POINTS FERMÉS SUR LES SURFACES DE DEL PEZZO DE DEGRÉ 4 ET D'INDICE 2

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE ET FEDERICO SCAVIA

RÉSUMÉ. Soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur un corps k. Soit $\rho(X)$ son rang de Picard. Supposons que l'indice de X, c'est-à-dire le pgcd des degrés des points fermés de X, est égal à 2. Alors X possède un point fermé de degré 2 ou 6, résultat qui est optimal d'après des exemples de Creutz et Viray. Si l'on a $\rho(X) \geq 2$, alors X possède un point fermé de degré 2.

Let X be a del Pezzo surface of degree 4 over a field k, and let $\rho(X)$ denote its Picard rank. We prove that if the index of X, that is, the greatest common divisor of the degrees of its closed points, is equal to 2, then X has a closed point of degree 2 or 6. This result is optimal, as shown by examples due to Creutz and Viray. Moreover, if $\rho(X) \geq 2$, then X has a closed point of degree 2.

1. Introduction

Soit k un corps, et soit X une k-variété. L'*indice* de X, noté $\mathrm{ind}(X)$, est le pgcd des degrés des points fermés de X. Il peut être strictement inférieur au plus petit degré d'un point fermé de X, et il est naturel de se demander pour quelles classes de variétés X il existe toujours un point fermé de degré $\mathrm{ind}(X)$. C'est le cas pour les courbes de genre un, par le théorème de Riemann–Roch, et pour les quadriques, par un théorème de Springer. Dans cet article, nous étudions cette question pour les surfaces de del Pezzo de degré 4, c'est-à-dire pour les intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4_k$.

Soit $n \geq 2$ et soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques. En intersectant X avec un plan convenable de $\mathbb{P}^n_k$, on voit que X possède un point fermé de degré 1, 2 ou 4 ; en particulier, $\mathrm{ind}(X)$ divise 4. Par un théorème d'Amer et Brumer (voir [EKM08, Corollary 18.7]), si $\mathrm{ind}(X) = 1$, alors $X(k) \neq \emptyset$. Ainsi, lorsque $\mathrm{ind}(X)$ est égal à 1 ou à 4, la variété X possède un point fermé de degré $\mathrm{ind}(X)$. Le cas restant est l'objet de la question suivante. Lorsque k est un corps de nombres et $n = 4$, elle a été posée par Creutz et Viray.

Date: 29 octobre 2026.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14G05, 14J26, 14C25.

Key words and phrases. Surface de del Pezzo, point fermé, indice, zéro-cycle, construction de Serre, fibration en coniques.

Question 1.1. *Soit k un corps, et soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$, $n \geq 4$, une intersection complète lisse de deux quadriques telle que* $\mathrm{ind}(X) = 2$. *La variété X possède-t-elle un point fermé de degré* 2 *?*

Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$, $n \geq 4$, une intersection complète lisse de deux quadriques. Lorsque k est un corps fini, on a $X(k) \neq \emptyset$ par le théorème de Chevalley–Warning. Lorsque k est un corps de nombres, l'indice de X divise 2 [CV23, Theorem 1.1] ; sur des corps convenables, il existe des exemples d'indice 4 [CV23, Theorem 7.6, Remark 7.8(4)(5)]. La question 1.1 a une réponse positive dans les cas suivants :

- lorsque k est un corps local, d'après [CV23, Theorems 1.1 and 1.2] (voir aussi [CT24, Théorème 1.4]) ;
- lorsque k est un corps global de caractéristique positive et $n \geq 5$, ou lorsque k est un corps global de caractéristique 2 et $n = 4$, d'après [CV23, Theorem 1.2] ;
- lorsque k est un corps de nombres et $n \geq 5$, d'après [CT24, Théorème 1.5] ; Creutz et Viray l'avaient auparavant démontré sous l'hypothèse de Schinzel [CV23].
- lorsque k est un corps global de caractéristique positive et $n \geq 5$, d'après [CV23, Theorem 1.2] ;

En revanche, la question 1.1 a une réponse négative pour $n = 4$, déjà sur $\mathbb{Q}$. En effet, Creutz et Viray [CV25, Theorem 1] ont construit une infinité de surfaces de del Pezzo de degré 4 sur $\mathbb{Q}$, deux à deux non isomorphes, d'indice 2 (d'après [CV23, Theorem 1.1]) et sans point fermé de degré 2, et certaines d'entre elles possèdent un point fermé de degré 6 [CV25, Remark 10]. Sous l'hypothèse de Schinzel, ils ont aussi montré que toute surface de del Pezzo de degré 4 sur un corps de nombres, donc d'indice divisant 2 d'après [CV23, Theorem 1.1], possède un point fermé de degré divisant 6 [CV25, Theorem 9].

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 1.2. *Soit k un corps, et soit X une surface de del Pezzo de degré* 4 *sur k.*

(1) Si $\mathrm{ind}(X) = 2$, *alors X possède un point fermé de degré* 2 *ou* 6.

(2) Si $\mathrm{ind}(X) = 2$ *et* $\rho(X) \geq 2$, *alors X possède un point fermé de degré* 2.

D'après les exemples de Creutz et Viray rappelés ci-dessus, on ne peut pas exclure le degré 6 dans le théorème 1.2(1) déjà pour $k = \mathbb{Q}$. Lorsque k est un corps de nombres, le théorème 1.2 a la conséquence suivante.

Corollaire 1.3. *Soit k un corps de nombres, et soit X une surface de del Pezzo de degré* 4 *sur k. Alors X possède un point fermé de degré* 1, 2 *ou* 6.

En effet, l'indice de X divise 2 d'après [CV23, Theorem 1.1]. Si $\mathrm{ind}(X) = 1$, alors $X(k) \neq \emptyset$ par le théorème d'Amer et Brumer, et si $\mathrm{ind}(X) = 2$, il suffit d'appliquer le théorème 1.2. Le corollaire 1.3 est à comparer au résultat conditionnel [CV25, Theorem 9] rappelé plus haut.

Nous esquissons maintenant la démonstration du théorème 1.2. D'après le lemme de relèvement 2.1 il suffit de travailler en caractéristique nulle.

La première étape utilise des arguments remontant à Daniel Coray [Cor76], développés dans [CT20a]. On montre que, si $\mathrm{ind}(X) = 2$, alors X possède un point fermé de degré 2, 6 ou 14 (théorème 6.3). Ce résultat avait été annoncé par le premier auteur dans une note non publiée [CT20b] ; voir aussi l'introduction de [CV25]. Pour le démontrer, nous choisissons un point fermé de degré $2d$, avec d impair et minimal. Lorsque $n(n-1)+3 \leq d \leq n(n+1)-3$, le théorème de position générale de [CT26] permet de construire une courbe lisse et géométriquement intègre $\Gamma \in |nH|$ portant des zéro-cycles effectifs de degrés $2d$ et 4. Comme $g(\Gamma) = 2n(n-1)+1 \leq 2d-4$, le théorème de Riemann–Roch fournit un zéro-cycle effectif de degré $2d-4$ sur X, et, puisque $\mathrm{ind}(X) = 2$, un point fermé de degré $2d'$, avec d' impair et $d' < d$. Les valeurs de d qui échappent à cet argument sont de la forme $n(n-1) \pm 1$. Nous traitons les cas où n est assez grand en éclatant une ou deux sections planes de X et en appliquant le théorème de Reider [Rei88]. Les valeurs restantes $d = 5, 11, 19$ sont éliminées par un argument dû à Kollár.

Nous distinguons deux cas selon le rang de Picard de X. Si $\rho(X) \geq 2$, la classification d'Iskovskikh ramène l'étude aux surfaces non k-minimales et aux fibrations en coniques sur une courbe de genre 0. Dans le premier cas, une contraction fournit une surface de del Pezzo de degré au moins 5, et dans le second, nous utilisons un théorème de Salberger sur l'effectivité des zéro-cycles. Nous obtenons ainsi un point fermé de degré 2 sur X. Cela démontre l'assertion (2) du théorème 1.2.

Supposons maintenant que $\rho(X) = 1$ et que X possède un point fermé de degré 14. On a alors $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$. L'unirationalité de X après extension à un corps sur lequel elle possède un point permet de remplacer ce point par un point fermé P de même degré tel que $H^0(X, \mathcal{I}_P(2H)) = 0$. Nous suivons alors une construction de Voisin [Voi26]. La construction de Serre fournit un fibré vectoriel E de rang deux sur X, avec $\deg c_2(E) = 14$, $h^0(X, E) \geq 12$ et $H^0(X, E(-H)) = 0$. Comme $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$, toute section non nulle de E possède un schéma des zéros de longueur 14. En imposant l'annulation d'une section sur une section plane finie étale de longueur 4, on obtient un zéro-cycle effectif de degré 10. Un autre argument de Voisin fournit alors un zéro-cycle effectif de degré $16 - 10 = 6$ (proposition 7.3). Puisque $\mathrm{ind}(X) = 2$, celui-ci contient un point fermé de degré 2 ou 6. Combiné au théorème 6.3, cet argument démontre l'assertion (1) du théorème 1.2.

Les arguments précédents permettent également de traiter les sous-schémas de longueur 14, sans hypothèse sur l'indice. Nous obtenons le résultat suivant dans le corps de l'article. L'appendice en donne une autre démonstration, par spécialisation.

Théorème 1.4. *Soit k un corps de caractéristique nulle, et soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k. Si X possède un sous-schéma fermé*

de dimension zéro et de longueur 14*, alors* X *possède un zéro-cycle effectif de degré* 6*.*

Pour le démontrer directement, nous observons que l'indice de X divise 2. Si cet indice vaut 1, le théorème d'Amer et Brumer donne un point rationnel. S'il vaut 2, la décomposition du zéro-cycle associé au sous-schéma de longueur 14 fournit un point fermé de degré 2, 6, 10 ou 14. Le degré 10 est ramené au degré 6 par le lemme 6.1, tandis que le degré 14 est traité par la proposition 8.11.

Nous concluons cette introduction par une description du contenu des sections. Dans la section 2, nous rappelons les propriétés des systèmes linéaires $|nH|$, établissons le lemme de relèvement et formulons un théorème de position générale de [CT26]. Les sections 3 à 6 sont consacrées à la descente des degrés des points fermés. La section 7 contient la construction du fibré vectoriel de rang deux. Dans la section 8, nous démontrons l'assertion (2) du théorème 1.2, puis le théorème 1.4 et l'assertion (1) du théorème 1.2. Dans les appendices, nous donnons une autre démonstration du théorème 1.4, par spécialisation, puis une autre démonstration de l'assertion (1) du théorème 1.2, et nous démontrons le théorème de Salberger utilisé pour les fibrations en coniques.

Déclaration IA. En 2020, le premier auteur a rédigé une esquisse de démonstration du théorème 6.3 [CT20b], qui comprenait le complément indiqué par J. Kollár pour éliminer les cas $d = 5, 11, 19$; les arguments de position générale provenant de [CT20a] n'y étaient pas détaillés. En 2023, un argument incorrect a été trouvé dans [CT20a]. La correction, d'abord donnée sur la page personnelle du premier auteur, est maintenant intégrée dans [CT26]. Dans un premier temps, nous avons utilisé ces corrections pour donner une démonstration complète du résultat annoncé en 2020, sur la base des méthodes de [CT20a] et [CT26]. Pour cela, dans les sections 3 à 6, nous avons utilisé l'IA pour des arguments de routine. Le cas $2d = 14$ avait résisté. Nous avons demandé une idée à l'IA. Elle a donné le contenu de la section 7, qui suit des idées de Claire Voisin [Voi26, Lemma 3.1, Lemma 3.6] (la suggestion nous a aussi été transmise par Zhijia Zhang). En partant de la section 7, nous donnons dans la section 8 une démonstration du théorème principal, le théorème 1.2.

Une méthode de spécialisation, qui suit fidèlement un argument de Claire Voisin [Voi26, Preuve de la proposition 3.2], avait été proposée par l'IA. Elle fournit une démonstration alternative du théorème 1.2(1). Nous en rendons compte dans l'appendice A.

La preuve du théorème 1.2(2) dans la section 8 utilise un théorème non publié de Per Salberger [Sal85]. Dans l'appendice B, nous en donnons une démonstration essentiellement fournie par l'IA.

Notations. Soit k un corps. Nous fixons une clôture algébrique $\overline{k}$ de k. Pour une k-variété X et une extension de corps L/k, nous posons $X_L := X \times_k L$

et $\overline{X} \coloneqq X_{\overline{k}}$. Le *degré* d'un point fermé P de X est $[k(P) : k]$. Un *zéro-cycle* sur X est une combinaison linéaire à coefficients entiers de points fermés de X ; son degré est défini par linéarité, et il est *effectif* si ses coefficients sont positifs ou nuls. À tout sous-schéma fermé $Z \subset X$ de dimension zéro, on associe le zéro-cycle effectif $[Z] \coloneqq \sum_P \operatorname{long}(\mathcal{O}_{Z,P})\, P$, dont le degré est la longueur $\dim_k H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$ de Z, et on écrit $\mathcal{I}_Z$ pour l'idéal de Z en X.

