РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И КАНОНИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ГРУППЫ $\mathbf{PGL}_6$

Ж.-Л. КОЛЬО-ТЕЛЕН, Н. А. КАРПЕНКО, AND А. С. МЕРКУРЬЕВ

Реферат: “Канонической размерностью” алгебраической группы над полем по определению называется максимальная каноническая размерность ее главных однородных пространств. Доказано, что проективная линейная группа $\mathbf{PGL}_6$ над полем нулевой характеристики имеет каноническую размерность 3. Приводятся два различных доказательства, каждое из которых основано на бирациональной классификации рациональных поверхностей над незамкнутым полем. Кроме того, в основе одного из доказательств лежит новый взгляд на поверхности дель Пеццо степени 6.

1. Введение

Пусть F — поле, $\mathcal{C}$ — класс его расширений. Поле $E \in \mathcal{C}$ называется *общим*, если для каждого $L \in \mathcal{C}$ у поля E найдется F-точка со значениями в L.

Пример 1.1. Пусть X — многообразие над F, и пусть $\mathcal{C}_X$ — класс расширений L поля F таких, что $X(L) \neq \emptyset$. Если X — гладкое неприводимое многообразие, то поле $F(X)$ является общим в $\mathcal{C}$ по [8, лемма 4.1].

Канонической размерностью $\operatorname{cdim}(\mathcal{C})$ класса $\mathcal{C}$ называется минимум степени трансцендентности $\operatorname{tr.deg}_F E$ по всем общим полям $E \in \mathcal{C}$. Если X — многообразие над F, то его *каноническая размерность* $\operatorname{cdim}(X)$ определяется как $\operatorname{cdim}(\mathcal{C}_X)$. Если многообразие X — гладкое и неприводимое, то в силу примера 1.1

$$\operatorname{cdim}(X) \leq \dim X. \tag{1}$$

Если многообразие X — гладкое, собственное и неприводимое, то его канонической размерностью является наименьшая размерность замкнутого неприводимого подмногообразия $Y \subset X$, для которого существует рациональное доминантное отображение $X \dashrightarrow Y$. (См. [8, следствие 4.6].)

Пример 1.2. Пусть A — центральная простая F-алгебра степени n, $\mathcal{C}_A$ — класс всех ее расщепляющих полей, X — многообразие Севери–Брауэра $\operatorname{SB}(A)$ ее правых идеалов размерности n. Имеем $\dim X = n-1$. Поскольку

Date: November 24, 2006.

Статья явилась результатом обсуждения во время пешеходной экскурсии в Обервольфахе.

A расщепляется над расширением полей E/F тогда и только тогда, когда $X(E) \neq \emptyset$, то $\mathcal{C}_A = \mathcal{C}_X$ и, следовательно,

$$\operatorname{cdim}(\mathcal{C}_A) = \operatorname{cdim}(X).$$

Пусть A — центральная простая F-алгебра степени $n = q_1 q_2 \dots q_r$, где сомножители q_i — степени различных простых. Запишем A в виде тензорного произведения $A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_r$, где A_i — центральная простая F-алгебра степени q_i. Расширение полей E/F расщепляет A тогда и только тогда, когда E расщепляет A_i для всех i. В силу примера 1.2 многообразия

$$\mathrm{SB}(A) \quad \text{и} \quad Y := \mathrm{SB}(A_1) \times \mathrm{SB}(A_2) \times \dots \times \mathrm{SB}(A_r)$$

имеют одни те же классы расщепляющих полей, откуда

$$\operatorname{cdim} \mathrm{SB}(A) = \operatorname{cdim}(Y) \leq \dim(Y) = \sum_{i=1}^{r} (q_i - 1) \tag{2}$$

в силу неравенства (1).

Представляется правдоподобным, что неравенство в (2) в действительности является равенством. Это доказано в [7, Th. 2.1] (см. также [2, Th. 11.4]) в случае, когда $r = 1$, т.е. когда $\deg(A)$ — степень простого числа.

В настоящей работе мы доказываем это равенство в случае, когда $n = 6$.

Теорема 1.3. *Пусть A — центральная алгебра с делением степени 6 над полем нулевой характеристики. Тогда* $\operatorname{cdim} \mathrm{SB}(A) = 3$.

Доказательство основано на классификации геометрически рациональных поверхностей. Отталкиваясь от нее, мы даем даже два независимых доказательства нашей основной теоремы, каждое из которых, как нам кажется, представляет отдельный интерес. Первое доказательство использует новый подход к поверхностям дель Пеццо степени 6 (см. §4). Второе доказательство основано на систематическом изучении ядра отображения из группы Брауэра поля F в группу Брауэра поля функций геометрически рациональной поверхности над F (см. §5).

Пусть G — алгебраическая группа над F. Ее *канонической размерностью* называется максимум канонической размерности $\operatorname{cdim}(X)$ по всем G-торсерам X над всевозможными расширениями поля F.

Следствие 1.4. *Каноническая размерность группы* $\mathbf{PGL}_6$ *над полем нулевой характеристики равняется* 3.

Доказательство. Классы изоморфизма $\mathbf{PGL}_6$-торсеров над расширением E/F находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами изоморфизма центральных простых E-алгебр степени 6. Кроме того, если торсер X соответствует некоторой алгебре A, то классы расщепляющих полей у X и A совпадают. Следовательно, в силу (2),

$$\operatorname{cdim}(X) = \operatorname{cdim} \mathrm{SB}(A) \leq 3.$$

Для некоторого расширения E/F существует E-алгебра с делением A степени 6. Из теоремы 1.3 вытекает, что $\operatorname{cdim}\mathrm{SB}(A) = 3$ и, следовательно, $\operatorname{cdim}(\mathbf{PGL}_6) = 3$. $\square$

Замечание 1.5. Ввиду результатов Берюи и Райхштейна [2, замечание 13.2] и Зайнуллина [19], следствие 1.4 завершает классификацию простых групп канонической размерности 2 в нулевой характеристике. Это группы $\mathbf{SL}_{3m}/\boldsymbol{\mu}_3$, где m взаимно просто с 3.

Пусть F — поле, $\overline{F}$ — его алгебраическое замыкание. В настоящей статье F-многообразиями, или многообразиями над F, называются отделимые F-схемы конечного типа. Если X есть F-многообразие, то полагаем $\overline{X} = X \times_F \overline{F}$.

Введем следующие обозначения. Если X — многообразие над полем F, то через n_X обозначим его *индекс*, определяемый как наибольший общий делитель степеней $[F(x) : F]$ по всем замкнутым точкам $x \in X$. Если $X \to Y$ есть F-морфизм F-многообразий, то n_X делится на n_Y. Если X — непустое открытое множество гладкого целого квазипроективного F-многообразия Y, то $n_X = n_Y$. (Это можно доказать сведением к случаю кривой.) Таким образом, если X и Y — два гладких, проективных, целых F-многообразия, которые F-бирационально эквивалентны, то $n_X = n_Y$ (ср. [14, замечание 6.6]).

2. Рациональные кривые и поверхности

Нам потребуется следующий результат.

