SUR LES FORMES DE FERMAT-PFISTER

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

Soit k un corps, $p \geq 0$ son exposant caractéristique, $n \geq 2$ un entier, $m \geq 2$ un entier premier à p.

Pour $m = 2$, et $a_1, \ldots, a_n$ et $p \neq 2$, on connaît bien la forme quadratique de Pfister

$$< 1, -a_1 > \otimes \cdots \otimes < 1, -a_n > .$$

C'est une forme quadrique diagonale en 2^n variables $x_1, \ldots, x_{2^n}$. Soit F le corps des fonctions de la quadrique projective ainsi définie.

Il est connu que le symbole $(a_1, \ldots, a_n) \in K_n^M(k)$ a une image nulle dans $K_n^M(F)/2$.

Dans l'article [S], pour tout $m \geq 2$, et tout corps k de caractéristique première à m, S. Schreieder s'intéresse à une forme $\Phi_{n,m}$ de degré m en 2^n variables similaire, qu'il appelle de Fermat-Pfister, et qui est donné par le simple remplacement de chaque x_i^2 par x_i^m.

Il montre :

Proposition A (Schreieder). *Soit F le corps des fonctions de la forme homogène de l'hypersurface lisse projective définie par $\Phi_{n,m} = 0$. Alors le symbole $(a_1, \ldots, a_n) \in K_n^M(k)$ a une image nulle dans $K_n^M(F)/m$.*

On peut donner une démonstration alternative de ce résultat.

Lemme. Pour tout espace affine A_k^N, un entier $m > 1$ inversible dans k, et tout entier $n \geq 1$, on a une suite exacte disons d'homotopie :

$$0 \to K_n^M k/m \to K_n^M k(\mathbb{A}^N)/m \to \oplus_{x \in A_k^N{}^{(1)}} K_{n-1}^M(k(x))/m \to 0$$

avec des applications résidu à droite.

Démonstration : pour $N = 1$, on a la suite exacte scindée de Milnor (+ Tate) Inventiones math. 9 (1970) 318-344 Thm. 2.3

$$0 \to K_n^M k \to K_n^M k(\mathbb{A}^1) \to \oplus_{x \in A_k^N{}^{(1)}} K_{n-1}^M(k(x)) \to 0.$$

On fait ensuite des fibrations successives d'espaces affines $\mathbb{A}_k^N \to A_k^{N-1}$ on regarde la fibre générique, on compare les résidus. Ce genre d'argument a été appliqué à divers foncteurs depuis au moins 1980.

Démonstration alternative de la Proposition (Corollaire 1.4. chez Schreieder).

On procède par récurrence sur n dans $Pf_{m,n}$.

On va supposer établi le corollaire 1.4 pour $n = 2$. Montrons-le pour $n = 3$.

On considère l'hypersurface de Fermat-Pfister $Pf_{m,2}$ de degré m engendrée par les coefficients (a, b), a et $b \in k^*$. Soit P_m l'équation. Il y a donc 4 variables, la forme est intègre. On considère sur le corps $F = k(y_1, \ldots, y_4)$ $(a, b, P_m) \in K_3^M(F)/m$. Quels sont ses résidus sur $\mathbb{A}_k^4$? Le seul a priori non nul est celui le long de l'hypersurface intègre $P_m = 0$. Là, son résidu est donné par $(a, b) \in K_2^M(k(F))/m$.

Date: 11 + 14 mars 2020.

Par hypothèse de récurrence, c'est nul. Par la suite d'homotopie, (a, b, P_m) est dans l'image de $K_3^M(k)/m$. Mais comme P_m représente 1, on conclut que $(a, b, P_m) = 0 \in K_3^M(F)/m$.

Soit alors $Pf_{m,3}$ une forme de Fermat-Pfister de degré m engendrée par les coefficients $a, b, c \in k^*$.

Soit X l'hypersurface projective définie par $Pf_{m,3}$. Elle est donnée par une équation $P_{a,b}(x_0, x_1, x_2, x_3) - cP_{a,b}(y_0, y_1, y_2, y_3) = 0$, où $P_{a,b}$ est une hypersurface de Fermat-Pfister $Pf_{m,2}$ de degré m. Soit L le corps des fonctions de X.

