Résolutions flasques des groupes linéaires connexes
(Version 21 Novembre 2007)

Jean-Louis Colliot-Thélène

A Jean-Pierre Serre, pour son 80^e anniversaire

Sur un corps de nombres, une série de travaux importants a établi pour les groupes semi-simples simplement connexes les propriétés suivantes. Ils satisfont l'approximation faible, leurs espaces homogènes principaux satisfont le principe de Hasse, leur nombre de Tamagawa est égal à 1. Dans presque tous les cas, on a aussi établi que la R-équivalence sur les k-points d'un tel groupe est triviale.

Ces propriétés ne valent en général pas pour un groupe réductif (par définition connexe). Pour mesurer le défaut de ces propriétés, on utilise la cohomologie galoisienne. Ce genre de travail a été fait en particulier par Sansuc [Sa81], Kottwitz [Ko84, Ko86], Borovoi [Bo96, Bo98], Gille [Gi97, Gi01]. Il implique l'utilisation de présentations convenables des groupes linéaires connexes. On trouve dans la littérature deux types de présentations pour ces groupes, les *revêtements spéciaux* et les *z-extensions.*

Soit k un corps de caractéristique nulle. Un revêtement spécial d'un k-groupe réductif G est la donnée d'une isogénie

$$1 \to \mu \to H \to G \to 1,$$

où H est le produit d'un k-groupe semi-simple simplement connexe par un k-tore quasi-trivial. Tout k-groupe semi-simple admet évidemment un tel revêtement. On montre (voir [Sa81], Lemme 1.10) que pour tout k-groupe réductif G, il existe un entier $n > 0$ et un k-tore quasi-trivial P tel que le produit $G^n \times_k P$ admette un revêtement spécial. Ces revêtements spéciaux ont été utilisés par Ono, Sansuc, Gille.

Par ailleurs tout k-groupe réductif G admet une z-extension, c'est-à-dire qu'il existe une suite exacte

$$1 \to P \to H \to G \to 1,$$

où P est un k-tore quasi-trivial central dans le k-groupe réductif H, le groupe dérivé $H^{ss} \subset H$ de H étant un k-groupe (semi-simple) simplement connexe. Les z-extensions ont été utilisées par Langlands, Deligne, Milne-Shih [Mi-Sh82], Kottwitz [Ko 84, Ko86], Borovoi-Kunyavskiĭ [BoKu04].

Le but du présent texte, dont les principaux résultats ont été annoncés dans la note [CT04], est de développer un troisième type de présentation, introduit dans [CT04, CT05], et de montrer comment cela permet d'étudier de façon plus souple la cohomologie galoisienne des groupes linéaires.

Le point principal est que l'analogue des résolutions flasques de tores développées il y a trente ans (Sansuc et l'auteur [CT/Sa77], Voskresenskiĭ [Vo77, Vo98]) existe pour tout k-groupe réductif, le rôle des tores quasi-triviaux étant ici tenu par les groupes extensions d'un tore quasi-trivial par un groupe semi-simple simplement connexe :

Pour tout k-groupe réductif G, il existe des suites exactes de k-groupes algébriques

$$1 \to S \to H \to G \to 1,$$

où le groupe H est une extension d'un k-tore *quasi-trivial* par le k-groupe semi-simple simplement connexe revêtement universel du groupe dérivé de G, et où le k-tore S, central dans H, est *flasque* (son groupe des cocaractères est un module galoisien H^1-trivial). Une telle suite exacte est appelée une résolution flasque de G. *A multiplication par un k-tore quasitrivial près, le k-tore flasque S est déterminé par G.*

Il y a aussi lieu d'introduire les résolutions coflasques de G, qui sont des suites exactes

$$1 \to P \to H \to G \to 1,$$

où P est un k-tore quasi-trivial central dans le k-groupe réductif H, le groupe H étant une extension d'un k-tore coflasque par un k-groupe semi-simple simplement connexe. Une extension de ce type est une z-extension, mais d'un type très particulier.

