

quatrième série - tome 49 fascicule 2 mars-avril 2016

*ANNALES
SCIENTIFIQUES
de
L'ÉCOLE
NORMALE
SUPÉRIEURE*

Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE & Alena PIRUTKA

Hypersurfaces quartiques de dimension 3 : non-rationalité stable

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure

Publiées avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Responsable du comité de rédaction / *Editor-in-chief*

Antoine CHAMBERT-LOIR

Publication fondée en 1864 par Louis Pasteur

Continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par C. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
de 1918 à 1941 par É. PICARD
de 1942 à 1967 par P. MONTEL

Comité de rédaction au 1^{er} janvier 2016

N. ANANTHARAMAN I. GALLAGHER
P. BERNARD B. KLEINER
E. BREUILLARD E. KOWALSKI
R. CERF M. MUSTAȚĂ
A. CHAMBERT-LOIR L. SALOFF-COSTE

Rédaction / *Editor*

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.
Tél. : (33) 1 44 32 20 88. Fax : (33) 1 44 32 20 80.
annales@ens.fr

Édition / *Publication*

Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99
Fax : (33) 01 40 46 90 96

Abonnements / *Subscriptions*

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 09
Fax : (33) 04 91 41 17 51
email : smf@smf.univ-mrs.fr

Tarifs

Europe : 515 €. Hors Europe : 545 €. Vente au numéro : 77 €.

© 2016 Société Mathématique de France, Paris

En application de la loi du 1^{er} juillet 1992, il est interdit de reproduire, même partiellement, la présente publication sans l'autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

All rights reserved. No part of this publication may be translated, reproduced, stored in a retrieval system or transmitted in any form or by any other means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without prior permission of the publisher.

HYPERSURFACES QUARTIQUES DE DIMENSION 3 : NON-RATIONALITÉ STABLE

PAR JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE ET ALENA PIRUTKA

RÉSUMÉ. – Inspirés par un argument de C. Voisin, nous montrons l’existence d’hypersurfaces quartiques lisses de dimension 3 sur les complexes qui ne sont pas stablement rationnelles, plus précisément dont le groupe de Chow de degré zéro n’est pas universellement égal à \mathbb{Z} . La méthode de spécialisation adoptée ici permet de construire des exemples définis sur un corps de nombres.

ABSTRACT. – There are (many) smooth quartic threefolds over the complex field which are not stably rational. More precisely, their degree zero Chow group is not universally equal to \mathbb{Z} . The proof uses a variation of a method due to C. Voisin. The specialisation argument we use yields examples defined over a number field.

Introduction

Soit $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$ une hypersurface quartique lisse. Dans [15], Iskovskikh et Manin montrent que tout automorphisme birationnel de X est un automorphisme, ce qui implique que le groupe des automorphismes birationnels est fini et que la variété de Fano X n’est pas rationnelle. Des choix convenables de X donnent alors des contre-exemples au théorème de Lüroth pour les solides.

Cette méthode, dite de rigidité birationnelle, a depuis été fort développée. Elle ne permet pas de répondre à la question de la rationalité stable de ces variétés, que l’on trouve posée explicitement dans [14].

Artin et Mumford [1] construisirent d’autres exemples de solides X/\mathbb{C} projectifs et lisses qui sont unirationnels mais non rationnels. L’invariant qu’ils utilisèrent est le sous-groupe de torsion $H^3(X, \mathbb{Z})_{\text{tors}}$ du troisième groupe de cohomologie de Betti, isomorphe pour un solide projectif et lisse au groupe $H^4(X, \mathbb{Z})_{\text{tors}}$. Pour toute variété X/\mathbb{C} projective et lisse rationnellement connexe, le groupe $H^3(X, \mathbb{Z})_{\text{tors}}$ est isomorphe à un autre invariant birationnel, le groupe de Brauer $\text{Br}(X)$. Ce groupe est nul pour toute variété X/\mathbb{C} stablement rationnelle, et même pour toute variété rétracte rationnelle. Leurs exemples ne sont donc pas stablement rationnels. La méthode ne peut s’appliquer directement aux variétés intersections

complètes lisses de dimension au moins 3 dans un espace projectif $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^n$, car le groupe de Brauer de telles variétés est nul.

Dans un récent article [25], C. Voisin a montré qu'un solide lisse revêtement double de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^3$ ramifié le long d'une surface quartique lisse très générale n'est pas stablement rationnel. Elle utilise une famille propre $f : X \rightarrow B$ de variétés, de base une courbe B lisse, d'espace total une variété lisse X , dont une fibre spéciale Y est un solide d'Artin-Mumford, de désingularisation $Z \rightarrow Y$. Utilisant le fait que le solide Y n'a que des singularités quadratiques ordinaires, par un argument de spécialisation, elle montre que si une fibre très générale de f admettait une décomposition de Chow de la diagonale, alors il en serait de même pour la variété lisse Z . Ceci impliquerait que la torsion du groupe $H^3(Z, \mathbb{Z})$, est nulle, ce qui d'après Artin et Mumford n'est pas le cas. Ainsi une fibre très générale de f n'est pas stablement rationnelle.

Dans le présent article, nous montrons qu'une hypersurface quartique très générale dans $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^4$ n'est pas stablement rationnelle. Pour ce faire, nous relâchons les hypothèses dans la méthode de C. Voisin. D'une part nous autorisons l'espace total X à ne pas être lisse, d'autre part nous relâchons l'hypothèse sur le diviseur exceptionnel d'une résolution des singularités $Z \rightarrow Y$. Que l'on puisse un peu relâcher cette dernière hypothèse est déjà mentionné dans [25, remarque 1.2].

Nous donnons deux versions assez différentes de l'argument de spécialisation, l'un purement en termes de groupes de Chow des zéro-cycles (§ 1), l'autre, essentiellement celui de Claire Voisin [25], en termes de correspondances (§ 2). Un point essentiel de notre démonstration utilise l'homomorphisme de spécialisation de Fulton, qui existe sous des hypothèses très larges.

Nous exhibons une hypersurface quartique singulière Y birationnelle à un solide d'Artin-Mumford, dont nous construisons une résolution des singularités $Z \rightarrow Y$. Nous avons relégué cette construction à l'appendice A. Nous montrons que le diviseur exceptionnel remplit les conditions suffisantes dégagées aux paragraphes précédents pour faire fonctionner la méthode de spécialisation.

Le résultat de spécialisation de zéro-cycles (§ 1) montre qu'une déformation générique de cette hypersurface quartique Z n'est pas géométriquement stablement rationnelle, ni même rétracte rationnelle.

Le point de vue des correspondances (§ 2) établit la non-rationalité stable pour les hypersurfaces quartiques « très générales » sur le corps des complexes.

Le point de vue « groupe de Chow de zéro-cycles » (§ 1) établit l'existence d'hypersurfaces quartiques non stablement rationnelles définies sur une clôture algébrique de $\mathbb{Q}(t)$, et montre que les paramètres de telles hypersurfaces sont denses pour la topologie de Zariski sur l'espace projectif paramétrant ces variétés (théorème 1.17). En utilisant des spécialisations sur un corps fini, on peut même, comme nous l'a obligamment indiqué O. Wittenberg, établir l'existence de telles hypersurfaces définies sur la clôture algébrique de \mathbb{Q} (théorème 1.20).

Un exemple de quartique singulière Y dans $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^4$ avec une résolution des singularités $Z \rightarrow Y$ satisfaisant les deux conditions : la torsion de $H^4(Z, \mathbb{Z})$ est non nulle, et le diviseur exceptionnel E satisfait les conditions suffisantes mentionnées ci-dessus, avait déjà été construit par J. Huh [14]. Pour l'exemple que nous construisons, point n'est besoin

de calculer la torsion de $H^4(Z, \mathbb{Z})$: il suffit de renvoyer à l'article d'Artin et Mumford, ou au calcul birationnel du groupe de Brauer de Z [5, exemple 2.5].

Le formalisme du §1 permet aussi d'établir la non-rationalité stable, sur leur corps de définition, de certaines variétés. Pour k un corps p -adique, ou un corps de nombres, nous montrons ainsi l'existence d'hypersurfaces cubiques lisses de dimension 3 définies sur k et qui ne sont pas stablement k -rationnelles (théorème 1.21).

Soit k un corps. Une k -variété est un k -schéma séparé de type fini. Une k -variété intègre est dite k -rationnelle si elle est k -birationnelle à un espace projectif \mathbf{P}_k^n . Une k -variété intègre X est dite stablement k -rationnelle s'il existe des espaces projectifs \mathbf{P}_k^n et \mathbf{P}_k^m tels que $X \times_k \mathbf{P}_k^n$ est k -birationnel à \mathbf{P}_k^m . Une k -variété intègre X est dite rétracte rationnelle s'il existe des ouverts de Zariski non vides $U \subset X$ et $V \subset \mathbf{P}_k^m$ (m convenable), et des k -morphisms $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow U$ tels que le composé $g \circ f$ est l'identité de U . Une k -variété intègre stablement k -rationnelle est rétracte rationnelle.

Soit X une k -variété projective intègre. On dit qu'un k -morphisme $Z \rightarrow X$ est une désingularisation de X si Z est une k -variété projective lisse intègre et le morphisme f est k -birationnel, c'est-à-dire qu'il induit un isomorphisme $k(X) \xrightarrow{\sim} k(Z)$.

1. Groupe de Chow des zéro-cycles et spécialisations

Soit k un corps.

DÉFINITION 1.1. – On dit qu'un k -morphisme propre $f : X \rightarrow Y$ de k -variétés est universellement CH_0 -trivial si, pour tout corps F contenant k , l'application induite $f_* : CH_0(X_F) \rightarrow CH_0(Y_F)$ sur les groupes de Chow de zéro-cycles est un isomorphisme.

Dans le cas particulier du morphisme structural d'une k -variété, on a la définition suivante.

DÉFINITION 1.2. – On dit qu'une k -variété propre X est universellement CH_0 -triviale si son groupe de Chow de degré zéro est universellement égal à \mathbb{Z} , c'est-à-dire si, pour tout corps F contenant k , l'application degré $deg_F : CH_0(X_F) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.

Une telle k -variété X est géométriquement connexe et possède un zéro-cycle de degré 1 sur le corps k .

EXEMPLE 1.3. – Soient $X_i \subset \mathbf{P}_k^n$, $i = 1, 2$, deux k -variétés fermées universellement CH_0 -triviales. Si $X_1 \cap X_2$ contient un point rationnel ou plus généralement un zéro-cycle de degré 1, alors la k -variété $X := X_1 \cup X_2$ est universellement CH_0 -triviale.

PROPOSITION 1.4. – Soit X une k -variété propre, lisse, géométriquement intègre de dimension n .

Soit K le corps des fonctions rationnelles de X . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) La k -variété X est universellement CH_0 -triviale.
- (ii) La k -variété X possède un zéro-cycle de degré 1, et la flèche $deg_K : CH_0(X_K) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.

(iii) Il existe une sous-variété fermée $D \subset X$ de codimension 1, un zéro-cycle z_0 de degré 1 sur X et un cycle $Z \in Z_n(X \times X)$ supporté dans $D \times X$, tels que le cycle

$$\Delta_X - Z - X \times z_0 \in Z_n(X \times X)$$

ait une classe nulle dans $CH_n(X \times X)$.

Si ces conditions sont satisfaites, la propriété (iii) vaut en y remplaçant z_0 par tout autre zéro-cycle de degré 1.

Démonstration. – Voir [2, Lemma 1.3]), qui utilise la théorie des correspondances sur les variétés propres et lisses sur un corps [10, Chap. 16]. \square

Dans la situation du point (iii) de la proposition, on dit que l'on a une *décomposition de Chow de la diagonale de la k -variété X* .

LEMME 1.5. – Soit X une k -variété intègre projective et lisse. Si la k -variété X est rétracte rationnelle, c'est une k -variété universellement CH_0 -triviale.

Démonstration. – Par hypothèse, il existe $U \subset X$ et $V \subset \mathbf{P}_k^n$ des ouverts non vides, et $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow U$ des k -morphisms tels que $g \circ f$ soit l'identité de U .

Supposons que V possède un k -point A , ce qui est certainement le cas si k est infini. Soit Q un point fermé de V tel que l'inclusion naturelle de corps résiduels $k(g(Q)) \subset k(Q)$ soit un isomorphisme. Notons $F = k(Q)$. Comme F est un quotient de $F \otimes_k F$, il existe un point F -rationnel R de V_F d'image Q par la projection $V_F \rightarrow V$. Il existe une F -droite projective $L \subset \mathbf{P}_F^n$ passant par les points F -rationnels A_F et R . L'application g_F induit une F -application rationnelle de la droite L vers $U_F \subset X_F$ et donc un F -morphisme de L vers la F -variété propre X_F . Ainsi le zéro-cycle $g_F(R) - g_F(A_F)$ est rationnellement équivalent à zéro sur X_F , et donc le zéro-cycle $g_*(Q) - [F : k]g(A)$, qui est son image par la projection $X_F \rightarrow X$, est rationnellement équivalent à zéro sur X .

