RATIONALITÉ D'UN FIBRÉ EN CONIQUES

par

Jean-Louis Colliot-Thélène

Abstract. — F. Campana had asked whether a certain threefold is rational. F. Catanese, K. Oguiso and T. T. Truong have recently shown that this variety is birational to a specific conic bundle threefold, which they show is unirational. Computing residues of elements in the Brauer group of the function field of the plane, I prove that that conic bundle threefold is birational to another conic bundle threefold, and the latter is clearly a rational variety.

1. Introduction

Soit k un corps de caractéristique différente de 2 contenant un élément i de carré -1. La cubique C d'équation affine

$$y^2 = x(x^2 - 1)$$

sur le corps k admet l'automorphisme g, d'ordre 4, défini par

$$(x, y) \mapsto (-x, iy).$$

On considère le quotient du produit triple $C \times_k C \times_k C$ par l'action diagonale de g.

Motivé par un travail antérieur de Ueno [**9**], Campana [**1**] montre, pour k le corps des complexes, que ce quotient est une variété rationnellement connexe et demande si cette variété est rationnelle. Pour k arbitraire, Catanese, Oguiso et Truong [**2**] montrent ensuite que c'est une variété k-unirationnelle. Pour ce faire, ils commencent par montrer [**2**, Prop. 2.5] que le quotient est k-birationnel à la k-variété X définie dans l'espace affine $\mathbf{A}^4_k$ avec coordonnées s, t, u, v par l'équation

$$s^2v(v^2-1) - t^2u(u^2-1) + uv(u^2-v^2) = 0.$$

Dans cette note, je montre que la k-variété X est k-rationnelle, c'est-à-dire que son corps des fonctions est transcendant pur sur k. Ceci répond à la question de Campana.

La rationalité de ce genre de quotient a récemment attiré l'attention des spécialistes de dynamique complexe [**7**].

La k-variété X est fibrée en coniques sur le plan affine de coordonnées u, v. Frédéric Campana avait suggéré de calculer la cohomologie non ramifiée de X, et en particulier son groupe de Brauer non ramifié (pour un rapport de synthèse sur la cohomologie non ramifiée, voir [**3**]). Pour les fibrations en coniques, on peut suivre la méthode d'Ojanguren et l'auteur [**4**]. Lors de ce calcul, il est apparu que la fibration en coniques concernée est k-birationnellement équivalente, au-dessus du plan affine, à une autre fibration en coniques dont l'espace total est clairement k-rationnel.

Je remercie Frédéric Campana de m'avoir informé de ce problème et de ses développements.

2. Rappels

Donnons quelques rappels sur les coniques et sur le groupe de Brauer des corps et des schémas. On renvoie le lecteur aux ouvrages [**6**], [**8**], [**5**].

On note $G[2]$ le sous-groupe des éléments de 2-torsion d'un groupe abélien G.

Soit F un corps de caractéristique différente de 2. À la donnée de deux éléments $a, b \in F^\times$ on associe la classe de l'algèbre de quaternions (a, b) dans le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(F)$. C'est un élément de 2-torsion.

On note $C_{a,b} \subset \mathbf{P}^2_F$ la conique d'équation projective

$$X^2 - aY^2 - bT^2 = 0.$$

La classe (a, b) est nulle dans $\mathrm{Br}(F)$ si et seulement si la conique $C_{a,b}$ sur le corps F a un point rationnel, ce qui est encore équivalent au fait que son corps des fonctions est transcendant pur sur F.

Plus généralement, on a la proposition suivante.

Proposition 2.1. — *Avec les notations ci-dessus, étant donnés quatre éléments $a, b, a', b' \in F^\times$, les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $(a,b) = (a',b') \in \mathrm{Br}(F)$.
(ii) Les coniques $C_{a,b}$ *et* $C_{a',b'}$ *sont isomorphes sur le corps* F.
(iii) Il existe une homographie, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{PGL}_3(F)$ *qui transforme la conique* $C_{a,b} \subset \mathbf{P}^2_F$ *en la conique* $C_{a',b'} \subset \mathbf{P}^2_F$.

L'équivalence de (i) et (ii) remonte à Witt [**10**, §2], voir [**5**, Thm. 1.4.2]. Soit $f : C_1 \stackrel{\simeq}{\to} C_2$ un k-isomorphisme abstrait de coniques lisses sur le corps k. L' inverse du faisceau canonique ω_2 sur C_2 est le faisceau canonique ω_1 sur C_1. Tout plongement de C_i dans $\mathbf{P}^2_k$ comme conique est associé au choix d'une base de l'espace vectoriel $H^0(C_i, \omega_i^{-1})$, qui est de dimension 3. Ceci montre que (ii) implique (iii).

Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K, de corps résiduel κ de caractéristique différente de 2. On dispose d'une application résidu

$$\partial_A : \mathrm{Br}(K)[2] \to \kappa^\times/\kappa^{\times 2}$$

qui envoie une classe de quaternions (a,b) (avec $a, b \in K^\times$) sur la classe de

$$(-1)^{v(a)v(b)}[a^{v(b)}/b^{v(a)}],$$

où $[a^{v(b)}/b^{v(a)}]$ désigne la classe dans $\kappa^\times/\kappa^{\times 2}$ de l'unité $a^{v(b)}/b^{v(a)} \in A^\times$. L'application résidu s'insère dans une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}(A)[2] \to \mathrm{Br}(K)[2] \to \kappa^\times/\kappa^{\times 2} \to 1.$$

Soit X une k-variété lisse intègre de corps des fonctions $k(X)$. À chaque point x de codimension 1 on associe son anneau local, qui est un anneau de valuation discrète de corps des fractions $k(X)$, de corps résiduel $\kappa(x)$, le corps des fonctions de la sous-variété définie par x.

Supposant $\mathrm{car}(k) \neq 2$, on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}(X)[2] \to \mathrm{Br}(k(X))[2] \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \kappa(x)^\times/\kappa(x)^{\times 2},$$

où la flèche de droite est celle définie par les divers résidus en les points $x \in X^{(1)}$.

Pour $X = \mathbf{A}^n_k$ l'espace affine sur un corps de caractéristique différente de 2, l'application naturelle $\mathrm{Br}(k)[2] \to \mathrm{Br}(\mathbf{A}^n_k)[2]$ est un isomorphisme.

On a donc :

Proposition 2.2. — *Soit k un corps de caractéristique différente de 2, et soit $n \geq 1$ un entier. Les applications résidus aux points de codimension 1 de l'espace affine $\mathbf{A}^n_k$ donnent naissance à la suite exacte :*

$$0 \to \mathrm{Br}(k)[2] \to \mathrm{Br}(k(\mathbf{A}^n))[2] \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \kappa(x)^\times/\kappa(x)^{\times 2},$$

On peut donner de ce résultat une formulation et une démonstration plus élémentaire en utilisant la cohomologie galoisienne [**8**]. Le cas $n = 1$ est un cas particulier de la suite exacte de Faddeev [**5**, Cor. 6.4.6]. Le cas $n > 1$ peut se ramener au cas $n = 1$ par fibrations successives sur des espaces affines de dimension plus petite.

3. Le calcul

On considère la conique sur le corps $k(u,v)$ définie par l'équation affine (variables s,t)

$$s^2 v(v^2-1) - t^2 u(u^2-1) + uv(u^2-v^2) = 0$$

soit encore

$$s^2 - uv(u^2-1)(v^2-1)t^2 - u(v^2-1)(v^2-u^2) = 0.$$

On associe à cette conique la classe de quaternions

$$\alpha = (uv(u^2-1)(v^2-1), u(v^2-1)(v^2-u^2)) \in \mathrm{Br}(k(u,v)).$$

Les seuls résidus non triviaux possibles aux points de codimension 1 de $\mathbf{A}^2_k$ sont aux points donnés par l'annulation de l'un des facteurs de $uv(u^2-1)(v^2-1)$ ou de $u(v^2-1)(v^2-u^2)$.

Appliquant la formule rappelée au paragraphe 2, on trouve les résidus suivants.

En $u = 0$, la classe de v dans $k(v)^\times/k(v)^{\times 2}$.
En $v = 0$, la classe de u dans $k(u)^\times/k(u)^{\times 2}$.
En $v - 1 = 0$, la classe 1 dans $k(u)^\times/k(u)^{\times 2}$.
En $v + 1 = 0$, la classe -1 dans $k(u)^\times/k(u)^{\times 2}$.
En $u - 1 = 0$, la classe 1 dans $k(v)^\times/k(v)^{\times 2}$.
En $u + 1 = 0$, la classe -1 dans $k(v)^\times/k(v)^{\times 2}$.
En $u - v = 0$, la classe 1 dans $k(u)^\times/k(u)^{\times 2}$.
En $u + v = 0$, la classe -1 dans $k(u)^\times/k(u)^{\times 2}$.

Par ailleurs, les seuls résidus de $(u, v) \in \mathrm{Br}(k(u, v))$ aux points de codimension 1 de $\mathbf{A}_k^2$ qui ne sont pas égaux à 1 sont la classe de v dans $k(v)^\times/k(v)^{\times 2}$ en $u = 0$ et la classe de u dans $k(u)^\times/k(u)^{\times 2}$ en $v = 0$.

Comme on a supposé que -1 est un carré dans k, on voit que l'élément

$$\alpha - (u, v) \in \mathrm{Br}(k(u, v))$$

a tous ses résidus triviaux aux points de codimension 1 de $\mathbf{A}_k^2$, donc par la Proposition 2.2 est la classe d'un élément de $\gamma \in \mathrm{Br}(k)$.

Pour calculer γ, on considère la restriction de (u, v) et de

$$(uv(u^2 - 1)(v^2 - 1), u(v^2 - 1)(v^2 - u^2))$$

au point générique de la droite D d'équation $v = 1 - u$, de corps des fonctions $k(u)$. On a

$$(u, 1 - u) = 0 \in \mathrm{Br}(k(u)).$$

La restriction de $(uv(u^2-1)(v^2-1), u(v^2-1)(v^2-u^2))$ au point générique de la droite D est égale à

$$(u(1-u)(u^2-1)(u^2-2u), u(u^2-2u)(1-2u)) = (-(u+1)(u-2), (u-2)(1-2u))$$

dans $\mathrm{Br}(k(u))$.