2. Préliminaires

2.1. **Surfaces de del Pezzo de degré 4.** Soit k un corps. Une *surface de del Pezzo de degré* 4 sur k est une k-surface projective, lisse et géométriquement intègre X, de diviseur anticanonique $-K_X$ ample, telle que $(K_X \cdot K_X) = 4$. On pose $H \coloneqq -K_X$, donc $(H \cdot H) = 4$. D'après [Kol96, III, Theorem 3.5], le système linéaire $|H|$ plonge X dans $\mathbb{P}^4_k$ comme intersection complète lisse de deux quadriques. Le groupe $\operatorname{Pic}(X)$ s'injecte dans $\operatorname{Pic}(\overline{X}) \simeq \mathbb{Z}^6$; il est donc de type fini, et nous notons $\rho(X)$ son rang.

Soit k un corps de caractéristique nulle, et soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k. Pour tout entier $n \geq 0$, on a $nH = K_X + (n+1)H$ avec $(n+1)H$ ample, de sorte que $H^i(X, \mathcal{O}_X(nH)) = 0$ pour $i > 0$ par le théorème d'annulation de Kodaira, et le théorème de Riemann–Roch donne

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(nH)) = 2n(n+1) + 1. \tag{2.1}$$

En particulier, on a $\dim |nH| = 2n(n+1)$. Si $n \geq 1$ et si $\Gamma \in |nH|$ est une courbe lisse et géométriquement connexe, la formule d'adjonction donne $2g(\Gamma) - 2 = (nH \cdot (nH + K_X)) = 4n(n-1)$, c'est-à-dire

$$g(\Gamma) = 2n(n-1) + 1. \tag{2.2}$$

2.2. **Réduction du théorème 1.2 au cas de caractéristique zéro.** Le lemme suivant est bien connu.

Lemme 2.1. *Soit k un corps de caractéristique $p > 0$, soit A un anneau de Cohen de corps résiduel k, et soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k telle que $\operatorname{ind}(X) = 2$. Alors il existe un A-schéma projectif et lisse $\mathbf{X}$ de fibre spéciale isomorphe à X, dont la fibre générique $W \coloneqq \mathbf{X}_K$, où K est le corps des fractions de A, est une surface de del Pezzo de degré 4 telle que $\operatorname{ind}(W) = 2$ et $\rho(W) \geq \rho(X)$.*

Démonstration. Écrivons $X \subset \mathbb{P}^4_k$ comme intersection complète lisse de deux quadriques définies par des formes quadratiques $q_1, q_2 \in k[x_0, \ldots, x_4]$. Soient $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2 \in A[x_0, \ldots, x_4]$ des formes quadratiques qui les relèvent, et soit $\mathbf{X} \subset \mathbb{P}^4_A$ le sous-schéma fermé défini par $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = 0$, dont la fibre spéciale est X. Comme X est de dimension 2, la suite $(p, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ est régulière en tout point de $X \subset \mathbb{P}^4_A$, de sorte que $\mathbf{X}$ est plat sur A en tout point de X ; comme X est lisse sur k, le A-schéma $\mathbf{X}$ est aussi lisse sur A en ces points. Ces propriétés étant ouvertes et $\mathbf{X}$ étant propre sur A, le A-schéma $\mathbf{X}$ est plat et lisse. Ainsi W est une intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4_K$, c'est-à-dire une surface de del Pezzo de degré 4 sur K.

Montrons que $\mathrm{ind}(W) = 2$. Comme $\mathbf{X}$ est propre sur A, on a $W(K) = \mathbf{X}(A)$, et l'application de réduction $\mathbf{X}(A) \to X(k)$ montre que $W(K) = \emptyset$, puisque $\mathrm{ind}(X) = 2$. Par le théorème d'Amer et Brumer [EKM08, Corollary 18.7], on a donc $\mathrm{ind}(W) \neq 1$. Par ailleurs, comme $\mathrm{ind}(X) = 2$, il existe un point fermé P de X de degré $2d$, avec d impair. Écrivons $k(P) = k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. En relevant successivement en polynômes unitaires les polynômes minimaux des α_i sur $k(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$, on construit une A-algèbre finie et libre B de rang $2d$ telle que $B/pB \simeq k(P)$. L'anneau B est local d'idéal maximal pB ; c'est donc un anneau de valuation discrète complet, dont le corps des fractions L est de degré $2d$ sur K. Comme $\mathbf{X}$ est lisse sur A, le lemme de Hensel montre que le $k(P)$-point de X défini par P se relève en un B-point de $\mathbf{X}$, dont la fibre générique est un L-point de W. Ainsi $\mathrm{ind}(W)$ divise $2d$; comme il divise aussi 4 (voir l'introduction) et que d est impair, on obtient $\mathrm{ind}(W) = 2$.

Montrons enfin que $\rho(W) \geq \rho(X)$. Comme $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, tout faisceau inversible sur X se relève successivement aux réductions de $\mathbf{X}$ modulo p^{n+1}. Par le théorème d'existence de Grothendieck [Sta, Tag 088E], ces relèvements s'algébrisent en un faisceau inversible sur $\mathbf{X}$. Ainsi la flèche $\mathrm{Pic}(\mathbf{X}) \to \mathrm{Pic}(X)$ est surjective. Par ailleurs, comme $\mathbf{X}$ est régulier et que sa fibre spéciale est intègre et définie par l'équation $p = 0$, la restriction $\mathrm{Pic}(\mathbf{X}) \to \mathrm{Pic}(W)$ est un isomorphisme. On obtient donc une surjection $\mathrm{Pic}(W) \to \mathrm{Pic}(X)$, d'où $\rho(W) \geq \rho(X)$, comme voulu. □

2.3. **Un argument de position générale.** Nous utiliserons les arguments de position générale de type Bertini–Jouanolou obtenus dans [CT20a, §2], sous la forme corrigée dans [CT26]. Nous dirons qu'une k-variété Y satisfait la *propriété* $(*)$ si, pour toute extension finie de corps L/k telle que $Y(L) \neq \emptyset$, la L-variété Y_L est L-unirationnelle.

Théorème 2.2. *Soit k un corps de caractéristique nulle, soit Y une k-variété projective, lisse et géométriquement intègre satisfaisant la propriété $(*)$, soit $f : Y \to \mathbb{P}^m_k$ un k-morphisme dont l'image est de dimension au moins 2 et engendre $\mathbb{P}^m_k$, et soient $P_1, \dots, P_t$ des points fermés de Y, de degrés respectifs $s_1, \dots, s_t$. Si $s_1 + \cdots + s_t \leq m$, alors il existe un hyperplan $h \subset \mathbb{P}^m_k$ tel que $Y_h := f^{-1}(h)$ soit lisse et géométriquement intègre et contienne des zéro-cycles effectifs $z_1, \dots, z_t$ de degrés respectifs $s_1, \dots, s_t$.*

Démonstration. Pour toute extension finie L/k telle que $Y(L) \neq \emptyset$, la L-variété Y_L est L-unirationnelle, et donc la k-variété $R_{L/k}(Y_L)$ est k-unirationnelle. Ainsi Y satisfait la propriété D_{bis} de [CT26, §1.2], et l'énoncé est un cas particulier de [CT26, Théorème 2.9 bis]. □

Remarque 2.3. La propriété $(*)$ est satisfaite par toute surface de del Pezzo de degré 4, et donc, en vertu du lemme de Lang–Nishimura, par toute k-surface projective et lisse k-birationnelle à une surface de del Pezzo de degré 4.

3. Descente : le cas général

Le but de cette section est de démontrer la proposition 3.1, qui fait décroître le degré $2d$ d'un point fermé, avec d impair, sauf lorsque d est de la forme $n(n-1)\pm 1$.

Proposition 3.1. *Soit k un corps de caractéristique nulle, soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k telle que $\mathrm{ind}(X) = 2$, et soit $d > 1$ un entier impair qui n'est ni de la forme $n(n-1)+1$, ni de la forme $n(n-1)-1$, avec $n \geq 1$ entier. Si X possède un point fermé de degré $2d$, alors X possède un point fermé de degré $2d'$, avec $d' < d$ impair.*

Démonstration. Nous montrons d'abord qu'il existe un entier $n \geq 3$ tel que

$$n(n-1)+3 \leq d \leq n(n+1)-3. \tag{3.1}$$

Pour $n \geq 3$, l'intervalle d'entiers défini par (3.1) est non vide, et les seuls entiers impairs strictement compris entre son extrémité droite $n(n+1)-3$ et l'extrémité gauche $n(n+1)+3$ de l'intervalle associé à $n+1$ sont $n(n+1)-1$ et $n(n+1)+1$. De plus, les entiers impairs $d > 1$ strictement inférieurs à 9, extrémité gauche de l'intervalle associé à $n = 3$, sont $3 = 2\cdot 1+1$, $5 = 3\cdot 2-1$ et $7 = 3\cdot 2+1$. Comme d n'est pas de la forme $n(n-1)\pm 1$, il vérifie donc (3.1) pour un certain $n \geq 3$.

Soit P un point fermé de X de degré $2d$. Comme k est infini, il existe un plan $\Lambda \subset \mathbb{P}^4_k$ tel que $X \cap \Lambda$ soit fini étale de degré 4 sur k ; notons $Q_1, \ldots, Q_r$ ses points fermés, de sorte que $\sum_j [k(Q_j) : k] = 4$. Comme $2d > 4$, le point P est distinct des Q_j. Le faisceau inversible nH est très ample, et $2d+4 \leq 2n(n+1)-2 < \dim |nH|$ par (3.1). Par le théorème 2.2 et la remarque 2.3, appliqués au plongement de X défini par $|nH|$ et aux points $P, Q_1, \ldots, Q_r$, il existe une courbe projective, lisse et géométriquement intègre $\Gamma \in |nH|$ contenant un zéro-cycle effectif z_1 de degré $2d$ et un zéro-cycle effectif z_2 de degré 4. Comme $d \geq n(n-1)+3$, le diviseur $z_1 - z_2$ sur Γ est de degré $2d-4 \geq 2n(n-1)+2 > g(\Gamma)$ par (2.2). Par le théorème de Riemann–Roch sur Γ, il est linéairement équivalent à un zéro-cycle effectif z de degré $2d-4$ sur Γ, et donc sur X. Écrivons $z = \sum_i n_i P_i$, où les n_i sont des entiers strictement positifs et les P_i des points fermés de X, de degrés respectifs $2d_i$. On a $\sum_i n_i d_i = d-2$, qui est impair, de sorte que l'un des d_i est impair et vérifie $d_i \leq d-2$, comme voulu. □

4. Le cas $d = n(n-1)+1$

Le but de cette section est de démontrer la proposition 4.3. Nous utilisons pour cela l'éclatement d'une surface de del Pezzo de degré 4 le long d'une section plane finie étale.

Soit k un corps de caractéristique nulle, et soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k. Comme k est infini, il existe un plan $\Lambda \subset \mathbb{P}^4_k$ qui ne rencontre aucune des 16 droites de $\overline{X}$ et tel que le sous-schéma $M \coloneqq X \cap \Lambda$ soit fini étale de degré 4 sur k. Soit $p\colon Y \coloneqq \mathrm{Bl}_M(X) \to X$ l'éclatement de M,

et soit E le diviseur exceptionnel. On a $K_Y = -p^*H + E$, $(p^*H \cdot E) = 0$, $(E \cdot E) = -4$ et $(K_Y \cdot K_Y) = 0$. Sur $\overline{Y}$, on a $E = E_1 + \cdots + E_4$, où les E_i sont des courbes deux à deux disjointes telles que $(E_i \cdot E_i) = -1$.

L'idéal de M dans X est engendré par les équations de deux hyperplans distincts contenant Λ. L'application rationnelle $X \dashrightarrow \mathbb{P}^1_k$ définie par le pinceau des hyperplans de $\mathbb{P}^4_k$ contenant Λ s'étend donc en un morphisme $f\colon Y \to \mathbb{P}^1_k$ tel que $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) = p^*H - E$. En particulier, le faisceau inversible $F \coloneqq p^*H - E$ est sans point de base, et donc nef. Pour tout entier n, nous posons $N_n \coloneqq (n+1)p^*H - 3E$ et $L_n \coloneqq K_Y + N_n$, de sorte que

$$N_n = 3F + (n-2)p^*H \qquad \text{et} \qquad L_n = np^*H - 2E.$$

Lemme 4.1. *Soit k un corps de caractéristique nulle, soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k, et soient Λ, M, $p\colon Y \to X$, E et N_n comme ci-dessus. Pour tout entier $n \geq 4$, on a $(N_n \cdot N_n) \geq 64$, et $(N_n \cdot C) \geq 3$ pour toute courbe intègre $C \subset \overline{Y}$.*

Démonstration. Les calculs se font sur $\overline{Y}$. On a $(N_n \cdot N_n) = 4(n+1)^2 - 36$, qui est au moins égal à 64 pour $n \geq 4$. Soit $C \subset \overline{Y}$ une courbe intègre. Si $C = E_i$ pour un certain i, alors $(N_n \cdot E_i) = 3$. Supposons désormais que C n'est égale à aucun des E_i, et posons $C_0 \coloneqq p(C)$, qui est une courbe de $\overline{X}$. On a $(p^*H \cdot C) = (H \cdot C_0) \geq 1$ et, comme F est nef, $(F \cdot C) \geq 0$. Si $(F \cdot C) \geq 1$, alors $(N_n \cdot C) \geq 3 + (n-2) \geq 5$. Supposons enfin $(F \cdot C) = 0$, de sorte que $(N_n \cdot C) = (n-2)(H \cdot C_0)$. Si $(H \cdot C_0) \geq 2$, on a $(N_n \cdot C) \geq 4$. Si $(H \cdot C_0) = 1$, alors C_0 est l'une des 16 droites de $\overline{X}$, et $(E \cdot C) = (p^*H \cdot C) - (F \cdot C) = 1$, de sorte que C_0 rencontre $M \subset \Lambda$, contrairement au choix de Λ. □