Au paragraphe 0 on rappelle quelques propriétés de base des groupes algébriques linéaires connexes. La définition, l'existence et les propriétés générales des résolutions flasques et coflasques font l'objet des paragraphes 1 à 4. Au paragraphe 5, on voit comment ces résolutions sont liées aux torseurs universels sur les compactifications lisses des groupes linéaires. Au paragraphe 6, on associe à tout k-groupe linéaire connexe G un module galoisien discret de type fini, noté $\pi_1(G)$, le groupe fondamental algébrique de G, et on en établit les propriétés principales. Notre définition de $\pi_1(G)$ passe par les résolutions flasques. Elle est indépendante de la définition originale de Borovoi ([Bo98], §1) et de celle de Merkur'ev ([Me98], §10). Au paragraphe 7, on donne deux formules pour le groupe de Brauer d'une compactification lisse d'un k-groupe linéaire connexe G, l'une en termes du tore flasque apparaissant dans une résolution flasque de G, l'autre en termes du groupe fondamental algébrique de G, comme défini au paragraphe 6 (avec le groupe fondamental algébrique de Borovoi, cette formule est déjà établie dans [BoKu00]). Aux paragraphes 8 et 9, on montre comment une résolution flasque d'un k-groupe linéaire connexe G donne de l'information d'une part sur le groupe $G(k)/R$, quotient du groupe des points rationnels de G par la R-équivalence ([CTSa77]), d'autre part sur l'ensemble $H^1(k, G)$ classifiant les G-espaces homogènes principaux. On montre en particulier comment sur un corps local ou global les résolutions flasques permettent de déduire de façon rapide et fonctorielle la plupart des résultats connus sur la cohomologie galoisienne des groupes linéaires connexes (Sansuc, Kottwitz, Borovoi, Gille), à partir des résultats fondamentaux sur les groupes semi-simples simplement connexes (Kneser, Harder, Chernousov).

Dans les travaux d'autres auteurs, en particulier ceux de Borovoi, un rôle important est joué par l'hypercohomologie de certains complexes de k-tores, de longueur 2, liés au choix d'un tore maximal dans le groupe considéré, choix qui est aussi fait par ces auteurs lors de la définition du groupe fondamental algébrique. L'approche par les résolutions flasques proposée ici évite l'utilisation de ces complexes, et (sauf au paragraphe 9) elle évite le choix d'un tore maximal. Cette approche est néanmoins équivalente à celle des travaux cités. C'est ce que l'on établit dans l'appendice A, où l'on montre que les complexes de k-tores de Borovoi sont quasi-isomorphes à des complexes déduits des résolutions flasques. On montre ainsi que le groupe fondamental algébrique d'un k-groupe algébrique linéaire ici défini est isomorphe à celui défini par Borovoi. On fait aussi le lien avec les groupes de cohomologie abélianisée de Borovoi [Bo96, Bo98]. La donnée d'une compactification lisse d'un groupe mène à la construction d'un autre complexe de k-tores, dont on montre dans l'appendice B qu'il est quasi-équivalent aux précédents. Cela permet de faire le lien avec un travail de Borovoi et van Hamel [BovH06].

Si la notion de résolution flasque des groupes réductifs introduite dans [CT04, CT05] et développée aux paragraphes 1 à 5 est nouvelle, et s'il est étonnant qu'elle n'ait pas été dégagée plus tôt, on peut dire qu'elle a été préparée par les travaux antérieurs de Voskresenskiĭ [Vo77, Vo98], Sansuc et l'auteur [CTSa77, CTSa87a, CTSa87b], Sansuc [Sa81], Borovoi [Bo96, Bo98], Gille [Gi01], Borovoi et Kunyavskiĭ [BoKu00, BoKu04].

Les paragraphes 6 à 9 sont une présentation originale de concepts et résultats déjà discutés par d'autres auteurs, au moins en caractéristique nulle ([Ko84, Ko86, Bo96, Bo98, BoKu00, BoKu04]). On s'est astreint à une présentation autonome de ces résultats. Les exceptions sont : l'utilisation d'un théorème de Borovoi et Kunyavskiĭ [BoKu04], indépendant du reste de leurs travaux (théorème **0.9** ci-après), le recours à certains arguments de [Bo98] dans les démonstrations du théorème 8.4 (ii), du théorème 9.1 (iii) et du théorème 9.4, et l'utilisation d'un théorème de P. Gille (appendice de [BoKu04]) dans les démonstrations du théorème 8.4 (i) et du théorème 9.3. Par ailleurs, jusqu'au milieu du paragraphe 8, on s'est astreint à développer la théorie sur des corps de caractéristique arbitraire.