Теорема 2.1. *Пусть X — целое проективное многообразие размерности ≤ 2 над совершенным полем F. Тогда найдутся гладкое целое проективное многообразие X' над F и бирациональный морфизм $X' \to X$.*

В размерности 1 достаточно воспользоваться нормализацией. Современные доказательства в двумерном случае [11, 12, 1] охватывают случай, когда X — произвольная превосходная нетерова двумерная целая схема: в них строится бирациональный морфизм $X' \to X$ с регулярной схемой X'. Регулярная схема конечного типа над совершенным полем F является гладкой над F.

В настоящей статье целое многообразие X над F называется *рациональным* (*унирациональным*), если для некоторого целого n существует бирациональное (соответственно, доминантное) F-рациональное отображение из проективного пространства $\mathbb{P}^n_F$ в X. Геометрически целое F-многообразие X называется *геометрически рациональным* (*геометрически унирациональным*), если для некоторого целого n существует бирациональное (соответственно, доминантное) $\overline{F}$-рациональное отображение из проективного пространства $\mathbb{P}^n_{\overline{F}}$ в $\overline{X}$. Рациональные целые многообразия унирациональны. Две следующие хорошо известные теоремы показывают, что для многообразий малой размерности при необременительных предположениях справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2.2 (Люрот). *Всякая унирациональная целая кривая X над F рациональна, т.е. она бирационально изоморфна $\mathbb{P}^1_F$.*

Теорема 2.3 (Кастельнуово). *Всякая унирациональная целая поверхность X над алгебраически замкнутым полем F нулевой характеристики рациональна, т.е. она бирационально изоморфна $\mathbb{P}^2_F$.*

Доказательство. См. [10, III.2, теорема 2.4, с. 170] или [3]. Предположение о $\operatorname{char}(F)$ является необходимым (ср. [10, с. 171]). Поверхности, заданные уравнением $z^p = f(x,y)$, в характеристике p унирациональны, но в общем случае они не рациональны. □

Следующая теорема восходит к статье Ф. Энриквеса ([5], 1897). В приводимой формулировке ее доказал В. А. Исковских (1980) после работы Ю. И. Манина (1966, 1967). Доказательство этой теоремы в русле идей современной классификационной теории (теорема о конусе) было дано С. Мори (1982).

Если X — гладкое F-многообразие, то обозначим через $K = K_X \in \operatorname{Pic} X$ класс его канонического расслоения.

Гладкое собственное F-многообразие X называется *F-минимальным*, если всякий бирациональный F-морфизм из X в гладкое собственное F-многообразие — изоморфизм. По критерию Кастельнуово гладкая проективная поверхность над совершенным полем F не F-минимальна тогда и только тогда, когда она содержит исключительную кривую первого рода.

Теорема 2.4 (Исковских, Мори). *Пусть X — гладкая, проективная, геометрически целая поверхность над полем F. Предположим, что X геометрически рациональна. В таком случае группа $\operatorname{Pic} X$ — свободная конечного типа. Обозначим ее ранг через ρ. Тогда справедливо одно из следующих трех утверждений:*

(i) *Поверхность X не F-минимальна.*

(ii) *Имеем $\rho = 2$, и X является связкой коник (conic bundle) над гладкой коникой.*

(iii) *Имеем $\rho = 1$, и антиканоническое расслоение $-K_X$ обильно.*

Доказательство. См. [6], [16, теорема 2.7] и [10, гл. III, §2]. Ср. записи лекций [3] (где рассматривается случай нулевой характеристики). □

Гладкие проективные поверхности с обильным антиканоническим расслоением известны как *поверхности дель Пеццо.* Они автоматически являются геометрически рациональными. Пусть X/F — поверхность дель Пеццо, $d = \deg(K_X^2)$. В частности, n_X делит d. Имеем $1 \le d \le 9$. По этому поводу см. [13], [10, гл. III.3] и [3].

Над сепарабельно замкнутым полем F всякая поверхность дель Пеццо либо изоморфна $\mathbb{P}^1 \times_F \mathbb{P}^1$, либо получается из $\mathbb{P}^2$ раздутием конечного множества точек (не более 8 и в общем положении). Группа Пикара плоскости $\mathbb{P}^2$ есть $\mathbb{Z}h$, где h — класс прямой, и $K = -3h$. Группа Пикара поверхности

$\mathbb{P}^1 \times_F \mathbb{P}^1$ есть $\mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$, где e_1 и e_2 — классы двух семейств образующих, и $K = -2e_1 - 2e_2$. Зная поведение канонического класса при раздутии [13, гл. III, предложение 20.10], получаем следующий результат:

Лемма 2.5. *Пусть X/F — поверхность дель Пеццо над сепарабельно замкнутым полем F. Тогда имеет место одна из следующих трех взаимоисключающих возможностей:*
(i) *поверхность X изоморфна $\mathbb{P}^2$;*
(ii) *поверхность X изоморфна $\mathbb{P}^1 \times_F \mathbb{P}^1$;*
(iii) *канонический класс K_X не является нетривиальным кратным никакого элемента группы $\operatorname{Pic} X$.*

3. Редукция к задаче о рациональных поверхностях

Лемма 3.1. *Пусть W — регулярное, собственное, геометрически унирациональное многообразие над полем F характеристики 0. Предположим, что каноническая размерность $\operatorname{cdim}(W) = d \leq 2$. Тогда найдутся геометрически рациональное замкнутое F-подмногообразие $X \subset W$ размерности d и доминантное рациональное отображение $W \dashrightarrow X$.*

Доказательство. По свойству канонической размерности, цитированному в самом начале настоящей работы, найдутся замкнутое неприводимое F-подмногообразие $X \subset W$ размерности d и доминантное рациональное отображение $W \dashrightarrow X$. По предположению, W и, следовательно, X геометрически унирациональны. В силу теорем 2.2 и 2.3 многообразие X геометрически рационально. □

Предложение 3.2. *Пусть A — центральная алгебра с делением степени 6 над полем F нулевой характеристики. Запишем ее в виде тензорного произведения: $A = C \otimes D$, где C и D — центральные простые F-алгебры степени 2 и 3 соответственно. Рассмотрим многообразия Севери–Брауэра $Y = \mathrm{SB}(C)$ и $Z = \mathrm{SB}(D)$, имеющие размерность 1 и 2, соответственно. Предположим, что $\operatorname{cdim}(\mathrm{SB}(\mathrm{A})) \leq 2$. Тогда существует геометрически неприводимая гладкая проективная F-поверхность X такая, что*
(i) *поверхность X F-минимальна;*
(ii) *n_X делится на 6;*
(iii) *поверхность X имеет рациональную точку над $F(Y \times_F Z)$;*
(iv) *$Y \times_F Z$ имеет рациональную точку над $F(X)$.*

Доказательство. Поскольку

$$\operatorname{cdim}(Y \times_F Z) = \operatorname{cdim}(\mathrm{SB}(\mathrm{A})) \leq 2,$$

то, в силу леммы 3.1, найдутся геометрически рациональное замкнутое F-подмногообразие $X_1 \subset Y \times Z$ размерности ≤ 2 и доминантное рациональное отображение $Y \times_F Z \dashrightarrow X_1$. В силу теоремы 2.1 существует бирациональный F-морфизм $X_2 \to X_1$, где X_2 — гладкое и проективное.