Soit z un zéro-cycle de degré zéro sur X . Par un lemme de déplacement facile ([4, Complément, p. 599] pour k parfait infini, [11, Cor. 6.7] pour k quelconque), ce zéro-cycle est rationnellement équivalent sur X à un zéro-cycle $z_1 = \sum_P n_P P$ de degré zéro à support dans U .

Comme $g \circ f$ est l'identité, les points fermés P et $f(P)$ ont des corps résiduels isomorphes. Par l'argument précédent, chaque zéro-cycle

$$P - [k(P) : k]g(A) = g_* f_*(P) - [k(P) : k]g(A)$$

est rationnellement équivalent à zéro sur X . Donc le zéro-cycle de degré zéro $z_1 = \sum_P n_P P$ est rationnellement équivalent à zéro sur X . Il en est donc de même de z sur X .

Le cas d'un corps fini se traite par un argument de corestriction-restriction, par extension à des extensions finies de degrés premiers entre eux sur lesquelles V possède un point rationnel. \square

REMARQUE 1.6. – Comme nous l'avait indiqué A. Merkurjev, ce lemme est aussi une conséquence du fait, dû à M. Rost, que CH_0 s'étend à la catégorie des correspondances rationnelles. La démonstration [16, Cor. RC.12] n'utilise pas la résolution des singularités.

LEMME 1.7. – Soient X et Y deux k -variétés géométriquement intègres. S'il existe un corps L contenant k tel que l'une des propriétés suivantes est satisfaite :

- (i) X_L est L -birationnelle à Y_L ,
- (ii) X_L est L -rationnelle,
- (iii) X_L est stablement L -rationnelle,
- (iv) X_L est une L -variété rétracte rationnelle,

alors cette propriété vaut pour une extension L finie convenable de k .

Démonstration. – Montrons (i). On se ramène au cas où k est algébriquement clos et $L = k(Z)$ est le corps des fonctions d’une k -variété intègre. Les k -variétés $X \times_k Z$ et $Y \times_k Z$ sont birationnellement équivalentes par une équivalence qui respecte la projection sur Z . Il existe des ouverts non vides $U \subset X \times_k Z$ et $V \subset Y \times_k Z$ qui sont k -isomorphes. Il existe une extension finie F de k et un F -point de Z tel que les fibres au-dessus de ce point soient des ouverts non vides de X , resp. de Y , et qui soient isomorphes. Ceci établit l’énoncé dans le cas (i), lequel implique immédiatement l’énoncé dans les cas (ii) et (iii). La démonstration dans le cas (iv) est analogue. □

PROPOSITION 1.8. – Soit $f : Z \rightarrow Y$ un k -morphisme propre de k -variétés algébriques. Les hypothèses suivantes sont équivalentes :

- (i) Pour tout point M du schéma Y , de corps résiduel $\kappa(M)$, la fibre Z_M est une $\kappa(M)$ -variété universellement CH_0 -triviale.
- (ii) Pour tout corps F contenant k et tout point $M \in Y(F)$, la fibre Z_M est une F -variété CH_0 -triviale.

Elles impliquent que le k -morphisme f est universellement CH_0 -trivial.

Démonstration. – L’équivalence des deux hypothèses est immédiate. Pour établir l’énoncé, il suffit de montrer que pour $F = k$, la flèche $f_* : CH_0(Z) \rightarrow CH_0(Y)$ est un isomorphisme. L’hypothèse assure immédiatement que la flèche $f_* : CH_0(Z) \rightarrow CH_0(Y)$ est surjective. Soit z un zéro-cycle sur Z . Si $f_*(z)$ est rationnellement équivalent à zéro sur Y , alors il existe des courbes fermées intègres $C_i \subset Y$ et des fonctions rationnelles $g_i \in k(C_i)$ telles que $f_*(z) = \sum_i \text{div}_{C_i}(g_i)$. En appliquant l’hypothèse au corps des fonctions des courbes C_i , on trouve des courbes fermées intègres $D_i^j \subset Z$ en nombre fini telles que f induise des morphismes finis surjectifs $f_i^j : D_i^j \rightarrow C_i$ tels que, pour chaque i , on ait une égalité $\sum_j n_i^j \text{deg}(f_i^j) = 1$, avec les $n_i^j \in \mathbb{Z}$. On note encore g_i la fonction rationnelle sur D_i^j image réciproque par f_i^j de la fonction rationnelle g_i sur C_i . Le zéro-cycle $z' := z - \sum_i [\sum_j n_i^j \text{div}_{D_i^j}(g_i)]$ sur Z satisfait $f_*(z') = 0$ comme zéro-cycle sur Y . Il existe donc des points fermés Q_j de Y en nombre fini tels que le zéro-cycle z' soit sur Z somme de zéro-cycles z_j , chaque z_j étant supporté sur la fibre $Z_{Q_j} = f^{-1}(Q_j)$. L’hypothèse assure que chacun des z_j est rationnellement équivalent à zéro sur Z_{Q_j} , donc sur Z . Ainsi z est rationnellement équivalent à zéro sur X . La flèche $f_* : CH_0(Z) \rightarrow CH_0(Y)$ est donc injective. □

PROPOSITION 1.9. – Soit $f : Z \rightarrow Y$ un k -morphisme propre birationnel de k -variétés algébriques projectives géométriquement intègres. Supposons :

- (i) La k -variété Z est lisse et possède un zéro-cycle de degré 1.
- (ii) Le k -morphisme f est universellement CH_0 -trivial.

- (iii) *Il existe un ouvert non vide $U \subset Y$ lisse sur k , d'image réciproque $V = f^{-1}(U) \subset Z$ tel que $f : V \rightarrow U$ soit un isomorphisme, et tel que pour tout corps F contenant k , tout zéro-cycle de degré zéro à support dans U_F est rationnellement équivalent à zéro sur Y_F .*

Alors la k -variété Z est universellement CH_0 -triviale.

Démonstration. – Les hypothèses étant invariantes par changement de corps $k \subset F$, il suffit d'établir que sous les hypothèses ci-dessus la flèche $deg_k : CH_0(Z) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. D'après (i), la flèche est surjective. Un lemme de déplacement facile et classique assure que tout zéro-cycle de degré zéro sur la k -variété lisse Z est rationnellement équivalent à un zéro-cycle de degré zéro dont le support est dans V . D'après (iii), l'image du cycle $f_*(z)$ dans $CH_0(Y)$ est nulle. L'hypothèse (ii) assure que $f_* : CH_0(Z) \rightarrow CH_0(Y)$ est un isomorphisme. Comme cet isomorphisme respecte le degré, on conclut que la flèche $deg_k : CH_0(Z) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. \square

PROPOSITION 1.10. – *Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et de corps résiduel k . Soit \mathcal{X} un A -schéma propre et plat, $X = \mathcal{X} \times_A K$ la fibre générique et $Y = \mathcal{X} \times_A k$ la fibre spéciale.*

- (i) *On a une application naturelle de spécialisation $CH_0(X) \rightarrow CH_0(Y)$; elle est compatible avec les applications degré à valeurs dans \mathbb{Z} .*
- (ii) *Si A est hensélien et X/K géométriquement intègre possède une désingularisation $p : \tilde{X} \rightarrow X$ telle que la flèche $deg_K : CH_0(\tilde{X}) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme, alors tout zéro-cycle de degré zéro de Y à support dans le lieu lisse Y_{lisse} de Y a une classe nulle dans $CH_0(Y)$.*

Démonstration. – L'énoncé (i) est un cas particulier de la construction d'homomorphismes de spécialisation (Fulton [10, Prop. 2.6], [9, § 4]).

Montrons (ii). Soit $X_{\text{lisse}} \subset X$ l'ouvert de lissité. Soit $U \subset X_{\text{lisse}}$ un ouvert non vide tel que la flèche induite $p : p^{-1}(U) \rightarrow U$ soit un isomorphisme. Par Hensel, un zéro-cycle z de degré zéro sur Y_{lisse} se relève en un zéro-cycle z_1 , de degré zéro, supporté sur X_{lisse} . Un lemme de déplacement facile assure que le zéro-cycle z_1 est rationnellement équivalent dans X à un zéro-cycle z_2 , de degré zéro, dont le support est dans U . Le zéro-cycle z_2 est l'image par p d'un zéro-cycle de degré zéro z_3 sur \tilde{X} . L'application composée $CH_0(\tilde{X}) \rightarrow CH_0(X) \rightarrow CH_0(Y)$ envoie la classe de z_3 sur la classe de z . Or, par hypothèse, $z_3 = 0 \in CH_0(\tilde{X})$. \square

REMARQUE 1.11. – Pour la construction de l'homomorphisme de spécialisation, nous avons cité [10, § 2, Prop. 2.6]) et non la référence plus évidente [10, § 20.3]). La raison est que la démonstration donnée dans [10, § 20.3]) passe par [10, Theorem 6.3] et donc par la déformation au cône normal [10, § 5], résultat établi pour les variétés au-dessus d'un corps. Or nous ne voulons pas nous limiter au cas où A est un anneau local d'une courbe lisse sur un corps.

On renvoie à [22] pour la théorie des modules de cycles de Rost (voir aussi les rappels dans [21] et [2]). Rappelons que pour k un corps et n un entier inversible dans ce corps, les groupes de cohomologie étale $H^i(\bullet, \mu_n^{\otimes j})$ définissent une théorie des modules de

cycles sur les k -variétés, et que pour Y une k -variété projective intègre de désingularisation $Z \rightarrow Y$, le groupe de cohomologie non ramifiée $H_{nr}^2(k(Y)/k, \mu_n)$ s'identifie au sous-groupe de n -torsion du groupe de Brauer $\text{Br}(Z)$.

THÉORÈME 1.12. – *Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et de corps résiduel k . Soit \mathcal{X} un A -schéma fidèlement plat et propre sur A à fibres géométriquement intègres.*

Supposons que la fibre spéciale $Y = \mathcal{X} \times_A k$ possède une désingularisation $f : Z \rightarrow Y$, avec Z lisse sur k , telle que le morphisme f est universellement CH_0 -trivial, et que Z possède un zéro-cycle de degré 1.

Supposons que la fibre générique $X = \mathcal{X} \times_A K$ admet une résolution des singularités $\tilde{X} \rightarrow X$, avec \tilde{X} lisse sur K .

Chacun des énoncés (i), (ii), (iii) ci-dessous implique le suivant :

- (i) *La K -variété X est rétracte rationnelle.*
- (ii) *La K -variété \tilde{X} est universellement CH_0 -triviale.*
- (iii) *La k -variété Z est universellement CH_0 -triviale.*

Cette dernière propriété implique :

- (a) *Pour tout module de cycles M^i sur le corps k , pour tout corps L contenant k , et tout $i \geq 0$, la flèche $M^i(L) \rightarrow M_{nr}^i(L(Z)/L)$ est un isomorphisme.*
- (b) *Pour tout corps L contenant k , la flèche naturelle $\text{Br}(L) \rightarrow \text{Br}(Z_L)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. – Supposons (i). Le lemme 1.5 donne alors (ii). Supposons (ii). Comme la fibre Y est géométriquement intègre, son point générique η est régulier sur \mathcal{X} , l'anneau local $O_{\mathcal{X},\eta}$ de \mathcal{X} en ce point générique est un anneau de valuation discrète de corps des fractions le corps des fonctions $K(X)$ de X et de corps résiduel le corps des fonctions $k(Y)$ de Y . Notons B le complété de l'anneau de valuation discrète $O_{\mathcal{X},\eta}$. Soit F le corps des fractions de B . Le corps résiduel de B est $k(Y) = k(Z)$. La flèche naturelle $A \rightarrow B$ est un homomorphisme local, induisant $k \rightarrow k(Y)$ sur les corps résiduels. On considère le B -schéma $\mathcal{X} \times_A B$. Sa fibre générique est $X \times_K F$, qui admet la désingularisation $\tilde{X} \times_K F \rightarrow X \times_K F$. Sa fibre spéciale est $Y \times_k k(Y)$, qui admet la désingularisation $Z_{k(Y)} \rightarrow Y_{k(Y)}$. Le $k(Y)$ -morphisme $Z_{k(Y)} \rightarrow Y_{k(Y)}$ est universellement CH_0 -trivial.

L'hypothèse (ii) assure que le degré $\text{deg}_F : CH_0(\tilde{X}_F) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. Une application des propositions 1.9 et 1.10 au B -schéma $\mathcal{X} \times_A B$ montre alors que la flèche degré $CH_0(Z_{k(Z)}) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. La proposition 1.4 appliquée à la k -variété Z assure alors que cette variété est universellement CH_0 -triviale. \square

REMARQUE 1.13. – On peut se dispenser de passer par l'anneau $O_{\mathcal{X},\eta}$. De fait, pour tout anneau de valuation discrète A de corps résiduel k et tout corps F contenant k , il existe un anneau de valuation discrète B de corps résiduel F et un homomorphisme local de A dans B induisant l'inclusion $k \subset F$ (J-P. Serre nous signale les énoncés généraux de Bourbaki sur le « gonflement des anneaux locaux » [3, Chap. IX, appendice, § 2, Corollaire du théorème 1, et Exercice 4].)

