Toronto, den 8. Mai 2013

Brief von J-L. Colliot-Thélène an Stefan Gille

Hier ist ein allgemeiner Satz.

Satz. *Sei F ein Körper, X eine glatte, projektive, geometrisch irreduzible Varietät mit einem rationalen Punkt. Sei $G = Gal(F_s/F)$ die absolute Galoisgruppe von F.*

Nehmen wir an :

(a) Für jede Erweiterung von Körpern L/F ist die Gradabbildung

$$CH_0(X_L) \to \mathbf{Z}$$

bijektiv.

(b) $M = \mathrm{Pic}(X \times_F F_s)$ ist ein Gitter.

Dann gibt es ein G-Gitter N, ein Permutationsmodul P und einen Isomorphismus

$$M \oplus N \simeq P$$

von Galois Gittern.

Beweis – auch im Falle $\mathrm{Char}(F) > 0$.

Sei $p_0 \in X(F)$. Sei T der F-Torus mit Charaktergruppe $\hat{T} = M$. Sei $Y \to X$ der universelle Torsor über X mit trivalem Faser im Punkte p_0. Das ist ein Torsor unter der Gruppe T. Sei L/F eine Erweiterung von Körpern. Solch'ein Torsor definiert Abbildungen

$$X(L) \to H^1(L, T)$$

und allgemeiner

$$CH_0(X_L) \to H^1(L, T)$$

(letztere eine Gruppenabbildung) die p_0 nach 0 schicken. (Siehe [CTS77] Prop. 12 page 198).

Sei η der generische Punkt von X und $L = F(X)$ der Funktionenkörper von X. Unter der Annahme $Grad : CH_0(X_L) \simeq \mathbf{Z}$ folgt, daß das Bild von $\eta - p_0$ unter

$$CH_0(X_L) \to H^1(L, T)$$

null ist, also ist das Bild von η unter

$$X(L) \to H^1(L, T)$$

auch null. Das besagt aber, daß der Torsor $Y \to X$ unter T einen rationalen Schnitt hat, also ist die F-Varietät Y F-birational zum Produkt $X \times_F T$.

Sei T^c/F eine äquivariante glatte Kompaktifizierung vom F-torus T ([CTHaSk]).

Dann ist $Y^c = Y \times^T T_c$ (contracted product) eine vollständige glatte Kompaktifizierung von Y.

Die glatten projektiven Varietäten Y^c und $X \times_F T^c$ sind F-birational zueinander.

In [CRAS, Théorème 1] und [DescII, Thm. 2.12 Seite 411] wird gezeigt : da $Y \to X$ ein universeller Torsor ist, folgt $F_s \simeq F_s[Y]^\times$ und $\mathrm{Pic}(Y \times_F F_s) = 0$. Daraus folgt leicht : $\mathrm{Pic}(Y^c_{F_s})$ ist ein Gitter und ist als G-Modul ein Permutationsmodul P_0.

Weil T^c geometrisch rational ist, ist die natürliche Abbildung $\mathrm{Pic}(X_{F_s}) \oplus \mathrm{Pic}(T^c_{F_s}) \to \mathrm{Pic}((X \times_F T^c)_{F_s})$ ein Isomorphismus ([RET] Lemme 11 Seite 188).

In Descente II, Prop. 2.A.1 Seite 461 findet man einen Beweis von Moret-Bailly für das folgende Lemma.

Lemma. Seien V und W zwei glatte vollständige geometrische irreduzible Varietäten die F-birational zueinander sind. Dann gibt es Permutationsmodule P_1 und P_2 und einen Isomorphismus von Galoismodulen

$$P_1 \oplus \mathrm{Pic}(V_{F_s}) \simeq P_2 \oplus \mathrm{Pic}(W_{F_s}).$$

Wenn man alles zusammenfasst, erhält man einen Isomorphismus von Galoismodulen

$$P_1 \oplus P_0 \simeq P_2 \oplus \mathrm{Pic}(X_{F_s}) \oplus \mathrm{Pic}(T^c_{F_s}),$$

also ist $\mathrm{Pic}(X_{F_s})$ invertierbar.

Was zu beweisen war.

Bemerkungen

1. Wenigstens wenn $\mathrm{Char}(F) = 0$, sollte man zeigen können, daß Annahme (b) aus Annahme (a) folgt. Man kann schon sehen, daß $\mathrm{Pic}(X \times_F F_s)$ von endlichem Typ über $\mathbf{Z}$ ist.

(Addiert, 10. April 2014) Sei $\mathrm{Char}(F) = 0$, und sei $n > 0$ eine ganze Zahl. Aus Annahme (a) und der Kummerschen Sequenz folgt :

$$0 = H^1_{nr}(F_s(X)/F_s, \mu_n) = H^1_{et}(X_s, \mu_n) = \mathrm{Pic}(X_{F_s})[n].$$

Wegen der bekannten Struktur der Picard Gruppe erfolgt, daß die Picard Varietät von X null ist, und daß die Néron-Severi Gruppe torsionsfrei ist, also ist $\mathrm{Pic}(X \times_F F_s)$ ein Gitter.

2. Es it nicht klar, ob die Arbeit von Merkurjev [M] einen alternativen Beweis des Satzes geben könnte. Aus dieser Arbeit kann man wenigstens folgern, daß $\mathrm{Pic}(X \times_F F_s)$ co-welk ist.

[CRAS] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, Variétés de première descente attachées aux variétés rationnelles, CRAS Paris **284** (1977) 967–970.

[RET] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La R-équivalence sur les tores, Ann. Sc. Éc. Norm Sup. **10** (1977) 175–229.

[DescII] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles, II, Duke Math. J. **54** (1987) 375–492.

[CTHaSk] J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari et A. N. Skorobogatov, Compactifications équivariantes d'un tore (d'après Brylinski et Künnemann), Expositiones mathematicae **23** (2005) 161–170.

[M] A. S. Merkurjev, Unramified elements in cycle modules, J. London Math. Soc. (2) **78** (2008) 51–64.