Заметим, что поскольку A — алгебра с делением, то $n_{Y\times Z} = 6$. Поскольку имеются F-морфизмы

$$X_2 \to X_1 \to Y \times_F Z,$$

то n_{X_1} и n_{X_2} делятся на 6. Существует доминантное рациональное отображение $Y \times_F Z \dashrightarrow X_2$.

Допустим, что $\dim X_2 = 1$, т.е. X_2 — геометрически рациональная кривая. Тогда X_2 — коника (скрученная форма проективной прямой), и n_{X_2} делит 2, противоречие.

Следовательно, X_2 — поверхность. Пусть $X_2 \to X$ — бирациональный F-морфизм, где X есть F-минимальная гладкая проективная поверхность. Поскольку обе поверхности X_2 и X — гладкие проективные, то $n_X = n_{X_2}$. □

4. Поверхности дель Пеццо степени 6

В этом параграфе через F обозначено произвольное поле.

Сначала напомним несколько фактов о поверхностях дель Пеццо степени 6. За предварительными сведениями и доказательствами мы отсылаем читателя к книге [13].

Сначала предположим, что поле F алгебраически замкнуто. Тогда поверхность дель Пеццо степени 6 получается из $\mathbb{P}^2$ раздутием трех неколлинеарных точек. Поскольку $\mathbf{PGL}_3$ транзитивно действует в множестве троек неколлинеарных точек в $\mathbb{P}^2$, то все поверхности дель Пеццо степени 6 изоморфны. Пример конкретной модели дает поверхность S в $\mathbb{P}^2 \times_F \mathbb{P}^2$, заданная в биоднородных координатах $[x_0 : x_1 : x_2;\ y_0 : y_1 : y_2]$ системой биоднородных уравнений $x_0y_0 = x_1y_1 = x_2y_2$. Проектируя S на любой из сомножителей $\mathbb{P}^2$, мы отождествляем S с результатом раздутия плоскости $\mathbb{P}^2$ в трех точках $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$ и $[0 : 0 : 1]$. На S имеются 6 прямых (исключительных кривых первого рода): прообразы E_1, E_2, E_3 указанных трех точек на первом $\mathbb{P}^2$ и прообразы F_1, F_2, F_3 тех же точек на втором $\mathbb{P}^2$. Конфигурация этих прямых представляет собой конфигурацию сторон (правильного) шестиугольника: кривые E_i попарно дизъюнктны, кривые F_i попарно дизъюнктны, и $(E_i.F_j) = 1$, если $i \neq j$, а $(E_i.F_i) = 0$.

Тор $T = (\mathbb{G}_m)^3/\mathbb{G}_m$ над F, где $\mathbb{G}_m$ диагонально вложено в $(\mathbb{G}_m)^3$, действует в $\mathbb{P}^2 \times_F \mathbb{P}^2$ следующим образом: (t_0, t_1, t_2) переводит

$$[x_0 : x_1 : x_2;\ y_0 : y_1 : y_2]$$

в

$$[t_0x_0 : t_1x_1 : t_2x_2;\ t_0^{-1}y_0 : t_1^{-1}y_1 : t_2^{-1}y_2].$$

Это действие индуцирует действие в $S \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Тор T переводит каждую прямую в нее же саму. Его действие в дополнении U шести прямых в S является эффективным и транзитивным. Если отождествить U с T при помощи выбора рациональной точки в U, то многообразие S с открытым множеством $U = T$ имеет структуру торического многообразия. Симметрическая группа $S_2 = \mathbb{Z}/2$ действует в $S \subset \mathbb{P}^2 \times_F \mathbb{P}^2$ перестановкой сомножителей. Это действие глобально сохраняет прямые, образующая группы S_2 индуцирует на шестиугольнике прямых перестановку прямых E_i и F_i для каждого i, т.е. противоположные стороны шестиугольника меняются местами. Группа S_3 действует в $S \subset \mathbb{P}^2 \times_F \mathbb{P}^2$ одновременной перестановкой на каждом сомножителе. Это действие глобально сохраняет прямые. Действия групп S_2 и S_3 коммутируют. Индуцированное действие группы $H := S_2 \times S_3$ на шестиугольнике прямых реализует группу автоморфизмов шестиугольника.

Пусть группа H действует в $T = (\mathbb{G}_m)^3/\mathbb{G}_m$ таким образом, что образующая группы S_2 переводит $t \in T$ в t^{-1}, а S_3 действует в T перестановкой сомножителей. Пусть T' — полупрямое произведение групп T и H по отношению к этому действию. Вышеуказанная конструкция задает изоморфизм из T' в алгебраическую группу $\mathbf{Aut}(S)$ автоморфизмов поверхности S. Действительно, всякий элемент $\sigma \in \mathbf{Aut}(S)$ можно умножить на элемент группы H так, чтобы действие на шестиугольнике стало тривиальным. В силу общих свойств раздутий отсюда следует, что каждая проекция $S \to \mathbb{P}^2$ "пропускается" через стягивание $S \to \mathbb{P}^2$, т.е. приходит из автоморфизма плоскости $\mathbb{P}^2$, оставляющего каждую из трех точек $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$ и $[0 : 0 : 1]$ неподвижной. Всякий такой автоморфизм задается некоторым элементом группы T.

Пусть теперь F — произвольное поле, а S — поверхность дель Пеццо степени 6 над F. Над сепарабельным замыканием $\overline{F}$ поля F поверхность дель Пеццо $\overline{S} = S \times_F \overline{F}$ расщепляется, т.е. изоморфна вышеописанной модели (см. [4]). Поскольку указанные 6 прямых глобально стабильны относительно действия группы Галуа, то существует открытое по Зарискому множество $U \subset X$, дополнение которого над $\overline{F}$ состоит из 6 прямых. Действие Галуа на 6 прямых индуцирует автоморфизм шестиугольника прямых и, следовательно, некоторый гомоморфизм

$$\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to H = S_2 \times S_3.$$

Таким образом у нас имеются ассоциированные этальное квадратичное расширение K/F и этальное кубическое расширение L/F. Пусть T — связная компонента единицы в F-группе $\mathbf{Aut}(S)$. Тогда T — алгебраический тор, а U — главное однородное пространство над T, поскольку это так над $\overline{F}$. Группа связных компонент группы $\mathbf{Aut}(S)$ представляет собой скрученную форму $S_2 \times S_3$: это — F-группа автоморфизмов конечной F-схемы, ассоциированной с конфигурацией 6 прямых на $\overline{F}$. Мы предъявим F-тор T ниже (см. замечание 4.4).

Пусть K — этальная квадратичная F-алгебра, а B — K-алгебра Адзумая ранга 9 над K с унитарной инволюцией τ, тривиальной на F. (См. [9, §2.B].) Таким образом, B — центральная простая K-алгебра размерности 9, если K — поле, или B изоморфна произведению $A \times A^{\mathrm{op}}$, где A —

центральная простая F-алгебра размерности 9, а A^{op} — противоположная алгебра, в случае, если $K \simeq F \times F$.