Proposition 4.2. *Soit k un corps de caractéristique nulle, soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k, soient Λ, M, $p\colon Y \to X$, E et L_n comme ci-dessus, et soit $n \geq 4$ un entier. Alors le faisceau inversible L_n est très ample sur Y, on a $\dim |L_n| = 2n(n+1) - 12$, et toute courbe lisse et géométriquement connexe $\Gamma \in |L_n|$ est de genre $2n(n-1) - 3$.*

Démonstration. Comme F et p^*H sont nefs, le faisceau inversible $N_n = 3F + (n-2)p^*H$ est nef. D'après le lemme 4.1, on a $(N_n \cdot N_n) \geq 10$ et $(N_n \cdot D) \geq 3$ pour tout diviseur effectif non nul D sur $\overline{Y}$. Par le théorème de Reider [Rei88, Theorem 1], dont l'énoncé vaut sur tout corps algébriquement clos de caractéristique nulle, le faisceau $L_n = K_Y + N_n$ est très ample sur $\overline{Y}$, et donc sur Y. Par le critère de Nakai–Moishezon, le lemme 4.1 montre aussi que N_n est ample, et le théorème d'annulation de Kodaira donne $H^i(Y, L_n) = 0$ pour $i > 0$. On a

$$(L_n \cdot L_n) = 4n^2 - 16 \qquad \text{et} \qquad (L_n \cdot K_Y) = -4n + 8.$$

Comme $\chi(\mathcal{O}_Y) = \chi(\mathcal{O}_X) = 1$, le théorème de Riemann–Roch donne

$$h^0(Y, L_n) = 1 + \frac{(L_n \cdot (L_n - K_Y))}{2} = 2n(n+1) - 11,$$

c'est-à-dire $\dim|L_n| = 2n(n+1) - 12$. Enfin, pour $\Gamma \in |L_n|$ lisse et géométriquement connexe, la formule d'adjonction donne $2g(\Gamma) - 2 = (L_n \cdot (L_n + K_Y)) = 4n^2 - 4n - 8$, c'est-à-dire $g(\Gamma) = 2n(n-1) - 3$. □

Proposition 4.3. *Soit k un corps de caractéristique nulle, soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k telle que $\mathrm{ind}(X) = 2$, soit $n \geq 4$ un entier, et posons $d \coloneqq n(n-1)+1$. Si X possède un point fermé de degré $2d$, alors X possède un point fermé de degré $2d'$, avec $d' < d$ impair.*

Démonstration. Soit P un point fermé de X de degré $2d$, et soient Λ, M, $p\colon Y \to X$, E et L_n comme ci-dessus. Comme $2d > 4$, le point P n'appartient pas à M, et s'identifie donc à un point fermé de Y. D'après la proposition 4.2, le faisceau L_n est très ample et $\dim|L_n| = 2n(n+1) - 12$. Comme $n \geq 4$, on a $2d = 2n(n-1) + 2 \leq 2n(n+1) - 12$. Par le théorème 2.2 et la remarque 2.3, appliqués au plongement de Y défini par $|L_n|$, il existe une courbe projective, lisse et géométriquement intègre $\Gamma \in |L_n|$ contenant un zéro-cycle effectif z de degré $2d$. La courbe Γ possède aussi un diviseur de degré $(p^*H \cdot L_n) = 4n$, à savoir la restriction à Γ de l'image réciproque d'une section hyperplane de X ne contenant pas $p(\Gamma)$. Comme $d \equiv 1 \pmod{n}$, les entiers d et n sont premiers entre eux ; comme de plus d est impair, on a $\gcd(2d, 4n) = 2$, et il existe donc un diviseur a de degré 2 sur Γ. Le diviseur $z - 2a$ est de degré $2d - 4 = 2n(n-1) - 2 = g(\Gamma) + 1$ par la proposition 4.2. Par le théorème de Riemann–Roch sur Γ, il est linéairement équivalent à un zéro-cycle effectif de degré $2d-4$ sur Γ, dont l'image directe par p est un zéro-cycle effectif de degré $2d-4$ sur X. On conclut alors comme à la fin de la démonstration de la proposition 3.1. □

5. Le cas $d = n(n-1) - 1$

Le but de cette section est de démontrer la proposition 5.3. Nous utilisons cette fois l'éclatement le long de deux sections planes finies étales.

Soit k un corps de caractéristique nulle, et soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k. Soit $\Lambda_1 \subset \mathbb{P}^4_k$ un plan tel que $M_1 \coloneqq X \cap \Lambda_1$ soit fini étale de degré 4 sur k, soit $p_1\colon Y_1 \coloneqq \mathrm{Bl}_{M_1}(X) \to X$ l'éclatement de M_1, et soit $f_1\colon Y_1 \to \mathbb{P}^1_k$ le morphisme défini par le pinceau des hyperplans contenant Λ_1 ; voir la section 4. La fibre géométrique générale de f_1 est une section hyperplane lisse de X, c'est-à-dire une courbe géométriquement intègre de degré 4 et de genre 1. En particulier, f_1 ne possède qu'un nombre fini de fibres géométriquement singulières, dont les composantes irréductibles sont en nombre fini. Comme un plan général de $\mathbb{P}^4_k$ ne rencontre pas une courbe fixée, les conditions suivantes définissent un ouvert non vide de la grassmannienne des plans de $\mathbb{P}^4_k$, et comme k est infini, il existe un plan $\Lambda_2 \subset \mathbb{P}^4_k$ qui les satisfait :

(1) le sous-schéma $M_2 \coloneqq X \cap \Lambda_2$ est fini étale de degré 4 sur k, et $M_1 \cap M_2 = \emptyset$;
(2) le plan Λ_2 ne rencontre aucune des images dans $\overline{X}$ des composantes irréductibles des fibres géométriquement singulières de f_1 ;

(3) les plans Λ_1 et Λ_2 engendrent $\mathbb{P}^4_k$.

Soit $p\colon Y \coloneqq \mathrm{Bl}_{M_1 \amalg M_2}(X) \to X$ l'éclatement de $M_1 \amalg M_2$, et notons E_i le diviseur exceptionnel au-dessus de M_i, pour $i = 1, 2$. Les deux pinceaux d'hyperplans induisent des morphismes $\varphi_i\colon Y \to \mathbb{P}^1_k$ tels que $\varphi_i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) = p^*H - E_i$, et nous posons $\varphi \coloneqq (\varphi_1, \varphi_2)\colon Y \to \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$.

Lemme 5.1. *Soit k un corps de caractéristique nulle, soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k, et soient Λ_1, Λ_2, $p\colon Y \to X$, E_1, E_2 et φ comme ci-dessus. Alors le morphisme φ est fini, et le faisceau inversible*

$$F \coloneqq 2p^*H - E_1 - E_2 = \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1,1)$$

est ample sur Y.

Démonstration. Il suffit de montrer, après extension à $\overline{k}$, qu'aucune courbe intègre $C \subset \overline{Y}$ n'est contractée à la fois par φ_1 et par φ_2. Supposons que $\varphi_1(C)$ soit un point. Si C est une composante du diviseur exceptionnel au-dessus de M_2, la restriction de φ_2 à C est un isomorphisme sur $\mathbb{P}^1_{\overline{k}}$, puisque le pinceau défini par Λ_2 sépare les directions tangentes en chaque point de M_2 ; ainsi C n'est pas contractée par φ_2. Pour la même raison, C n'est pas une composante du diviseur exceptionnel au-dessus de M_1, et l'image de C dans $Y_{1,\overline{k}}$ est donc une composante d'une fibre de f_1.

Supposons d'abord cette fibre singulière. Par le choix de Λ_2, la courbe $C_0 \coloneqq p(C)$ ne rencontre pas M_2, d'où

$$(\varphi_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\cdot C) = ((p^*H - E_2)\cdot C) = (H\cdot C_0) > 0,$$

et C n'est pas contractée par φ_2.

Supposons enfin cette fibre lisse. Son image C_0 dans $\overline{X}$ est une section hyperplane lisse de degré 4, contenue dans un hyperplan h_1 contenant Λ_1. La courbe C_0 engendre h_1. En effet, la restriction $H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(1)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(H))$ est un isomorphisme par (2.1), et un hyperplan contenant C_0 découpe sur X une section hyperplane de degré 4 contenant C_0, donc égale à C_0 ; cet hyperplan est donc égal à h_1. Si C était contractée par φ_2, la courbe C_0 serait contenue dans un hyperplan h_2 contenant Λ_2. On aurait alors $h_1 = h_2$, et cet hyperplan contiendrait Λ_1 et Λ_2, contrairement à la condition (3).

Ainsi aucune courbe n'est contractée par φ. Comme φ est propre à fibres finies, il est fini. Enfin, l'image réciproque d'un faisceau inversible ample par un morphisme fini est ample, ce qui démontre l'assertion relative à F. □

Pour tout entier n, nous posons $N_n \coloneqq (n+1)p^*H - 3E_1 - 3E_2$ et $L_n \coloneqq K_Y + N_n$, de sorte que

$$N_n = 3F + (n-5)p^*H \qquad \text{et} \qquad L_n = np^*H - 2E_1 - 2E_2.$$

Proposition 5.2. *Soit k un corps de caractéristique nulle, soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k, soient Λ_1, Λ_2, $p\colon Y \to X$, E_1, E_2 et L_n comme ci-dessus, et soit $n \geq 6$ un entier. Alors le faisceau inversible L_n est*

très ample sur Y, on a $\dim|L_n| = 2n(n+1)-24$, et toute courbe lisse et géométriquement connexe $\Gamma \in |L_n|$ est de genre $2n(n-1)-7$.

Démonstration. D'après le lemme 5.1, le faisceau F est ample. Comme p^*H est nef et $n \geq 5$, le faisceau $N_n = 3F + (n-5)p^*H$ est ample, et $(N_n \cdot C) \geq 3(F \cdot C) \geq 3$ pour toute courbe intègre $C \subset \overline{Y}$. De plus, on a $(N_n \cdot N_n) = 4(n+1)^2 - 72 \geq 10$. Par le théorème de Reider [Rei88, Theorem 1], le faisceau $L_n = K_Y + N_n$ est très ample sur $\overline{Y}$, et donc sur Y, et le théorème d'annulation de Kodaira donne $H^i(Y, L_n) = 0$ pour $i > 0$. Comme $(L_n \cdot L_n) = 4n^2 - 32$ et $(L_n \cdot K_Y) = -4n + 16$, le théorème de Riemann–Roch donne $h^0(Y, L_n) = 2n(n+1) - 23$, c'est-à-dire $\dim|L_n| = 2n(n+1) - 24$. Enfin, pour $\Gamma \in |L_n|$ lisse et géométriquement connexe, la formule d'adjonction donne $2g(\Gamma) - 2 = (L_n \cdot (L_n + K_Y)) = 4n^2 - 4n - 16$, c'est-à-dire $g(\Gamma) = 2n(n-1) - 7$. □

Proposition 5.3. *Soit k un corps de caractéristique nulle, soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k telle que $\mathrm{ind}(X) = 2$, soit $n \geq 6$ un entier, et posons $d \coloneqq n(n-1) - 1$. Si X possède un point fermé de degré $2d$, alors X possède un point fermé de degré $2d'$, avec $d' < d$ impair.*

Démonstration. Soit P un point fermé de X de degré $2d$, et soient Λ_1, Λ_2, $p\colon Y \to X$, E_1, E_2 et L_n comme ci-dessus. Comme $2d > 4$, le point P n'appartient pas à $M_1 \amalg M_2$, et s'identifie donc à un point fermé de Y. D'après la proposition 5.2, le faisceau L_n est très ample et $\dim|L_n| = 2n(n+1) - 24$. Comme $n \geq 6$, on a $2d = 2n(n-1) - 2 \leq 2n(n+1) - 24$. Par le théorème 2.2 et la remarque 2.3, il existe une courbe projective, lisse et géométriquement intègre $\Gamma \in |L_n|$ contenant un zéro-cycle effectif z de degré $2d$. La courbe Γ possède aussi un diviseur de degré $(p^*H \cdot L_n) = 4n$. Comme $d \equiv -1 \pmod{n}$, les entiers d et n sont premiers entre eux ; comme de plus d est impair, on a $\gcd(2d, 4n) = 2$, et il existe donc un diviseur a de degré 2 sur Γ. Le diviseur $z - 2a$ est de degré $2d - 4 = 2n(n-1) - 6 = g(\Gamma) + 1$ par la proposition 5.2. Par le théorème de Riemann–Roch sur Γ, il est linéairement équivalent à un zéro-cycle effectif de degré $2d - 4$ sur Γ, dont l'image directe par p est un zéro-cycle effectif de degré $2d - 4$ sur X. On conclut alors comme à la fin de la démonstration de la proposition 3.1. □

6. Les cas $d = 5, 11, 19$

Le but de cette section est de démontrer la proposition 6.2, puis le théorème 6.3. L'idée du lemme 6.1 est due à J. Kollár.