§0. Notations et rappels

Soient k un corps, $\overline{k}$ une clôture *séparable* de k et $\mathfrak{g}$ le groupe de Galois de $\overline{k}$ sur k. Un module galoisien est un groupe abélien muni de la topologie discrète, équipé d'une action continue de $\mathfrak{g}$. Etant donnés X une k-variété algébrique et K/k une extension de corps, on note $X_K = X \times_k K$. On note $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$. On note $K[X] = H^0(X_K, \mathcal{O}_{X_K})$. On note $\overline{k}[X] = H^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$. Si X et Y sont deux k-variétés, leur produit $X \times_k Y$ est généralement noté $X \times Y$. Si la k-variété X est intègre, on note $k(X)$ son corps des fonctions rationnelles. Si X est une k-variété géométriquement intègre, pour toute extension de corps K/k on note $K(X)$ le corps des fonctions rationnelles de X_K. On note $\mathbf{G}_{m,k}$, ou parfois simplement $\mathbf{G}_m$, le groupe multiplicatif sur k. On note $\mathbf{G}_{a,k}$, ou parfois simplement $\mathbf{G}_a$, le groupe additif sur k. On note $A^\times$ le groupe des unités d'un anneau commutatif unitaire A. Le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X)$ d'un schéma X est le groupe $H^1_{Zar}(X, \mathcal{O}_X^\times)$.

Un k-groupe réductif est par définition connexe et lisse (cette dernière condition n'en étant pas une en caractéristique zéro). Il en est de même d'un k-groupe semi-simple.

Etant donné un k-groupe algébrique linéaire G, on note ici $G^* = \mathrm{Hom}_{\overline{k}-gp}(\overline{G}, \mathbf{G}_{m,\overline{k}})$ son groupe des caractères. C'est un module galoisien discret de type fini. Si G est lisse et connexe, le groupe abélien sous-jacent est sans torsion.

Un k-groupe de type multiplicatif M est un k-groupe qui sur $\overline{k}$ admet un plongement dans un produit de groupes multiplicatifs $\mathbf{G}_{m,\overline{k}}$. Un tel groupe est déterminé par son groupe des caractères $M^* = \mathrm{Hom}_{\overline{k}-gp}(\mathbf{G}_{m,\overline{k}}, \overline{M})$, avec sa structure de module galoisien de type fini. Le k-groupe M est dit déployé si $\mathfrak{g}$ agit trivialement sur M^*, ce qui revient à dire que le groupe M se plonge, sur k, dans un produit de k-tores $\mathbf{G}_{m,k}$.

Un k-tore T est un k-groupe qui sur $\overline{k}$ est isomorphe à un produit de groupes multiplicatifs $\mathbf{G}_{m,\overline{k}}$. On note $T_* = \mathrm{Hom}_{\overline{k}-gp}(\mathbf{G}_{m,\overline{k}}, \overline{T})$ son groupe des cocaractères. On a l'isomorphisme de modules galoisiens $T_* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(T^*, \mathbf{Z})$.

Pour K/k une extension finie séparable de corps , on note $R_{K/k}\mathbf{G}_m$ le k-tore descendu à la Weil du K-tore $\mathbf{G}_{m,K}$.

On fera un usage constant et souvent tacite des propriétés suivantes.

0.1 Pour X une k-variété lisse géométriquement intègre, le module galoisien $\overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times$ est un groupe abélien libre de type fini, et il est additif par rapport au produit de telles variétés (Rosenlicht, cf. [CTSa77], Lemme 10 p. 188).

0.2 *(Lemme de Rosenlicht)* Si G est un k-groupe linéaire lisse connexe, le module galoisien $\overline{k}[G]^\times/\overline{k}^\times$ s'identifie au module galoisien G^* des caractères de $\overline{G}$. Le groupe $k[G]^\times/k^\times$ s'identifie au groupe des caractères de G définis sur k (cf. [Sa81], Lemme 6.5 p. 39).

0.3 Soit G un k-groupe réductif. On note $G^{ss} \subset G$ son groupe dérivé. C'est un k-groupe semi-simple distingué dans G. On note G^{tor} le k-groupe quotient de G par G^{ss}. C'est un k-tore, c'est le plus grand quotient torique de G. On a la suite exacte exacte canonique de k-groupes réductifs

$$1 \to G^{ss} \to G \to G^{tor} \to 1.$$

Le groupe des caractères $(G^{tor})^*$ de G^{tor} s'identifie au groupe des caractères G^* de G. Si G s'insère dans une suite exacte de k-groupes algébriques

$$1 \to G_1 \to G \to T \to 1,$$

avec G_1 semi-simple et T un k-tore, alors le sous-groupe $G_1 \subset G$ coïncide avec $G^{ss} \subset G$, et ceci induit un isomorphisme $G^{tor} \stackrel{\simeq}{\to} T$.