THÉORÈME 1.14. – Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et de corps résiduel k algébriquement clos. Soit \mathcal{X} un A -schéma fidèlement plat et propre sur A à fibres géométriquement intègres.

Supposons que la fibre spéciale $Y = \mathcal{X} \times_A k$ possède une désingularisation $f : Z \rightarrow Y$ telle que le morphisme f est universellement CH_0 -trivial.

Soit \bar{K} une clôture algébrique de K . Supposons que la fibre générique géométrique $\bar{X} := \mathcal{X} \times_A \bar{K}$ admet une désingularisation $\tilde{X} \rightarrow \bar{X}$.

Chacun des énoncés (i), (ii), (iii) ci-dessous implique le suivant :

- (i) La \bar{K} -variété \bar{X} est rétracte rationnelle.
- (ii) La \bar{K} -variété \tilde{X} est universellement CH_0 -triviale.
- (iii) La k -variété Z est universellement CH_0 -triviale.

Cette dernière propriété implique :

- (a) Pour tout module de cycles M^i sur le corps k , pour tout corps L contenant k , et tout $i \geq 0$, la flèche $M^i(L) \rightarrow M_{nr}^i(L(Z)/L)$ est un isomorphisme.
- (b) Pour tout corps L contenant k , la flèche naturelle $\text{Br}(L) \rightarrow \text{Br}(Z_L)$ est un isomorphisme.
- (c) $\text{Br}(Z) = 0$.

Démonstration. – Supposons (i). Le lemme 1.5 donne alors (ii). Supposons (ii). Quitte à remplacer l'anneau de valuation discrète A par son complété, on peut supposer A complet. Il existe une sous-extension finie $K \subset L \subset \bar{K}$, une L -variété propre et lisse W avec $W \times_L \bar{K} = \tilde{X}$ munie d'un L -morphisme $W \rightarrow X_L$ qui par changement de base de L à \bar{K} s'identifie à $\tilde{X} \rightarrow \bar{X}$. La proposition 1.4 montre que quitte à remplacer L par une extension finie, on peut supposer que la L -variété W est universellement CH_0 -triviale. Comme A est complet, la fermeture intégrale B de A dans L est un anneau de valuation discrète complet ([23, Chap. II, §2, Prop. 3]). Son corps résiduel est k . Une application du théorème 1.12 au B -schéma $\mathcal{X} \times_A B$ termine la démonstration. \square

REMARQUE 1.15. – Ce théorème étend le théorème [25, Thm. 1.1 (i)] de C. Voisin, qui porte sur le cas $k = \mathbb{C}$, \mathcal{X} schéma régulier et Y à singularités quadratiques ordinaires.

REMARQUE 1.16. – Dans la démonstration, même si \mathcal{X} est régulier, le changement de base $A \rightarrow B$ peut donner naissance à un schéma $\mathcal{X} \times_A B$ qui n'est pas régulier. Mais la fibre spéciale ne change pas.

THÉORÈME 1.17. – Dans l'espace projectif \mathbf{P}^N paramétrant les hypersurfaces quartiques dans $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^4$, l'ensemble E des points de $\mathbf{P}^N(\mathbb{C})$ paramétrant une quartique non rétracte rationnelle, et donc en particulier non stablement rationnelle, est Zariski-dense. Fixons un plongement $\bar{\mathbb{Q}}(t) \subset \mathbb{C}$. Le sous-ensemble de E formé des points dont les coordonnées sont dans $\bar{\mathbb{Q}}(t)$ est Zariski dense dans \mathbf{P}^N .

Démonstration. – Soit $W \subset \mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^N$ le fermé correspondant aux quartiques singulières. D'après l'appendice A, ou d'après J. Huh [14], il existe une quartique singulière Y définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et une résolution des singularités $f : Z \rightarrow Y$ telles que le $\bar{\mathbb{Q}}$ -morphisme f est universellement CH_0 -trivial et que $\text{Br}(Z_{\mathbb{C}}) \neq 0$, ce qui implique $\text{Br}(Z) \neq 0$. Soit $D = \mathbf{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^1 \subset \mathbf{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^N$ une droite passant par un $\bar{\mathbb{Q}}$ -point $M \in \mathbf{P}^N$ associé à la quartique Y , et non contenue

dans $W_{\overline{\mathbb{Q}}}$. Soit A l'anneau local de la droite D au point M , et soit K son corps des fonctions. Le théorème 1.14 implique que la quartique lisse sur $K = \overline{\mathbb{Q}}(t)$ correspondant au point générique de D n'est pas géométriquement rétracte rationnelle.

Tout choix d'un point R de $D(\mathbb{C}) \setminus D(\overline{\mathbb{Q}})$ définit un plongement $\overline{\mathbb{Q}}(D) \hookrightarrow \mathbb{C}$, qui définit un plongement d'une clôture algébrique de $\overline{\mathbb{Q}}(D)$ dans \mathbb{C} . Par le lemme 1.7, la quartique lisse associée au point $R \in D(\mathbb{C}) \subset \mathbf{P}^N(\mathbb{C})$ n'est donc pas rétracte rationnelle.

On voit donc que, pour tout point R de $\mathbf{P}^N(\mathbb{C})$ non dans $\mathbf{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ et non dans W tel que la droite joignant R et M soit définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, la quartique lisse associée à R n'est pas rétracte rationnelle. \square

REMARQUE 1.18. – Soit Y un revêtement double d'une surface quartique d'Artin-Mumford [1] définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. La variété Y a exactement 10 points singuliers quadratiques ordinaires. Une désingularisation $Z \rightarrow Y$ s'obtient par éclatement de ces 10 points, au-dessus de chacun de ces points on a une quadrique lisse de dimension 2. La proposition 1.8 montre immédiatement que le morphisme de désingularisation est universellement CH_0 -trivial.

On retrouve ici le théorème de C. Voisin [25, Cor. 1.4] : *Dans l'espace projectif \mathbf{P}^N paramétrant les surfaces quartiques $f = 0$ dans $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^3$, l'ensemble des points de $\mathbf{P}^N(\mathbb{C})$ tels que le revêtement double associé $z^2 - f = 0$ dans l'espace multihomogène $\mathbf{P}(2, 1, 1, 1, 1)$ ne soit pas une variété stablement rationnelle est Zariski-dense.*

REMARQUE 1.19. – La démonstration du théorème 1.17 que nous avons donnée repose sur le théorème 1.14, donc sur le théorème 1.12, donc sur l'opération de spécialisation des zéro-cycles $CH_0(X) \rightarrow CH_0(Y)$, où X , resp. Y , est la fibre générique, resp. la fibre spéciale, d'un A -schéma propre fidèlement plat sur un anneau de valuation discrète A de corps des fractions K et de corps résiduel k (proposition 1.10).

On pourrait si l'on voulait ignorer cette opération en la remplaçant par l'opération de spécialisation de la R -équivalence $X(K)/R \rightarrow Y(k)/R$, facile à définir [20]. Pour K de caractéristique zéro, cette méthode suffit à montrer les implications (i) \implies (iii) dans les théorèmes 1.12 et 1.14. L'hypothèse de caractéristique zéro est utilisée pour montrer, via le théorème d'Hironaka, que sous l'hypothèse (i) du théorème 1.12, la R -équivalence sur $\tilde{X}(K)$ est triviale (en utilisant [6, Prop. 10]).

Nous remercions O. Wittenberg de nous avoir suggéré l'énoncé suivant.

THÉORÈME 1.20. – *Il existe des hypersurfaces quartiques lisses $X \subset \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^4$ définies sur la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de \mathbb{Q} dans \mathbb{C} , et qui ne sont pas universellement CH_0 -triviales, en particulier qui ne sont pas rétractes rationnelles.*

Démonstration. – Soit $Y \subset \mathbf{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^4$ une quartique singulière possédant une résolution des singularités $f : Z \rightarrow Y$ comme construite dans l'appendice A. Le morphisme f est universellement CH_0 -trivial. Le sous-groupe de torsion 2-primaire $\text{Br}(Z)\{2\}$ du groupe de Brauer $\text{Br}(Z)$ est non nul. Dans la situation considérée, où Z est une variété rationnellement connexe, donc satisfait $H^2(Z, O_Z) = 0$ et donc $\rho = b_2$, le groupe $\text{Br}(Z)\{2\}$ s'identifie au sous-groupe de torsion 2-primaire $H_{\text{ét}}^3(Z, \mathbb{Z}_2)\{2\}$ du troisième groupe de cohomologie 2-adique ([13, II, § 3 ; III, § 8]).

D'après la description des fibres de f donnée dans la proposition A.5 de l'appendice A, il existe une extension finie K de \mathbb{Q} sur laquelle Z, Y et $Z \rightarrow Y$ sont définis et sur laquelle $f : Z \rightarrow Y$ est un K -morphisme universellement CH_0 -trivial.

Il existe un ouvert U non vide du spectre de l'anneau des entiers de K , des U -schémas Z, Y et un U -morphisme $Z \rightarrow Y$ étendant $Z \rightarrow Y$, de telle sorte que pour toute place $v \in U$, on obtienne par réduction une situation analogue $Z_{\kappa(v)} \rightarrow Y_{\kappa(v)}$ sur le corps fini résiduel $\kappa(v)$: c'est une résolution des singularités de $Y_{\kappa(v)}$, et la flèche $Z_{\kappa(v)} \rightarrow Y_{\kappa(v)}$ est universellement CH_0 -triviale. On peut supposer que U ne contient pas de place 2-adique. Soit S l'ensemble fini des nombres premiers qui sont caractéristiques résiduelles du complémentaire de U dans le spectre de l'anneau des entiers de k . Notons $\overline{\kappa(v)}$ une clôture algébrique de $\kappa(v)$. Le théorème de changement de base propre et lisse ([7, Chap. V, Thm. 3.1]) assure alors $H_{\text{ét}}^3(Z_{\overline{\kappa(v)}}, \mathbb{Z}_2)\{2\} \neq 0$ pour tout $v \in U$, et donc $\text{Br}(Z_{\overline{\kappa(v)}}) \neq 0$.

Soit $\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^N$ l'espace projectif paramétrant les hypersurfaces quartiques. Il existe une hypersurface $\Sigma \subset \mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^N$, définie par une forme homogène non nulle Δ à coefficients entiers, telle que toute hypersurface quartique de paramètre hors de Σ est lisse. L'hypersurface $Y_{\kappa(v)}$ correspond à un point $m_v \in \mathbf{P}^N(\kappa(v))$. Soit A l'anneau local de l'anneau des entiers de K en v . Il existe un point $m \in \mathbf{P}^N(A)$ se réduisant sur m_v et tel que $\Delta(m) \neq 0 \in K$. On applique alors le théorème 1.14. \square

Clemens et Griffiths ont montré qu'une hypersurface cubique lisse dans $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^4$ n'est jamais rationnelle. Sur un corps k quelconque, on peut se poser la question de la k -rationalité, stable ou non, des hypersurfaces cubiques lisses dans \mathbf{P}_k^n , $n \geq 3$, du moins pour celles qui possèdent un k -point. Le cas $n = 3$ a été étudié (Shafarevich, Manin). Sur le corps \mathbb{R} des réels, une hypersurface cubique lisse X telle que $X(\mathbb{R})$ ait deux composantes connexes pour la topologie réelle ne saurait être rétracte rationnelle. Pour $n \geq 4$, la question de la rationalité stable sur k est ouverte lorsque k est algébriquement clos, et lorsque k est fini. Pour $k = \mathbb{C}((x))((y))$, D. Madore [19] a montré que le groupe de Chow $A_0(X) \subset CH_0(X)$ des cycles de dimension et de degré zéro sur l'hypersurface $X \subset \mathbf{P}_k^4$ définie en coordonnées homogènes par l'équation

$$T_0^3 + T_1^3 + xT_2^3 + yT_3^3 + xyT_4^3 = 0$$

est non nul. Ceci implique que X n'est pas rétracte rationnelle. La démonstration procède par spécialisation du groupe de Chow. Elle utilise un espace principal homogène non trivial sous une variété abélienne sur $\mathbb{C}((x))$. On ne peut donc y remplacer $\mathbb{C}((x))$ par un corps fini \mathbb{F}_p . Ceci laissait donc ouverte la question analogue sur $k = \mathbb{F}_p((y))$ ou k un corps p -adique. La méthode de spécialisation du présent article permet de résoudre cette question.

THÉORÈME 1.21. – *Sur tout corps p -adique k , il existe une hypersurface cubique $X \subset \mathbf{P}_k^4$ possédant un point rationnel et qui n'est pas universellement CH_0 -triviale, et qui n'est donc pas rétracte rationnelle.*

Démonstration. – Soient k un corps p -adique, $A \subset k$ son anneau des entiers, π une uniformisante et \mathbb{F} le corps fini résiduel. Soit K/k l'extension cubique non ramifiée. Il existe un élément α dans l'anneau des entiers de K tel que $K = k(\alpha)$ et la classe β de α dans le corps résiduel engendre l'extension cubique E de \mathbb{F} . Soit $\Phi \in \mathbb{Z}_p[u, v, w, x, y]$ une forme telle

que $\Phi = 0$ définisse un \mathbb{Z}_p -schéma lisse. On définit l'hypersurface cubique $\mathcal{X} \subset \mathbf{P}_A^4$ par l'équation

$$\text{Norm}_{K/k}(u + \alpha v + \alpha^2 w) + xy(x - y) + \pi\Phi(u, v, w, x, y) = 0.$$

La fibre générique $\mathcal{X} \times_A k$ est une hypersurface cubique lisse dans \mathbf{P}_k^4 .

