Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi Pisa, Italie
Perido speciale di ricerca nella geometria diofantea
Scuola Normale Superiore, Pisa, 14-20 octobre 2012

Punti interi su famiglie di spazi omogenei

(Lavori congiunti con Fei XU (Pechino) e con David HARARI (Orsay))

Jean-Louis Colliot-Thélène

C.N.R.S., Université Paris-Sud, France

Sia X una k-varietà algebrica sopra un campo di numeri k. Abbiamo la diagonale : $X(k) \subset \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v)$. Sia S un insieme finiti di luoghi di k. Diciamo che l'approssimazione forte vale fuori di S se vale l'enunciato seguente. Sia $S \subset T$, T insieme finito di luoghi, $\infty \subset T$, e $\mathcal{X}/O_T$ un modello di X/k, e poi per ciascuna $v \in T \setminus S$, un aperto $U_v \subset X(k_v)$. Allora, se

$$\prod_{v \in S} X(k_v) \times \prod_{v \in T \setminus S} U_v \times \prod_{v \notin T} \mathcal{X}(O_v)$$

non e vuoto, c'è un punto di $X(k)$ con l'immagine diagonale in questo prodotto.

Se questo vale, abbiamo un locale-globale principio per gli punti S-interi :

Sia $\mathcal{X}/O_S$ une modello intero di X/k, se

$$\prod_{v\in S} X(k_v) \times \prod_{v\notin S} \mathcal{X}(O_v) \neq \emptyset,$$

allora $\mathcal{X}(O_S) \neq \emptyset$.

Esempi classici per l'approssimazione forte.

(1) $\mathbb{G}_a$ e $S \neq \emptyset$: il teorema cinese del resto

(2) $q(x_1, \ldots, x_n) = a$ con $n \geq 4$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $q \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ una forma quadratica intera, isotropa in un luogo $v \in S$. (Eichler, Kneser)

(3) G/k un gruppo algebraico semisimplice, semplicemente connesso, quasi semplice, supponendo $\prod_{v \in S} G(k_v)$ non è compatto (Kneser, Platonov)

Un esercizio

Siano $a_i(t) \in \mathbb{Z}[t], i = 1, 2, 3, 4, 5,\ a_i(t) \neq 0$.
Supponiamo che non c'e un polinomio irreducibile $p(t) \in \mathbb{Z}[t]$, $p(t) \notin \mathbb{Z}$ che divide più di due delle $a_i(t)$.
Supponiamo anche che è possibile risolvere $\sum_{i=1}^{4} a_i(t)x_i^2 = 0$ in modo non banale con $x_i(t) \in \mathbb{R}(t)$.
Per $\mathcal{X} \subset \mathbb{A}^5_{\mathbb{Z}}$ lo schema affine sopra $\mathbb{Z}$ definito da

$$\sum_{i=1}^{4} a_i(t)x_i^2 = a_5[t]$$

abbiamo : $\mathcal{X}(\mathbb{Z})$ è denso nel prodotto $\prod_{p\neq\infty} \mathcal{X}(\mathbb{Z}_p)$.

Sia X/k una varietà algebrica affina.
In modo di avere l'approssimmazione forte per X, è necessario che X sia geometricamente semplice connessa (Minchev)
e
che $\prod_v X(k_v)$ sia non compatto.
Però non è sufficiente.

Un esempio di Borovoi e Rudnick :

$$(y-x)(9x+7y)+2z^2=1$$

Ci sono soluzioni in tutti gli annelli $\mathbb{Z}_p$ ma no c'è una soluzione in $\mathbb{Z}$.

CT e Fei XU (2005-2009) : Spegazione di molti tali esempi mediante una versione affine dell'ostruzione di Brauer–Manin, che fino ad allora era stata considerata sopratutto per le varietà proiettive.

