS1] et [CS2] pour la définition des tores flasques.

Théorème 3.1 *Soit K un corps de caractéristique zéro de l'un des types suivants.*

(i) K est un corps de fonctions d'un nombre quelconque de variables sur un corps k à cohomologie finie;

(ii) K est le corps des fractions d'un anneau local excellent intègre strictement hensélien de dimension quelconque, de corps résiduel k à cohomologie finie;

(iii) $K = l((t))$ est un corps de séries formelles sur un corps l avec $\mathrm{cd} l \leq 1$.

Alors pour tout K-tore flasque F, le groupe $H^1(K, F)$ est fini.

Dans le cas (i), le résultat vaut aussi lorsque k est un corps de nombres ([CS1]). La démonstration du cas (ii) utilise les résultats de [A1]. Celle du cas (iii) procède par une analyse directe.

4. Finitude de la R-équivalence sur les groupes linéaires

Théorème 4.1 *Soit K un corps de type (ll), (sl) ou (gl). Soit G un K-groupe linéaire connexe, supposé sans facteur de type E_8 si K est de type (gl). Alors le groupe $G(K)/R$ est un groupe abélien fini.*

Supposons que le groupe G admet une présentation $1 \to \mu \to \tilde{G} \to G \to 1$ avec $\tilde{G}$ le produit d'un tore quasi-trivial et d'un groupe semi-simple simplement connexe. Soit $1 \to \mu \to F \to P \to 1$ une résolution flasque de μ (F tore flasque, P tore quasi-trivial; [CS2] (0.6.2)). Alors le groupe $G(K)/R$ est isomorphe au groupe fini $H^1(K, F)$.

Indications sur la démonstration Sous l'hypothèse $\mathrm{cd}K \leq 2$, et pour un groupe G admettant une présentation comme ci-dessus, [G2] (utilisant la méthode de [G1], en particulier un principe de normes) établit l'exactitude de la suite

$$\tilde{G}(K)/R \to G(K)/R \to H^1(K, \mu)/R \to 1,$$

où le dernier groupe s'identifie à $H^1(K,F)$. On utilise alors les théorèmes 2.5 et 3.1.

5. Approximation faible

Théorème 5.1 *Soit K un corps de type (ll) ou (gl). Soit G un K-groupe linéaire connexe, sans facteur de type E_8 dans le cas (gl). Soit $S \subset \Omega$ un ensemble fini de places. L'adhérence de $G(K)$ par l'application diagonale $G(K) \to \prod_{v\in S} G(K_v)$, où chaque $G(K_v)$ est équipé de la topologie induite par celle de K_v, est un sous-groupe normal, et le quotient $A_S(G)$ de $\prod_{v\in S} G(K_v)$ par cette adhérence est un groupe fini.*

Remarque Ce groupe fini n'est pas forcément nul. Considérons ainsi le corps $K = \mathbf{C}((x,y))$, le surcorps $L = \mathbf{C}((\sqrt{x},\sqrt{y}))$ et le K-tore $T = R^1_{L/K}\mathbf{G}_m$ des éléments de norme 1 dans L^*. Soit K_x le corps des fractions du complété de $A = \mathbf{C}[[x,y]]$ en l'idéal x, et soit K_y le complété en l'idéal y. En utilisant les résultats de [CS1], on vérifie que le quotient de $T(K_x) \times T(K_y)$ par l'adhérence de $T(K)$ vaut $\mathbf{Z}/2$.

6. Principe de Hasse

Le théorème suivant est l'analogue d'un résultat de Borel sur les corps de nombres.

Théorème 6.1 *Soit K un corps de type (ll) ou (gl). Soit G un K-groupe linéaire connexe, sans facteur de type E_8 dans le cas (gl). L'intersection $Ш^1(K,G)$ des noyaux des applications $H^1(K,G) \to H^1(K_v,G)$ pour $v \in \Omega$ est un ensemble fini.*

Le théorème suivant est l'analogue d'un résultat de Sansuc [Sa] sur les corps de nombres. Sa preuve utilise le théorème 1.1.

Théorème 6.2 *Soit K un corps de type (ll). Soit G un K-groupe linéaire semi-simple connexe. Si G est un groupe adjoint, ou si G est un groupe absolument presque simple, alors $Ш^1(K,G) = 1$.*

Remarque On peut donner des exemples de corps K de type (ll) tels que $Ш^1(K,\mathbf{Z}/2) \neq 1$ ([J], [COP]). Il serait souhaitable de donner un exemple de groupe linéaire connexe G sur un tel corps K avec $Ш^1(K,G) \neq 1$. De façon équivalente, il conviendrait de trouver un exemple de module galoisien fini M, sur un tel corps K, tel que $Ш^2(K,M) \neq 0$.