Рассмотрим девятимерное F-подпространство τ-симметричных элементов:

$$\mathrm{Sym}(B,\tau) = \{b \in B \mid \tau(b) = b\}.$$

Лемма 4.1. *Пусть $I \subset B$ — правый идеал ранга 3 над K. Тогда F-подпространство*

$$\bigl(I \cdot \tau I\bigr) \cap \mathrm{Sym}(B,\tau) \subset \mathrm{Sym}(B,\tau)$$

одномерно. Соответствие

$$I \mapsto \bigl(I \cdot \tau I\bigr) \cap \mathrm{Sym}(B,\tau)$$

индуцирует замкнутое вложение многообразий

$$s_{B,\tau} : R_{K/F}\,\mathrm{SB}(B) \to \mathbb{P}\bigl(\mathrm{Sym}(B,\tau)\bigr).$$

Доказательство. Достаточно доказать лемму в расщепимом случае, т.е. когда

$$B = \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V^*),$$

где V — трехмерное векторное пространство над F, а τ — перестановочная инволюция: $\tau(f, g^*) = (g, f^*)$ для всех $f, g \in \mathrm{End}(V)$ (ср. [9, предложение 2.14]). Мы отождествляем $\mathrm{Sym}(B,\tau)$ и $\mathrm{End}(V)$ посредством вложения $f \mapsto (f, f^*)$ в B.

Всякий правый идеал I в B ранга 3 над $K = F \times F$ имеет вид

$$I = \mathrm{Hom}(V, U) \times \mathrm{Hom}(V^*, W^*),$$

где U и W — одномерные подпространство и факторпространство пространства V, соответственно. Имеем

$$\tau I = \mathrm{Hom}(W, V) \times \mathrm{Hom}(U^*, V^*)$$

и

$$I \cdot \tau I = \mathrm{Hom}(W, U) \times \mathrm{Hom}(U^*, W^*).$$

Следовательно, F-пространство

$$\bigl(I \cdot \tau I\bigr) \cap \mathrm{Sym}(B,\tau) = \mathrm{Hom}(W, U)$$

одномерно. Отождествляя $R_{K/F}\,\mathrm{SB}(B)$ и $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$, мы видим, что морфизм $s_{B,\tau}$ переводит пару прямых (U, W^*) в $\mathrm{Hom}(W, U) = U \otimes W^*$, т.е. $s_{B,\tau}$ есть не что иное, как замкнутое вложение Сегре

$$\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*) \to \mathbb{P}(V \otimes V^*) = \mathbb{P}(\mathrm{End}(V)). \qquad \square$$

Пусть $\mathrm{Trd} : B \to K$ — приведенный след линейной формы. Для любых $x, y \in \mathrm{Sym}(B,\tau)$ имеет место равенство

$$\tau\,\mathrm{Trd}(xy) = \mathrm{Trd}(\tau(xy)) = \mathrm{Trd}(\tau(y)\tau(x)) = \mathrm{Trd}(yx) = \mathrm{Trd}(xy),$$

откуда $\mathrm{Trd}(xy) \in F$. Таким образом, на $\mathrm{Sym}(B,\tau)$ возникает F-билинейная форма $\mathfrak{b}(x, y) = \mathrm{Trd}(xy)$. Она невырожденна, поскольку она невырождена над $\overline{F}$.

Пусть L — кубическая этальная F-подалгебра в B, содержащаяся в $\mathrm{Sym}(B,\tau)$. Обозначим через $L^\perp$ ее ортогональное дополнение в $\mathrm{Sym}(B,\tau)$ по отношению к спариванию $\mathfrak{b}$. Поскольку подалгебра L — этальная, то $L \cap L^\perp = 0$. Рассмотрим 7-мерное F-подпространство $F \oplus L^\perp$ в $\mathrm{Sym}(B,\tau)$ и положим

$$S(B,\tau,L) = s_{B,\tau}^{-1}(\mathbb{P}(F \oplus L^\perp)).$$

Таким образом, $S(B,\tau,L)$ — замкнутое подмногообразие в $R_{K/F}\,\mathrm{SB}(B)$ (ср. [17]).

Изоморфизмом между двумя тройками (B,τ,L) и (B',τ',L') называется изоморфизм F-алгебр

$$f : B \xrightarrow{\sim} B'$$

такой, что $f \circ \tau = \tau' \circ f$ и $f(L) = L'$. Группа автоморфизмов тройки (B,τ,L) является подгруппой алгебраической группы $\mathbf{Aut}(B,\tau)$.

В силу естественности конструкции схемы $S(B,\tau,L)$ всякий автоморфизм тройки (B,τ,L) индуцирует автоморфизм схемы $S(B,\tau,L)$, т.е. имеется гомоморфизм алгебраических групп

$$\mu : \mathbf{Aut}(B,\tau,L) \to \mathbf{Aut}\big(S(B,\tau,L)\big). \tag{3}$$

Теорема 4.2. *Пусть F — произвольное поле. Пусть B — алгебра Адзумая ранга 9 с унитарной инволюцией τ над квадратичной этальной F-алгеброй K, и пусть L — кубическая этальная F-подалгебра в B, содержащаяся в* $\mathrm{Sym}(B,\tau)$.

(i) *Многообразие $S(B,\tau,L)$ является поверхностью дель Пеццо степени* 6.

(ii) *Всякая поверхность дель Пеццо степени* 6 *над F изоморфна поверхности $S(B,\tau,L)$ для некоторых B, τ и L.*

(iii) *Две поверхности $S(B,\tau,L)$ и $S(B',\tau',L')$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны тройки (B,τ,L) и (B',τ',L').*

(iv) *Гомоморфизм μ — изоморфизм.*

(v) *Этальная квадратичная алгебра K/F и этальная кубическая алгебра L/F естественно изоморфны соответствующим алгебрам, ассоциированным с действием Галуа на прямых в поверхности дель Пеццо $S(B,\tau,L)$ над $\overline{F}$.*

Доказательство. (i): Можно считать, что поле F сепарабельно замкнуто. Мы утверждаем, что всякая тройка (B,τ,L) изоморфна *расщепленной тройке*

$$\big(M_3(F) \times M_3(F), \varepsilon, F^3\big),$$

где:

(1) $\varepsilon(a,b) = (b^t, a^t)$, ($t$ обозначает транспонированую матрицу), в частности, $\mathrm{Sym}\big(M_3(F) \times M_3(F), \varepsilon\big)$ состоит из матриц вида (a, a^t);

(2) F^3 отождествляется с подалгеброй диагональных матриц в $\mathrm{Sym}\big(M_3(F) \times M_3(F), \varepsilon\big)$, т.е. матриц вида (a,a), где матрица a — диагональная;

(3) $K = F \times F \subset M_3(F) \times M_3(F)$ есть очевидное отображение из $F \times F$ в центр алгебры $M_3(F) \times M_3(F)$.