On note G^{sc} le revêtement simplement connexe de G^{ss}. On a une suite exacte canonique

$$1 \to \mu \to G^{sc} \to G^{ss} \to 1,$$

où μ est un k-groupe de type multiplicatif fini, central dans G^{sc}, qu'on appelle le groupe fondamental de G^{ss}.

0.4 Supposons k de caractéristique nulle. Soit G un k-groupe linéaire connexe. On note $G^u \subset G$ le radical unipotent de G. C'est un k-groupe unipotent distingué dans G, c'est le plus grand tel sous-groupe. Le groupe G^u admet une suite de composition dont les quotients successifs sont k-isomorphes au groupe additif $\mathbf{G}_{a,k}$. Sur toute k-variété affine, tout G^u-torseur (pour la topologie étale) est trivial. La k-variété sous-jacente au groupe G^u est k-isomorphe à un espace affine sur k. En particulier G^u est connexe et simplement connexe, et l'on a $\overline{k}^\times = \overline{k}[G^u]^\times$ et $\mathrm{Pic}(G^u \times_k \overline{k}) = 0$.

On a la suite exacte canonique

$$1 \to G^u \to G \to G^{réd} \to 1,$$

où $G^{réd}$ est le plus grand k-groupe réductif quotient de G. On note $G^{ss} \subset G^{réd}$ le groupe dérivé de $G^{réd}$, et l'on note G^{ssu} l'image réciproque de G^{ss} dans G. Le groupe G^{ssu} est le noyau de l'homomorphisme naturel de G vers son plus grand quotient torique G^{tor}. Le groupe des caractères de G^{tor} est le groupe des caractères de G. Le groupe G^{ssu} est une extension de G^{ss} par G^u. On a les suites exactes canoniques de k-groupes connexes

$$1 \to G^{ssu} \to G \to G^{tor} \to 1$$

et

$$1 \to G^u \to G^{ssu} \to G^{ss} \to 1.$$

Le groupe G^{ss} est simplement connexe (après passage à $\overline{k}$) si et seulement si G^{ssu} l'est.

0.5 Soit $1 \to G'' \to G \to G' \to 1$ une suite exacte de k-groupes algébriques linéaires connexes, supposés réductifs si $\mathrm{car}(k) > 0$. Cette suite induit une suite exacte naturelle de modules galoisiens de type fini sur $\mathbf{Z}$

$$0 \to G'^* \to G^* \to G''^* \to \mathrm{Pic}(\overline{G}') \to \mathrm{Pic}(\overline{G}) \to \mathrm{Pic}(\overline{G}'') \to 0.$$

L'exactitude jusqu'au terme $\mathrm{Pic}(\overline{G})$ fait l'objet de [Sa81], corollaire 6.11, p. 43. La surjectivité de $\mathrm{Pic}(\overline{G}) \to \mathrm{Pic}(\overline{G}'')$ est établie dans [Sa81], remarque 6.11.3, p. 43. On a aussi la suite exacte de groupes abéliens

$$0 \to (G'^*)^{\mathfrak{g}} \to (G^*)^{\mathfrak{g}} \to (G''^*)^{\mathfrak{g}} \to \mathrm{Pic}(G') \to \mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Pic}(G''),$$

où le groupe $(G^*)^{\mathfrak{g}}$ est le groupe des caractères de G définis sur k. Les groupes de Picard $\mathrm{Pic}(G)$ et $\mathrm{Pic}(\overline{G})$ sont des groupes finis ([Sa81], Lemme 6.9 p. 41).

0.6 Soit G un k-groupe semi-simple. Le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{G})$ est isomorphe au groupe des caractères μ^* du groupe fondamental μ de $\overline{G}$ ([Sa81], Lemme 6.9 (iii)). Il est nul si et seulement si G est simplement connexe.