La fibre spéciale de \mathcal{X}/A est définie sur le corps fini \mathbb{F} par l'équation

$$\text{Norm}_{E/\mathbb{F}}(u + \beta v + \beta^2 w) + xy(x - y) = 0.$$

Ceci est une hypersurface cubique Y dans $\mathbf{P}_{\mathbb{F}}^4$ qui géométriquement a trois points singuliers, avec $x = y = 0$, conjugués entre eux sous l'action du groupe de Galois de E/\mathbb{F} , donnés par l'annulation de deux des conjugués de $u + \beta v + \beta^2 w$. Ceci définit un unique point fermé m de Y . Soit $Y_1 \rightarrow Y$ l'éclatement de ce point fermé. En passant sur le corps E , on vérifie que l'image réciproque de m est l'union de deux E -surfaces lisses E -rationnelles, d'intersection une courbe $L \simeq \mathbf{P}_E^1$. La flèche $Y_1 \rightarrow Y$ est donc un CH_0 -isomorphisme universel de \mathbb{F} -variétés. La variété Y_1 a trois points singuliers $P_i, i = 1, 2, 3$, de corps résiduel E , situés sur L . Soit $Z \rightarrow Y_1$ l'éclatement des trois points P_i . On vérifie que Z est lisse sur \mathbb{F} , et que l'image réciproque de chaque P_i est une E -surface projective lisse E -rationnelle. La flèche $Z \rightarrow Y_1$ est donc un CH_0 -isomorphisme universel de \mathbb{F} -variétés. Ainsi la flèche composée $Z \rightarrow Y_1 \rightarrow Y$ est une désingularisation qui est un CH_0 -isomorphisme universel de \mathbb{F} -variétés.

Un calcul un peu élaboré, renvoyé en appendice (proposition C.1), montre que l'on a $\text{Br}(Z) \neq 0$, et plus précisément que la classe ξ de l'algèbre cyclique $(E/\mathbb{F}, x/y) \in \text{Br}(\mathbb{F}(Y))$ appartient à $\text{Br}(Y)$ et est non nulle.

Le théorème 1.12 assure alors que la k -variété $X = \mathcal{X} \otimes_A k$ n'est pas universellement CH_0 -triviale, en particulier elle n'est pas rétracte rationnelle. \square

REMARQUE 1.22. – C'est une question ouverte si le groupe de Chow $A_0(X)$ des cycles de degré zéro est nul pour toute hypersurface cubique lisse X de dimension 3 sur un corps p -adique. Pour $p \neq 3$ et $k = \mathbb{Q}_p$, Esnault et Wittenberg [8, Ex. 2.10] ont établi la nullité de $A_0(X)$ pour l'hypersurface de \mathbf{P}_k^4 d'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 + pu^3 + p^2v^3 = 0.$$

REMARQUE 1.23. – Sur tout corps de nombres k , le théorème 1.21 permet de donner des exemples d'hypersurfaces cubiques dans \mathbf{P}_k^4 , avec un point k -rationnel, qui ne sont pas rétractes rationnelles sur k . De façon analogue, on construit de tels exemples sur $k = \mathbb{F}((x))$ puis sur $k = \mathbb{F}(x)$, avec \mathbb{F} un corps fini.

2. Décomposition de la diagonale en famille et action des correspondances

2.1. Sur le lieu de décomposition de la diagonale

LEMME 2.1. – Soit B un schéma intègre de type fini sur un corps non dénombrable k . Soit \bar{k} une clôture algébrique de k . Soit $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de sous-schémas fermés de B . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) un des B_i coïncide avec B ;
- (ii) $\bigcup_i B_i$ contient le point générique de B ;

- (iii) $B(\bar{k}) \subset \bigcup_i B_i(\bar{k})$;
 (iv) $\bigcup_i B_i$ contient un point général de B : il existe un ouvert $U \subset B$ tel que $U(\bar{k}) \subset \bigcup_i B_i(\bar{k})$;
 (v) $\bigcup_i B_i$ contient un point très général de B : il existe une famille dénombrable $\{F_j\}_j$ de fermés stricts de B , telle que $(B(\bar{k}) \setminus \bigcup_j F_j(\bar{k})) \subset \bigcup_i B_i(\bar{k})$.

Démonstration. – Les énoncés (i) et (ii) sont équivalents. Les implications (i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) sont évidentes. Supposons (v). On a alors $B(\bar{k}) = \bigcup_j F_j(\bar{k}) \cup \bigcup_i B_i(\bar{k})$ avec $F_j \subset B$ des fermés stricts. Comme \bar{k} est non dénombrable, cela implique qu'un des B_i coïncide avec B , d'où (i). \square

Soit k un corps algébriquement clos. Soit X une variété propre intègre sur k , de dimension n , et soit $x \in X_{\text{lisse}}(k)$. Comme rappelé au § 1 (lemme 1.4 et remarque subséquente), on dit que X admet une décomposition de Chow de la diagonale s'il existe un diviseur $D \subset X$ et un cycle $Z \in Z_n(X \times X)$ à support dans $D \times X$ tels que

$$(2.1) \quad [\Delta_X] = [Z] + [X \times x] \text{ dans } CH_n(X \times X),$$

où pour un cycle V dans X on écrit $[V]$ pour la classe de V dans $CH(X)$.

On a le théorème suivant (cf. [25, Theorem 1.1] et appendice B ci-dessous).

THÉORÈME 2.2. – *Soit B un schéma intègre de type fini sur un corps algébriquement clos k de caractéristique zéro. Soit $X \rightarrow B$ un morphisme projectif qui admet une section $\sigma : B \rightarrow X$. Il existe une famille dénombrable $\{B_i\}_i$ de sous-schémas fermés de B telle que, pour tout point $b \in B(k)$, on a $b \in \bigcup_i B_i(k)$ si et seulement si X_b admet une décomposition de Chow de la diagonale.*

En appliquant le lemme 2.1, on obtient :

THÉORÈME 2.3. – *Soit B un schéma intègre de type fini sur un corps algébriquement clos k . Soit X un k -schéma intègre et $p : X \rightarrow B$ un morphisme dominant projectif. Supposons qu'il existe un k -point $b_0 \in B$, tel que la fibre X_{b_0} n'admet pas de décomposition de Chow de la diagonale. Alors pour $b \in B$ un point très général, la fibre X_b n'admet pas de décomposition de Chow de la diagonale.*

Démonstration. – On effectue le changement de base $X \rightarrow B$, c'est-à-dire que l'on considère la seconde projection $q : X' = X \times_B X \rightarrow B' = B$. Il y a ici une section évidente. En appliquant la proposition précédente à $X' \rightarrow B'$, on trouve une union dénombrable de fermés G_i de X' tels qu'il y ait décomposition de la diagonale pour X'_c , c point fermé de B' si et seulement si c est dans l'un des G_i . Comme $X'_c = X_{p(c)}$, ensemblistement la réunion des G_i coïncide avec la réunion des images réciproques $p^{-1}(p(G_i))$, et pour un point fermé $b \in B$, il y a décomposition de la diagonale pour X_b si et seulement si b appartient à la réunion des fermés $p(G_i)$. L'hypothèse sur b_0 assure qu'aucun des $p(G_i)$ ne coïncide avec B . \square

2.2. Décomposition de la diagonale et action des correspondances sur la cohomologie de Betti d'un solide

PROPOSITION 2.4. – Soit Y un solide projectif intègre défini sur le corps \mathbb{C} , qui admet une décomposition de Chow de la diagonale. Supposons qu'il existe une désingularisation $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$ de Y telle que pour toute composante E_i du diviseur exceptionnel E de π le groupe de cohomologie de Betti $H^2(\tilde{E}_i, \mathbb{Z})$ d'une désingularisation \tilde{E}_i de E_i n'a pas de torsion.

Alors les groupes de cohomologie de Betti $H^4(\tilde{Y}, \mathbb{Z})$ et $H^3(\tilde{Y}, \mathbb{Z})$ sont sans torsion.

Démonstration. – D'après les hypothèses, on peut écrire une équivalence rationnelle de cycles sur $\tilde{Y} \times_k \tilde{Y}$:

$$\Delta_{\tilde{Y}} \equiv Z + \tilde{Y} \times x + Z_1 + Z_2$$

où $Z \subset \tilde{Y} \times \tilde{Y}$ est à support dans $D \times \tilde{Y}$ pour $D \subset \tilde{Y}$ un diviseur, Z_1 est à support dans $E \times \tilde{Y}$ et Z_2 est à support dans $\tilde{Y} \times E$. Comme la variété \tilde{Y} est lisse, on dispose d'une action des correspondances sur $H^4(\tilde{Y}, \mathbb{Z})$.

Soit Z une composante irréductible de Z_2 ; l'image de Z par la deuxième projection est contenue dans un fermé $F \subseteq E_i$ de codimension $c \geq 0$, pour un certain i . Soit $\pi_F : \tilde{F} \rightarrow F$ une désingularisation de F . Comme Z domine F , on peut supposer que $Z = \pi_{F,*} Z'$ pour un certain $Z' \subset \tilde{Y} \times \tilde{F}$. Montrons que l'action de Z se factorise par le groupe $H^{2-2c}(\tilde{F}, \mathbb{Z})$. Soit $\iota : \tilde{F} \rightarrow \tilde{Y}$. On a le diagramme commutatif suivant, où le carré du milieu commute d'après la formule de projection (cf. [24, Chap. 5, § 6]) :

$$\begin{array}{ccccccc} H^4(\tilde{Y}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{pr}_1^*} & H^4(\tilde{Y} \times \tilde{F}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cdot[Z']} & H^{8-2c}(\tilde{Y} \times \tilde{F}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{pr}_{2,*}} & H^{2-2c}(\tilde{F}, \mathbb{Z}) \\ \parallel & & \uparrow \iota^* & & \downarrow \iota_* & & \downarrow \iota_* \\ H^4(\tilde{Y}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{pr}_1^*} & H^4(\tilde{Y} \times \tilde{Y}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cdot \iota_*[Z']} & H^{10}(\tilde{Y} \times \tilde{Y}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{pr}_{2,*}} & H^4(\tilde{Y}, \mathbb{Z}). \end{array}$$

Le groupe $H^{2-2c}(\tilde{F}, \mathbb{Z})$ n'a pas de torsion : si $c = 0$, c'est l'hypothèse de la proposition, et si $c > 0$, soit ce groupe est nul, soit c'est le groupe H^0 d'une courbe lisse et il est donc isomorphe à \mathbb{Z} . L'application $Z_{2,*}$ est donc nulle sur $H^4(\tilde{Y}, \mathbb{Z})_{\text{tors}}$. De même, l'application $[\tilde{Y} \times x]_*$ est nulle sur $H^4(\tilde{Y}, \mathbb{Z})_{\text{tors}}$.

De la même manière, d'après le diagramme commutatif ci-dessous l'action de chaque composante de Z_1 qui est à support dans $E_i \times \tilde{Y}$ se factorise par le groupe $H^4(\tilde{F}, \mathbb{Z})$ pour $F \subseteq E_i$ et $\tilde{F} \rightarrow F$ une désingularisation de F :

$$\begin{array}{ccccccc} H^4(\tilde{F}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{pr}_1^*} & H^4(\tilde{F} \times \tilde{Y}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cdot[Z']} & H^{8-2c}(\tilde{F} \times \tilde{Y}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{pr}_{2,*}} & H^4(\tilde{Y}, \mathbb{Z}) \\ \uparrow \iota^* & & \uparrow \iota^* & & \downarrow \iota_* & & \parallel \\ H^4(\tilde{Y}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{pr}_1^*} & H^4(\tilde{Y} \times \tilde{Y}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cdot \iota_*[Z']} & H^{10}(\tilde{Y} \times \tilde{Y}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{pr}_{2,*}} & H^4(\tilde{Y}, \mathbb{Z}). \end{array}$$

Le groupe $H^4(\tilde{F}, \mathbb{Z})$ est isomorphe à \mathbb{Z} ou nul, donc sans torsion, car \tilde{F} ou bien est une surface lisse, ou bien est de dimension au plus un. L'application $Z_{1,*}$ est donc nulle sur $H^4(\tilde{Y}, \mathbb{Z})_{\text{tors}}$. De même, l'application Z_* se factorise par un groupe $H^4(\tilde{F}, \mathbb{Z})$ pour $F \subseteq D$ un fermé et $\tilde{F} \rightarrow F$ une désingularisation de F ; l'application Z_* est donc nulle sur le groupe de torsion $H^4(\tilde{Y}, \mathbb{Z})_{\text{tors}}$.