Действительно, поскольку K и B расщепляются, то (B,τ) изоморфно $\big(M_3(F)\times M_3(F),\varepsilon\big)$ в силу [9, предложение 2.14]. Пусть

$$L'\subset M_3(F)\times M_3(F)$$

— образ (расщепимой) этальной кубической подалгебры L при этом изоморфизме. В частности,

$$(B,\tau,L)\simeq\big(M_3(F)\times M_3(F),\varepsilon,L'\big).$$

Любая из двух проекций на $M_3(F)$ отождествляет L' с расщепимой этальной кубической подалгеброй в $M_3(F)$. Всякие две расщепимые этальные кубические подалгебры в $M_3(F)$ сопряжены, т.е. существует $a\in M_3(F)^\times$ такой, что $aL'a^{-1}=F^3$. Тогда сопряжение при помощи $(a,(a^{-1})^t)$ задает искомый изоморфизм между

$$\big(M_3(F)\times M_3(F),\varepsilon,L'\big)\quad\text{и}\quad\big(M_3(F)\times M_3(F),\varepsilon,F^3\big).$$

Утверждение доказано.

Таким образом, можно считать, что тройка (B,τ,L) — расщепимая. Тогда $F\oplus L^\perp$ есть пространство всех пар (b,b^t), где b — матрица, все диагональные элементы в которой равны. Пусть $[x_0:x_1:x_2;\ y_0:y_1:y_2]$ — проективные координаты в $\mathbb{P}^2\times_F\mathbb{P}^2$. Вложение Сегре $s_{B,\tau}$ переводит $[x_0:x_1:x_2;\ y_0:y_1:y_2]$ в точку в $\mathbb{P}(M_3(F))$, заданную матрицей $(x_iy_j)_{i,j=1,2,3}$. (Здесь мы отождествляем элементы

$$(a,a^t)\in\operatorname{Sym}\big(M_3(F)\times M_3(F),\varepsilon\big)\quad\text{и}\quad a\in M_3(F).)$$

Следовательно, $S(B,\tau,L)$ есть замкнутое подмногообразие в $\mathbb{P}^2\times_F\mathbb{P}^2$, заданное уравнениями $x_0y_0=x_1y_1=x_2y_2$, т.е. расщепимая поверхность дель Пеццо степени 6.

(iv): Можно считать, что F сепарабельно замкнуто и, таким образом, мы оказываемся в расщепимой ситуации из доказательства п. (i). Пусть тор T, полупрямое произведение T' и расщепимая поверхность дель Пеццо S — те же, что в нашем первоначальном обсуждении поверхностей дель Пеццо степени 6. Пусть T' действует в F-алгебре B ее автоморфизмами следующим образом. Группа T действует в B по формуле

$$x(a,b)=(xax^{-1},(x^{-1})^tbx^t),\quad x\in T.$$

Группа S_3 действует в B по той же самой формуле, где, на этот раз, x — мономиальная матрица, соответствующая элементу группы S_3. Образующая группы S_2 переводит пару (a,b) в (b,a). Определяемое таким образом действие группы T' коммутирует с τ и оставляет L неподвижным поэлементно и, следовательно, индуцирует гомоморфизм алгебраических групп $\varphi:T'\to\mathbf{Aut}(B,\tau,L)$. Компонуя φ с гомоморфизмом

$$\mathbf{Aut}(B,\tau,L)\to\mathbf{Aut}(K)\times\mathbf{Aut}(L)=S_2\times S_3,$$

получаем эпиморфизм, совпадающий с гомоморфизмом, описанным в начале параграфа. Мы утверждаем, что φ — изоморфизм. Пусть G — ядро вышеуказанного гомоморфизма. Достаточно показать, что сужение ψ :

$T \to G$ гомоморфизма φ есть изоморфизм. Мы рассматриваем G как подгруппу связной компоненты $\mathbf{Aut}(B,\tau)^+$ единицы в $\mathbf{Aut}(B,\tau)$. Имеется изоморфизм между $\mathbf{PGL}_3$ и $\mathbf{Aut}(B,\tau)^+$, переводящий элемент a в сопряжение при помощи $(a,(a^{-1})^t)$ (ср. [9, §23]). Композиция

$$T \xrightarrow{\psi} G \hookrightarrow \mathbf{Aut}(B,\tau)^+ \xrightarrow{\sim} \mathbf{PGL}_3$$

отождествляет T с максимальным тором $\widetilde{T}$, состоящим из классов диагональных матриц в $\mathbf{PGL}_3$. Образ группы G в $\mathbf{PGL}_3$ совпадает с централизатором тора $\widetilde{T}$ в $\mathbf{PGL}_3$, и, следовательно, равен $\widetilde{T}$. Таким образом, ψ — изоморфизм. Утверждение доказано.

Композиция

$$T' \xrightarrow{\varphi} \mathbf{Aut}(B,\tau,L) \xrightarrow{\mu} \mathbf{Aut}\big(S(B,\tau,L)\big)$$

совпадает с изоморфизмом, описанным при нашем первоначальном обсуждении поверхностей дель Пеццо степени 6. Следовательно, μ — изоморфизм.

(ii) и (iii): По доказательству п. (i) всякая тройка (B,τ,L) над $\overline{F}$ изоморфна расщепленной тройке. Кроме того, всякая поверхность дель Пеццо степени 6 расщепляется над $\overline{F}$. Гомоморфизм μ в (3) есть изоморфизм в силу (iv), откуда требуемые утверждения следуют при помощи стандартных рассуждений из [9, §26].

(v): Этальные алгебры K и L ассоциированы с действием Галуа в множестве 6 минимальных диагональных идемпотентов e_i и f_i алгебры $F^3 \times F^3$ $(i = 1,2,3)$, где e_i (соответственно, f_i) — диагональные идемпотенты в $F^3 \times 0$ (соответственно, в $0 \times F^3$). Требуемое утверждение следует из того, что соответствие $e_i \mapsto E_i$, $f_i \mapsto F_i$ устанавливает изоморфизм между $(S_2 \times S_3)$-множеством минимальных идемпотентов $\{e_1,e_2,e_3,f_1,f_2,f_3\}$ и $(S_2 \times S_3)$-множеством исключительных прямых $\{E_1,E_2,E_3,F_1,F_2,F_3\}$. □

Замечание 4.3. Воспользуемся обозначениями, введенными в начале параграфа. Естественная точная последовательность модулей Галуа

$$0 \to \overline{F}[U]/\overline{F} \to \mathrm{Div}_{\overline{S}\setminus\overline{U}}(\overline{S}) \to \mathrm{Pic}\,\overline{S} \to \mathrm{Pic}\,\overline{U},$$

где $\mathrm{Div}_{\overline{S}\setminus\overline{U}}(\overline{S})$ обозначает группу дивизоров поверхности $\overline{S}$ с носителями, не задевающими $\overline{U}$, а первое отображение есть отображение дивизоров, задает точную последовательность модулей Галуа:

$$0 \to \hat{T} \to \mathbb{Z}[KL/F] \to \mathrm{Pic}\overline{S} \to 0,$$

что задает двумерный F-тор T с группой характеров $\hat{T} = \overline{F}[U]/\overline{F}$. Заметим, что F-многообразие U — главное однородное пространство над T, а 6-мерный модуль Галуа $\mathbb{Z}[KL/F]$ есть пермутационный модуль, построенный на 6 прямых.