0.7 Soit G un k-groupe algébrique extension d'un k-groupe de type multiplicatif K par un k-groupe de type multiplicatif H. Si G est commutatif ou K connexe, alors G est de type multiplicatif. En particulier si K et H sont des k-tores, alors G est un k-tore. Voir [SGA3 II], Exposé IX, Prop. 8.2 et Exposé XVII, Prop. 7.1.1.

0.8 Soit M un $\mathfrak{g}$-module $\mathbf{Z}$-libre de type fini. Le module galoisien M est dit de permutation s'il possède une base sur $\mathbf{Z}$ respectée par $\mathfrak{g}$. Le module galoisien M est dit flasque, respectivement coflasque, si pour tout sous-groupe ouvert $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, le groupe de cohomologie $H^1(\mathfrak{h}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, \mathbf{Z}))$ respectivement $H^1(\mathfrak{h}, M)$, est nul. Tout module de permutation est flasque et coflasque.

Un k-tore est dit quasi-trivial, resp. flasque, resp. coflasque, si son groupe de caractères est de permutation, resp. flasque, resp. coflasque. On renvoie à [CTSa77, §1], [CTSa87a, §0 et §1] et [Vo98] pour les propriétés de base des modules et tores flasques.

Théorème 0.9 (Borovoi-Kunyavskiĭ [BoKu04], Thm. 3.2) *Soient k un corps et G un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si* $\mathrm{car}(k) > 0$. *Soit X une k-compactification lisse de G. Le réseau* $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ *est un module galoisien flasque.*

Esquisse de démonstration La démonstration procède par réduction au cas des groupes réductifs quasi-déployés, par passage au corps des fonctions de la variété des sous-groupes de Borel de G. Le cas où G est quasi-déployé, i.e. possède un sous-groupe de Borel défini sur k, était connu ([CTSa77]) : il se ramène au cas des tores ([Vo77], [CTSa77]). Dans [BoKu04], les auteurs supposent le corps de base de caractéristique nulle. Leur démonstration s'étend aux corps de caractéristique quelconque, car les faits suivants valent sur un corps k quelconque.

(i) Tout k-tore algébrique admet une k-compactification lisse (voir [CTHaSk05]).

(ii) Pour tout k-groupe réductif quasi-déployé G, on dispose de la décomposition de Bruhat, qui assure que G contient un ouvert isomorphe au produit d'un k-tore et d'un espace affine ([SGA3 III], Exposé XXII, §5.9).

(iii) Pour tout k-groupe réductif, la k-variété des sous-groupes de Borel est une k-variété (projective) lisse géométriquement connexe ([SGA3 III], Exposé XXII, §5.9).

(iv) Si deux k-variétés projectives, lisses, géométriquement intègres X et Y sont k-birationnellement équivalentes, alors il existe des $\mathfrak{g}$-modules de permutation (de type fini) P_1^* et P_2^* et un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules galoisiens discrets $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \oplus P_1^* \simeq \mathrm{Pic}(\overline{Y}) \oplus P_2^*$ ([CTSa87b], Prop. 2.A.1 p. 461). $\square$

Sauf mention du contraire, la cohomologie utilisée est la cohomologie étale, qui lorsque l'on se restreint au cas du spectre d'un corps est la cohomologie galoisienne de ce corps. Pour $\mathcal{F}$ un faisceau pour la topologie étale sur un schéma X, les groupes de cohomologie étale $H^n_{ét}(X, \mathcal{F})$ seront, sauf risque d'ambiguïté, notés $H^n(X, \mathcal{F})$.

Pour tout schéma X, on a $\mathrm{Pic}(X) = H^1_{Zar}(X, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{\simeq} H^1(X, \mathbf{G}_m)$. Le groupe de Brauer de X est le groupe $\mathrm{Br}(X) = H^2(X, \mathbf{G}_m)$.

§1. Variétés $\mathbf{G}_m$-quasi-triviales, variétés $\mathbf{G}_m$-coflasques et variétés finies-factorielles

Définition 1.1 *Soit X une k-variété géométriquement intègre. On dit que X est une k-variété $\mathbf{G}_m$-quasi-triviale si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) Le module galoisien $\overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times$ est un module de permutation.

(ii) On a $\mathrm{Pic}(\overline{X}) = 0$.