Si usa l'accoppiamento

$$X(\mathbb{A}_k) \times \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$(\{M_v\}, A) \mapsto \sum_v \mathrm{inv}_v A(M_v),$$

che si annulla su $X(k) \times \mathrm{Br}(X)$. Denotiamo con

$$X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}$$

il nucleo di sinistra.
Abbiamo così $X(k) \subset X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}$.

Si dice che **l'approssimazione forte fuori di S con la condizione di Brauer-Manin** è valida per una varietà X/k con $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$ se abbiamo sempre la seguente proprietà.
Sia T con $S \cup \infty \subset T$ un insieme finito di luoghi. Sia $\mathcal{X}/O_T$ un modello di X/k, e per ogni $v \in T \setminus S$, sia $U_v \subset X(k_v)$ un aperto. Se l'insieme

$$[\prod_{v \in S} X(k_v) \times \prod_{v \in T \setminus S} U_v \times \prod_{v \notin T} \mathcal{X}(O_v)]^{\mathrm{Br}(X)}$$

non è vuoto, allora contiene l'immagine diagonale d'un punto di $X(k)$.

Teorema. (Borovoi e Demarche, Commentarii 2012 ?)
Sia $X = G/H$ un spazio omegeneo di un gruppo lineare algebrico connesso G/k con H connesso. Se per ogni semplice fattore G_i di G, $G_i(k_{v_0})$ no è compatto, allora l'approssimazione forte fuori di $S = \{v_0\}$ con la condizione di Brauer-Manin vale per X.

La prova si basa su risultati precedenti di
CT/XU ($X = G/H$, G semisemplice, 2009) ;
Harari ($X = G$ toro, 2008) ; Demarche ($X = G$ connesso, 2011).

Se G è semisemplice, allora $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ è finito. Però se $G = \mathbb{G}_{m,k}$, $\mathrm{Br}(\mathbb{G}_m)/\mathrm{Br}(k) = H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ è infinito.

Un esempio

Sia $q(x, y, z) \in k[x, y, z]$ una forma quadratica non degenere, $a \in k^{\times}$. Sia X/k la k-varietà affine con equazione $q(x, y, z) = c$. Se $X(k) \neq \emptyset$, allora $X = Spin(q)/T$, dove T è un toro di dimensione uno. Si calcola $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \subset \mathbb{Z}/2$, è si può dare il generatore.

In questo modo, si può dare una dimostrazione della :

Proposizione (M. Kneser).
"Endliche Anzahl von Spinorausnahmen"
Supponiamo che la forma quadratica $q(x, y, z) \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ *è indefinita (vale a dire che è isotropa sulle reali). Esiste un insieme finito* $E = E(q) \subset \mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^{\times 2}$ *tale che, se* $c \in \mathbb{Z}$ *non ha la sua classe in* $E = E(q) \subset \mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^{\times 2}$, *allora il locale-globale principio vale per le soluzioni interi della equazione*

$$q(x, y, z) = c.$$

Che si può fare per varietà che non sono omogenei spazi di un gruppo linearo algebrico ?

Per i punti razionali i resultati classici sono stati ottenuti prima per le spazi omogenei (Eichler, Kneser, Harder, Chernousov, Sansuc, Borovoi), e poi per alcune varietà X con una fibrazione $\pi : X \to \mathbb{A}^1_k$ la cui fibra generica è un spazio omogeneo.

Per punti interi, abbiamo già visto un caso :

$$\sum_{i=1}^{4} a_i(t)x_i^2 = a_5[t].$$

Abbiamo qui la fibrazione $X \to \mathbb{A}_k^1$, $(\{x_i, t) \mapsto t$. La fibra generica è un spazio omogeneo di $Spin(q)/k(t)$, con $q = \sum_{i=1}^{4} a_i(t)x_i^2$. Que cosa possiamo fare per

$$\sum_{i=1}^{3} a_i(t)x_i^2 = a_4[t]?$$

Che cosa possiamo già fare per

$$q(x, y, z) = p[t]$$

con $q(x, y, z) \in k[x, y, z]$ una forma quadratica non degenere e $P(t) \in k[t]$, $P \neq 0$?
Sia X/k la varietà affine con questa equazione. Sia $U \subset X$ l'aperto complemento di $x = y = z = 0$. Questo è liscio. Se $P(t)$ è un polinomio separabile, allora X/k è liscia.
Sia $\tilde{X} \to X$ una risoluzione delle singolarità di X, con $U \subset \tilde{X}$.