Прямые вычисления над $\overline{F}$ показывают, что имеется точная последовательность модулей Галуа

$$0 \to \hat{T} \to \mathbb{Z}[KL/F] \to \mathbb{Z}[L/F] \oplus \mathbb{Z}[K/F] \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Здесь $\mathbb{Z}[L/F]$ — трехмерный пермутационный модуль, построенный на множестве пар противоположных прямых в шестиугольнике, а $\mathbb{Z}[K/F]$ — двумерный пермутационный модуль, построенный на множестве троек непререкрещивающихся прямых в шестиугольнике. Отображение

$$\mathbb{Z}[KL/F] \to \mathbb{Z}[L/F]$$

переводит прямую в содержащую ее пару, а отображение

$$\mathbb{Z}[KL/F] \to \mathbb{Z}[K/F]$$

переводит прямую в содержащую ее тройку. Отображение

$$\mathbb{Z}[L/F] \oplus \mathbb{Z}[K/F] \to \mathbb{Z}$$

есть разность отображений аугментации. Заметим, что этот гомоморфизм Галуа имеет очевидное Галуа-эквивариантное сечение.

Отсюда заключаем, что существуют изоморфизм модулей Галуа

$$\operatorname{Pic} \overline{S} \oplus \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}[L/F] \oplus \mathbb{Z}[K/F]$$

и точная расщепляющаяся последовательность F-торов

$$1 \to \mathbb{G}_{m,F} \to R_{L/F}\mathbb{G}_m \times R_{K/F}\mathbb{G}_m \to R_{KL/F}\mathbb{G}_m \to T \to 1.$$

Переходя к F-точкам и пользуясь теоремой Гильберта 90, заключаем, что $T(F)$ есть факторгруппа группы (KL) по подгруппе, порожденной K и L. Кроме того, ясно, что F-тор T стабильно рационален. Точнее,

$$T \times_F R_{K/F}\mathbb{G}_m \times_F R_{L/F}\mathbb{G}_m \quad \text{и} \quad \mathbb{G}_{m,F} \times_F R_{KL/F}\mathbb{G}_m$$

F-бирационально эквивалентны. В действительности F-тор T рационален. (Как доказал Воскресенский, все двумерные торы рациональны.)

Замечание 4.4. Из доказательства теоремы 4.2 следует, что T — максимальный F-тор связной компоненты единицы $\mathbf{Aut}(B,\tau)^+$ группы автоморфизмов пары (B,τ). В силу [9, §23] группа F-точек в $\mathbf{Aut}(B,\tau)^+$ совпадает с

$$\{b \in B^\times \mid b \cdot \tau(b) \in F^\times\}/K^\times.$$

Отсюда следует, что

$$T(F) = \{x \in (KL)^\times \mid N_{KL/L}(x) \in F^\times\}/K^\times.$$

Мы предоставляем читателю сравнить это описание с описанием, предъявленным в предыдущем замечании.

Замечание 4.5. Пусть квадратичная алгебра K расщепляется, т.е. $K = F \times F$, $B = A \times A^{\mathrm{op}}$, где A — центральная простая F-алгебра размерности 9, а τ — инволюция, меняющая местами координаты. Тогда поверхность $S(B,\tau,L)$ есть замкнутое подмногообразие в $\mathrm{SB}(A) \times_F \mathrm{SB}(A^{\mathrm{op}})$, а проекция

$$S(B,\tau,L) \to \mathrm{SB}(A)$$

— раздутие вдоль замкнутого подмногообразия в $\mathrm{SB}(A)$, изоморфного $\operatorname{Spec} L$. В частности, поверхность $S(B,\tau,L)$ не минимальна.

Лемма 4.6. *Пусть $S = S(B, \tau, L)$ — поверхность дель Пеццо степени 6. Тогда*

(i) *Если $n_S = 6$, то K и K-алгебра B не расщепляются.*

(ii) *Если $S(F) \neq \emptyset$, то K-алгебра B расщепляется.*

Доказательство. Если K расщепляется, то $n_S \leq 3$ в силу замечания 4.5. В силу того же замечания если B расщепляется, то S имеет рациональную точку над K, и, следовательно, $n_S \leq 2$. Наконец, если S имеет рациональную точку, то же верно и для $R_{K/F}\,\mathrm{SB}(B)$, поскольку S — замкнутое подмногообразие в $R_{K/F}\,\mathrm{SB}(B)$, и, следовательно, B расщепляется. □

Теперь мы в состоянии дать наше *первое доказательство теоремы* 1.3. Воспользуемся обозначениями предложения 3.2.

Из теоремы 2.4 следует, что X есть либо связка коник над гладкой коникой, либо поверхность дель Пеццо степени $d = 1, \ldots, 9$. В первом случае X имеет рациональную точку над расширением поля F степени, делящей 4, и, следовательно, n_X делит 4, противоречие. В последнем случае имеем $6 \,|\, n_X \,|\, d$, т.е. $d = 6$, и X представляет собой поверхность дель Пеццо степени 6.

Из теоремы 4.2 следует, что

$$X = S(B, \tau, L),$$

где B — алгебра Адзумая ранга 9 с унитарной инволюцией τ над квадратичной этальной F-алгеброй K, а L — кубическая этальная F-подалгебра алгебры B, содержащаяся в $\mathrm{Sym}(B, \tau)$. Из п. (i) леммы 4.6 следует, что K и B не расщепляются. Из п. (iii) предложения 3.2 и п. (ii) леммы 4.6 следует, что $K(Y \times_F Z)$-алгебра

$$B \otimes_K K(Y \times_F Z)$$

расщепляется. Расширение $K(Y \times_F Z)/K(Z)$ есть поле функций коники над $K(Z)$, а $B \otimes_K K(Z)$ — алгебра степени 3 над $K(Z)$, следовательно, $B \otimes_K K(Z)$ также расщепляется. В силу теоремы Шатле (см. ниже) нерасщепимая K-алгебра B подобна D_K или $D_K^{\otimes 2}$. Поскольку B снабжена инволюцией второго рода, то $\mathrm{cor}_{K/F}([B]) = 0$ в силу [9, теорема 3.1]. Из того, что

$$2[D] = \mathrm{cor}_{K/F}([B]),$$

заключаем, что D и, следовательно, B расщепляется, противоречие.

5. Расщепляющие свойства геометрически рациональных многообразий канонической размерности не более 2

В этом параграфе мы изучаем ядро естественного гомоморфизма групп Брауэра $\mathrm{Br}\,F \to \mathrm{Br}\,F(X)$ в случае, когда X — геометрически унирациональное гладкое многообразие канонической размерности ≤ 2.