Proposition 1.2 *Soit X une k-variété géométriquement intègre $\mathbf{G}_m$-quasi-triviale. Si X est lisse, tout ouvert de X est une k-variété $\mathbf{G}_m$-quasi-triviale.*

Démonstration Pour U ouvert non vide d'une k-variété lisse géométriquement connexe X, de complémentaire F, on a la suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to \overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times \to \overline{k}[U]^\times/\overline{k}^\times \to \mathrm{Div}_{\overline{F}}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{U}) \to 0.$$

Ici $\mathrm{Div}_{\overline{F}}(\overline{X})$ est le groupe des diviseurs à support dans $\overline{F}$. L'hypothèse de lissité assure que les diviseurs de Cartier coïncident avec les diviseurs de Weil, le module galoisien $\mathrm{Div}_{\overline{F}}(\overline{X})$ est donc le module de permutation de base les points de codimension 1 de $\overline{X}$ non dans $\overline{U}$. Sous les hypothèses de la proposition, on voit que $\mathrm{Pic}(\overline{U}) = 0$ et que le module galoisien $\overline{k}[U]^\times/\overline{k}^\times$ est une extension d'un module de permutation par un module de permutation. Toute telle extension est $\mathfrak{g}$-scindée (lemme de Shapiro). Ainsi $\overline{k}[U]^\times/\overline{k}^\times$ est un module de permutation. $\square$

Proposition 1.3 *Soit X une k-variété géométriquement intègre $\mathbf{G}_m$-quasi-triviale. Soit T un k-tore. Si T est flasque, ou si $\overline{k}^\times = \overline{k}[X]^\times$, la flèche naturelle $H^1(k,T) \to H^1(X,T)$ induite par le morphisme structural est bijective.*

Démonstration La suite spectrale de Leray pour le morphisme structural $p : X \to \mathrm{Spec}(k)$ et le faisceau étale défini par le k-tore T donne la suite exacte courte

$$0 \to H^1(k, H^0(\overline{X},\overline{T})) \to H^1(X,T) \to H^1(\overline{X},\overline{T}).$$

Comme T est un k-tore, l'hypothèse $\mathrm{Pic}(\overline{X}) = 0$ implique $H^1(\overline{X},\overline{T}) = 0$. Par ailleurs, on a l'isomorphisme de modules galoisiens

$$H^0(\overline{X},\overline{T}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(T^*, H^0(\overline{X}, \mathbf{G}_{m,\overline{k}})) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(T^*, \overline{k}[X]^\times).$$

Considérons la suite exacte

$$1 \to \overline{k}^\times \to \overline{k}[X]^\times \to P^* \to 1.$$

Comme X est quasi-triviale, le module galoisien P^* est un module de permutation. D'après le lemme de Shapiro et le théorème 90 de Hilbert, on a $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}}(P^*, \overline{k}^\times) = 0$. La suite exacte ci-dessus est donc scindée comme suite de modules galoisiens. Ceci donne naissance à la suite exacte scindée de modules galoisiens

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(T^*, \overline{k}^\times) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(T^*, \overline{k}[X]^\times) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(T^*, P^*) \to 0.$$

Si T est un k-tore flasque, on a $H^1(k, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(T^*, P^*)) = 0$. Dans le second cas considéré dans la proposition, on a $P^* = 0$. Ainsi dans ces deux cas l'application naturelle $H^1(k,T) \to H^1(k, H^0(\overline{X},\overline{T}))$ est bijective. $\square$

Corollaire 1.4 *Soit X une k-variété géométriquement intègre $\mathbf{G}_m$-quasi-triviale, et soit T un k-tore. Si T est flasque, ou si $\overline{k}^\times = \overline{k}[X]^\times$, tout torseur $Y \to X$ sous T est, en tant que T-torseur, et en particulier en tant que k-variété, k-isomorphe à $E \times_k X$, où E est un espace homogène principal sous T.* $\square$

Définition 1.5 *Soit X une k-variété géométriquement intègre. On dit que X est une variété $\mathbf{G}_m$-coflasque si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*
(i) Le module galoisien $\overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times$ est un module coflasque.

(ii) On a $\operatorname{Pic}(\overline{X}) = 0$.