Comme l'application $\Delta_{\tilde{Y}_*}$ est l'identité, le groupe $H^4(\tilde{Y}, \mathbb{Z})_{\text{tors}}$ est nul. Il en est donc de même de $H^3(\tilde{Y}, \mathbb{Z})_{\text{tors}}$. \square

REMARQUE 2.5. – On notera que les hypothèses faites sur le diviseur exceptionnel de la désingularisation $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$ sont a priori plus faibles que la CH_0 -trivialité universelle demandée au §1.

THÉORÈME 2.6. – *Dans l'espace projectif \mathbf{P}^N paramétrant les hypersurfaces quartiques dans $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^4$, un point très général correspond à une hypersurface quartique lisse qui n'est pas rétracte rationnelle, et qui en particulier n'est pas stablement rationnelle.*

Démonstration. – Dans l'appendice A, nous partons d'un solide quartique V , défini par une équation

$$(2.2) \quad \alpha(z_0, z_1, z_2)z_3^2 + \beta(z_0, z_1, z_2)z_3 + \gamma(z_0, z_1, z_2) + z_0^2z_4^2 = 0,$$

birationnel à un solide d'Artin-Mumford [1]. Nous construisons une désingularisation $W \rightarrow V$ satisfaisant :

- (i) Les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel E de $W \rightarrow V$ sont des surfaces rationnelles universellement CH_0 -triviales (non nécessairement lisses).
- (ii) Le groupe $H^4(W, \mathbb{Z})_{\text{tors}} \simeq H^3(W, \mathbb{Z})_{\text{tors}}$ est non nul (ceci est donné par [1]).

On applique le théorème 2.3 avec $B = \mathbf{P}^N$ et b_0 le point correspondant à une quartique V comme dans (2.2). D'après la proposition 2.4, la quartique V n'a pas de décomposition de Chow de la diagonale car le groupe $H^3(W, \mathbb{Z})_{\text{tors}} \simeq \text{Br}(W)$ est non nul. L'énoncé suit alors des lemmes 1.5 et 1.4 a). \square

Appendice A

Résolution des singularités d'une quartique $V \subset \mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^4$ birationnelle à un solide d'Artin-Mumford.

Soit $A \subset \mathbb{P}^2$ une conique lisse, définie par une équation $\alpha(z_0, z_1, z_2) = 0$. Soient $E_1, E_2 \subset \mathbb{P}^2$ deux courbes elliptiques lisses définies par des équations $\epsilon_1(z_0, z_1, z_2) = 0$ et $\epsilon_2(z_0, z_1, z_2) = 0$, chacune tangente à A en trois points, les points de tangence étant tous distincts, et telles que les courbes E_1 et E_2 s'intersectent en 9 points, deux à deux distincts, et distincts des précédents.

D'après [1], sur $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$, il existe deux formes homogènes $\beta(z_0, z_1, z_2)$ et $\gamma(z_0, z_1, z_2)$, de degrés respectifs 3 et 4, telles que

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = \epsilon_1\epsilon_2.$$

LEMME A.1. – *Soit $S \subset \mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^3$ la surface quartique définie par l'équation homogène*

$$(A.1) \quad g = \alpha(z_0, z_1, z_2)z_3^2 + \beta(z_0, z_1, z_2)z_3 + \gamma(z_0, z_1, z_2) = 0.$$

- (i) *Les singularités de la surface S sont des singularités quadratiques ordinaires : le point $P_0 = (0 : 0 : 0 : 1)$ et les neuf points dont les projections depuis P_0 sur le plan $z_3 = 0$ sont les points de $E_1 \cap E_2$.*
- (ii) *L'ensemble $M = \{g = 0, \frac{\partial g}{\partial z_1} = 0, \frac{\partial g}{\partial z_3} = 0\} \cup \{g = 0, \frac{\partial g}{\partial z_2} = 0, \frac{\partial g}{\partial z_3} = 0\}$ est fini.*

Démonstration. – La partie (i) est dans [1]. Montrons (ii). Soit

$$Q = (z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \in M \setminus \{P_0\}.$$

Soit $q = (z_0 : z_1 : z_2)$ la projection de Q sur le plan $z_3 = 0$. Supposons $\frac{\partial g}{\partial z_1}(Q) = 0$, le deuxième cas est identique. La condition $\frac{\partial g}{\partial z_3}(Q) = 0$ donne $\beta(q) = -2z_3\alpha(q)$. Montrons que l'on a $\alpha(q) \neq 0$. Sinon, la condition précédente donne $\beta(q) = 0$ et donc $\gamma(q) = 0$ d'après l'équation. Ainsi la multiplicité de $\epsilon_1\epsilon_2$ en q est 2. Comme E_1 et E_2 sont lisses, on en déduit que $Q \in E_1 \cap E_2$ et on obtient une contradiction car A ne passe pas par $E_1 \cap E_2$. On a donc $\alpha(q) \neq 0$ et $z_3 = -\frac{\beta(q)}{2\alpha(q)}$.

On écrit

$$(A.2) \quad 4\alpha \cdot g = (2z_3\alpha + \beta)^2 - \epsilon_1\epsilon_2.$$

Comme $\beta(q) = -2z_3\alpha(q)$, on a donc $\epsilon_1\epsilon_2(q) = 0$. On peut supposer $\epsilon_1(q) = 0$, le deuxième cas est similaire. Comme $\alpha(q) \neq 0$, on a $z_3 = -\frac{\beta(q)}{2\alpha(q)}$. En dérivant l'équation (A.2) par rapport à z_1 , on déduit $\frac{\partial g}{\partial z_1}(Q) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \epsilon_1\epsilon_2}{\partial z_1}(q) = 0$. Comme $\epsilon_1(q) = 0$, on a soit $\epsilon_2(q) = 0$, soit $\frac{\partial \epsilon_1}{\partial z_1}(q) = 0$. Dans le premier cas, q appartient à l'ensemble fini $E_1 \cap E_2$. Sinon q appartient à l'ensemble $\{\epsilon_1 = 0, \frac{\partial \epsilon_1}{\partial z_1} = 0\}$, qui est fini car E_1 est une courbe elliptique lisse. □

Comme l'ensemble $M \setminus \{P_0\}$ est fini, quitte à faire un changement linéaire en les coordonnées z_0, z_1, z_2 , on peut supposer dans la suite :

(A.3) L'hyperplan $z_0 = 0$ ne contient aucun point de $M \setminus \{P_0\}$ ni aucun point de l'intersection de A et $E_1 \cup E_2$, et il n'est pas tangent à la conique A .

Soit $V \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{Q}}$ une quartique définie par l'équation homogène

$$(A.4) \quad f = \alpha(z_0, z_1, z_2)z_3^2 + \beta(z_0, z_1, z_2)z_3 + \gamma(z_0, z_1, z_2) + z_0^2z_4^2 = 0.$$

Soit $L \subset \mathbb{P}^4$ la droite d'équation $z_0 = z_1 = z_2 = 0$.

LEMME A.2. – *Les points singuliers de la quartique V qui ne sont pas situés sur la droite L sont 9 singularités quadratiques ordinaires.*

Démonstration. – Soit $Q = (z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4) \in V \setminus L$ un point singulier. Si $z_0 = 0$, alors le point $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3)$ est un point singulier de S . D'après le choix de l'hyperplan $z_0 = 0$, c'est le point $(0 : 0 : 0 : 1) \in L$. On a donc $z_0 \neq 0$. On a $\frac{\partial f}{\partial z_4} = 2z_0^2z_4 = 0$, d'où $z_4 = 0$ et le point $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3)$ correspond encore à un point singulier de la surface S définie par (A.1). Comme la surface S n'a que des singularités quadratiques ordinaires d'après le lemme A.1, on a des coordonnées locales $\mathfrak{z}_i, i = 1, 2, 3$ telles que l'équation locale de g s'écrive comme une somme de $\sum_{i=1}^3 \mathfrak{z}_i^2$ et de termes de plus haut degré. Comme $z_0 \neq 0$, on a les coordonnées locales $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, z_4$ de Q et l'équation de f s'écrit comme $\sum_{i=1}^3 \mathfrak{z}_i^2 + z_4^2 +$ termes de degré supérieur ; on a donc que Q est un point singulier quadratique ordinaire. □

Soit $V' \rightarrow V$ l'éclatement de la droite $L \subset V$. Soit $P \in L$ le point $z_3 = 0$.

LEMME A.3. – *La variété V' est lisse en tout point de V' au-dessus de $L \setminus P$. Le diviseur exceptionnel E' de $V' \rightarrow V$ est une surface rationnelle, les fibres de l'application $E' \rightarrow L$ sont des coniques et la fibre générique est lisse.*

Démonstration. – Soit $Q' \in V'$ un point singulier au-dessus d'un point

$$Q = (0 : 0 : 0 : z_3 : z_4) \in L.$$

On a donc soit $z_3 \neq 0$, soit $z_4 \neq 0$.

1. Si $z_4 \neq 0$, on a une équation de V dans les coordonnées affines $x_i = \frac{z_i}{z_4}$, $0 \leq i \leq 3$:

$$\alpha(x_0, x_1, x_2)x_3^2 + \beta(x_0, x_1, x_2)x_3 + \gamma(x_0, x_1, x_2) + x_0^2 = 0.$$

Comme les rôles de x_1 et x_2 sont symétriques, on n'a que deux cartes de l'éclatement à considérer :

(a) $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1y_0$, $x_2 = y_2y_0$, $x_3 = y_3$. L'équation de V' s'écrit

$$\alpha(1, y_1, y_2)y_3^2 + \beta(1, y_1, y_2)y_0y_3 + \gamma(1, y_1, y_2)y_0^2 + 1 = 0.$$

Pour tout point de V' au-dessus de L on a $y_0 = 0$ et on obtient l'équation de E'

$$\alpha(1, y_1, y_2)y_3^2 + 1 = 0.$$

Les fibres au-dessus des points de L sont donc des coniques et la fibre au-dessus du point générique $\text{Spec } \mathbb{C}(y_3)$ de L est lisse.

Si $Q' = (0, y_1, y_2, y_3)$ est un point singulier de V' au-dessus d'un point de L , on a donc $\alpha(Q')y_3^2 + 1 = 0$ de l'équation ci-dessus et $\alpha(Q') \cdot 2y_3 = 0$, en dérivant par rapport à z_3 , ce qui n'est pas possible.

(b) $x_0 = y_0y_1$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_1y_2$, $x_3 = y_3$. L'équation de V' s'écrit

$$(A.5) \quad \alpha(y_0, 1, y_2)y_3^2 + \beta(y_0, 1, y_2)y_1y_3 + \gamma(y_0, 1, y_2)y_1^2 + y_0^2 = 0.$$

Pour tout point de V' au-dessus de L on a $y_1 = 0$ et l'équation de E' s'écrit

$$\alpha(y_0, 1, y_2)y_3^2 + y_0^2 = 0.$$

Les fibres au-dessus des points de L sont donc des coniques. Pour un point singulier de la fibre au-dessus du point générique $\text{Spec } \mathbb{C}(y_3)$ de L , on vérifie d'abord que $y_0 = 0$, puis que $(0 : 1 : y_2)$ donne un point singulier de A (défini sur le corps $\mathbb{C}(y_3)$), ce qui n'est pas possible. La fibre générique est donc une conique lisse.

Soit $Q' = (y_0, 0, y_2, y_3)$ un point singulier de V' .

(i) Si $y_3 \neq 0$, on a $\alpha(Q') \cdot 2y_3 = 0$, d'où $\alpha(Q') = 0$. On déduit de l'équation de V' que $y_0 = 0$ et puis que $\frac{\partial \alpha(y_0, 1, y_2)}{\partial y_i} = \frac{\partial \alpha}{\partial z_i}(y_0, 1, y_2) = 0$ pour $i = 0, 2$. Comme $\alpha(0, 1, y_2) = 0$, on en déduit que le point $(0 : 1 : y_2)$ est un point singulier de A , contradiction.

(ii) Si $y_3 = 0$, alors $y_0 = 0$ de l'équation de V' . On vérifie qu'effectivement tous les points de la droite $y_0 = y_1 = y_3 = 0$ sont des points singuliers.

2. Supposons $z_3 \neq 0$. On a donc l'équation de V en coordonnées affines :

$$\alpha(x_0, x_1, x_2) + \beta(x_0, x_1, x_2) + \gamma(x_0, x_1, x_2) + x_0^2 x_4^2 = 0.$$

Il suffit d'analyser deux cartes de l'éclatement :

(a) $x_0 = y_0, x_1 = y_1 y_0, x_2 = y_2 y_0, x_4 = y_4$. L'équation de V' s'écrit

$$\alpha(1, y_1, y_2) + \beta(1, y_1, y_2) y_0 + \gamma(1, y_1, y_2) y_0^2 + y_4^2 = 0.$$

Pour tout point de V' au-dessus de L , on a $y_0 = 0$, et l'équation de E' s'écrit

$$\alpha(1, y_1, y_2) + y_4^2 = 0.$$

Les fibres au-dessus des points de L sont donc des coniques et la fibre au-dessus du point générique $\text{Spec } \mathbb{C}(y_4)$ de L est lisse.