Напомним следующий хорошо известный результат:

Предложение 5.1. *Пусть F — поле, $\overline{F}$ — его сепарабальное замыкание, $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ — абсолютная группа Галуа. Пусть X/F — собственное геометрически целое многообразие. Тогда имеется естественная точная последовательность*

$$0 \to \mathrm{Pic}\, X \to (\mathrm{Pic}\, \overline{X})^{\mathfrak{g}} \to \mathrm{Br}\, F \to \mathrm{Br}\, X,$$

где $\mathrm{Br}\, X = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$*. Если, кроме того, многообразие X/F — гладкое, то отображение* $\mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, F(X)$ *инъективно, и мы имеем точную последовательность*

$$0 \to \mathrm{Pic}\, X \to (\mathrm{Pic}\, \overline{X})^{\mathfrak{g}} \to \mathrm{Br}\, F \to \mathrm{Br}\, F(X).$$

Положим
$$\mathrm{Br}(F(X)/F) := \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}\, F \to \mathrm{Br}\, F(X)].$$

Следующий хорошо известный результат принадлежит Ф. Шатле. В размерности 1, т.е. в случае, когда A — кватернионная алгебра, а X — коника, он восходит к Витту.

Предложение 5.2. *Пусть* $X = \mathrm{SB}(A)$ *— многообразие Севери–Брауэра алгебры A. Тогда* $\mathrm{Br}(F(X)/F)$ *есть подгруппа группы* $\mathrm{Br}\, F$*, порожденная классом алгебры A.*

Предложение 5.3. *Пусть F — совершенное поле, X — геометрически рациональная поверхность над F. Тогда имеет место одна из следующих четырех возможностей:*

(i) *Поверхность X F-бирационально эквивалентна поверхности Севери–Брауэра, т.е. представляет собой скрученную форму плоскости $\mathbb{P}^2$. В таком случае группа* $\mathrm{Br}(F(X)/F)$ *равна* 0 *или* $\mathbb{Z}/3$ *и порождается классом центральной простой алгебры степени* 3.

(ii) *Поверхность X F-бирационально эквивалентна скрученной форме поверхности $\mathbb{P}^1 \times_F \mathbb{P}^1$. Тогда группа* $\mathrm{Br}(F(X)/F)$ *равна* 0, $\mathbb{Z}/2$ *(и порождается классом кватернионной или бикватернионной алгебры) или* $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ *(и порождается классами двух кватернионных алгебр).*

(iii) *Поверхность X F-бирационально эквивалентна связке коник над гладкой проективной коникой. Тогда группа* $\mathrm{Br}(F(X)/F)$ *равна* 0, $\mathbb{Z}/2$ *или* $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ *и порождается классами двух кватернионных алгебр.*

(iv) $\mathrm{Br}(F(X)/F) = 0$*, т.е. естественное отображение* $\mathrm{Br}\, F \to \mathrm{Br}\, F(X)$ *инъективно.*

Доказательство. После разрешения особенностей (теорема 2.1) можно считать, что поверхность X — гладкая, проективная и F-минимальная.

Предположим, что X — поверхность Севери–Брауэра $\mathrm{SB}(A)$, ассоциированная с центральной простой F-алгеброй A индекса 3. То, что группа $\mathrm{Br}(F(X)/F)$ равна 0 или $\mathbb{Z}/3$ и порождается классом центральной простой алгебры степени 3, следует из предложения 5.2.

Предположим, что X есть скрученная форма поверхности $\mathbb{P}^1 \times_F \mathbb{P}^1$. Поскольку группа автоморфизмов последней есть полупрямое произведение группы $\mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2$ и циклической группы порядка 2, переставляющей компоненты, то

$$X = R_{K/F}(C),$$

где K/F — этальная квадратичная F-алгебра, а C — коническая кривая над K. Если K — поле, то, используя [15, следствие 2.12], получаем, что

$$\operatorname{Br}\bigl(F(X)/F\bigr) = \operatorname{cor}_{K/F}\bigl(\operatorname{Br}\bigl(K(C)/K\bigr)\bigr).$$

В силу предложения 5.2 группа $\operatorname{Br}\bigl(K(X)/K\bigr)$ порождается классом некоторой кватернионной алгебры над K, и, следовательно, группа $\operatorname{Br}\bigl(F(X)/F\bigr)$ порождается коограничением кватернионной алгебры, представляющим собой 0, кватернионную алгебру, или бикватернионную алгебру.

Если $K = F \times F$, то

$$X = C \times_F C',$$

где C и C' — коники над F. В этом случае $\operatorname{Br}\bigl(F(X)/F\bigr)$ есть факторгруппа группы $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$, порожденная классами кватернионных F-алгебр, ассоциированных с C_1 и C_2.

Пусть X/F — связка коник над коникой Y. Тогда группа $\operatorname{Br}\bigl(F(Y)/F\bigr)$ есть 0 или группа $\mathbb{Z}/2$, порожденная классом кватернионной алгебры Q, ассоциированной с Y, и ядро гомоморфизма

$$\operatorname{Br} F(Y) \to \operatorname{Br} F(X)$$

есть 0 или $\mathbb{Z}/2$. Таким образом, порядок ядра гомоморфизма

$$\operatorname{Br} F \to \operatorname{Br} F(X)$$

делит 4. Пусть A/F — нетривиальная алгебра с делением из $\operatorname{Br}\bigl(F(X)/F\bigr)$, отличная от Q. Достаточно показать, что $\operatorname{Br}\bigl(F(X)/F\bigr)$ содержит кватернионную алгебру с делением, отличную от Q. Индекс алгебры A над полем функций $F(Y)$ не превосходит 2. В силу формулы редукции индекса [18, теорема 1.3] индекс одной из F-алгебр A и $A \otimes_F Q$ не превосходит 2, т.е. одна из этих двух алгебр подобна кватернионной алгебре с делением, отличной от Q.

Если поверхность X не F-изоморфна ни скрученной форме плоскости $\mathbb{P}^2$, ни $\mathbb{P}^1 \times_F \mathbb{P}^1$, ни связке коник над коникой, то, согласно теореме 2.4 и лемме 2.5, X — поверхность дель Пеццо с $\operatorname{Pic} X$ ранга 1 такая, что канонический класс, как элемент группы $\operatorname{Pic} \overline{X}$, не делим в ней. Поскольку коядро естественного отображения

$$\operatorname{Pic} X \to (\operatorname{Pic} \overline{X})^{\mathfrak{g}}$$

состоит из элементов кручения, то группа $(\operatorname{Pic} \overline{X})^{\mathfrak{g}}$ — свободная ранга 1. Следовательно, она порождается каноническим классом, и отображение $\operatorname{Pic} X \to (\operatorname{Pic} \overline{X})^{\mathfrak{g}}$ — изоморфизм. В силу предложения 5.1 отсюда следует, что $\operatorname{Br}(F(X)/F) = 0$. $\square$

Замечание 5.4. Решающую роль в доказательстве этого предложения играют теорема 2.4 и лемма 2.5, но оно не требует обсуждения поверхностей дель Пеццо, отличных от поверхностей Севери–Брауэра и скрученных форм поверхности $\mathbb{P}^1 \times_F \mathbb{P}^1$. Это же замечание относится к нижеприведенным теореме 5.5 и следствию 5.7, и, следовательно, ко *второму доказательству теоремы* 1.3, данному в конце параграфа.