Proposition 1.6 *Soit X une k-variété géométriquement intègre $\mathbf{G}_m$-coflasque. Si X est lisse, tout ouvert de X est une k-variété $\mathbf{G}_m$-coflasque.*

Démonstration Soit $U \subset X$ un ouvert non vide. Comme à la proposition 1.2, on a la suite exacte de modules galoisiens :

$$0 \to \overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times \to \overline{k}[U]^\times/\overline{k}^\times \to \operatorname{Div}_{\overline{F}}(\overline{X}) \to \operatorname{Pic}(\overline{X}) \to \operatorname{Pic}(\overline{U}) \to 0.$$

Sous les hypothèses de la proposition, ceci donne l'égalité $\operatorname{Pic}(\overline{U}) = 0$ et une suite exacte courte

$$0 \to \overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times \to \overline{k}[U]^\times/\overline{k}^\times \to \operatorname{Div}_{\overline{F}}(\overline{X}) \to 0.$$

Le module $\operatorname{Div}_{\overline{F}}(\overline{X})$ est un module de permutation. Toute extension d'un module de permutation par un module coflasque est scindée (lemme de Shapiro et définition des modules coflasques). Ainsi $\overline{k}[U]^\times/\overline{k}^\times \simeq \overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times \oplus \operatorname{Div}_{\overline{F}}(\overline{X})$ est un module coflasque. $\square$

Proposition 1.7 *Soit X une k-variété géométriquement intègre $\mathbf{G}_m$-coflasque.*
(i) Pour tout k-tore quasi-trivial P, on a $H^1(X, P) = 0$.
(ii) Tout torseur $Y \to X$ sous un k-tore quasi-trivial P est, en tant que P-torseur, et en particulier en tant que k-variété, k-isomorphe à $P \times_k X$.
(iii) Pour toute extension finie séparable de corps K/k, on a $\operatorname{Pic}(X_K) = 0$.

Démonstration La suite spectrale de Leray pour le morphisme structural $p : X \to \operatorname{Spec}(k)$ et le faisceau étale défini par le k-tore P donne la suite exacte courte

$$0 \to H^1(k, H^0(\overline{X}, \overline{P})) \to H^1(X, P) \to H^1(\overline{X}, \overline{P}).$$

Comme P est un k-tore, l'hypothèse $\operatorname{Pic}(\overline{X}) = 0$ implique $H^1(\overline{X}, \overline{P}) = 0$. Par ailleurs, on a l'isomorphisme de modules galoisiens

$$H^0(\overline{X}, \overline{P}) \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(P^*, H^0(\overline{X}, \mathbf{G}_{m,\overline{k}})) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(P^*, \overline{k}[X]^\times).$$

La suite exacte

$$1 \to \overline{k}^\times \to \overline{k}[X]^\times \to Q^* \to 1,$$

où Q^* est un module coflasque, est $\mathbf{Z}$-scindée. Elle donne donc naissance à la suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(P^*, \overline{k}^\times) \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(P^*, \overline{k}[X]^\times) \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(P^*, Q^*) \to 0.$$

Comme Q^* est un module coflasque, on a $H^1(k, \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(P^*, Q^*)) = 0$. Par ailleurs le théorème 90 de Hilbert assure $H^1(k, \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(P^*, \overline{k}^\times) = 0$. Ainsi $H^1(k, H^0(\overline{X}, \overline{P})) = 0$, ce qui établit (i). Les énoncés (ii) et (iii) sont des reformulations de (i). $\square$

Définition 1.8 *Soit X une k-variété géométriquement intègre. On dit que X est une variété finie-factorielle si pour toute extension finie séparable de corps K/k on a* $\operatorname{Pic}(X_K) = 0$.

Proposition 1.9 *Soit X une k-variété géométriquement intègre finie-factorielle. Si X est lisse, tout ouvert de X est une k-variété finie-factorielle.*

Démonstration Pour tout ouvert non vide U de X et toute extension finie de corps K/k, la flèche de restriction $\operatorname{Pic}(X_K) \to \operatorname{Pic}(U_K)$ est surjective, puisque la K-variété X_K est lisse. $\square$

Remarque 1.9.1 Pour k de caractéristique nulle et X/k géométriquement intègre et lisse, on peut montrer que si X est finie-factorielle, alors elle est "universellement factorielle" : pour tout corps F contenant k, on a $\mathrm{Pic}(X_F) = 0$.

