

PRINCIPE DE HASSE POUR LES HYPERSURFACES CUBIQUES LISSES DANS LE CAS FONCTIONNEL

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE ET OLIVIER WITTENBERG

RÉSUMÉ. La résolution finale du problème de Cassels et Swinnerton-Dyer pour les surfaces cubiques sur un corps quelconque, par deux méthodes indépendantes élaborées avec l'aide de modèles de langage, vient d'être annoncée par Alexeev et Schreieder [2]. Cette note enregistre deux corollaires. Soit k un corps global de caractéristique strictement positive différente de 3. En utilisant un théorème de Zhiyu Tian (2025), on montre que pour les surfaces cubiques lisses sur k l'obstruction de Brauer–Manin à l'existence d'un point rationnel est la seule obstruction. On en déduit le principe de Hasse pour les points rationnels des hypersurfaces cubiques lisses de dimension au moins 3 sur k . Ce dernier résultat n'était pas connu en dimension 3.

1. LE CONTEXTE

Soit k un corps global, c'est-à-dire un corps de nombres ou un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini. Pour v une place de k , on note k_v le complété. Pour X une k -variété, on note $X(k)$ l'ensemble de ses points rationnels, contenu diagonalement dans son espace des adèles $X(\mathbf{A}_k)$. Si X est projective, on a simplement $X(\mathbf{A}_k) = \prod_v X(k_v)$. On note $X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}} \subset X(\mathbf{A}_k)$ l'ensemble de Brauer-Manin, c'est-à-dire l'orthogonal de $X(\mathbf{A}_k)$ pour l'accouplement de Manin avec le groupe de Brauer $\text{Br}(X)$:

$$X(\mathbf{A}_k) \times \text{Br}(X) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

On a $X(k) \subset X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}}$.

On a les *conjectures* suivantes, cas particuliers de conjectures générales (voir les rapports [25, 7]) sur l'arithmétique des variétés rationnellement connexes.

- (i) Soit $X \subset \mathbf{P}_k^3$ une surface cubique lisse. Si l'ensemble de Brauer-Manin $X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}}$ est non vide, alors $X(k)$ est non vide.
- (ii) Soit $X \subset \mathbf{P}_k^n$, $n \geq 4$, une hypersurface cubique lisse. Si l'ensemble $X(\mathbf{A}_k)$ est non vide, alors $X(k)$ est non vide.

Date: 16 septembre 2026.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 11G35 ; 14G12, 11D25, 14G05.

Ces deux conjectures ont été beaucoup discutées, des résultats partiels et parfois conditionnels ont été obtenus, par exemple pour les hypersurfaces cubiques diagonales. Citons ici :

(a) Pour $k = \mathbf{Q}$ le corps des rationnels, l'énoncé (ii) est un théorème de R. Heath-Brown (1983) pour $n \geq 9$ (dans ce cas $X(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$ est toujours non vide, l'énoncé est simplement $X(\mathbf{Q}) \neq \emptyset$), et un théorème de C. Hooley (1988) pour $n = 8$. Le résultat de Heath-Brown fut étendu à tous les corps de nombres par Browning et Vishe [3]. Ces articles utilisent la méthode du cercle de Hardy et Littlewood.

(b) Pour $k = \mathbf{F}(C)$ le corps des fonctions d'une courbe sur un corps fini de caractéristique $p \geq 7$, Zhiyu Tian [23] a établi l'énoncé (ii) lorsque $n \geq 5$. Cet article utilise des techniques de déformation venant de la théorie des variétés rationnellement connexes. Le résultat pour $k = \mathbf{F}(\mathbf{P}^1)$ de caractéristique $p \geq 5$, avec $n \geq 7$ avait été obtenu par une version de la méthode du cercle dans [4].

(c) Pour k un corps de nombres, une méthode de fibration utilisée dans l'étude du principe de Hasse en famille [21, 17] montre que la conjecture (ii) suit de la validité de la conjecture (i) pour toute surface cubique lisse (D. Harari [17, Prop. 5.2.2]).