Si $Q' = (0, y_1, y_2, y_4)$ est un point singulier de V' au-dessus d'un point de L , on a donc $2y_4 = 0$, d'où $y_4 = 0$ et puis $\alpha(Q') = 0$. Comme dans le cas 1(b)(i), on montre que Q' est un point singulier de A , contradiction.

(b) $x_0 = y_0 y_1, x_1 = y_1, x_2 = y_2 y_1, x_4 = y_4$. L'équation de V' s'écrit

$$\alpha(y_0, 1, y_2) + \beta(y_0, 1, y_2) y_1 + \gamma(y_0, 1, y_2) y_1^2 + y_0^2 y_4^2 = 0$$

et au-dessus de L on a $y_1 = 0$ et on obtient l'équation

$$\alpha(y_0, 1, y_2) + y_0^2 y_4^2 = 0.$$

Ici encore pour un point singulier au-dessus du point générique $\text{Spec } \mathbb{C}(y_4)$ de L on voit d'abord que $y_0 = 0$, puis que le point $(0 : 1 : y_2)$ correspond à un point singulier de A (défini sur le corps $\mathbb{C}(y_4)$), contradiction.

Si $Q' = (y_0, 0, y_2, y_4)$ est un point singulier de V' , on a $2y_4 y_0^2 = 0$. On a donc $\alpha(Q) = 0$ et $\frac{\partial \alpha(y_0, 1, y_2)}{\partial y_i} = 0, i = 0, 2$, on obtient donc un point singulier de A , contradiction.

Comme la surface E' est fibrée en coniques au-dessus d'une droite, le théorème de Max Noether, ou de Tsen, montre que c'est une surface rationnelle. \square

Soit $L' \subset V'$ la droite image réciproque du point P . Soit $V'' \rightarrow V'$ l'éclatement de la droite L' .

LEMME A.4. – *Les seules singularités de V'' sont des singularités quadratiques ordinaires. La variété V'' est lisse en tout point au-dessus de L . Le diviseur exceptionnel E'' de $V'' \rightarrow V'$ est une surface rationnelle lisse et les fibres de l'application $E'' \rightarrow L'$ sont des coniques.*

Démonstration. – On reprend l'équation de la carte singulière (A.5) de V' :

$$\alpha(y_0, 1, y_2) y_3^2 + \beta(y_0, 1, y_2) y_1 y_3 + \gamma(y_0, 1, y_2) y_1^2 + y_0^2 = 0.$$

Notons qu'on a une deuxième carte singulière, en échangeant les rôles de x_1 et x_2 dans le lemme précédent.

On a trois cartes affines dans l'éclatement V'' de la droite $L' : y_0 = y_1 = y_3 = 0$ au-dessus de la carte (A.5).

1. $y_0 = u_0, y_1 = u_0 u_1, y_2 = u_2, y_3 = u_0 u_3$. L'équation de V'' s'écrit

$$\alpha(u_0, 1, u_2)u_3^2 + \beta(u_0, 1, u_2)u_1 u_3 + \gamma(u_0, 1, u_2)u_1^2 + 1 = 0.$$

Pour tout point au-dessus de L' on a $u_0 = 0$ et obtient l'équation de E''

$$\alpha(0, 1, u_2)u_3^2 + \beta(0, 1, u_2)u_1 u_3 + \gamma(0, 1, u_2)u_1^2 + 1 = 0.$$

Pour un point singulier de E'' , on a $\alpha(0, 1, u_2) \cdot 2u_3 + \beta(0, 1, u_2) \cdot u_1 = 0$ et $\beta(0, 1, u_2) \cdot u_3 + \gamma(0, 1, u_2) \cdot 2u_1 = 0$, d'où

$$\alpha(0, 1, u_2)u_3^2 + \beta(0, 1, u_2)u_1 u_3 + \gamma(0, 1, u_2)u_1^2 = 0 \neq -1.$$

De même, pour un point singulier Q'' de V'' on montre que

$$\alpha(Q'')u_3^2 + \beta(Q'')u_1 u_3 + \gamma(Q'')u_1^2 = 0 \neq -1.$$

2. $y_0 = u_0 u_1, y_1 = u_1, y_2 = u_2, y_3 = u_1 u_3$. L'équation de V'' s'écrit

$$\alpha(u_0 u_1, 1, u_2)u_3^2 + \beta(u_0 u_1, 1, u_2)u_3 + \gamma(u_0 u_1, 1, u_2) + u_0^2 = 0.$$

Pour tout point au-dessus de L' on a $u_1 = 0$ et on obtient l'équation de E''

$$\alpha(0, 1, u_2)u_3^2 + \beta(0, 1, u_2)u_3 + \gamma(0, 1, u_2) + u_0^2 = 0.$$

Pour un point singulier de E'' on a $2u_0 = 0$, donc

$$\alpha(0, 1, u_2)u_3^2 + \beta(0, 1, u_2)u_3 + \gamma(0, 1, u_2) = 0.$$

Puis on obtient $2\alpha(0, 1, u_2)u_3 + \beta(0, 1, u_2) = 0$ en dérivant par rapport à u_3 . Comme $\frac{\partial \alpha(0, 1, u_2)}{\partial u_2} = \frac{\partial \alpha}{\partial z_3}(0, 1, u_2)$ et de même pour β et γ , en dérivant par rapport à z_2 , on déduit que $(0 : 1 : u_2 : u_3) \in M \setminus \{P_0\}$, ce qui n'est pas possible d'après l'hypothèse (A.3).

Pour un point singulier Q'' de V'' on a une analyse similaire : $\frac{\partial \alpha(u_0 u_1, 1, u_2)}{\partial u_0} = 0$ et de même pour β et γ , d'où $u_0 = 0$ en prenant la dérivée par rapport à u_0 . En prenant la dérivée par rapport à u_2 on en déduit que la projection $(0 : 1 : u_2 : u_3)$ de Q'' est dans $M \setminus \{P_0\}$, contradiction avec le choix de l'hyperplan $z_0 = 0$.

3. $y_0 = u_0 u_3, y_1 = u_1 u_3, y_2 = u_2, y_3 = u_3$. L'équation de V'' s'écrit

$$\alpha(u_0 u_3, 1, u_2) + \beta(u_0 u_3, 1, u_2)u_1 + \gamma(u_0 u_3, 1, u_2)u_1^2 + u_0^2 = 0.$$

Ici, pour tout point au-dessus de L' on a $u_3 = 0$ et on obtient l'équation de E''

$$\alpha(0, 1, u_2) + \beta(0, 1, u_2)u_1 + \gamma(0, 1, u_2)u_1^2 + u_0^2 = 0.$$

Pour un point singulier de E'' on a $2u_0 = 0$, d'où

$$\alpha(0, 1, u_2) + \beta(0, 1, u_2)u_1 + \gamma(0, 1, u_2)u_1^2 = 0.$$

Si $u_1 \neq 0$, on montre de la même façon que dans la carte précédente que

$$(0 : 1 : u_2 : \frac{1}{u_1}) \in M \setminus P_0$$

et on obtient une contradiction. Si $u_1 = 0$, on a $\alpha(0, 1, u_2) = 0$ de l'équation, et puis $\beta(0, 1, u_2) = -2u_1\gamma(0, 1, u_2) = 0$. On a donc $(0 : 1 : u_2) \in A \cap (E_1 \cup E_2)$, contradiction avec l'hypothèse (A.3).

Pour Q'' un point singulier de V'' on a $\frac{\partial \alpha(u_0 u_3, 1, u_2)}{\partial u_0} = 0$ et de même pour β et γ , d'où $u_0 = 0$. On déduit de même que soit $u_1 \neq 0$ et $(0 : 1 : u_2 : u_1^{-1}) \in M \setminus \{P_0\}$,

soit $u_1 = 0$ et $(0 : 1 : u_2) \in A \cap (E_1 \cup E_2)$, ce qui n'est pas possible d'après le choix de l'hyperplan $z_0 = 0$.

Comme la surface E'' est fibrée en coniques au-dessus d'une droite, le théorème de Max Noether, ou de Tsen, montre que c'est une surface rationnelle. \square

Soit $W \rightarrow V''$ l'éclatement des singularités quadratiques ordinaires de V'' .

PROPOSITION A.5. – (i) La $\overline{\mathbb{Q}}$ -variété W est projective et lisse.

- (ii) Le diviseur exceptionnel E de la résolution $\pi : W \rightarrow V$ s'écrit comme l'union disjointe $E = \bigsqcup_{i=1}^{10} E_i$, où :
 - (iia) les composantes E_1, \dots, E_9 sont des quadriques lisses au-dessus des points singuliers quadratiques ordinaires ;
 - (iib) la composante E_{10} est l'union de deux surfaces $E' \cup E''$, le morphisme π induit une fibration $E' \rightarrow L$ dont les fibres sont des coniques et la fibre générique est lisse et possède un point rationnel, la surface E'' est rationnelle lisse et $\pi(E'') = P$.
 - (iii) Le morphisme $W \rightarrow V$ est un CH_0 -isomorphisme universel.
 - (iv) Le groupe $H^4(W_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})_{\text{tors}} \simeq H^3(W_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})_{\text{tors}} \simeq \text{Br } W_{\mathbb{C}}$ est non nul.

Démonstration. – Les propriétés (i) et (ii) résultent de la construction et des lemmes précédents. D'après la proposition 1.8, pour établir (iii) il suffit de vérifier que sur tout corps F les fibres de $W_F \rightarrow V_F$ au-dessus des F -points sont universellement CH_0 -triviales, ce qui résulte de (ii) car ces fibres sont soit la F -surface rationnelle projective et lisse E''_F , soit une F -conique lisse avec un point rationnel, soit une conique réductible sur F , soit une F -surface quadrique lisse déployée. Puisque W est birationnelle à la variété d'Artin-Mumford, la propriété (iv) résulte de [1]. \square

Appendice B

Le lieu de la décomposition de la diagonale

Cet appendice donne des détails sur la preuve du théorème suivant ([25, Theorem 1.1 et Proposition 1.4]).

THÉORÈME B.1. – Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Soient B un k -schéma lisse et $X \rightarrow B$ un morphisme projectif qui admet une section $\sigma : B \rightarrow X$. Alors il existe une famille dénombrable $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, de sous-schémas fermés de B , telle que

$$\{b \in B(k) \mid X_b \text{ admet une décomposition de Chow de la diagonale}\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i(k).$$

Pour démontrer ce théorème, on utilise un « argument de schémas de Hilbert ». Plus précisément, on considère des schémas qui paramètrent des sous-schémas et des schémas qui paramètrent des cycles sur X , ainsi que les familles universelles correspondantes. Cela utilise des résultats profonds d'existence de schémas Hilb et Chow.

Dans tout cet appendice, k est un corps algébriquement clos de caractéristique zéro.

Rappelons d'abord la définition des schémas de Chow (voir [18, Def I.3.11 ; Thm. I.3.2.1]). Soient S un k -schéma et X/S un schéma sur S . Soit W/S un schéma réduit. Une *famille bien définie de cycles algébriques propres* de X/S sur W/S est la donnée de

1. un cycle $U = \sum m_i[U_i]$, les U_i sont des schémas intègres, avec $\text{Supp } U \subset X \times_S W$, $m_i \in \mathbb{Z}$;
2. $g : \text{Supp } U \rightarrow W$ propre, tel que chaque fibre de $g_i := g|_{U_i}$ est soit vide, soit de dimension d , et tel que l'image de g_i est une composante irréductible de W .

Dans le cas où schéma W n'est pas normal, on impose une condition supplémentaire dont on n'aura pas besoin ici.

Si X/S est un schéma projectif, alors ([18, Thm. I.3.2.1]) on dispose d'une famille de S -schémas projectifs et semi-normaux $\text{Chow}_{X/S}^{d,d'}$ (paramétrés par des données dénombrables de degrés (d, d')) qui représente le foncteur des cycles *non-négatifs*, sur la catégorie des S -schémas semi-normaux. Dans la suite on va souvent omettre les indices (d, d') . On a aussi une famille universelle $\text{Univ}_{X/S} \rightarrow \text{Chow}_{X/S}$.

B.1. Lemmes préliminaires

LEMME B.2. – Soient B un k -schéma lisse et $X \rightarrow B$ un morphisme projectif. Il existe une famille dénombrable \mathcal{F} de B -schémas lisses F_i , $i \in \mathbb{N}$ équipés d'une famille de cycles V_i/B sur F_i/B de $Y = X \times_B X/B$, telle que, pour tout $b \in B(k)$ et tout cycle effectif Z dans Y_b de dimension d dont l'image par la première projection est incluse dans le support d'un diviseur de X_b , il existe un point $x \in F_i$ au-dessus de b tel que Z s'identifie à $V_{i,x}$.