Lemme 6.1. *Soit k un corps de caractéristique nulle, soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k, soit $n \geq 1$ un entier, et soit z un zéro-cycle effectif de degré s sur X, avec $s + 1 \leq 2n(n+1)$. Alors X possède un zéro-cycle effectif de degré $4n^2 - s$.*

Démonstration. Écrivons $z = \sum_i n_i P_i$, où les n_i sont des entiers strictement positifs et les P_i des points fermés deux à deux distincts de X, de degrés

respectifs s_i. Le faisceau inversible nH est très ample, on a $\dim |nH| = 2n(n+1)$ par (2.1), et $\sum_i s_i \leq s < 2n(n+1)$. Par le théorème 2.2 et la remarque 2.3, il existe une courbe projective, lisse et géométriquement intègre $\Gamma \in |nH|$ contenant des zéro-cycles effectifs w_i de degrés respectifs s_i, et le zéro-cycle $z_1 := \sum_i n_i w_i$ sur Γ est effectif de degré s. Comme $\dim |nH| \geq 1$, il existe un diviseur effectif $\Delta \neq \Gamma$ sur X linéairement équivalent à Γ. Comme Γ est intègre, le diviseur Δ ne contient pas Γ, et la trace de Δ sur Γ est un zéro-cycle effectif z_2 de degré $(nH \cdot nH) = 4n^2$. Le diviseur $z_2 - z_1$ sur Γ est de degré $4n^2 - s \geq 2n(n-1)+1 = g(\Gamma)$ par (2.2). Par le théorème de Riemann–Roch sur Γ, il est linéairement équivalent à un zéro-cycle effectif de degré $4n^2 - s$ sur Γ, et donc sur X, comme voulu. □

Proposition 6.2. *Soit k un corps de caractéristique nulle, soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k telle que $\mathrm{ind}(X) = 2$, et soit $d \in \{5, 11, 19\}$. Si X possède un point fermé de degré $2d$, alors X possède un point fermé de degré $2d'$, avec $d' < d$ impair.*

Démonstration. Posons $n := 2$ (resp. 3, resp. 4) si $d = 5$ (resp. 11, resp. 19). On a alors $2d + 1 \leq 2n(n+1)$, et le lemme 6.1, appliqué à un point fermé de degré $2d$, fournit un zéro-cycle effectif z sur X de degré $4n^2 - 2d$, c'est-à-dire de degré 6 (resp. 14, resp. 26). Écrivons $z = \sum_i n_i P_i$, où les n_i sont des entiers strictement positifs et les P_i des points fermés de X, de degrés respectifs $2d_i$. On a $\sum_i n_i d_i = 3$ (resp. 7, resp. 13). Cet entier est impair et strictement inférieur à d, de sorte que l'un des d_i est impair et strictement inférieur à d, comme voulu. □

Théorème 6.3. *Soit k un corps de caractéristique nulle, et soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k. Si $\mathrm{ind}(X) = 2$, alors X possède un point fermé de degré $2d$, avec $d \in \{1, 3, 7\}$.*

Démonstration. Comme $\mathrm{ind}(X) = 2$, les degrés des points fermés de X sont pairs et ne sont pas tous divisibles par 4. Il existe donc un entier impair d tel que X possède un point fermé de degré $2d$; choisissons d minimal, et supposons par l'absurde que $d \notin \{1, 3, 7\}$. Si d n'est pas de la forme $n(n-1) \pm 1$, la proposition 3.1 contredit la minimalité de d. Si $d = n(n-1)+1$ avec $n \geq 1$, alors $n \geq 4$ puisque $d \notin \{1, 3, 7\}$, et la proposition 4.3 contredit la minimalité de d. Si enfin $d = n(n-1) - 1$ avec $n \geq 2$, alors $n \geq 3$ puisque $d \neq 1$. Lorsque $3 \leq n \leq 5$, c'est-à-dire lorsque $d \in \{5, 11, 19\}$, la proposition 6.2 contredit la minimalité de d ; lorsque $n \geq 6$, c'est la proposition 5.3 qui la contredit. □

7. Un fibré vectoriel de rang deux

Le but de cette section est de démontrer la proposition 7.3, qui établit le théorème 1.4 sous des hypothèses supplémentaires. Nous utilisons pour cela la construction de Serre, suivant Voisin [Voi26].

Lemme 7.1. *Soit Ω un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, et soit S une surface de del Pezzo de degré 4 sur Ω. Il existe des points*

$x_1, \dots, x_{14} \in S(\Omega)$ deux à deux distincts tels qu'aucune section non nulle de $\mathcal{O}_S(2H)$ ne s'annule en $x_1, \dots, x_{14}$.

Démonstration. D'après (2.1), on a $h^0(S, \mathcal{O}_S(2H)) = 13$. Choisissons successivement des points $x_1, \dots, x_{13} \in S(\Omega)$, chacun hors du lieu de base de l'espace des sections de $\mathcal{O}_S(2H)$ qui s'annulent aux points précédents, tant que cet espace est non nul. La dimension de cet espace diminue alors d'une unité à chaque étape, de sorte qu'aucune section non nulle ne s'annule en $x_1, \dots, x_{13}$. Il suffit alors de choisir $x_{14} \in S(\Omega)$ distinct des points précédents. □

Lemme 7.2. *Soit k un corps de caractéristique nulle, soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k, et soit $P \in X$ un point fermé de degré 14 tel que $H^0(X, \mathcal{I}_P(2H)) = 0$. Alors il existe un fibré vectoriel E de rang deux sur X et une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{I}_P(3H) \longrightarrow 0. \tag{7.1}$$

De plus,

$$c_1(E) = 3H, \quad \deg c_2(E) = 14, \quad h^0(X, E) \geq 12, \quad H^0(X, E(-H)) = 0.$$

Démonstration. Rappelons que, d'après (2.1), on a $h^0(X, \mathcal{O}_X(2H)) = 13$ et $h^0(X, \mathcal{O}_X(3H)) = 25$. Par la discussion qui précède [Voi26, Lemma 3.1], appliquée avec $l = 2$, le groupe $\mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{I}_P(3H), \mathcal{O}_X)$ est non nul. Soit (7.1) une extension de classe non nulle. D'après [Voi26, Lemma 3.1], le faisceau E est localement libre, la section $s\colon \mathcal{O}_X \to E$ s'annule exactement le long de P, et

$$h^0(X, E) = 1 + h^0(X, \mathcal{I}_P(3H)) \geq 1 + 25 - 14 = 12.$$

Comme P est de codimension deux dans la surface lisse X, la section s est régulière, et [Ful98, Example 3.2.16] donne $c_2(E) = [P]$ dans $\mathrm{CH}_0(X)$, d'où $\deg c_2(E) = 14$. La restriction de (7.1) à $U \coloneqq X \smallsetminus P$ donne un isomorphisme $\det(E)|_U \simeq \mathcal{O}_U(3H)$. Comme $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(U)$ est un isomorphisme, on obtient $c_1(E) = 3H$. Enfin, puisque $H^0(X, \mathcal{O}_X(-H)) = 0$ et $H^0(X, \mathcal{I}_P(2H)) = 0$, en tensorisant (7.1) par $\mathcal{O}_X(-H)$, on obtient $H^0(X, E(-H)) = 0$. □

Proposition 7.3. *Soit k un corps de caractéristique nulle, soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k telle que $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$, et soit $P \in X$ un point fermé de degré 14 tel que $H^0(X, \mathcal{I}_P(2H)) = 0$. Alors X possède un zéro-cycle effectif de degré 6.*

Démonstration. Soit E le fibré du lemme 7.2. Montrons que toute section non nulle $s \in H^0(X, E)$ s'annule le long d'un sous-schéma fermé $Z(s)$ de dimension zéro et de longueur 14. Supposons que $Z(s)$ contienne un diviseur premier. Il existe alors un diviseur effectif non nul D tel que s provienne de $H^0(X, E(-D))$. Comme $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$ et H est ample, on a $D \sim mH$ avec $m \geq 1$. La multiplication par une section non nulle de $\mathcal{O}_X((m-1)H)$ fournit alors une section non nulle de $E(-H)$, ce qui contredit le lemme 7.2. Ainsi $Z(s)$ est de dimension zéro, la section s est régulière, et [Ful98, Example 3.2.16] donne $[Z(s)] = c_2(E)$, de degré 14.

Le corps k étant infini, il existe un plan $\Lambda \subset \mathbb{P}^4_k$ tel que $A := X \cap \Lambda$ soit fini étale de degré 4 sur k ; voir le début de la section 4. Le faisceau $E|_A$ est localement libre de rang deux sur A, d'où $h^0(A, E|_A) = 8 < 12 \leq h^0(X, E)$. Il existe donc une section non nulle $s \in H^0(X, E)$ telle que $A \subset Z(s)$. Comme A est réduit, chaque point de A apparaît dans $[Z(s)]$ avec multiplicité au moins un, et $R := [Z(s)] - [A]$ est un zéro-cycle effectif de degré 10.

D'après le début de la démonstration de [Voi26, Proposition 3.2], le cycle R est la classe d'un sous-schéma de X de longueur 10. Le faisceau $\mathcal{O}_X(2H)$ est très ample et $10 \leq h^0(X, \mathcal{O}_X(2H)) - 2$. Par [Voi26, Lemma 3.6], le zéro-cycle $(2H)^2 - R$, de degré $16 - 10 = 6$, est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif, comme voulu. □

8. Démonstration du théorème 1.2

Le but de cette section est de démontrer les deux assertions du théorème 1.2, ainsi que le théorème 1.4. Nous traitons d'abord le cas où le rang de Picard est au moins 2, puis celui d'un point fermé de degré 14. Nous prouvons ensuite le théorème 1.4 et achevons la démonstration du théorème 1.2.

8.1. **Fibrations en coniques.** Nous suivons la terminologie de [DI09]. Soit k un corps et soit $f : X \to C$ un morphisme projectif et plat, où X est une k-surface projective, lisse et géométriquement intègre, et C une k-courbe projective, lisse et géométriquement intègre. Nous disons que f est une *fibration en coniques* si toute fibre géométrique de f est soit une conique lisse, soit la réunion de deux droites distinctes se rencontrant transversalement en un point. Une fibre lisse sur le corps résiduel d'un point fermé de C peut être une conique non scindée. Nous disons que X *possède une fibration en coniques* s'il existe un tel morphisme $f : X \to C$.

8.2. **Surfaces dont le rang de Picard est au moins 2.** Nous travaillons d'abord en caractéristique nulle. Rappelons qu'une surface X sur k est *k-minimale* si tout k-morphisme birationnel de X vers une k-surface projective et lisse est un isomorphisme. D'après le critère de contractibilité de Castelnuovo, la surface X n'est pas k-minimale si et seulement s'il existe un ensemble non vide de (-1)-courbes de $\overline{X}$, deux à deux disjointes et stable par $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$; dans ce cas, la contraction de ces courbes est définie sur k ; voir [Isk79]. Nous utiliserons le théorème suivant d'Iskovskikh [Isk79, Theorem 1] ; voir aussi [DI09, Theorem 5].

Théorème 8.1. *Soit k un corps de caractéristique nulle, et soit X une k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle et k-minimale. Alors soit $\rho(X) = 1$ et $-K_X$ est ample, soit $\rho(X) = 2$ et X possède une fibration en coniques $X \to C$, où $g(C) = 0$.*

Lemme 8.2. *Soit k un corps de caractéristique nulle, et soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k qui n'est pas k-minimale. Alors il existe un k-morphisme birationnel $\pi : X \to Y$ vers une surface de del Pezzo Y de degré $(K_Y \cdot K_Y) \geq 5$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{S}$ un ensemble non vide de (-1)-courbes de $\overline{X}$, deux à deux disjointes et stable par $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, de cardinal $m \geq 1$, et soit $\pi\colon X \to Y$ la contraction de ces courbes. Notons E la somme des courbes de $\mathcal{S}$. On a $K_{\overline{X}} = \pi^* K_{\overline{Y}} + E$, $(\pi^* K_{\overline{Y}} \cdot E) = 0$ et $(E \cdot E) = -m$, d'où $(K_Y \cdot K_Y) = (K_X \cdot K_X) + m = 4 + m \geq 5$. De plus, $\pi^*(-K_{\overline{Y}}) = H + E$. Soit $C' \subset \overline{Y}$ une courbe intègre, et soit $\tilde{C} \subset \overline{X}$ son transformé strict. Par la formule de projection, on a

$$(-K_{\overline{Y}} \cdot C') = ((H+E)\cdot \tilde{C}) = (H \cdot \tilde{C}) + (E \cdot \tilde{C}) \geq 1,$$

puisque H est ample et que $\tilde{C}$ n'est pas une composante de E. Comme $(K_Y \cdot K_Y) > 0$, le critère de Nakai–Moishezon montre que $-K_Y$ est ample. Ainsi Y est une surface de del Pezzo de degré $4+m \geq 5$, comme voulu. □

Lemme 8.3. *Soit k un corps de caractéristique nulle, et soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k telle que $\mathrm{ind}(X) = 2$. Si X n'est pas k-minimale, alors X possède un point fermé de degré 2.*

Démonstration. Soit $\pi\colon X \to Y$ comme dans le lemme 8.2. Pour toute extension finie L/k telle que $Y(L) \neq \emptyset$, on a $X(L) \neq \emptyset$ par le lemme de Lang–Nishimura, appliqué à l'application rationnelle $\pi^{-1}\colon Y \dashrightarrow X$. Comme $\mathrm{ind}(X) = 2$, on a $X(k) = \emptyset$, et donc $Y(k) = \emptyset$. Par ailleurs, l'image par π d'un point fermé de X est un point fermé de Y de degré divisant le sien, de sorte que $\mathrm{ind}(Y)$ divise 2. D'après [CT26, Proposition 5.2], l'indice de la surface de del Pezzo Y, de degré au moins 5, est égal au plus petit degré d'un point fermé de Y. Comme $Y(k) = \emptyset$, on obtient $\mathrm{ind}(Y) = 2$, et Y possède un point fermé de degré 2, de corps résiduel L. On a alors $X(L) \neq \emptyset$, de sorte que X possède un point fermé de degré divisant 2, donc de degré 2, comme voulu. □

Lemme 8.4. *Soit k un corps infini, et soit $f\colon X \to \mathbb{P}^1_k$ une fibration en coniques. Alors X possède un point fermé de degré ≤ 2.*

Démonstration. Comme k est infini, il existe $u \in \mathbb{P}^1_k(k)$ tel que X_u est une conique lisse, qui admet donc un point fermé de degré ≤ 2. □

Lorsque $C(k) = \emptyset$, nous utilisons le théorème suivant, démontré par Salberger dans une partie non publiée de sa thèse [Sal85]. On donne une démonstration alternative dans l'annexe B. Lorsque $C \simeq \mathbb{P}^1_k$, un énoncé de ce type est dû à Coray et au premier auteur [CTC79].