2. LES SURFACES CUBIQUES

Théorème 2.1. *Soit k un corps global de caractéristique $p > 0$, c'est-à-dire un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini. Soit $X \subset \mathbf{P}_k^3$ une surface cubique lisse sur k . Supposons p différent de 3. S'il existe un élément de $X(\mathbf{A}_k)$ orthogonal à la torsion 3-primaire du groupe de Brauer de X , alors $X(k)$ est non vide.*

Démonstration. Par des méthodes motiviques élaborées, combinées avec le travail géométrique [19], pour toute surface projective lisse géométriquement rationnelle sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini, Zhiyu Tian [24] a établi un analogue de cet énoncé pour les zéro-cycles de degré 1. Les surfaces cubiques projectives et lisses sont géométriquement rationnelles. Pour une surface cubique X sur k comme ci-dessus, pour $\ell = 3$, le théorème 1.4 de [24] (via son application à la conjecture 1.2 de [24]) implique immédiatement : s'il existe un point dans $X(\mathbf{A}_k)$ qui est orthogonal à la torsion 3-primaire du groupe de Brauer, alors il existe un zéro-cycle sur X de degré premier à 3, et donc il existe un point fermé de degré premier à 3. La conjecture de Cassels–Swinnerton-Dyer, maintenant établie pour les surfaces cubiques lisses sur un corps k quelconque par la combinaison des travaux de Coray (1976), Ma (2021), Voisin (2026) et du travail [2] de Alexeev et Schreieder, donne alors l'existence d'un point rationnel sur X . $\square$

Remarques 2.2. (i) Comme $\mathrm{Br}(k)$ est divisible, il revient au même de demander, dans le théorème 2.1, l'orthogonalité à la torsion 3-primaire de $\mathrm{Br}(X)$ ou l'orthogonalité à la torsion 3-primaire de $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$.

(ii) Des cas particuliers du théorème 2.1 avaient été établis dans [9, Theorem 3] et dans [6, Chap. 3].

(iii) L'analogie du théorème 2.1 pour les intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^4$ sur un corps global k de caractéristique $p \geq 3$ est [24, Theorem 1.5].

(iv) On peut s'étonner que seule la torsion 3-primaire du groupe de Brauer joue un rôle. Rappelons à ce sujet deux résultats de Swinnerton-Dyer [22]. Soit X une surface cubique lisse sur un corps de nombres k . Le groupe $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est annulé par 6. Par ailleurs, si $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ contient un élément d'ordre 2, alors, sur une extension K/k de degré au plus 2, la surface X_K est l'éclatée d'une surface de Severi–Brauer sur K . Ceci implique le principe de Hasse pour les points rationnels sur X [22, Corollary 1].

Corollaire 2.3. *Soit k un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini de caractéristique $p \neq 3$. Soit $X \subset \mathbf{P}_k^3$ une surface cubique lisse sur k . Si le sous-groupe de 3-torsion de $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est nul, alors le principe de Hasse vaut pour les points rationnels de X .*

3. LES HYPERSURFACES CUBIQUES

Comme mentionné ci-dessus, le théorème suivant avait été obtenu pour $n \geq 5$ et $p \geq 7$, par une autre méthode, par Zhiyu Tian [23].

Théorème 3.1. *Soit k un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini de caractéristique $p \neq 3$. Le principe de Hasse vaut pour les points rationnels des hypersurfaces cubiques lisses $X \subset \mathbf{P}_k^n$ avec $n \geq 4$.*

Preuve du théorème 3.1 dans le cas $n = 4$. Soit $X \subset \mathbf{P}_k^4$ une hypersurface cubique lisse. La variété des droites $F(X)$ de X est une surface lisse et géométriquement irréductible (voir [1, Proposition 1.23]). Soit

$$D \subset F(X) \times (\mathbf{P}_k^4)^* \quad (\text{resp. } Y \subset X \times (\mathbf{P}_k^4)^*)$$

la sous-variété fermée paramétrant les couples (d, h) (resp. (x, h)) formés d'une droite $d \subset X$ (resp. d'un point $x \in X$) et d'un hyperplan $h \subset \mathbf{P}^4$ tels que $d \subset h$ (resp. tels que $x \in h$). Les projections $D \rightarrow F(X)$ et $Y \rightarrow X$ sont des fibrés projectifs, par conséquent D et Y sont des variétés lisses et géométriquement irréductibles.

Si une section hyperplane de $X_{\bar{k}}$ n'était pas intègre, elle contiendrait, comme toute surface cubique qui n'est pas intègre, un plan; l'hypersurface $X_{\bar{k}}$ contiendrait ainsi elle-même un plan, ce qui contredirait sa lissité [18, Remark 3.3]. Toutes les fibres de la projection $q : Y \rightarrow (\mathbf{P}_k^4)^*$ sont donc des surfaces cubiques géométriquement intègres. Ces fibres ayant toutes la même dimension et Y étant lisse, le morphisme q est plat (voir [16, Proposition 15.4.2]). La restriction de q à l'ouvert $Y^0 \subset Y$ des points en lesquels q est lisse est donc surjective.