Теорема 5.5. *Пусть W — гладкое, собственное, геометрически унирациональное многообразие над полем F нулевой характеристики.*

(i) *Если* $\operatorname{cdim}(W) = 1$, *то* $\operatorname{Br}\bigl(F(W)/F\bigr)$ *есть* 0 *или* $\mathbb{Z}/2$.

(ii) *Если* $\operatorname{cdim}(W) = 2$, *то*

$$\operatorname{Br}\bigl(F(W)/F\bigr) \in \{0,\ \mathbb{Z}/2,\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,\ \mathbb{Z}/3\}.$$

Ядро порождается кватернионной алгеброй, двумя кватернионными алгебрами, бикватернионной алгеброй или кубической алгеброй.

Доказательство. В силу леммы 3.1 существует замкнутое геометрически рациональное F-подмногообразие $X \subset W$ размерности 1 в случае (i) и размерности 2 в случае (ii). Поскольку группа $\operatorname{Br} W$ инъективно отображается в $\operatorname{Br} F(W)$, то

$$\operatorname{Br}\bigl(F(W)/F\bigr) \subset \operatorname{Br}\bigl(F(X)/F\bigr).$$

Если X имеет размерность 1, то X — гладкая коника. Ядро гомоморфизма $\operatorname{Br} F \to \operatorname{Br} F(X)$ есть 0 или $\mathbb{Z}/2$.

В случае, когда X имеет размерность 2, возможные варианты для группы $\operatorname{Br}\bigl(F(X)/F\bigr)$ были перечислены в предложении 5.3. □

Замечание 5.6. Эта же теорема будет справедлива, если в ней предположить, что многообразие W не обязательно геометрически унирационально, а геометрически рационально связно. Действительно, из обоих предположений следует, что многообразие X геометрически рационально связно. Поскольку X имеет размерность ≤ 2, а $\operatorname{char}(F) = 0$, то X будет геометрически рациональным.

Следствие 5.7. *Пусть W/F — гладкое, собственное, геометрически унирациональное многообразие над полем F нулевой характеристики. Предположим, что* $\operatorname{cdim}(W) \leq 2$. *Пусть A и A' — центральные F-алгебры с делением. Если существует F-рациональное отображение из W в произведение* $\operatorname{SB}(A) \times_F \operatorname{SB}(A')$, *то имеет место одно из двух:*

(1) *A и A' — кубические алгебры, или*

(2) *A и A' — кватернионные или бикватернионные алгебры.*

Доказательство. Если такое рациональное отображение существует, то классы алгебр

$$A \in \operatorname{Ker}[\operatorname{Br} F \to \operatorname{Br} \operatorname{SB}(A)] \quad \text{и} \quad A' \in \operatorname{Ker}[\operatorname{Br} F \to \operatorname{Br} \operatorname{SB}(A')]$$

принадлежат $\operatorname{Br}\bigl(F(W)/F\bigr)$. Теперь требуемый результат следует из теоремы 5.5. □

Замечание 5.8. Следствие 5.7 останется справедливым, если предположить, что многообразие W не обязательно геометрически унирационально, а геометрически рационально связно.

Дадим теперь наше *второе доказательство теоремы* 1.3. Оно не использует материала из §4. Воспользуемся обозначениями предложения 3.2, так что Y (соответственно, Z) — многообразие Севери–Брауэра некоторой кватернионной алгебры (соответственно, алгебры степени 3). Предположим, что $\operatorname{cdim}(\mathrm{SB}(A)) \leq 2$. Тогда и

$$\operatorname{cdim}(Y \times_F Z) \leq 2.$$

Применяя вышеуказанное следствие 5.7 к тождественному отображению многообразия $Y \times_F Z$, получаем противоречие.

Можно также скомбинировать предложения 3.2 и 5.3. Теперь ясно, что здесь мы используем п. (iv) предложения 3.2 вместо того, чтобы использовать п. (iii) того же предложения, как это сделано в нашем *первом доказательстве* теоремы 1.3 (см. конец §4).

Список литературы

[1] M. Artin, *Lipman's proof of resolution of singularities for surfaces*, chap. IX in Arithmetic Geometry, ed. G. Cornell and J. H. Silverman, Springer-Verlag 1986.

[2] G. Berhuy and Z. Reichstein, *On the notion of canonical dimension for algebraic groups*, Advances in Math. **198** (2005), no. 1, 128–171.

[3] J.-L. Colliot-Thélène, Cours à l'IHP en 1999, notes available on the author's homepage http://www.math.u-psud.fr/~colliot/liste-cours-exposes.html

[4] K. R. Coombes, *Every rational surface is separably split*, Comm. Math. Helv. **63** (1988) 305–311.

[5] F. Enriques, *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un' equazione algebrica $f(x, y, z) = 0$ con funzioni razionali di due parametri*, Math. Ann. **49** (1897) 1–23.

[6] В. А. Исковских, *Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями*, Изв. АН СССР **14** (1980) 17–39.

[7] N. A. Karpenko, *On anisotropy of orthogonal involutions*, J. Ramanujan Math. Soc. **15** (2000), no. 1, 1–22.

[8] N. Karpenko and A. Merkurjev, *Canonical p-dimension of algebraic groups*, Advances in Math. **205** (2006) 410–433

[9] M.-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, and J.-P. Tignol, *The book of involutions*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, With a preface in French by J. Tits.

[10] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Bd. 32, Springer Verlag 1996.

[11] J. Lipman, *Introduction to resolution of singularities*, in Proc. of Symp. in Pure Math. **29** (1975) 187–230.

[12] J. Lipman, *Desingularization of two-dimensional schemes*, Ann. of Math. **107** (1978) 151–207.

[13] Yu. I. Manin, *Cubic forms*, 2nd edn., North-Holland 1986.

[14] A. Merkurjev, *Steenrod operations and degree formulas*, J. reine angew. Math. **565** (2003), 13–26.

[15] A. S. Merkurjev and J.-P. Tignol, *The multipliers of similitudes and the Brauer group of homogeneous varieties*, J. reine angew. Math. **461** (1995), 13–47.

[16] S. Mori, *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective*, Ann. of Math. **116** (1982), 133–176.

[17] M. Rost, *Remarks on Jordan algebras (*dim 9*,* deg 3*), cubic surfaces, and del Pezzo surfaces (*deg 6*)*, Preprint, available on the author's homepage http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~rost/ (1996).

[18] A. Schofield and M. Van den Bergh, *The index of a Brauer class on a Brauer–Severi variety*, Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), no. 2, 729–739.

[19] K. Zainoulline, *Canonical p-dimensions of algebraic groups and degrees of basic polynomial invariants*, Bull. London Math. Soc., to appear.

CNRS, Mathématiques, UMR 8628, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay, FRANCE

E-mail address: Jean-Louis.Colliot-Thelene *à* math.u-psud.fr

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, 4, place Jussieu, F-75252 Paris CEDEX 05, FRANCE

E-mail address: karpenko *à* math.jussieu.fr

Department of Mathematics, University of California, Los Angeles, CA 90095-1555, USA

E-mail address: merkurev *at* math.ucla.edu