Le théorème suivant est l'analogue d'un résultat de Harder sur les corps de nombres.

Théorème 6.3 *Soit K un corps de type (ll). Soient G un K-groupe linéaire connexe et X une K-variété projective qui est un espace homogène de G. Si l'on a $X(K_v) \neq \emptyset$ pour tout $v \in \Omega$, alors $X(K) \neq \emptyset$ et X est K-birationnel à un espace projectif sur K.*

La démonstration utilise le théorème 1.1. Elle repose sur la méthode de Borovoi ([B]), laquelle fonctionne ici grâce au théorème 2.2.

Remerciements. Les auteurs remercient le support du CEFIPRA à travers le projet 2501-A, "Algebraic Groups in Arithmetic and Geometry".

Bibliographie

[A1] M. Artin, Cohomologie des préschémas excellents d'égales caractéristiques, Exposé XIX in *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas*, Tome 3, Séminaire de Géométrie Algébrique de Bois Marie 1963/64, SGA 4, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, L. N. M. 305, Springer Verlag, 1973, p. 588-638.

[A2] M. Artin, Brauer-Severi varieties, in *Brauer groups in ring theory and algebraic geometry* (Wilrijk, 1981), L. N. M. **917**, Springer Verlag, 1982, pp. 194-210.

[A3] M. Artin, Two-dimensional orders of finite representation type, Manuscripta Mathematica **58** (1987) 445-471.

[BP] E. Bayer-Fluckiger, R. Parimala, Galois cohomology of the classical groups over fields of cohomological dimension ≤ 2, Inventiones math. **122** (1995) 195-229.

[B] M. V. Borovoi, Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology, Duke Math. J. **72** (1993) 217-239.

[BT] F. Bruhat et J. Tits, Groupes algébriques sur un corps local III. Compléments et application à la cohomologie galoisienne, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **34** (1987), 671-698.

[COP] J.-L. Colliot-Thélène, M. Ojanguren and R. Parimala, Quadratic forms over fraction fields of two-dimensional henselian rings and Brauer groups of related schemes, à paraître dans *Algebra, Arithmetic and Geometry*, Proceedings of the Bombay Colloquium 2000.

[CS1] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La R-équivalence sur les tores, Ann. Sci. École Norm. Sup. 4ème série **10** (1977) 175-229.

[CS2] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, Principal Homogeneous Spaces under Flasque Tori: Applications, J. Algebra **106** (1987) 148-205.

[G1] P. Gille, La R-équivalence sur les groupes algébriques réductifs définis sur un corps global. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **86** (1997), 199-235 (1998).

[G2] P. Gille, Cohomologie des groupes quasi-déployés sur des corps de dimension cohomologique ≤ 2, Compositio math. **125** (2001) 283-325.

[J] P. Jaworski, On the strong Hasse principle for fields of quotients of power series rings in two variables, Math. Z. **236** (2001), 531-566.

[MS] A. S. Merkur'ev et A. A. Suslin, K-cohomologie des variétés de Severi-Brauer et homomorphisme de norme résiduelle,Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 46 (1982), no. 5, 1011-1046, 1135-1136; trad. anglaise : Math. USSSR Izvestija **21** (1983) 307-340.

[Pf] A. Pfister, *Quadratic forms with applications to algebraic geometry and topology*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **217**. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[PCh] V. P. Platonov and V. I. Chernousov, The rationality problem for semisimple group varieties, J. Reine Angew. Math. **504** (1998), 1-28.

[Sa] J.-J. Sansuc, Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle) **327** (1981) 12-80.

[Se] J-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Math. **5**, 5ième édition (1994), Springer-Verlag.

[Su] A. A. Suslin, K-théorie algébrique et homomorphisme de norme résiduelle, Itogi Nauki i Tekhniki **25** (1984) 115-207, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscou, 1984; trad. anglaise : Journal of Soviet mathematics **30** (1985) 2556-2611.

[Ya1] V. I. Yanchevskiĭ, Algèbres simples centrales à involution et groupes unitaires, Mat. Sbornik **93** (1974); trad. anglaise : Math. USSR Sbornik **22** (1974), 372-385.

[Ya2] V. I. Yanchevskiĭ, Les sous-groupes de commutateurs des algèbres simples centrales à norme réduite surjective, Doklady Akad. Nauk S.S.S.R. **221** (1975) 1056-1058; trad. anglaise : Soviet Mat. Doklady **16** (1975), 492-495.