De ces observations, du lemme de Hensel et des estimations de Lang–Weil–Nisnevich, il résulte que l'application $Y^0(k_v) \rightarrow (\mathbf{P}^4)^*(k_v)$ induite par q

est surjective pour toute place v de k hors d'un ensemble fini S . (Cette implication remonte à [8]. Pour une preuve détaillée, on pourra se référer à [11, Lemma 2.10], dont les arguments fonctionnent *verbatim* sur un corps global de caractéristique $p > 0$.)

Pour démontrer que X satisfait au principe de Hasse, supposons que $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v de k . Il s'ensuit que $Y^0(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v de k . Pour $v \in S$, fixons $y_v \in Y^0(k_v)$.

La projection $D \rightarrow (\mathbf{P}_k^4)^*$ est génériquement étale (voir [10, Theorem 2.9]). Une fibre géométrique lisse consiste en 27 points correspondant aux 27 droites de la surface cubique définie par section hyperplane.

D'après le théorème d'irréductibilité de Hilbert (voir [12, Corollary A.2]), il existe donc $b \in (\mathbf{P}^4)^*(k)$ arbitrairement proche de $q(y_v)$ pour $v \in S$ et tel que la fibre de la projection $D \rightarrow (\mathbf{P}_k^4)^*$ en b soit étale et irréductible et que la fibre $Y_b = q^{-1}(b)$ soit lisse. Par le théorème des fonctions implicites, si b a été choisi suffisamment proche de $q(y_v)$ pour $v \in S$, on peut supposer que $Y_b(k_v) \neq \emptyset$ pour $v \in S$. Compte tenu de la définition de S , on a donc $Y_b(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v de k .

Ainsi Y_b est une surface cubique lisse sur k possédant des points dans tous les complétés de k et telle que, si k^s désigne une clôture séparable de k , le groupe $\text{Gal}(k^s/k)$ agit transitivement sur l'ensemble des 27 droites contenues dans $(Y_b)_{k^s}$. Comme indiqué dans [13, Remark 2.6], il résulte alors de [20, Proposition 31.3] que $H^1(k, \text{Pic}((Y_b)_{k^s}))$ est nul—le point étant que l'image de l'endomorphisme de $\text{Pic}(Y_b)_{k^s}$ noté N dans *loc. cit.* est de rang 1, engendré par la somme des classes des 27 droites. La suite spectrale de Hochschild–Serre permet d'en déduire que l'application naturelle

$$(3.1) \quad \text{Br}(k) \rightarrow \text{Ker}(\text{Br}(Y_b) \rightarrow \text{Br}((Y_b)_{k^s}))$$

est surjective. D'après [5], la surface Y_b est k^s -rationnelle ; la surjectivité de (3.1) équivaut donc à celle de l'application naturelle $\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(Y_b)$ (voir [15, Corollaire 7.5] et [14, Theorem 2]).

Vu le corollaire 2.3, on conclut que l'on a $Y_b(k) \neq \emptyset$, et donc $X(k) \neq \emptyset$. $\square$

Preuve du théorème 3.1 dans le cas $n > 4$. On procède par récurrence sur n en suivant la même preuve exactement que dans le cas $n = 4$, à ceci près que l'on ignore toutes les considérations portant sur $F(X)$ et D et que l'on remplace le corollaire 2.3 par l'hypothèse de récurrence. $\square$

Remarques 3.2. (i) Dans le cas fonctionnel, la rédaction de l'analogue des résultats généraux de [17] sur les corps de nombres n'a pas encore été faite. C'est pourquoi la preuve ci-dessus exploite des simplifications spécifiques aux hypersurfaces cubiques en lieu et place d'un analogue de [17, Théorème 4.2.1].

(ii) Pour les intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^n$, $n \geq 5$, sur un corps global k de caractéristique $p > 2$, le principe de Hasse a été établi par Zhiyu Tian [23, Theorem 1.1 (3)].

REMERCIEMENTS

Nous remercions Valery Alexeev et Stefan Schreieder de nous avoir communiqué des versions préliminaires de [2].

DÉCLARATION

Les idées et démonstrations de la présente courte note sont le produit de la pensée humaine pure.