On s'intéresse à l'image de $(a, b, c) \in K_3^M(k)/m$ dans $K_3^M(L)/m$. Dans le corps L, on a une égalité

$$P_{a,b}(x_0, x_1, x_2, x_3) = c.P_{a,b}(y_0, y_1, y_2, y_3)$$

soit encore

$$c = P_{a,b}(x_0, x_1, x_2, x_3)/P_{a,b}(y_0, y_1, y_2, y_3).$$

On est donc en train de s'intéresser à $(a, b, P_{a,b}(x_0, x_1, x_2, x_3)$ et $(a, b, P_{a,b}(y_0, y_1, y_2, y_3)$, dans $K_3^M(L)/m$, où on note ici $P_{a,b}(x_0, x_1, x_2, x_3)$ l'image de $P_{a,b}(x_0, x_1, x_2, x_3)$ dans le corps L (il faut déshomogénéiser).

Mais on a vu ci-dessus que $(a, b, P_{a,b}(x_0, x_1, x_2, x_3)$ est nul dans $K_3^M(k(\mathbb{A}^4))/m$. Ainsi $(a, b, P_{a,b}(x_0, x_1, x_2, x_3)$ et $(a, b, P_{a,b}(y_0, y_1, y_2, y_3)$, sont nuls dans $K_3^M(L)/m$, et donc (a, b, c) est nul dans $K_3^M(L)/m$.

Er on continue. QED

Suivant une idée de Krashen et Matzri, cette propriété permet de démontrer :

Proposition B. *Soit k un corps C_i. Soit ℓ un premier distinct de la caractéristique de k. Si le corps k satisfait la propriété C_i de Lang, la ℓ-dimension cohomologique de k satisfait l'inégalité*

$$cd_\ell(k) \leq i.log_2(\ell).$$

Démonstration. Pour établir ce résultat, on peut supposer que k contient les racines primitives ℓ-ièmes de 1. Comme k est un corps C_i, si l'on a $2^n > \ell^i$, alors la forme Φ de degré ℓ en 2^n variables admet un zéro sur k, et ce zéro est lisse. La proposition et un argument simple de spécialisation montre alors que l'on a $(a_1, \ldots, a_n) = 0 \in K_n^M(k)/\ell$. L'application naturelle de la K-théorie de Milnor dans la cohomologie galoisienne donne alors $(a_1) \cup \cdots \cup (a_n) = 0 \in H^n(k, \mu_\ell^{\otimes n})$, où l'on note $(a_i) \in H^1(k, \mu_m)$ la classe de a_i dans k^*/k^{*m}.

La conjecture de Bloch-Kato démontrée par Rost et Voevodsky [V] assure que $H^n(k, \mu_\ell^{\otimes n})$ est constitué de sommes de symboles. Donc $H^n(k, \mu_\ell^{\otimes n}) = 0$, et ceci suffit à conclure que la ℓ-dimension cohomologique de k est strictement inférieure à n dès que $n.log(2) > i.log(\ell)$, i.e. dès que $n > i.log(\ell)/log(2)$. QED

Il convient cependant ici de noter qu'une borne linéaire en i en général un peu meilleure est déjà connue. Pour un corps k qui est C_i, en construisant des formes "scindantes", Krashen et Matzri [KM] ont montré, pour $i \geq 3$,

$$cd_\ell(k) \leq \lceil (i-2).log_2(\ell) + 1 \rceil.$$

Pour $i = 2$, on a k C_2 implique $cd(k) \leq 2$, via Merkurjev-Suslin, comme remarqué antérieurement par Serre.

Références

[KM] D. Krashen and E. Matzri, Diophantine and cohomological dimension. 2

[S] S. Schreieder, Torsion order of hypersurfaces, preprint, November 27, 2019. 1

[V] Vladimir Voevodsky, On motivic cohomology with $\mathbb{Z}/\ell$ coefficients, Ann. of Math. (2) 174 (2011), no. 1, 40–438. 2

Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de mathématiques d'Orsay, 91405, Orsay, France.

Email address: jlct@math.u-psud.fr