UN LEMME SUR LES RÉSEAUX

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

Soit G un groupe fini. Un G-réseau est dit de permutation s'il admet une $\mathbb{Z}$-base globalement stable sous l'action de G. Il est dit inversible s'il est un facteur direct, comme G-module, d'un G-module de permutation. Un tel G-module M satisfait $H^1(G,M)=0$. On note $N_G=\sum_{g\in G} g\in \mathbb{Z}[G]$, et on note $I_G\subset \mathbb{Z}[G]$ le noyau de l'augmentation $\epsilon : \mathbb{Z}[G]\to \mathbb{Z}$.

Dans un récent article, M. Brion et E. Peyre utilisent, et démontrent :

Lemme [BP2020, Lemme 6] *Soit G un groupe fini et M un G-réseau. Si tout sous-G-module de M est un G-réseau inversible, alors l'action de G sur M est triviale.*

Via les groupes de Sylow, on réduit la démonstration au cas $G=\mathbb{Z}/p$ avec p premier. Voici dans ce cas $G=\mathbb{Z}/p$ une démonstration alternative du résultat.

On a un G-réseau M dont tout sous-G-module est un G-réseau inversible, donc en particulier il existe un G-réseau N et un isomorphisme de G-réseaux

$$M\oplus N\simeq \mathbb{Z}^r\oplus \mathbb{Z}[G]^s.$$

Soit $I_G\subset \mathbb{Z}[G]$ dans un des facteurs de droite. Soit $T\subset M$ l'image de l'application composée

$$I_G\hookrightarrow \mathbb{Z}[G]\hookrightarrow (\mathbb{Z}[G]^s\oplus \mathbb{Z}^r)\to (M\oplus N)\to M.$$

C'est un sous-G-module de M, donc par hypothèse T est un G-réseau inversible. On a une suite exacte de G-réseaux $0\to R\to I_G\to T\to 0$. Dualisons cette suite exacte (dual à valeurs dans $\mathbb{Z}$). Cela donne une suite exacte de G-réseaux

$$0\to T^0\to \mathbb{Z}[G]/\mathbb{Z}N_G\to R^0\to 0.$$

Pour $p=2$, le quotient $\mathbb{Z}[G]/\mathbb{Z}N_G$ est libre de rang 1 sur $\mathbb{Z}$ donc soit $T^0=0$ soit $R^0=0$. Pour $p>2$, l'anneau $\mathbb{Z}[G]/\mathbb{Z}N_G$ s'identifie comme anneau à l'anneau $\mathbb{Z}[x]/(1+x+\cdots+x^{p-1})$, c'est-à-dire à l'anneau $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ des entiers cyclotomiques. Le sous-G-module T^0 s'identifie donc à un idéal de l'anneau de Dedekind $\mathbb{Z}[\zeta_p]$. Le quotient R^0 de $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ par cet idéal est sans $\mathbb{Z}$-torsion. Ainsi soit $R^0=0$ soit $T^0=0$. Et donc soit $R=0$ soit $T=0$.

Si $R=0$ alors $I_G=T$ mais ceci n'est pas un G-réseau inversible, puisque $H^1(G,I_G)=\mathbb{Z}/p$. Donc $T=0$. Mais alors la surjection $\mathbb{Z}^r\oplus\mathbb{Z}[G]^s\to M$ se factorise par le G-module trivial $\mathbb{Z}^r\oplus\mathbb{Z}^s$, et l'action de G sur M est triviale.

Références

[BP2020] Michel Brion et Emmanuel Peyre. Very special algebraic groups. https ://arxiv.org/abs/2002.06940 1

Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de mathématiques d'Orsay, 91405, Orsay, France.

E-mail address: `jlct@math.u-psud.fr`

Date: Pise, 20 février 2020.