Teorema principale in alcune lezione precedenti (CT e Fei XU, 2011)
Sia k un campo di numeri e v_0 un luogo in cui q è isotropa. Allora **l'approssimazione forte fuori di $S = \{v_0\}$ con la condizione di Brauer-Manin** *è valida per tutto V con $U \subset V \subset \tilde{X}$.*
Se $P(t)$ è separabile e non costante, allora l'approssimazione forte fuori di S vale per U e X.

Se $P(t)$ non è separabile, ci sono casi quando l'approssimazione forte fuori di S non vale per $\tilde{X}$. Per esempio, per $\mathcal{X}/\mathbb{Z}$ con la equazione

$$(x-y)(9x+7y)-2z^2=-(2t^2-1)^2$$

abbiamo $\prod_{p\cup\infty}\mathcal{X}(\mathbb{Z}_p)\neq\emptyset$ però $\mathcal{X}(\mathbb{Z})=\emptyset$.

Se $P(t)$ non è separabile, ci sono casi quando l'approssimazione forte fuori di S non vale per U. Per esempio, il locale-globale principio non vale per le soluzioni primitive ($mcd(x,y,z)=1$) di

$$x^2-2y^2+64z^2=(2t^2+3)^2.$$

Un caso particolare del teorema.

Teorema (CT-Xu). *Sia* $q(x, y, z) \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ *una forma quadratica indefinita. Se* $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ *non è un quadrato in* $\mathbb{C}[t]$*, allora il locale-globale principio vale per le soluzione interi dell'equazione* $q(x, y, z) = P(t)$.

Dimostrazione.
Esiste un insieme finito S di numeri primi tale che per $p \notin S$ ogni elemento di $\mathbb{Z}_p$ sia rappresentato da $q(x, y, z)$ sopra $\mathbb{Z}_p$.
Per ipotesi, ci sono soluzioni $(x_p, y_p, z_p, t_p) \in \mathbb{Z}_p^4$.
Scegliamo $t_0 \in \mathbb{Z}$ molto vicino a t_p per $p \in S$.
Esiste allora tale intero $r > 0$ che, per *tutto* $m > 0$,

$$P(t_0 + (\prod_{p \in S} p)^r . m)$$

sia rappresentato di $q(x, y, z)$ sopra *ogni* $\mathbb{Z}_p$.

Lemma. Sia $P(t) \in \mathbb{Q}[t]$ un polinomio che non è un quadrato in $\mathbb{C}[t]$. L'insieme di tutti gli $P(m), m \in \mathbb{N}$ attraversa un numero infinito di classe in $\mathbb{Q}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times 2}$. $\square$

Si può quindi scegliere un intero $m = m_0$ tale che $P(t_0 + (\prod_{p \in S} p)^r . m_0)$ non sia in una delle classi eccezionali (Spinorausnahmen) per q in $\mathbb{Q}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times 2}$.
Il locale-global principio vale per

$$q(x, y, z) = P(t_0 + (\prod_{p \in S} p)^r . m_0)$$

e come questa equazione in (x, y, z) ha soluzioni in tutti gli $\mathbb{Z}_p$, ha anche soluzioni in $\mathbb{Z}$.
QED

I nuovi resultati (CT e Harari 2012)