RÉFÉRENCES

- [1] A. B. Altman, S. L. Kleiman, Foundations of the theory of Fano schemes, *Compos. Math.* **34**, 3–47 (1977).
- [2] V. Alexeev, S. Schreieder, Two proofs of the Cassels–Swinnerton-Dyer conjecture for cubic surfaces, <https://arxiv.org/abs/2609.15930>.
- [3] T. D. Browning, P. Vishe, Cubic hypersurfaces and a version of the circle method for number fields, *Duke Math. J.* **163** (2014), 1825–1883.
- [4] T. D. Browning, P. Vishe, Rational points on cubic hypersurfaces over $\mathbf{F}_q(t)$, *Geom. Funct. Anal.* Vol. **25** (2015), 671–732.
- [5] K. R. Coombes, Every rational surface is separably split, *Comment. Math. Helv.* **63**, No. 2 (1988), 305–311.
- [6] J.-L. Colliot-Thélène, Points rationnels sur les fibrations, in *Higher Dimensional Varieties and Rational Points*, Bolyai Society Mathematical Series, vol. 12, Springer-Verlag, 2003, édité par K. J. Böröczky, J. Kollár et T. Szamuely, 171–221.
- [7] J.-L. Colliot-Thélène, Une liste de problèmes, *Mathematics Going Forward*, Springer, LNM **2313** (2023), 7–28.
- [8] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, Sir Peter Swinnerton-Dyer, Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces. I, *J. reine angew. Math.* **373**, 37–107 (1987).
- [9] J.-L. Colliot-Thélène, Sir Peter Swinnerton-Dyer, Zero-cycles and rational points on some surfaces over a global function field, *Acta Arith.* **155** (2012), 63–70.
- [10] O. Debarre, On the geometry of hypersurfaces of low degrees in the projective space, H. Mourtada (éd.) et al., *Algebraic geometry and number theory. Summer school, Galatasaray University, Istanbul, Turkey, June 2–13, 2014*. Basel : Birkhäuser/Springer. *Progress in Mathematics* **321** (2017), 55–90.
- [11] J. Demeio, S. Streeter, R. Winter, Weak weak approximation and the Hilbert property for degree 2 del Pezzo surfaces, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) **128**, No. 5 (2024), Article ID e12601, 28 p.
- [12] V. Drinfeld, On a conjecture of Deligne, *Mosc. Math. J.* **12**, No. 3 (2012), 515–542.
- [13] A.-S. Elsenhans, J. Jahnel, Experiments with general cubic surfaces, in Tschinkel, Yuri (éd.) et al., *Algebra, arithmetic, and geometry. In honor of Yu. I. Manin on the occasion of his 70th birthday*. Vol. I. Boston, MA : Birkhäuser. *Progress in Mathematics* **269** (2009), 637–653.
- [14] O. Gabber, Some theorems on Azumaya algebras, *Groupe de Brauer, Sémin., Les Plans-sur-Bex 1980*, *Lect. Notes Math.* **844** (1981), 129–209.
- [15] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer. III : Exemples et compléments, *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, *Adv. Stud. Pure Math.* **3** (1968), 88–188.
- [16] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. IV : Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. (Troisième partie)*. Rédigé avec la collaboration de J. Dieudonné, *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **28** (1966), 1–255.

- [17] D. Harari, Méthode des fibrations et obstruction de Manin, *Duke Math. J.* **75** (1994), 221–260.
- [18] D. Huybrechts, The geometry of cubic hypersurfaces, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* **206** (2023). Cambridge : Cambridge University Press, 441 p.
- [19] J. Kollár, Z. Tian, Stable maps of curves and algebraic equivalence of 1-cycles., *Duke Math. J.* **174** (2025), no. 5, 911–947.
- [20] Yu. I. Manin, Cubic forms. Algebra, geometry, arithmetic. Traduit du russe par M. Hazewinkel. 2ème éd., *North-Holland Mathematical Library*, Vol. 4 (1986), Amsterdam-New York-Oxford : North-Holland. X, 326 p.
- [21] A. N. Skorobogatov, On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation, *Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988–1989*, éd. Catherine Goldstein, *Progr. Math.* **91** (1990), Birkhäuser-Boston, 205–214.
- [22] Sir Peter Swinnerton-Dyer, The Brauer group of cubic surfaces, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **113** (1993), 449–460.
- [23] Z. Tian, Hasse principle for three classes of varieties over global function fields, *Duke Math. J.* **166**, no. 17 (2017), 3349–3424.
- [24] Z. Tian, Local-global principle and integral Tate conjecture for certain varieties, *J. Amer. Math. Soc.*, **38**, no. 3 (2025), 703–782.
- [25] O. Wittenberg, Rational points and zero-cycles on rationally connected varieties over number fields, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **97.2** (2018), Amer. Math. Soc., 597–635.

UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY, MATHÉMATIQUES, BÂTIMENT 307, 91405 ORSAY CEDEX,
FRANCE

Email address: `jean-louis.colliot-thelene@universite-paris-saclay.fr`

INSTITUT GALILÉE, UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS NORD, 99 AVENUE JEAN-BAPTISTE
CLÉMENT, 93430 VILLETANEUSE, FRANCE

Email address: `wittenberg@math.univ-paris13.fr`