Théorème 8.5 (Salberger)**.** *Soit k un corps, et soit $f\colon X \to C$ une fibration en coniques, où C est de genre g, dont la fibre générique n'est pas isomorphe à $\mathbb{P}^1_{k(C)}$. Notons r le nombre de fibres géométriques singulières de f. Alors tout zéro-cycle sur X de degré au moins égal à $2g + (r-3)/2$ est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.*

Lemme 8.6. *Soit k un corps de caractéristique nulle, et soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k telle que $\mathrm{ind}(X) = 2$. Si X possède une fibration en coniques $f\colon X \to C$, alors X possède un point fermé de degré 2.*

Démonstration. Comme X est géométriquement rationnelle, on a $g(C) = 0$. Si $C(k) \neq \emptyset$ alors $C \simeq \mathbb{P}^1_k$ et il suffit d'appliquer le lemme 8.4. Supposons donc $C(k) = \emptyset$. La courbe C est une conique, et possède donc un point fermé c de degré 2. Si la fibre générique de f est isomorphe à $\mathbb{P}^1_{k(C)}$, la fibration f possède une section $C \to X$, et l'image de c par cette section est un point fermé de X de degré divisant 2, donc de degré 2. Supposons enfin que la fibre générique de f n'est pas isomorphe à $\mathbb{P}^1_{k(C)}$. Par définition, les fibres géométriques singulières de f sont des réunions de deux droites distinctes se rencontrant transversalement. Notons r le nombre des fibres géométriques singulières de f. Puisque C est de genre 0, le lemme B.3 donne $(K_X \cdot K_X) = 8 - r$. Comme $(K_X \cdot K_X) = 4$, on a donc $r = 4$. Le théorème 8.5, appliqué avec $g = 0$ et $r = 4$, montre que tout zéro-cycle sur X de degré au moins 1 est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif. Comme $\mathrm{ind}(X) = 2$, la surface X possède un zéro-cycle de degré 2, et donc un zéro-cycle effectif de degré 2, dont le support est un point fermé de degré 2, comme voulu. □

Démonstration de l'assertion (2) du théorème 1.2. Supposons d'abord que k est de caractéristique nulle. Si X n'est pas k-minimale, le lemme 8.3 fournit un point fermé de degré 2. Si X est k-minimale, comme $\rho(X) \geq 2$, le théorème 8.1 montre que X possède une fibration en coniques, et le lemme 8.6 permet de conclure.

Supposons maintenant que k est de caractéristique $p > 0$. Par le lemme 2.1, il existe un anneau de Cohen A de corps résiduel k et un A-schéma projectif et lisse $\mathbf{X}$, de fibre spéciale X, dont la fibre générique W est une surface de del Pezzo de degré 4 et d'indice 2, avec $\rho(W) \geq \rho(X) \geq 2$. Par le cas de caractéristique nulle, la surface W possède un point fermé de degré 2. La spécialisation de ce point fournit un zéro-cycle effectif de degré 2 sur X ; voir [CT20a, Lemme 2.10]. Comme $\mathrm{ind}(X) = 2$, le support de ce zéro-cycle est un point fermé de degré 2, comme voulu. □

8.3. **Le cas d'un point fermé de degré 14.** Nous démontrons maintenant la proposition 8.11. Combinée au théorème 6.3 et au lemme 2.1, elle permettra de démontrer l'assertion (1) du théorème 1.2. Cet argument n'utilise pas le théorème 8.5 de Salberger : le cas d'une fibration en coniques sur une courbe de genre 0 sans point rationnel est traité par une variante de l'argument de Kollár (lemme 6.1), dans laquelle on remplace le diviseur nH par $2f^*\omega_C^{-1}$.

Lemme 8.7. *Soit k un corps de caractéristique nulle, soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k, soit $D \in \mathrm{Pic}(X)$ très ample, et posons $m := \dim |D|$ et $g := 1 + ((D \cdot D) + (D \cdot K_X))/2$. Soit P un point fermé de X de degré $s \leq m$, et soit $B \in \mathrm{Pic}(X)$ tel que $s - (B \cdot D) \geq g$. Alors X possède un zéro-cycle effectif de degré $s - (B \cdot D)$.*

Démonstration. Par le théorème 2.2 et la remarque 2.3, appliqués au plongement de X défini par $|D|$, il existe une courbe projective, lisse et géométriquement intègre $\Gamma \in |D|$ contenant un zéro-cycle effectif z de degré s. Par la formule d'adjonction, la courbe Γ est de genre g. Comme Γ est régulière, la restriction à Γ du faisceau inversible $\mathcal{O}_X(B)$ est de la forme $\mathcal{O}_\Gamma(b)$, où b est un diviseur sur Γ de degré $(B \cdot D)$. Le diviseur $z - b$ sur Γ est de degré $s - (B \cdot D) \geq g$. Par le théorème de Riemann–Roch sur Γ, il est linéairement équivalent à un zéro-cycle effectif sur Γ, et donc sur X, comme voulu. □

Lemme 8.8. *Soit k un corps de caractéristique nulle, et soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k possédant une fibration en coniques $f\colon X \to C$. Si X possède un point fermé de degré 14, alors X possède un zéro-cycle effectif de degré 6.*

Démonstration. Comme X est géométriquement rationnelle, on a $g(C) = 0$. Notons $F \in \mathrm{Pic}(\overline{X})$ la classe d'une fibre de $f_{\overline{k}}$. Une fibre géométrique générale de f est une courbe lisse de genre 0, de sorte que $(F \cdot F) = 0$ et, par la formule d'adjonction, $(H \cdot F) = 2$. Le faisceau inversible ω_C^{-1} est très ample de degré 2 sur C, de sorte que le faisceau inversible $M \coloneqq f^*\omega_C^{-1}$ sur X est engendré par ses sections globales, de classe $2F$ dans $\mathrm{Pic}(\overline{X})$. Notons que M est défini sur k, même lorsque $C(k) = \emptyset$. Posons $D \coloneqq H + 2M \in \mathrm{Pic}(X)$, de classe $H + 4F$. Comme H est très ample et que M est engendré par ses sections globales, le faisceau D est très ample. On a

$$(D \cdot D) = 20 \qquad \text{et} \qquad (D \cdot H) = 12.$$

Comme $D - K_X = 2H + 2M$ est ample et que $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$, le théorème d'annulation de Kodaira et le théorème de Riemann–Roch donnent $\dim |D| = (D \cdot (D - K_X))/2 = 16$. Avec les notations du lemme 8.7, on a $g = 1 + (20 - 12)/2 = 5$. Posons $B \coloneqq 2M$, de sorte que $(B \cdot D) = (4F \cdot (H + 4F)) = 8$ et $14 - (B \cdot D) = 6 \geq g$. Le lemme 8.7, appliqué avec $s = 14 \leq 16$, fournit un zéro-cycle effectif de degré 6 sur X, comme voulu. □

Lemme 8.9. *Soit k un corps de caractéristique nulle, et soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k telle que $\rho(X) = 1$. Alors $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$.*

Démonstration. Posons $G \coloneqq \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Comme X est projective et géométriquement intègre, la suite spectrale de Hochschild–Serre fournit une application injective $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})^G$, dont le conoyau s'injecte dans $\mathrm{Br}(k)$, et est donc de torsion. Ainsi $\mathrm{Pic}(\overline{X})^G$ est de rang 1. Comme $(H \cdot L) = 1$ pour toute droite $L \subset \overline{X}$, la classe H est primitive dans le groupe sans torsion $\mathrm{Pic}(\overline{X})$. Le sous-groupe $\mathrm{Pic}(\overline{X})^G$ étant saturé dans $\mathrm{Pic}(\overline{X})$, on obtient $\mathrm{Pic}(\overline{X})^G = \mathbb{Z}H$. Comme l'image de $\mathrm{Pic}(X)$ contient H, on a $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$, comme voulu. □

Lemme 8.10. *Soit k un corps de caractéristique nulle, et soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k. Si X possède un point fermé de degré 14, alors X possède un point fermé P' de degré 14 tel que $H^0(X, \mathcal{I}_{P'}(2H)) = 0$.*

Démonstration. Soit P un point fermé de X de degré 14, et posons $L := k(P)$. Comme $X(L) \neq \emptyset$, la L-variété X_L est L-unirationnelle (remarque 2.3), de sorte que la k-variété $R := R_{L/k}(X_L)$ est k-unirationnelle : en effet, la restriction des scalaires d'une application rationnelle dominante $\mathbb{A}^n_L \dashrightarrow X_L$ est dominante, puisque sur $\overline{k}$ elle est le produit de ses conjuguées. Comme k est infini, l'ensemble $R(k)$ est dense dans R. Notons Σ l'ensemble des k-plongements $\sigma\colon L \to \overline{k}$, de sorte que $R_{\overline{k}} \simeq \prod_{\sigma\in\Sigma} \overline{X}$, un point $r \in R(k)$ correspondant à un point $x \in X(L)$ d'image $(\sigma(x))_{\sigma\in\Sigma}$. Soit $U \subset R_{\overline{k}}$ l'ensemble des familles $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ de points deux à deux distincts tels qu'aucune section non nulle de $\mathcal{O}_{\overline{X}}(2H)$ ne s'annule en tous les x_σ. C'est un ouvert, puisque la seconde condition s'exprime par la non-annulation de mineurs d'ordre 13, et il est non vide d'après le lemme 7.1. Comme U est stable par $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, il provient d'un ouvert non vide U_0 de R. Soit $r \in U_0(k)$, et soit $x \in X(L)$ le point correspondant. Les points $\sigma(x)$, pour $\sigma \in \Sigma$, sont deux à deux distincts, de sorte que l'image P' de x est un point fermé de X de degré 14, dont les points géométriques sont les $\sigma(x)$. Par changement de base plat, on a $H^0(X, \mathcal{I}_{P'}(2H)) \otimes_k \overline{k} = H^0(\overline{X}, \mathcal{I}_{P'_{\overline{k}}}(2H)) = 0$, comme voulu. □

Proposition 8.11. *Soit k un corps de caractéristique nulle, et soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur k telle que* $\mathrm{ind}(X) = 2$. *Si X possède un point fermé de degré 14, alors X possède un point fermé de degré 2 ou 6.*

Démonstration. Comme $\mathrm{ind}(X) = 2$, tout point fermé de X est de degré pair, de sorte qu'un zéro-cycle effectif de degré 6 sur X contient un point fermé de degré 2 ou 6. Supposons d'abord $\rho(X) = 1$. D'après le lemme 8.9, on a $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$. D'après le lemme 8.10, la surface X possède un point fermé P' de degré 14 tel que $H^0(X, \mathcal{I}_{P'}(2H)) = 0$, et la proposition 7.3 fournit un zéro-cycle effectif de degré 6 sur X. Supposons enfin $\rho(X) \geq 2$. Si X n'est pas k-minimale, le lemme 8.3 fournit un point fermé de degré 2. Si X est k-minimale, le théorème 8.1 montre que X possède une fibration en coniques $f\colon X \to C$. Si $C(k) \neq \emptyset$, alors $C \simeq \mathbb{P}^1_k$ et le lemme 8.4 fournit un point fermé de degré 2. Si $C(k) = \emptyset$, le lemme 8.8 fournit un zéro-cycle effectif de degré 6 sur X, comme voulu. □

Démonstration du théorème 1.4. Soit $Z \subset X$ un sous-schéma fermé de dimension zéro et de longueur 14. Le cycle $[Z]$ est effectif de degré 14. Comme une section plane fournit un zéro-cycle de degré 4, l'indice de X divise $\gcd(4, 14) = 2$.

Supposons d'abord que $\mathrm{ind}(X) = 1$. Par le théorème d'Amer et Brumer (voir [EKM08, Corollary 18.7]), on a $X(k) \neq \emptyset$. La surface X possède donc un zéro-cycle effectif de degré 6.

Supposons maintenant que $\mathrm{ind}(X) = 2$. Tous les points fermés de X ont alors un degré pair. S'il existe un point fermé de degré 2 ou 6, le résultat est immédiat. Sinon, l'écriture de $[Z]$ comme somme de points fermés à coefficients positifs montre qu'il existe un point fermé de degré 10 ou 14. En

effet, les seuls degrés pairs strictement inférieurs à 14 qui puissent intervenir sont alors 4, 8, 10 et 12, et une somme de ces degrés égale à 14 contient nécessairement le degré 10.