Teorema

Siano $a_i(t), i = 1, 2, 3,$ *e* $p(t)$ *in* $\mathbb{Z}[t]$ *polinomi. Supponiamo che il prodotto* $p(t).\prod_i a_i(t)$ *è separabile e non costante. Sia* $\mathcal{X} \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{Z}}$ *lo schema affine definito da*

$$\sum_{i=1}^{3} a_i(t)x_i^2 = p(t).$$

Supponiamo che per quasi tutti $\theta \in \mathbb{R}$ *la conica* $\sum_{i=0}^{2} a_i(\theta)x_i^2 = 0$ *ha un punto sopra il campo* $\mathbb{R}$*. Allora il locale-globale principio e l'approssimazione forte sono valide per i punti interi di* $\mathcal{X}$ *: l'immagine diagonale di* $\mathcal{X}(\mathbb{Z})$ *è densa nel prodotto* $\prod_{p \neq \infty} \mathcal{X}(\mathbb{Z}_p)$*.*

Questo teorema è un caso particolare di :

Teorema *Siano* $a_i(t), i = 1, 2, 3,$ *e* $p(t)$ *polinomi coprimi a coppie. Sia* $Y \subset \mathbb{A}^4_k$ *la varietà affine con equazione*

$$\sum_{i=1}^{3} a_i(t)x_i^2 = p(t)$$

e sia $X = Y_{lis}$ *l'aperto liscio massimo. Sia* v_0 *un luogo di* k.
(i) Se la conica di equazione $\sum_{i=0}^{2} a_i(t)x_i^2 = 0$ *sopra il campo* $k(t)$ *ha un punto sul campo* $k_{v_0}(t)$*, allora l'immagine diagonale di* $X(k)$ *nella proiezione di* $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}X}$ *su* $X(\mathbb{A}_k^{v_0})$ *(adèle fuori di* v_0*) è densa.*
(ii) Se inoltre il prodotto $p(t).\prod_i a_i(t)$ *è un polinomio separabile e non è costante, allora* $X = Y$*, e l'approssimazione forte fuori di* $\{v_0\}$ *vale per* X *: l'immagine diagonale di* $X(k)$ *è densa in* $X(\mathbb{A}_k^{v_0})$*.*

Questo teorema è un caso particolare di una variante di :

Teorema *Sia X una k-varietà liscia e connessa con un morfismo $f : X \to \mathbb{A}^1_k$. Supponiamo :*
(i) La fibra generica di f è un spazio omogeneo d'un $k(t)$-gruppo semsemplice, semplicemente connesso e quasi semplice $G_t/k(t)$ e gli stabilizzatori geometriche sono connessi e riduttivi.
(ii) In ciascuna fibre X_m di f c'è une componente $Z_m \subset X_m$ con la molteplicità uno tale che il campo $k(m)$ viene algebricamente chiuso in $k(Z_m)$.
(iii) Esistono un luogo v_0 di k, una sezione razionale di f sopra il campo k_{v_0}, e per quasi tutti $t_0 \in k_{v_0}$ il gruppo G_{t_0}/k_{v_0} è isotropo.
(iv) Ogni elemento del gruppo di Brauer $\mathrm{Br}X$ è costante su $X(k_{v_0})$.
Allora l'approssimazione forte fuori di $\{v_0\}$ con la condizione di Brauer-Manin vale per X.

Metodo : cercare un valore 'integrale" θ del parametro t tale che il punto dato di $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}$ sia "vicino" ad un punto di $X_\theta(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X_\theta)}$, e quindi applicare CT-Xu 2009 a lo spazio omogeneo X_θ.

Per lo studio di punti razionali di un X con $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ un morfismo proiettivo, il lavoro è stato fatto da Harari (1994,1997). Si ha la necessità di controllare il modo in cui il gruppo di Brauer varia in una familia.
Un ruolo importante è svolto dal "lemma formale" per elementi di Brauer con pali.

Qui si ha la necessità di rifare tutto per una fibrazione *affine* con fibre affine di tipo G/H.
Vi è la difficoltà aggiunta che il brutto luogo v_0 non può essere cambiato.
Sviluppiamo una nuova variante del "metodo di fibrazioni" – che a sua volta semplifica alquanto approcci precedenti.