La restriction de $\gamma = \alpha - (u, v)$ à la droite D a donc pour image $(-(u + 1)(u - 2), (u - 2)(1 - 2u)) \in \mathrm{Br}(k(u))$. Ce dernier symbole est dans le groupe de Brauer de l'anneau de valuation discrète anneau local de la droite D au point P de coordonnées $u = 0, v = 1$. Ainsi γ et $(-(u + 1)(u - 2), (u - 2)(1 - 2u))$ sont égaux dans $\mathrm{Br}(A)$. En évaluant au point P, on trouve

$$\gamma = (2, -2) = 0.$$

On a donc $\alpha = (u, v) \in \mathrm{Br}(k(u, v))$.

Remarque. Sur un corps k avec $\mathrm{Br}(k) = 0$, tel que le corps des complexes ou plus généralement un corps de dimension cohomologique 1, le calcul ci-dessus n'est pas nécessaire. Sur un corps quelconque de caractéristique différente de 2, 3, 5, avec $i \in k$, on peut directement évaluer α au point k-rationnel M de coordonnées $u = 2, v = 3$. Cela donne $\alpha(M) = (2.3.3.8, 2.5.8) = 0 \in \mathrm{Br}(k)$ puisque 2.3.3.8 est un carré. Par ailleurs $(u, v)(M) = (2, 3) = 0$ car la conique d'équation

$$X^2 - 2Y^2 - 3T^2 = 0$$

possède le point rationnel $(X, Y, T) = (1, i, 1)$.

D'après la proposition 2.1, l'égalité $\alpha = (u,v) \in \mathrm{Br}(k(u,v))$ implique que les coniques dans $\mathbf{P}^2_{k(u,v)}$ données en coordonnées homogènes S, T, R par

$$v(v^2-1)S^2 - u(u^2-1)T^2 + uv(u^2-v^2)R^2 = 0$$

et

$$S^2 - uT^2 - vR^2 = 0$$

sont isomorphes sur le corps $k(u,v)$.

En termes géométriques, cela signifie qu'au-dessus du plan affine $\mathbf{A}^2_k$ de coordonnées u, v, les deux fibrations en coniques associées sont birationnelles par un isomorphisme qui préserve la fibration.

La k-variété d'équation affine

$$s^2 - ut^2 - v = 1$$

est clairement k-isomorphe à l'espace affine $\mathbf{A}^3_k$ de coordonnées s, u, t. On en conclut que la k-variété d'équation affine

$$s^2v(v^2-1) - t^2u(u^2-1) + uv(u^2-v^2) = 0$$

est k-rationnelle. D'après [**2**, Prop. 2.5], ceci implique que le quotient de $C \times_k C \times_k C$ par l'automorphisme diagonal g d'ordre 4 considéré au-début de cette note est une k-variété k-rationnelle.

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-12-BL01-0005.

Références

[1] F. Campana, Remarks on an example of K. Ueno, Series of congress reports, *Classification of algebraic varieties*, Ed. : C. Faber, G. van der Geer and E. Looijenga, Société mathématique européenne, 2011, 115–121.

[2] F. Catanese, K. Oguiso et T. T. Truong, Unirationality of Ueno–Campana's threefold, `arXiv:1310.3569v1` [mathAG], to appear in manuscripta math. (2014).

[3] J.-L. Colliot-Thélène, Birational invariants, purity and the Gersten conjecture, in *K-Theory and Algebraic Geometry : Connections with Quadratic Forms and Division Algebras*, AMS Summer Research Institute, Santa Barbara 1992, ed. W. Jacob and A. Rosenberg, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **58**, Part I (1995) 1–64.

[4] J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren, Variétés unirationnelles non rationnelles : au-delà de l'exemple d'Artin-Mumford, Invent. math. **97** (1989) 141–158.

[5] P. Gille et T. Szamuely, *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge studies in advanced mathematics **101**, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[6] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, 46–188, Masson & North-Holland, 1968.

[7] K. Oguiso et T. T. Truong, Explicit Examples of rational and Calabi-Yau threefolds with primitive automorphisms of positive entropy, `arxiv.org/abs/1306.1590v3` [math.AG].

[8] J-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Lecture notes in Mathematics **5**, Cinquième édition (1994), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[9] K. Ueno, *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, Notes written in collaboration with P. Cherenack, Lecture Notes in Mathematics **439**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.

[10] E. Witt, Über ein Gegenbeispiel zum Normensatz, Math. Z. **19** (1935) 462–467, Gesammelte Abhandlungen, Springer (1998) S. 63–68.

CNRS, UMR 8628, Mathématiques, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay, France

jlct@math.u-psud.fr

---

eingereicht, 5. Dezember 2013

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE, CNRS, Université Paris-Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* `jlct@math.u-psud.fr`