Si X possède un point fermé de degré 10, le lemme 6.1, appliqué avec $n = 2$ et $s = 10$, donne un zéro-cycle effectif de degré $4 \cdot 2^2 - 10 = 6$, puisque $10+1 \leq 2 \cdot 2 \cdot 3$. Si X possède un point fermé de degré 14, la proposition 8.11 donne un point fermé de degré 2 ou 6, et donc aussi un zéro-cycle effectif de degré 6, comme voulu. □

Démonstration de l'assertion (1) du théorème 1.2. Supposons d'abord que k est de caractéristique nulle. D'après le théorème 6.3, la surface X possède un point fermé de degré 2, 6 ou 14. Dans le dernier cas, le théorème 1.4, démontré ci-dessus, fournit un zéro-cycle effectif de degré 6, dont le support contient un point fermé de degré 2 ou 6 puisque $\mathrm{ind}(X) = 2$.

Supposons maintenant que k est de caractéristique $p > 0$. Par le lemme 2.1, il existe un anneau de Cohen A de corps résiduel k et un A-schéma projectif et lisse $\mathbf{X}$, de fibre spéciale X, dont la fibre générique W est une surface de del Pezzo de degré 4 et d'indice 2. Comme le corps des fractions de A est de caractéristique nulle, le cas déjà traité montre que W possède un point fermé de degré $e \in \{2, 6\}$. Par spécialisation, on obtient un zéro-cycle effectif de degré e sur X ; voir [CT20a, Lemme 2.10]. Puisque $\mathrm{ind}(X) = 2$, tous les points fermés de X ont un degré pair. Le support de ce zéro-cycle contient donc un point fermé de degré 2 ou 6, comme voulu. □

Annexe A. Spécialisation de la famille universelle

Dans cette annexe, nous supprimons les hypothèses sur $\mathrm{Pic}(X)$ et sur $H^0(X, \mathcal{I}_P(2H))$ de la proposition 7.3 en passant à la surface de del Pezzo générique. Nous obtenons ainsi une démonstration alternative du théorème 1.4.

Lemme A.1. *Soit $n \geq 0$ un entier, soit B une $\mathbb{Q}$-variété intègre lisse, soit $f\colon \mathcal{X} \to B$ une famille projective lisse de surfaces géométriquement intègres, soit $T := \mathrm{Hilb}^n(\mathcal{X}/B)$, et soit $\pi\colon T \to B$ le morphisme structural. Supposons que T soit intègre et lisse sur $\mathbb{Q}$. Si la surface $\mathcal{X} \times_B \operatorname{Spec} \mathbb{Q}(T)$ possède un zéro-cycle effectif de degré m, alors, pour tout corps k de caractéristique nulle et tout $t \in T(k)$, la surface $\mathcal{X}_{\pi(t)} := \mathcal{X} \times_B \operatorname{Spec} k$ possède un zéro-cycle effectif de degré m.*

Démonstration. Notons $\tau \in T$ l'image de t. Comme $\mathcal{X}_{\pi(t)}$ s'obtient à partir de la fibre $\mathcal{X}_\tau$ de $\mathcal{X} \times_B T \to T$ par l'extension $k/\kappa(\tau)$, et que cette extension préserve les zéro-cycles effectifs et leurs degrés, il suffit de traiter $\mathcal{X}_\tau$. L'anneau local $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{T,\tau}$ est régulier. Soit $t_1, \ldots, t_d$ un système régulier de paramètres, et notons K_i le corps des fractions de $\mathcal{O}_i := \mathcal{O}/(t_1, \ldots, t_i)$, de sorte que $K_0 = \mathbb{Q}(T)$ et $K_d = \kappa(\tau)$. Pour $0 \leq i < d$, le localisé $(\mathcal{O}_i)_{(t_{i+1})}$ est un anneau de valuation discrète excellent, de corps des fractions K_i et de corps résiduel K_{i+1}. En appliquant [CT20a, Lemme 2.10] à chaque point

fermé du support, puis par récurrence sur i, on obtient un zéro-cycle effectif de degré m sur $\mathcal{X}_\tau$, comme voulu. □

Démonstration alternative du théorème 1.4. Soit $B \subset \mathbb{A}^{30}_{\mathbb{Q}}$ l'ouvert des couples (q_1, q_2) de formes quadratiques en cinq variables dont le lieu des zéros communs dans $\mathbb{P}^4$ est une surface lisse, soit $\mathcal{X} \subset B \times \mathbb{P}^4_{\mathbb{Q}}$ le sous-schéma défini par $q_1 = q_2 = 0$, et soit $f\colon \mathcal{X} \to B$ la projection. Par adjonction, les fibres de f sont des surfaces de del Pezzo de degré 4 de classe anticanonique H égale à la classe hyperplane. Posons $T \coloneqq \mathrm{Hilb}^{14}(\mathcal{X}/B)$, notons $\pi\colon T \to B$ le morphisme structural, et posons $F \coloneqq \mathbb{Q}(B)$, $K \coloneqq \mathbb{Q}(T)$, $X_F \coloneqq \mathcal{X} \times_B \operatorname{Spec} F$ et $X_K \coloneqq \mathcal{X} \times_B \operatorname{Spec} K$.

Soient k et X comme dans le théorème 1.4, et soit $Z \subset X$ un sous-schéma fermé de dimension zéro et de longueur 14. D'après [Kol96, III, Theorem 3.5], le système $|H|$ plonge X dans $\mathbb{P}^4_k$ comme intersection complète de deux quadriques. On obtient ainsi un point $b \in B(k)$ tel que $X \simeq \mathcal{X}_b$, et Z définit un point $t \in T(k)$ au-dessus de b. D'après le lemme A.1, appliqué avec $n = 14$ et $m = 6$, il suffit de montrer les deux assertions suivantes :

(1) le schéma T est intègre et lisse sur $\mathbb{Q}$, et l'extension K/F est régulière ;

(2) la surface X_K possède un zéro-cycle effectif de degré 6.

Montrons (1). Notons $U \subset T$ l'ouvert paramétrant les sous-schémas réduits, et $\Delta \subset \mathcal{X}_B^{14}$ la grande diagonale du produit fibré $\mathcal{X}_B^{14}$. On a $U \simeq (\mathcal{X}_B^{14} \smallsetminus \Delta)/\mathfrak{S}_{14}$, et ce schéma est intègre puisque B est intègre et que f est lisse à fibres géométriquement intègres. Pour tout $b \in B$, comme $\mathcal{X}_b$ est une surface projective lisse géométriquement irréductible, la fibre $T_b = \mathrm{Hilb}^{14}(\mathcal{X}_b)$ est lisse et géométriquement irréductible de dimension 28 par [Fog68], et U_b y est dense. Ainsi U est dense dans T, le schéma T est irréductible de dimension $\dim B + 28$, et T_F est géométriquement intègre, c'est-à-dire que K/F est régulière. Soit $x \in T$ un point fermé, et posons $b \coloneqq \pi(x)$. La suite exacte

$$(\mathfrak{m}_b/\mathfrak{m}_b^2) \otimes_{\kappa(b)} \kappa(x) \longrightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_{T_b,x}/\mathfrak{m}_{T_b,x}^2 \longrightarrow 0$$

donne $\dim_{\kappa(x)} \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \leq \dim B + 28 = \dim \mathcal{O}_{T,x}$. L'anneau local $\mathcal{O}_{T,x}$ est donc régulier, et par localisation T est régulier en tout point. Ainsi T est lisse sur $\mathbb{Q}$, et intègre. Ceci démontre (1).

Pour démontrer (2), nous vérifions les hypothèses de la proposition 7.3 pour X_K.

Montrons d'abord que $\mathrm{Pic}(X_F) = \mathbb{Z}H$. Soit $V \subset \mathbb{A}^{30}_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{P}^4_{\mathbb{Q}}$ le schéma d'incidence défini par $q_1(x) = q_2(x) = 0$. La projection $V \to \mathbb{P}^4_{\mathbb{Q}}$ fait de V un fibré vectoriel de rang 28, de sorte que V est lisse et que $\mathrm{Pic}(V)$ est engendré par la classe hyperplane [Ful98, Theorem 3.3(a)]. L'application $\mathrm{Pic}(V) \to \mathrm{Pic}(X_F)$ est surjective, et $\mathrm{Pic}(X_F)$ est donc engendré par H.

Posons $G_F \coloneqq \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, et montrons ensuite que $\mathrm{Pic}(X_{\overline{F}})^{G_F} = \mathbb{Z}H$. Le quotient $\mathrm{Pic}(X_{\overline{F}})^{G_F}/\mathrm{Pic}(X_F)$ est de type fini et, comme il s'injecte dans $\mathrm{Br}(F)$, de torsion. Comme $(H \cdot L) = 1$ pour toute droite $L \subset X_{\overline{F}}$,

la classe H est primitive dans le groupe sans torsion $\mathrm{Pic}(X_{\overline{F}})$, et donc $\mathrm{Pic}(X_{\overline{F}})^{G_F} = \mathbb{Z}H$.

Puisque $H^1(X_F, \mathcal{O}_{X_F}) = 0$, l'application $\mathrm{Pic}(X_{\overline{F}}) \to \mathrm{Pic}(X_{\overline{K}})$ est un isomorphisme, et l'action galoisienne se factorise par le groupe de Galois d'une extension galoisienne finie F'/F. L'extension K/F étant régulière, les corps K et F' sont linéairement disjoints sur F, et l'on obtient $\mathrm{Pic}(X_{\overline{K}})^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)} = \mathbb{Z}H$. Comme $\mathrm{Pic}(X_K) \to \mathrm{Pic}(X_{\overline{K}})$ est injective et que son image contient H, on obtient

$$\mathrm{Pic}(X_K) = \mathbb{Z}H. \tag{A.1}$$

Soit $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X} \times_B T$ le sous-schéma universel, et soit $P := \mathcal{Z}_K \subset X_K$ sa fibre générique. Au-dessus de U, le morphisme $\mathcal{Z} \to T$ est le revêtement fini étale de degré 14

$$(\mathcal{X}_B^{14} \smallsetminus \Delta)/\mathfrak{S}_{13} \longrightarrow (\mathcal{X}_B^{14} \smallsetminus \Delta)/\mathfrak{S}_{14},$$

dont la source est intègre. Le point générique de T appartenant à U, le schéma P est le spectre d'un corps de degré 14 sur K, c'est-à-dire un point fermé de degré 14 de X_K.

Il reste à montrer que $H^0(X_K, \mathcal{I}_P(2H)) = 0$. Pour tout $b \in B$, on a $2H = K_{\mathcal{X}_b} + 3H$ avec $3H$ ample, et le théorème d'annulation de Kodaira donne $H^i(\mathcal{X}_b, \mathcal{O}(2H)) = 0$ pour $i > 0$; le théorème de Riemann–Roch donne alors $h^0(\mathcal{X}_b, \mathcal{O}(2H)) = 13$. Par le théorème de Grauert [Har77, III, Corollary 12.9], le faisceau $f_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(2H)$ est localement libre de rang 13 et, pour tout $b \in B$, l'application $f_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(2H) \otimes \kappa(b) \to H^0(\mathcal{X}_b, \mathcal{O}(2H))$ est un isomorphisme. Par changement de base plat [Har77, III, Proposition 9.3], la fibre de $\pi^* f_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(2H)$ en $\tau \in T$ est donc $H^0(\mathcal{X}_\tau, \mathcal{O}(2H))$. D'autre part, le morphisme $\mathcal{Z} \to T$ est plat et propre à fibres de longueur 14, donc fini [Har77, III, Exercise 11.2]. Posons $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}(2H) := (\mathrm{pr}_{\mathcal{X}}^* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(2H))|_{\mathcal{Z}}$. Ce faisceau est inversible sur $\mathcal{Z}$, donc plat sur T, et le faisceau $\mathcal{E} := (\mathcal{Z} \to T)_*\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}(2H)$ est ainsi cohérent et plat, donc localement libre de rang 14. Comme $\mathcal{Z} \to T$ est affine, la fibre de $\mathcal{E}$ en τ est $H^0(\mathcal{Z}_\tau, \mathcal{O}_{\mathcal{Z}_\tau}(2H))$. La restriction des sections fournit un morphisme de fibrés vectoriels $\varphi\colon \pi^* f_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(2H) \to \mathcal{E}$, dont la fibre en τ est la restriction $H^0(\mathcal{X}_\tau, \mathcal{O}(2H)) \to H^0(\mathcal{Z}_\tau, \mathcal{O}_{\mathcal{Z}_\tau}(2H))$. Par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{Z}_\tau}(2H) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\tau}(2H) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{Z}_\tau}(2H) \longrightarrow 0,$$

son noyau est $H^0(\mathcal{X}_\tau, \mathcal{I}_{\mathcal{Z}_\tau}(2H))$. Le lieu où $\varphi(\tau)$ est injective est ouvert, puisqu'il est défini par la non-annulation des mineurs d'ordre 13.