Démonstration. – Soit H une composante du schéma de Hilbert de X/B qui paramètre les diviseurs effectifs (plats et de codimension relative 1), $D' \rightarrow H$ la famille universelle et $D := D' \times_B X$ (les sous-schémas de Y qui sont produits d'un diviseur sur X et de X) : comme c'est une famille projective, on dispose des schémas de Chow de D/H . Soient C une composante du schéma de Chow $\text{Chow}_{D/H}$ des cycles de dimension d et V la famille universelle, on a $\text{Supp } V \subset C \times_H D$: la fibre de V au-dessus de $c \in C$ d'image $h \in H$ est un cycle inclus dans D_h . La famille V peut être aussi vue comme une famille de cycles V/B paramétrée par C/B dans Y/B : en effet, $\text{Supp } V \subset C \times_H D \subset C \times_H (Y \times_B H) = C \times_B Y$. Soient \tilde{C} une désingularisation (Hironaka) de C et \tilde{V} le tiré-en-arrière de la famille V (cela ne change pas les fibres). On trouve une famille dénombrable $\mathcal{F} = \{\tilde{C}\}$ (où l'union est sur toutes les composantes H et sur toutes les composantes C de $\text{Chow}_{D/H}$) \square

LEMME B.3. – Soient B un k -schéma lisse et $Y \rightarrow B$ un morphisme projectif. Il existe une famille dénombrable de schémas normaux T_i , $i \in \mathbb{N}$ munis d'une famille de cycles $\mathcal{D}_i \rightarrow T_i$ telle que, pour tout $b \in B$ et pour toute sous-variété intègre W de dimension $d + 1$ dans Y_b , il existe une désingularisation \tilde{W} de W telle que pour tout diviseur de fonction $D = D_1 - D_2$ sur \tilde{W} , avec D_1, D_2 effectifs, il existe i et un point $t \in T_i(k)$ au-dessus de b tel que la fibre $\mathcal{D}_{i,t}$ s'identifie à (D_1, D_2) .

Démonstration. – Soit G un schéma quasi-projectif qui est une composante irréductible, munie de sa structure réduite, de l'union des schémas (cf. [12, 9.7.7]) qui paramètrent les sous-variétés intègres de Y/B (plats sur B) de dimension $d + 1$ et soit $W \rightarrow G$ une

famille universelle : c'est un morphisme projectif, plat, à fibres géométriques intègres. La fibre générique $W_{k(G)}$ est intègre. Soit $\tilde{W}_{k(G)}$ une résolution des singularités de $W_{k(G)}$. On peut supposer que le morphisme $\tilde{W}_{k(G)} \rightarrow W_{k(G)}$ s'étend sur un ouvert G_1 de G . Quitte à changer G_1 par un ouvert plus petit, on peut supposer que pour tout $t \in G_1(k)$ la fibre \tilde{W}_t est lisse et birationnelle à W_t , puisque ces propriétés sont vérifiées au point générique. On pose $W_1 = W|_{G_1}$ et $\tilde{W}_1 = \tilde{W}_{G_1}$. Par récurrence (sur $\dim G$), on peut donc trouver une décomposition $G = \bigcup_{j=1}^m G_j$ avec G_j des schémas quasi-projectifs, localement fermés dans G , des familles $\tilde{W}_j \rightarrow G_j$ à fibres projectives lisses, telles que pour tout $t \in G(k)$, la fibre $\tilde{W}_{j,t}$ est une résolution de W_t . Quitte à changer G_j par une résolution et \tilde{W}_j par le tiré-en-arrière de la famille W_j , on peut même supposer que les G_j sont lisses.

D'après [17, FGA revisited, Chap. 9, 3.7 et 4.8]), sous les hypothèses que \tilde{W}_j/G_j est projectif, plat, à fibres géométriques intègres, on dispose alors de schémas $\text{Div}_{\tilde{W}_j/G_j}$ (qui paramètre les diviseurs de Cartier effectifs) et $\text{Pic}_{\tilde{W}_j/G_j}$, munis de familles universelles. On a en plus un morphisme $Ab : \text{Div}_{X/S} \rightarrow \text{Pic}_{X/S}$. Soit Δ_j , vu comme B -schéma, l'image réciproque par le morphisme $(Ab, Ab) : \text{Div}_{\tilde{W}_j/G_j} \times \text{Div}_{\tilde{W}_j/G_j} \rightarrow \text{Pic}_{\tilde{W}_j/G_j} \times \text{Pic}_{\tilde{W}_j/G_j}$ de la diagonale. On a alors que Δ_j est l'union (finie) de ses composantes irréductibles. Soit T une de ces composantes (munie de sa structure réduite) et soit \tilde{T} la normalisation de T . Soit \mathcal{T} la famille $\mathcal{T} = \{\tilde{T}\}$ où l'on prend l'union sur toutes les composantes G , sur tout j correspondant à la stratification de G comme ci-dessus et sur toutes les composantes \tilde{T} obtenues à partir de Δ_j . Alors $T_i \in \mathcal{T}$ et \mathcal{D}_i la famille universelle induite par celle sur les schémas Div conviennent. Un point $t \in T_i$ au-dessus de $b \in B$ correspond à un sous-schéma intègre de dimension $d + 1$ dans Y_b et un diviseur d'une fonction sur une résolution de ce schéma. □

LEMME B.4. – Soient B un k -schéma lisse et $Y \rightarrow B$ un morphisme projectif. Il existe une famille dénombrable de schémas normaux $H_i, i \in \mathbb{N}$ munis d'une famille de cycles ϕ_i sur H_i telle que, pour tout $b \in B$ et pour tout cycle $D = \sum_{i=1}^n D_{i1} - D_{i2}$ de dimension d dans Y_b , avec D_{i1}, D_{i2} effectifs, qui sont des diviseurs d'une fonction sur une sous-variété intègre W_{it} de dimension $d + 1$ dans Y_t , il existe i et un point $t \in H_i(k)$ au-dessus de b tel que la fibre $\phi_{i,t}$ s'identifie à $\bigcup(D_{i1} \cup D_{i2})$.

Démonstration. – On prend la réunion dénombrable sur tous les n -uplets (T_1, \dots, T_n) avec T_i dans la famille du lemme précédent. On pose H_i le normalisé du produit $\prod_{j=1}^n T_j$ (avec T_j comme dans le lemme précédent) et S_i l'union des tirés-en-arrière des $\mathcal{D}_j \rightarrow T_j$. □

Le lemme ci-dessus permet de montrer :

PROPOSITION B.5. – Soient B un k -schéma lisse et $Y \rightarrow B$ un morphisme projectif. Soit $Z = (Z_1, Z_2) \in \text{Chow}_{Y/B}(B) \times \text{Chow}_{Y/B}(B)$ deux familles bien définies de cycles algébriques propres effectifs, de dimension d , au sens de Kollár. Alors il existe une famille dénombrable $\pi_i : M_i \rightarrow B$ ($i \in \mathbb{N}$) de schémas quasi-projectifs au-dessus de B munis de familles $U_i \rightarrow M_i$ projectives, telle que :

i) L'union des images $B_i := \pi_i(M_i(k))$ dans $B(k)$ est exactement le lieu

$$\{b \in B(k) \mid Z_{1,b} - Z_{2,b} \text{ est rationnellement équivalent à zéro dans } Y_b.\}$$

- ii) Pour tout point $b \in B(k)$ et pour toute donnée $S = (W_{i,b}, D_{i1}, D_{i2})_{i=1}^n$ avec $n \geq 1$ un entier, $W_{i,b}$ des sous-schémas intègres de dimension $d + 1$ de Y_b , D_{i1}, D_{i2} deux diviseurs effectifs de Weil sur (la normalisation de) $W_{i,b}$ tels que $D_{i1} - D_{i2}$ est le diviseur d'une fonction rationnelle sur $W_{i,b}$, tel que l'on ait l'égalité de cycles

$$Z_{1b} + \sum D_{i1} = Z_{2b} + \sum D_{i2} \text{ dans } \text{Chow}_{Y/B}(\kappa(b))$$

il existe l et un point $t \in M_i$ au-dessus de b tel que la fibre U_t s'identifie à la donnée S .

Démonstration. – On prend H_i comme dans le lemme B.4, avec la famille S_i des cycles sur H_i dans Y/B . Soit $Z' = (Z'_1, Z'_2) \in \text{Chow}_{Y/B}(H_i) \times \text{Chow}_{Y/B}(H_i)$ la famille 'constante' Z_{H_i} . Par la construction de la famille ϕ_i , elle paramètre les couples (C_1, C_2) de cycles effectifs, dont la différence est rationnellement équivalente à zéro (est somme de diviseurs de fonctions). Soit $M_i \subset H_i$ l'image réciproque de la diagonale dans $\text{Chow}_{Y/B} \times \text{Chow}_{Y/B}$ par le morphisme

$$\begin{aligned} H_i &\rightarrow \text{Chow}_{Y/B} \times \text{Chow}_{Y/B} \\ (C_1, C_2) &\mapsto (Z_1 + C_1, Z_2 + C_2). \end{aligned}$$

Autrement dit, soit $\phi_i \cup Z'$ une famille de cycles sur H_i dans Y/B et soit $H_i \rightarrow \text{Chow}_{Y/B} \times \text{Chow}_{Y/B}$ le morphisme induit. On définit M_i comme le sous-schéma fermé de H_i , l'image réciproque de la diagonale dans $\text{Chow}_{Y/B} \times \text{Chow}_{Y/B}$. Alors M_i avec la famille universelle induite par ϕ_i convient. \square

B.2. Preuve du théorème

La proposition B.5 permet de montrer l'énoncé suivant (cf. [25, Prop 1.4]) :

PROPOSITION B.6. – Soient B un k -schéma lisse et $Y \rightarrow B$ un morphisme projectif. Soit $Z = (Z_1, Z_2) \in \text{Chow}_{Y/B}(B) \times \text{Chow}_{Y/B}(B)$ deux familles bien définies de cycles algébriques propres, de dimension d , au sens de Kollár. Alors il existe une famille dénombrable $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, de sous-schémas fermés de B , telle que

$$\{b \in B(k) \mid Z_{1,b} - Z_{2,b} \text{ est rationnellement équivalent à zéro dans } Y_b\} = \bigcup B_i(k).$$

Démonstration. – Notons qu'ici $Z_{i,b}$ est soit vide, soit de dimension d dans Y_b , d'après la définition d'un cycle bien défini.

L'implication B.5 \Rightarrow B.6 suit la preuve dans [25] (pp. 8-9), on ne la refait pas ici. Elle utilise la spécialisation de Fulton, comme dans les arguments du § 1.

Démonstration du théorème B.1. – On déduit le théorème B.1 de la proposition B.6. Soit F_i une composante et V_i la famille universelle comme dans le lemme B.2 pour $d = \dim X$. Soit $F_i^2 = F_i \times_B F_i$. Soient $V_i' = V_i \cup (\Delta_X)_{F_i}$ et $V_i'' = V_i \cup (X \times \sigma(B))_{F_i}$ les translatés de cette famille. On applique la proposition B.6 à $Y = (X \times_B X) \times_B F_i^2$ et $Z_1 = V_i' \times F_i$, $Z_2 = F_i \times V_i''$ et $B = F_i^2$. Si $t = (t_1, t_2) \in F_i^2$ au-dessus de b , la fibre de Z_1 en t s'identifie au cycle effectif $\Delta_{X_b} + z_1$ où $\text{pr}_{1*} \text{Supp}(z_1)$ est un sous-schéma propre de X_t , de codimension au moins 1 et la fibre de Z_2 en t s'identifie au cycle effectif $X_b \times \sigma(b) + z_2$ où $\text{pr}_{1*} \text{Supp}(z_2)$ est un sous-schéma propre de X_t , de codimension au moins 1.

On trouve une union dénombrable de fermés B_i comme dans la proposition B.6, qui correspondent au lieu où l'on a l'égalité $\Delta_{X_b} + z_1 = X_b \times \sigma(b) + z_2$. Ensuite on prend encore l'union dénombrable sur tous les i (correspondant aux F_i). \square

Appendice C

Un calcul de groupe de Brauer

PROPOSITION C.1. – Soit K/k une extension cubique galoisienne de corps, de groupe de Galois G . Supposons k de caractéristique $p \neq 3$. Soit $K = k(\theta)$. Soit $X \subset \mathbf{P}_k^5$ l'hypersurface cubique donnée par l'équation homogène

$$\text{Norm}_{K/k}(u + v\theta + w\theta^2) = xy(x - y).$$

Pour tout k -modèle projectif et lisse Y de X , le groupe $\text{Br}(Y)/\text{Br}(k)$ est la somme directe de $\mathbb{Z}/3$ et d'un groupe de torsion p -primaire. En particulier X n'est pas rétracte k -rationnelle.

Démonstration. – On considère d'abord le cas déployé, qu'on peut définir par l'équation homogène

$$uvw = xy(x - y).$$

Les trois k -points définis par l'annulation de x, y et de deux des trois coordonnées (u, v, w) sont les seuls points non lisses de X . Soit $U \subset X$ leur complémentaire.

Soit V le complémentaire dans X du fermé défini par $xy = 0$.

On a $V \subset U$, le complémentaire étant formé des 6 diviseurs géométriquement irréductibles $\Delta_{u,x}, \Delta_{v,x}, \Delta_{w,x}, \Delta_{u,y}, \Delta_{v,y}, \Delta_{w,y}$, où par exemple $\Delta_{u,x}$ est le diviseur sur U défini par $u = x = 0$.