Cet ouvert est non vide. En effet, soient $b \in B$ un point fermé et Ω une clôture algébrique de $\kappa(b)$. D'après le lemme 7.1, il existe des points $x_1, \dots, x_{14} \in \mathcal{X}_b(\Omega)$ deux à deux distincts tels qu'aucune section non nulle de $\mathcal{O}(2H)$ ne s'annule en $x_1, \dots, x_{14}$. Ces points définissent un Ω-point de T, dont l'image $\tau \in T$ appartient à l'ouvert ci-dessus, puisque l'injectivité ne dépend pas de l'extension de corps. Cet ouvert contient donc le point générique de T, et $H^0(X_K, \mathcal{I}_P(2H)) = 0$.

La proposition 7.3, appliquée à X_K et à P grâce à (A.1), démontre (2), et donc le théorème. □

Démonstration alternative du théorème 1.2(1). Supposons d'abord que k est de caractéristique nulle. D'après le théorème 6.3, la surface X possède un point fermé de degré 2, 6 ou 14. Dans le dernier cas, le théorème 1.4 fournit un zéro-cycle effectif de degré 6 sur X. Comme $\mathrm{ind}(X) = 2$, ce zéro-cycle contient un point fermé de degré 2 ou 6.

Supposons maintenant que k est de caractéristique positive. Par le lemme 2.1, il existe un anneau de Cohen A de corps résiduel k et un A-schéma projectif et lisse $\mathbf{X}$, de fibre spéciale X, dont la fibre générique W est une surface de del Pezzo de degré 4 et d'indice 2. Le cas de caractéristique nulle fournit un point fermé de W de degré 2 ou 6. Par spécialisation, on obtient un zéro-cycle effectif de même degré sur X ; voir [CT20a, Lemme 2.10]. Puisque $\mathrm{ind}(X) = 2$, ce zéro-cycle contient un point fermé de degré 2 ou 6, comme voulu. □

Annexe B. Un théorème de Salberger

Théorème B.1 (Salberger)**.** *Soit k un corps, et soit $f\colon X \to C$ une fibration en coniques, où C est de genre g, dont la fibre générique n'est pas isomorphe à $\mathbb{P}^1_{k(C)}$. Notons r le nombre de fibres géométriques singulières de f. Alors tout zéro-cycle z sur X tel que $\deg(z) \geq 2g + (r-3)/2$ est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.*

Remarque B.2. Le théorème reste valable si l'on suppose seulement que $f\colon X \to C$ est un morphisme propre et plat entre une surface projective lisse et une courbe projective lisse, dont la fibre générique est une conique lisse non scindée.

En effet, en contractant successivement des familles de (-1)-courbes verticales deux à deux disjointes et stables par conjugaison, on se ramène à une fibration en coniques au sens de la section 8 sans augmenter le nombre de fibres géométriques singulières. Le résultat découle alors du théorème B.1 et du fait que, pour un morphisme birationnel entre surfaces projectives lisses $Y \to Z$, si tout zéro-cycle d'un degré donné sur Z est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif, il en est de même sur Y.

B.1. **Calculs numériques et construction d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}_0$.** Pour une fibration en coniques $f\colon X \to C$ avec X lisse et projective, on pose

$$\omega_f \coloneqq \omega_X \otimes f^*\omega_C^{-1}, \qquad K_f \coloneqq K_X - f^*K_C.$$

Lemme B.3. *Soit $f\colon X \to C$ une fibration en coniques, où C est une courbe projective lisse de genre g, et soit r le nombre de ses fibres géométriques singulières. Alors*

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = 1 - g, \qquad (K_X, K_X) = 8(1-g) - r, \qquad (K_f, K_f) = -r,$$

où (K_f, K_f) désigne le degré de $K_f \cdot K_f$. En outre, pour tout diviseur D sur C,

$$(f^*D, f^*D) = 0, \qquad (K_f, f^*D) = -2\deg(D).$$

Démonstration. On peut supposer $k = \bar{k}$. Toute fibre géométrique singulière de f est la réunion de deux droites distinctes, de self-intersection -1, se rencontrant transversalement en un point. Donc toutes les fibres F de f sont connexes et vérifient $h^0(\mathcal{O}_F) = 1$ et $h^1(\mathcal{O}_F) = 0$, le théorème de changement de base donne $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_C$ et $R^1 f_*\mathcal{O}_X = 0$, d'où $\chi(X, \mathcal{O}_X) = \chi(C, \mathcal{O}_C) = 1 - g$.

Le morphisme f est lisse sauf aux points singuliers des fibres singulières. Le morphisme différentiel définit une section $df \in H^0(X, \Omega^1_X \otimes f^*\omega_C^{-1})$ dont le schéma des zéros a longueur 1 à chaque point singulier, donc longueur totale r. La formule de la classe de Chern supérieure donne

$$r = \deg c_2(\Omega^1_X \otimes f^*\omega_C^{-1}) = \deg c_2(X) - (K_X, f^*K_C), \tag{B.1}$$

car $(f^*K_C, f^*K_C) = 0$.

Pour toute fibre F, on a $(F, F) = 0$ et, par adjonction, $(K_X, F) = -2$. On en déduit, pour tout diviseur D sur C,

$$(f^*D, f^*D) = 0, \qquad (K_f, f^*D) = -2\deg(D).$$

En particulier,

$$(K_X, f^*K_C) = -2\deg K_C = 4(1 - g).$$

La formule de Noether $(K_X, K_X) + \deg c_2(X) = 12\chi(X, \mathcal{O}_X)$ donne alors, par (B.1),

$$(K_X, K_X) = 12(1 - g) - (r + 4(1 - g)) = 8(1 - g) - r.$$

Enfin,

$$(K_f, K_f) = (K_X - f^*K_C, K_X - f^*K_C) = (K_X, K_X) - 2(K_X, f^*K_C) = -r,$$

comme souhaité. □

Lemme B.4. *Soit $f\colon X \to C$ une fibration en coniques avec X lisse et projective. Il existe un fibré de rang deux $\mathcal{E}_0$ muni d'une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{E}_0 \longrightarrow \omega_f^{-1} \longrightarrow 0 \tag{B.2}$$

qui vérifie $c_1(\mathcal{E}_0) = -K_f$ et $c_2(\mathcal{E}_0) = 0$ et dont la restriction à toute fibre géométrique lisse est $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus 2}$.

Démonstration. La dualité relative et le changement de base pour les familles de courbes de Gorenstein donnent $f_*\omega_f = 0$ et $R^1 f_*\omega_f \simeq \mathcal{O}_C$, le deuxième isomorphisme étant donné par la trace, qui sont compatibles avec changement de base ; voir [Sta, Tags 0E6N, 0E6P et 0E6R]. Par la suite spectrale de Leray,

$$\mathrm{Ext}^1_X(\omega_f^{-1}, \mathcal{O}_X) = H^1(X, \omega_f) \simeq H^0(C, R^1 f_*\omega_f) = k.$$

On prend la classe correspondant à $1 \in k$. Sur toute fibre géométrique lisse, elle devient la classe non nulle de $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-2))$, puisque la trace la transforme en 1. La suite restreinte est donc l'extension non triviale

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{E}_0|_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \longrightarrow 0.$$

La formule de Whitney appliquée à (B.2) donne $c(\mathcal{E}_0) = c(\mathcal{O}_X)c(\omega_f^{-1}) = 1 - K_f$, d'où $c_1(\mathcal{E}_0) = -K_f$ et $c_2(\mathcal{E}_0) = 0$. □

Pour un fibré V de rang deux et un diviseur G, le principe de scindage donne

$$\begin{aligned} c_1(V(G)) &= c_1(V) + 2G, \\ c_2(V(G)) &= c_2(V) + c_1(V) \cdot G + G^2. \end{aligned} \tag{B.3}$$

B.2. **Transformations élémentaires.** Nous modifierons $\mathcal{E}_0$ en utilisant les transformations élémentaires suivantes.

Lemme B.5. *Soit $c \in C$ un point fermé tel que $F \coloneqq f^{-1}(c)$ soit une conique lisse scindée, soit $p \in F(k(c))$, et soit $\mathcal{E}$ un fibré de rang deux sur X tel que $\mathcal{E}|_F \simeq L^{\oplus 2}$, où $L \coloneqq \mathcal{O}_F(p)$. Il existe deux fibrés $\mathcal{E}^-$ et $\mathcal{E}^+$ dont les restrictions à toute fibre de f sont isomorphes à celles de $\mathcal{E}$ tels que*

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{E}^-) &= c_1(\mathcal{E}) - F, \quad c_2(\mathcal{E}^-) = c_2(\mathcal{E}) - [p], \\ c_1(\mathcal{E}^+) &= c_1(\mathcal{E}) + F, \quad c_2(\mathcal{E}^+) = c_2(\mathcal{E}) + [p]. \end{aligned}$$

La construction de $\mathcal{E}^-$ est celle de [Bal94, Construction 2.1], et l'on pose $\mathcal{E}^+ \coloneqq \mathcal{E}^-(F)$. Notons toutefois que nous travaillons sur un corps de base arbitraire et que les identités entre classes de Chern sont des égalités dans les groupes de Chow de X, et non seulement des égalités numériques.

Démonstration. On pose $i\colon F \hookrightarrow X$ l'immersion fermée. Comme $\mathcal{E}|_F \simeq L \oplus L$, on trouve une surjection scindée $\mathcal{E}_F \twoheadrightarrow L$ de noyau L. Le morphisme composé $\mathcal{E} \twoheadrightarrow i_*(\mathcal{E}|_F) \twoheadrightarrow i_*L$ est donc surjectif. On définit $\mathcal{E}^-$ par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^- \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow i_*L \longrightarrow 0. \tag{B.4}$$

Le noyau $\mathcal{E}^-$ est localement libre : si t est une équation locale de F et si la projection est $\mathcal{O}_X^2 \to \mathcal{O}_X/(t)$, $(a, b) \mapsto b \bmod t$, son noyau est $\mathcal{O}_X e_1 \oplus t\mathcal{O}_X e_2$.

En considerant la résolution de $i_*\mathcal{O}_F$ par $\mathcal{O}_X(-F) \to \mathcal{O}_X$, on obtient un isomorphisme

$$\operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_X}(i_*L, i_*\mathcal{O}_F) \simeq i_*(L \otimes \mathcal{O}_F(-F))$$

et donc une suite exacte courte sur F :

$$0 \longrightarrow L \otimes \mathcal{O}_F(-F) \longrightarrow \mathcal{E}^-|_F \longrightarrow L \longrightarrow 0.$$

Comme $F = f^*[c]$, son fibré normal est trivial : $\mathcal{O}_F(F) \simeq \mathcal{O}_F$. De plus, $\operatorname{Ext}^1_F(L, L) = H^1(F, \mathcal{O}_F) = 0$, et donc $\mathcal{E}^-|_F \simeq L^{\oplus 2}$.

Nous calculons maintenant les classes de Chern. On utilisera l'égalité $c(\mathcal{O}_p) = 1 - [p]$, qui est le cas de codimension deux de la formule pour

la classe d'un faisceau structural de sous-schéma régulier ; voir [Ful98, §§3.2 et 15.1]. La section de $L = \mathcal{O}_F(p)$ de diviseur p donne

$$[i_*L] = [i_*\mathcal{O}_F] + [\mathcal{O}_p] = [\mathcal{O}_X] - [\mathcal{O}_X(-F)] + [\mathcal{O}_p] \quad \text{dans } K_0(X),$$

ce qui entraîne

$$c(i_*L) = c(\mathcal{O}_X)\, c(\mathcal{O}_p)\, c(\mathcal{O}_X(-F))^{-1} = (1-[p])(1-F)^{-1}$$

et

$$c(\mathcal{E}^-) = c(\mathcal{E})\, c(i_*L)^{-1} = c(\mathcal{E})(1-F)(1-[p])^{-1} = c(\mathcal{E})(1-F+[p]),$$

où l'on a utilisé $F^2 = 0$. On obtient

$$c_1(\mathcal{E}^-) = c_1(\mathcal{E}) - F, \qquad c_2(\mathcal{E}^-) = c_2(\mathcal{E}) - c_1(\mathcal{E})\cdot F + [p]. \tag{B.5}$$

La formule de projection pour l'immersion fermée i et l'isomorphisme $\mathcal{E}|_F \simeq L^{\oplus 2}$ donnent $c_1(\mathcal{E})\cdot F = i_*c_1(L^{\oplus 2}) = 2[p]$ dans $\mathrm{CH}_0(X)$. La seconde égalité de (B.5) devient donc $c_2(\mathcal{E}^-) = c_2(\mathcal{E}) - [p]$.

Si on pose $\mathcal{E}^+ \coloneqq \mathcal{E}^-(F)$ alors, comme $F^2 = 0$, la formule (B.3) donne $c_1(\mathcal{E}^+) = c_1(\mathcal{E}) + F$ et

$$c_2(\mathcal{E}^+) = c_2(\mathcal{E}^-) + c_1(\mathcal{E}^-)\cdot F = c_2(\mathcal{E}) - [p] + 2[p] = c_2(\mathcal{E}) + [p].$$

La restriction de $\mathcal{O}_X(F)$ à chaque fibre est triviale, ce qui achève la preuve. □

Lemme B.6. *Soit $c \in C$ un point fermé dont la fibre $F \coloneqq f^{-1}(c)$ est une conique lisse non scindée. Soit ξ_c un point fermé de degré 2 de F, et soit $\mathcal{E}$ un fibré de rang deux sur X tel que $\det(\mathcal{E})|_F \simeq \omega_F^{-1}$. Alors*

$$c_1(\mathcal{E}(F)) = c_1(\mathcal{E}) + 2F, \qquad c_2(\mathcal{E}(F)) = c_2(\mathcal{E}) + [\xi_c],$$
$$c_1(\mathcal{E}(-F)) = c_1(\mathcal{E}) - 2F, \quad c_2(\mathcal{E}(-F)) = c_2(\mathcal{E}) - [\xi_c].$$

Démonstration. La formule (B.3) et l'égalité $F^2 = 0$ donnent $c_2(\mathcal{E}(F)) - c_2(\mathcal{E}) = c_1(\mathcal{E})\cdot F$. Par projection,

$$c_1(\mathcal{E})\cdot F = i_*c_1(\det(\mathcal{E})|_F) = i_*c_1(\omega_F^{-1}) = [\xi_c].$$

Puisque $F^2 = 0$, la dernière égalité résulte de $\omega_F^{-1} \simeq \mathcal{O}_F(1)$ pour une conique plane. Pour $-F$, la formule (B.3) donne le signe opposé. □

B.3. **Construction du fibré vectoriel $\mathcal{E}$ et fin de preuve.**

Proposition B.7. *Soit k un corps, soit C une courbe projective lisse sur k, soit $f\colon X \to C$ une fibration en coniques telle que X soit lisse, et soit z un zéro-cycle de degré n sur X. Il existe un diviseur D sur C et un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang deux sur X tels que*

$$\deg D = n, \quad c_2(\mathcal{E}) = [z], \quad \det(\mathcal{E}) \simeq \omega_f^{-1} \otimes f^*\mathcal{O}_C(D), \tag{B.6}$$

et tels que $\mathcal{E}|_F \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus 2}$ pour toute fibre géométrique lisse F de f.

Démonstration. Par le lemme de déplacement pour les zéro-cycles [Rob72, Appendice 2], on peut supposer que z est supporté sur les fibres lisses de f. Pour chaque point fermé c de C tel que la fibre X_c rencontre le support de z, la classe dans $\mathrm{CH}_0(X_c)$ de la partie de z supportée par X_c est de la forme $a_c[p_c]$ si X_c est scindée, et $a_c[\xi_c]$ sinon, où $a_c \in \mathbb{Z}$, $p_c \in X_c(k(c))$, et ξ_c est un point fermé de degré 2 de X_c. Le nombre de fibres concernées est fini.

Partons du fibré $\mathcal{E}_0$ du lemme B.4. Pour chaque fibre scindée, appliquons $|a_c|$ fois la transformation du lemme B.5 de signe correspondant. Pour chaque fibre non scindée, effectuons le twist par $a_c X_c$. Les restrictions aux fibres lisses restent $\mathcal{O}(1)^{\oplus 2}$ après extension des scalaires, et le deuxième Chern devient $[z]$.

Le déterminant est modifié par $\mathcal{O}_X(a_c X_c)$ dans le cas scindé, et par $\mathcal{O}_X(2a_c X_c)$ dans le cas non scindé. Si on pose

$$D \coloneqq \sum_{c \text{ scindé}} a_c[c] + \sum_{c \text{ non scindé}} 2a_c[c]$$

alors

$$\deg z = \sum_{c \text{ scindé}} a_c[k(c) : k] + \sum_{c \text{ non scindé}} 2a_c[k(c) : k] = \deg D,$$

ce qui prouve (B.6). □

Démonstration du théorème B.1. Comme $f\colon X \to C$ est une fibration en coniques, toute fibre géométrique singulière est, par définition, la réunion de deux droites distinctes se coupant transversalement.

Soit $n \coloneqq \deg z$. Par la proposition B.7, il existe un fibré $\mathcal{E}$ de rang deux sur C et un diviseur D sur C tels que $c_2(\mathcal{E}) = [z]$, $\deg D = n$ et

$$L \coloneqq c_1(\mathcal{E}) = -K_f + f^*D.$$

Par le lemme B.3, on a

$$\begin{aligned} (L, L) &= (K_f, K_f) - 2(K_f, f^*D) + (f^*D, f^*D) = -r + 4n, \\ (L, K_X) &= (-K_f + f^*D, K_f + f^*K_C) \\ &= -(K_f, K_f) - (K_f, f^*K_C) + (f^*D, K_f) \\ &= r + 4g - 4 - 2n. \end{aligned} \tag{B.7}$$

Par le théorème de Riemann–Roch,

$$\begin{aligned} \chi(X, \mathcal{E}) &= 2\chi(X, \mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}(L, L - K_X) - \deg c_2(\mathcal{E}) \\ &= 2(1-g) + \frac{1}{2}((-r + 4n) - (r + 4g - 4 - 2n)) - n \\ &= 2n + 4(1-g) - r. \end{aligned} \tag{B.8}$$

Par dualité de Serre, $H^2(X, \mathcal{E})$ est dual de $H^0(X, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_X)$. La restriction de $\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_X$ à la fibre générique géométrique est $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 2} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \simeq$

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-3)^{\oplus 2}$, ce qui entraîne $H^0(X, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_X) = 0$ et donc $H^2(X, \mathcal{E}) = 0$. Par (B.8), l'hypothèse $n \geq 2g + (r-3)/2$ implique alors

$$h^0(X, \mathcal{E}) \geq \chi(X, \mathcal{E}) \geq 1.$$

On choisit une section non nulle s de $\mathcal{E}$. On montre que s n'a aucun zéro sur la fibre générique F sur $K \coloneqq k(C)$. En effet, sur $\overline{K}$ le fibré est $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus 2}$ et deux formes linéaires non toutes deux nulles ont soit aucun zéro commun, soit un unique zéro commun, de longueur 1. Dans le second cas, le schéma des zéros de s descend à un point de degré 1 sur F, ce qui donne $F(K) \neq \varnothing$ et contredit l'hypothèse que la fibre générique est une conique qui n'est pas isomorphe à $\mathbb{P}^1_{k(C)}$.

Soit V le diviseur effectif des zéros de s de codimension un : d'après le paragraphe précédent, c'est un diviseur effectif vertical. La section s s'écrit $s_V s'$, où s_V est la section canonique de $\mathcal{O}_X(V)$ et s' est une section de $\mathcal{E}(-V)$ dont le schéma des zéros Z est de dimension zéro (ou vide). Ainsi $c_2(\mathcal{E}(-V)) = [Z]$ et la formule (B.3), appliquée à $-V$, donne

$$[Z] = c_2(\mathcal{E}) - c_1(\mathcal{E}) \cdot V + V^2.$$

Comme $c_1(\mathcal{E}) = -K_f + f^*D$ et que $f^*D \cdot V = 0$ pour tout diviseur vertical V, on obtient

$$[z] = [Z] + (-K_f - V) \cdot V \quad \text{dans } \mathrm{CH}_0(X). \tag{B.9}$$

Il reste à prouver que le second terme est représenté par un cycle effectif.

Puisque les composantes de V sont contenues dans des fibres fermées distinctes, on peut raisonner fibre par fibre, les produits d'intersection entre fibres distinctes étant nuls. Soit $c \in C$ un point fermé.

Supposons d'abord que la fibre X_c est lisse. Le diviseur V supporté sur X_c est mX_c, pour un entier $m \geq 0$. Comme $X_c^2 = 0$, on a

$$(-K_f - mX_c) \cdot mX_c = m(-K_f \cdot X_c).$$

La classe $-K_f \cdot X_c$ est celle d'une section hyperplane de la conique X_c, donc d'un zéro-cycle effectif de degré 2 sur $k(c)$.

Supposons maintenant que X_c est singulière et que ses deux composantes A et B sont définies sur $k(c)$. Leur point d'intersection q est rationnel sur $k(c)$. Nous avons dans $\mathrm{CH}_0(X)$ les relations

$$A \cdot B = [q], \qquad A^2 = B^2 = -[q], \qquad -K_f \cdot A = -K_f \cdot B = [q]. \tag{B.10}$$

La première provient de la transversalité ; la deuxième résulte de $(A+B)\cdot A = (A+B)\cdot B = 0$; la dernière vient de $\omega_f^{-1}|_A \simeq \mathcal{O}_A(1)$ et de $A \simeq \mathbb{P}^1_{k(c)}$, et de même pour B.

Écrivons $V_c = aA + bB$ avec $a, b \geq 0$. Par (B.10),

$$\begin{aligned}(-K_f - V_c) \cdot V_c &= a(-K_f \cdot A) + b(-K_f \cdot B) - a^2A^2 - 2ab(A \cdot B) - b^2B^2 \\ &= (a + b + a^2 - 2ab + b^2)[q] \\ &= (a + b + (a-b)^2)[q].\end{aligned}$$

est effectif.

Supposons enfin que X_c est singulière et que ses deux composantes géométriques sont conjuguées sur $k(c)$. Leur point d'intersection q est rationnel sur $k(c)$. Le diviseur V étant défini sur k, ses multiplicités sur ces deux composantes sont égales. Ainsi $V_c = mX_c$ pour un entier $m \geq 0$. Une droite de $\mathbb{P}^2_{k(c)}$ passant par q, et ne contenant aucune composante, découpe sur la conique singulière le cycle $2[q]$. Donc

$$(-K_f - V_c) \cdot V_c = m(-K_f \cdot X_c) = 2m[q],$$

qui est encore effectif.

En sommant les contributions des fibres, on voit que $(-K_f - V) \cdot V$ est représenté par un zéro-cycle effectif. Le cycle $[Z]$ est effectif lui aussi. L'égalité (B.9) montre donc que $[z]$ est représenté par un zéro-cycle effectif, comme souhaité. □

Références

[Bal94] E. Ballico, *On the geography of ample and spanned vector bundles on algebraic surfaces*, Japan. J. Math. (N.S.) **19** (1994), no. 2, 311–323. 24

[CT20a] J.-L. Colliot-Thélène, *Zéro-cycles sur les surfaces de del Pezzo (Variations sur un thème de Daniel Coray)*, Enseign. Math. (2) **66** (2020), no. 3-4, 447–487. 3, 4, 6, 16, 19, 22

[CT20b] J.-L. Colliot-Thélène, *Closed points on del Pezzo surfaces of degree* 4 *and index* 2, avec des contributions de J. Kollár, note non publiée, 2020. 3, 4

[CT24] J.-L. Colliot-Thélène, *Retour sur l'arithmétique des intersections de deux quadriques*, avec un appendice par A. Kuznetsov, J. reine angew. Math. **806** (2024), 147–185. 2

[CT26] J.-L. Colliot-Thélène, *Zéro-cycles sur les surfaces de del Pezzo : erratum et compléments*, prépublication, octobre 2026. 3, 4, 6, 15

[CTC79] J.-L. Colliot-Thélène et D. Coray, *L'équivalence rationnelle sur les points fermés des surfaces rationnelles fibrées en coniques*, Compositio Math. **39** (1979), no. 3, 301–332. 15

[Cor76] D. F. Coray, *Algebraic points on cubic hypersurfaces*, Acta Arith. **30** (1976), no. 3, 267–296. 3

[CV23] B. Creutz and B. Viray, *Quadratic points on intersections of two quadrics*, Algebra & Number Theory **17** (2023), no. 8, 1411–1452. 2

[CV25] B. Creutz and B. Viray, *Quartic del Pezzo surfaces without quadratic points*, Pacific J. Math. **337** (2025), no. 2, 215–224. 2, 3

[DI09] I. V. Dolgachev and V. A. Iskovskikh, *On elements of prime order in the plane Cremona group over a perfect field*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2009**, no. 18, 3467–3485. 14

[EKM08] R. Elman, N. Karpenko and A. Merkurjev, *The algebraic and geometric theory of quadratic forms*, American Mathematical Society Colloquium Publications **56**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. 1, 6, 18

[Fog68] J. Fogarty, *Algebraic families on an algebraic surface*, Amer. J. Math. **90** (1968), 511–521. 20

[Ful98] W. Fulton, *Intersection theory*, second edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) **2**, Springer-Verlag, Berlin, 1998. 13, 20, 25

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, New York, 1977. 21

[Isk79] V. A. Iskovskikh, *Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), no. 1, 19–43 ; traduction anglaise dans Math. USSR-Izv. **14** (1980), no. 1, 17–39. 14

[Kol96] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) **32**, Springer-Verlag, Berlin, 1996. 5, 20

[Rei88] I. Reider, *Vector bundles of rank* 2 *and linear systems on algebraic surfaces*, Ann. of Math. (2) **127** (1988), no. 2, 309–316. 3, 8, 11

[Rob72] J. Roberts, *Chow's moving lemma*, appendice 2 à S. Kleiman, *Motives*, dans *Algebraic Geometry, Oslo 1970*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972, 89–96. 26

[Sal85] P. Salberger, *Class groups of orders and Chow groups of their Brauer-Severi schemes*, dans *K-theory of orders and their Brauer-Severi schemes*, Chalmers University of Technology and the University of Göteborg, s-412 96 Göteborg, Suède, 1985, non publiée. 4, 15

[Sta] The Stacks Project Authors, *The Stacks Project*, https://stacks.math.columbia.edu. 6, 23

[Voi26] C. Voisin, *Rank* 2 *vector bundles and degrees of points of del Pezzo surfaces*, J. reine angew. Math. **836** (2026), 303–327. 3, 4, 12, 13, 14

CNRS, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Saclay, 307 rue Michel Magat, 91400, Orsay, France

Email address: jean-louis.colliot-thelene@universite-paris-saclay.fr

CNRS, Institut Galilée, Université Sorbonne Paris Nord, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430, Villetaneuse, France

Email address: scavia@math.univ-paris13.fr