En coordonnées affines (u, v, w, x) , la k -variété V est définie par :

$$uvw = x(x - 1), \quad x \neq 0.$$

Soit $p = V \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}$ la flèche donnée par la coordonnée x . La fibre générique de p est un $k(x)$ -tore déployé. Son groupe de Picard est nul, et les fonctions inversibles sur cette fibre sont de forme $f(x)u^n v^m$ avec $f(x) \in k(x)$ et $n, m \in \mathbb{Z}$. Les fibres de p au-dessus des points fermés distincts de $x = 1$ sont toutes géométriquement intègres, leur classe dans le groupe de Picard de W est nulle. La seule fibre non intègre est donnée par $x = 1$, c'est la somme de trois diviseurs, chacun est principal, car défini par $u = 0$, resp. $v = 0$, resp. $w = 0$. Comme le groupe de Picard de \mathbb{G}_m est nul, on conclut $\text{Pic}(V) = 0$. Par ailleurs, une fonction inversible sur V est de la forme $cx^r(x - 1)^s u^n v^m$ avec $c \in k^\times$ et $r, s, n, m \in \mathbb{Z}$. La considération de son diviseur montre que l'on a $s = n = m = 0$. On a donc établi que la suite

$$1 \rightarrow k[W]^\times / k[U]^\times \rightarrow \text{Div}_{U \setminus W}(U) \rightarrow \text{Pic}(U) \rightarrow \text{Pic}(V)$$

est une suite exacte de réseaux :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}\Delta_{u,y} \oplus \mathbb{Z}\Delta_{v,y} \oplus \mathbb{Z}\Delta_{w,y} \oplus \mathbb{Z}\Delta_{u,x} \oplus \mathbb{Z}\Delta_{v,x} \oplus \mathbb{Z}\Delta_{w,x} \rightarrow \text{Pic}(U) \rightarrow 0,$$

la flèche issue de \mathbb{Z} envoyant 1, classe de la fonction rationnelle $y/x \in k(U)$, sur

$$\Delta_{u,y} + \Delta_{v,y} + \Delta_{w,y} - \Delta_{u,x} - \Delta_{v,x} - \Delta_{w,x}.$$

Soit maintenant K/k extension galoisienne de corps comme dans l'énoncé. Soit \bar{k} une clôture séparable de k contenant K . Soit $g = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ et $h = \text{Gal}(\bar{k}/K)$. Soit $G = \text{Gal}(K/k) \simeq \mathbb{Z}/3$. Les points non lisses de l'hypersurface cubique X_K sont les trois points d'intersection des 3 droites définies dans $x = y = 0$ par $\text{Norm}_{K/k}(u + v\theta + w\theta^2) = 0$.

Soit U la k -variété complémentaire de ces trois points. Sur $K = k(\theta)$, on retrouve la situation déployée, avec $K^\times = K[U]^\times$. Soit V le complémentaire de $xy = 0$. Soit $D_{x,K}$ le diviseur irréductible défini sur U_K par $u + \theta v + \theta^2 w = 0, x = 0$ et $D_{y,K}$ le diviseur défini par $u + \theta v + \theta^2 w = 0, y = 0$. La suite exacte ci-dessus donne alors une suite exacte de G -réseaux

$$1 \rightarrow K[V]^\times / K^\times \rightarrow \text{Div}_{U_K \setminus V_K}(U_K) \rightarrow \text{Pic}(U_K) \rightarrow 0,$$

soit

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[G] \oplus \mathbb{Z}[G] \rightarrow \text{Pic}(U_K) \rightarrow 0,$$

la flèche $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[G] \oplus \mathbb{Z}[G] \subset \text{Div}(U_K)$ envoyant 1 sur la classe du diviseur de la fonction rationnelle (y/x) , soit :

$$\text{div}_{U_K}(y/x) = \text{Norm}_{K/k}(D_{y,K}) - \text{Norm}_{K/k}(D_{x,K}).$$

De cette suite on déduit un isomorphisme

$$\hat{H}^{-1}(G, \text{Pic}(U_K)) \simeq \hat{H}^0(G, K[V]^\times / K^\times) = \hat{H}^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/3,$$

le groupe $\hat{H}^0(G, K[V]^\times / K^\times)$ étant engendré par la classe de $y/x \in k[V]^\times$.

On a le diagramme de suites exactes de G -modules

$$(C.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K[V]^\times / K^\times & \longrightarrow & \text{Div}_{U_K \setminus V_K}(U_K) & \longrightarrow & \text{Pic}(U_K) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & K(U)^\times / K^\times & \longrightarrow & \text{Div}(U_K) & \longrightarrow & \text{Pic}(U_K) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Par le lemme de Shapiro, $\hat{H}^{-1}(G, P) = 0$ pour tout G -module de permutation P , en particulier pour les G -modules $\text{Div}_{U_K \setminus V_K}(U_K)$ et $\text{Div}(U_K)$.

On a donc les suites exactes compatibles

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \hat{H}^{-1}(G, \text{Pic}(U_K)) & \xrightarrow{\simeq} & \hat{H}^0(G, K[V]^\times / K^\times) & & \\ & & \downarrow = & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \hat{H}^{-1}(G, \text{Pic}(U_K)) & \longrightarrow & \hat{H}^0(G, K(U)^\times / K^\times) & \longrightarrow & \hat{H}^0(G, \text{Div}(U_K)). \end{array}$$

Il résulte de ce diagramme que l'image de y/x dans $\hat{H}^0(G, K(U)^\times / K^\times) = \hat{H}^0(G, K(Y)^\times / K^\times)$ est non égale à 1.

Par ailleurs, un argument valuatif sur l'équation de la variété X montre que la fonction $y/x \in k(X)^\times$ a sur tout modèle lisse Y de V son diviseur qui est la norme d'un diviseur sur Y_K pour l'extension K/k .

Observons que X possède le k -point lisse $u = v = w = x = 0, y = 1$.

On conclut alors ([6, lemmes 14 et 15]) que la classe de l'algèbre cyclique $(K/k, y/x) \in \text{Br}(k(X)) = \text{Br}(k(Y))$ est non ramifiée, et qu'elle est non constante.

On peut aussi observer que la suite exacte de G -modules attachée à un modèle projectif et lisse Y donne naissance à la suite exacte

$$0 \rightarrow \hat{H}^{-1}(G, \text{Pic}(Y_K)) \rightarrow \hat{H}^0(G, K(Y)^\times / K^\times) \rightarrow \hat{H}^0(G, \text{Div}(Y_K)),$$

et que l'on a ainsi $\hat{H}^{-1}(G, \text{Pic}(Y_K)) \neq 0$, et donc $H^1(G, \text{Pic}(Y_K)) \neq 0$. Comme Y_K est K -rationnelle, ce qui est clair sur l'équation de X , on a un isomorphisme $H^1(G, \text{Pic}(Y_K)) \simeq H^1(k, \text{Pic}(X \times_k \bar{k}))$, où \bar{k} est une clôture séparable de k contenant K . Là encore, l'existence d'un k -point lisse sur X permet de conclure

$$\text{Br}(Y)/\text{Br}(k) \neq 0.$$

Pour établir l'égalité plus précise $\text{Br}(Y)/\text{Br}(k) = \mathbb{Z}/3$ à la torsion p -primaire près, on observe que comme Y_K est K -rationnelle, le quotient $\text{Br}(Y_K)/\text{Br}(K)$ est un groupe de torsion p -primaire, et que l'on a l'inclusion

$$\text{Br}(Y)/\text{Br}(k) \subset \text{Br}(U)/\text{Br}(k).$$

L'argument ci-dessus montre que la classe $(K/k, y/x)$ d'une part appartient à $\text{Br}(Y)/\text{Br}(k)$, d'autre part engendre le noyau de $\text{Br}(U)/\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(U_K)/\text{Br}(K)$, qui est isomorphe à $H^1(G, \text{Pic}(U_K)) \simeq \mathbb{Z}/3$. □

REMARQUE C.2. – Une fois établi $K^\times = K[U]^\times$ et $H^1(G, \text{Pic}(U_K)) \simeq \mathbb{Z}/3$, on peut aussi établir $H^1(G, \text{Pic}(Y_K)) \neq 0$ en supposant qu'on connaît une désingularisation $Y \rightarrow X$ induisant un isomorphisme au-dessus de U . On a alors la suite exacte de G -modules

$$0 \rightarrow \text{Div}(Y_K \setminus U_K) \rightarrow \text{Pic}(Y_K) \rightarrow \text{Pic}(U_K) \rightarrow 0.$$

Comme $Y \setminus U$ est au-dessus des trois points singuliers définis sur K et conjugués transitivement par l'action de G , on voit que le G -module de permutation $\text{Div}(Y_K)$ est forcément une somme directe d'exemplaires de $\mathbb{Z}[G]$. Mais alors la suite exacte donne

$$H^1(G, \text{Pic}(Y_K)) \simeq H^1(G, \text{Pic}(U_K)) \simeq \mathbb{Z}/3.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ARTIN, D. MUMFORD, Some elementary examples of unirational varieties which are not rational, *Proc. London Math. Soc.* **25** (1972), 75–95.
- [2] A. AUDEL, J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, R. PARIMALA, Universal unramified cohomology of cubic fourfolds containing a plane, prépublication arXiv:1310.6705, à paraître dans *Brauer groups and obstruction problems : moduli spaces and arithmetic (Palo Alto, 2013)* (A. Auel, B. Hassett, T. Várilly-Alvarado, B. Viray, éd.).

- [3] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative, chapitres 8 et 9*, Springer, 2006.
- [4] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, Un théorème de finitude pour le groupe de Chow des zéro-cycles d'un groupe algébrique linéaire sur un corps p -adique, *Invent. math.* **159** (2005), 589–606.
- [5] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, M. OJANGUREN, Variétés unirationnelles non rationnelles : au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford, *Invent. math.* **97** (1989), 141–158.
- [6] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC, La R -équivalence sur les tores, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **10** (1977), 175–229.
- [7] P. DELIGNE, *Cohomologie étale*, Lecture Notes in Math. **569**, Springer, Berlin-New York, 1977, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA 4 1/2.
- [8] H. ESNAULT, O. WITTENBERG, On the cycle class map for zero-cycles over local fields, *Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.* **49** (2016), 481–518.
- [9] W. FULTON, Rational equivalence on singular varieties, *Publ. Math. IHÉS* **45** (1975), 147–167.
- [10] W. FULTON, *Intersection theory*, second éd., *Ergebn. Math. Grenzg.* **2**, Springer, Berlin, 1998.
- [11] O. GABBER, Q. LIU, D. LORENZINI, The index of an algebraic variety, *Invent. math.* **192** (2013), 567–626.
- [12] A. GROTHENDIECK, Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III, *Publ. Math. IHÉS* **28** (1966), 255.
- [13] A. GROTHENDIECK, Le groupe de Brauer I, II, III, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson & North-Holland, 1968.
- [14] J. HUH, A counterexample to the geometric Chevalley-Waring conjecture, prépublication arXiv:1307.7765.
- [15] V. A. ISKOVSKIKH, Y. I. MANIN, Quartiques de dimension trois et contre-exemples au problème de Lüroth, *Mat. Sb.* **86** (1971), 140–166 (en russe).
- [16] N. A. KARPENKO, A. S. MERKURJEV, On standard norm varieties, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **46** (2013), 175–214 (2013).
- [17] S. L. KLEIMAN, The Picard scheme, in *Fundamental algebraic geometry*, *Math. Surveys Monogr.* **123**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 235–321.
- [18] J. KOLLÁR, *Rational curves on algebraic varieties*, *Ergebn. Math. Grenzg.* **32**, Springer, Berlin, 1996.
- [19] D. A. MADORE, Équivalence rationnelle sur les hypersurfaces cubiques de mauvaise réduction, *J. Number Theory* **128** (2008), 926–944.
- [20] D. A. MADORE, Sur la spécialisation de la R -équivalence, prépublication <http://perso.telecom-paristech.fr/~madore/specialz.pdf>.
- [21] A. MERKURJEV, Unramified elements in cycle modules, *J. Lond. Math. Soc.* **78** (2008), 51–64.
- [22] M. ROST, Chow groups with coefficients, *Doc. Math.* **1** (1996), No. 16, 319–393.
- [23] J.-P. SERRE, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968.
- [24] E. H. SPANIER, *Algebraic topology*, Springer, New York, 1966, corrected reprint of the 1966 original.

- [25] C. VOISIN, Unirational threefolds with no universal codimension 2 cycle, *Invent. math.* **201** (2015), 207–237.

(Manuscrit reçu le 27 mars 2014 ;
accepté, après révision, le 17 mars 2015.)

Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE
C.N.R.S., Université Paris Sud
Mathématiques, Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex, France
E-mail: jlct@math.u-psud.fr

Alena PIRUTKA
C.N.R.S., École polytechnique
CMLS
91128 Palaiseau, France
E-mail: alena.pirutka@polytechnique.edu