Proposition 1.10 *Soit X une k-variété géométriquement intègre finie-factorielle. Pour tout k-tore quasi-trivial P, on a $H^1(X, P) = 0$. Tout torseur $Y \to X$ sous P est, en tant que P-torseur, et en particulier en tant que k-variété, k-isomorphe à $P \times_k X$.*

Démonstration Le k-tore P est un produit de k-tores $R_{K/k}\mathbf{G}_m$, avec K/k extension finie séparable, et $H^1(X, R_{K/k}\mathbf{G}_m) \xleftarrow{\simeq} \mathrm{Pic}(X_K) = 0$. □

Proposition 1.11 *Soit X une k-variété géométriquement intègre.*
(i) Si X est $\mathbf{G}_m$-coflasque, elle est finie-factorielle.
(ii) Si X est finie-factorielle et si pour toute extension finie séparable K/k de corps la flèche $\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(K(X))$ est injective, alors X est $\mathbf{G}_m$-coflasque.
(iii) Si X est finie-factorielle et possède un k-point, alors X est $\mathbf{G}_m$-coflasque.

Démonstration L'énoncé (i) n'est qu'une reformulation de la proposition 1.7. Supposons X finie-factorielle. Par passage à la limite sur les extensions finies séparables de k, on voit que l'on a $\mathrm{Pic}(\overline{X}) = 0$. Soit $K \subset \overline{k}$ une extension finie séparable de k, soit $\mathfrak{h} = \mathrm{Gal}(\overline{k}/K)$. La suite spectrale de Leray pour le morphisme structural $p : X_K \to \mathrm{Spec}(K)$ et le faisceau étale défini par le K-tore $\mathbf{G}_{m,K}$ donne une injection $H^1(\mathfrak{h}, \overline{k}[X]^\times) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X_K)$. On a donc $H^1(\mathfrak{h}, \overline{k}[X]^\times) = 0$. La suite exacte naturelle

$$1 \to \overline{k}^\times \to \overline{k}[X]^\times \to \overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times \to 1$$

donne naissance à la suite exacte de groupes de cohomologie

$$H^1(\mathfrak{h}, \overline{k}[X]^\times) \to H^1(\mathfrak{h}, \overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times) \to H^2(\mathfrak{h}, \overline{k}^\times) \to H^2(\mathfrak{h}, \overline{k}[X]^\times).$$

Le module galoisien $\overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times$ est un groupe abélien de type fini sans torsion. Compte tenu de $H^1(\mathfrak{h}, \overline{k}[X]^\times) = 0$, on voit que l'on a $H^1(\mathfrak{h}, \overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times) = 0$ pour tout $\mathfrak{h} = \mathrm{Gal}(\overline{k}/K)$ si et seulement si la flèche $H^2(\mathfrak{h}, \overline{k}^\times) \to H^2(\mathfrak{h}, \overline{k}[X]^\times)$ est injective pour tout tel $\mathfrak{h}$. C'est le cas si l'une des conditions mentionnées en (ii) et (iii) est satisfaite. □

Remarque 1.11.1 Soient k un corps et C/k une conique lisse sans k-point. Soit $P \in C$ un point fermé de degré 2, séparable sur k, et soit X le complémentaire de P dans C. Alors la k-variété X est finie-factorielle, mais elle n'est pas $\mathbf{G}_m$-coflasque.

§2. Groupes quasi-triviaux et groupes coflasques

Définition 2.1 *Soit H un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si* $\mathrm{car}(k) > 0$. *On dit que H est un groupe quasi-trivial si la k-variété algébrique H est une variété $\mathbf{G}_m$-quasi-triviale, c'est-à-dire que les deux conditions suivantes sont satisfaites :*
(1) Le groupe $\overline{k}[H]^\times/\overline{k}^\times$ est un $\mathfrak{g}$-module de permutation.
(2) Le groupe de Picard de $\overline{H}$ est nul.

Proposition 2.2 *Soit H un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si* $\mathrm{car}(k) > 0$. *Le k-groupe H est quasi-trivial si et seulement si les propriétés suivantes sont satisfaites :*
(1.a) Le k-tore H^{tor} est un tore quasi-trivial.
(1.b) Le groupe des caractères H^* est un module de permutation.
(2.a) Le groupe connexe H^{ssu} est simplement connexe.
(2.b) Le groupe semi-simple H^{ss}, groupe dérivé de $H^{réd} = H/H^u$, est simplement connexe.

Démonstration D'après **0.3**, les conditions (1.a) et (1.b) sont équivalentes, et les conditions (2.a) et (2.b) sont équivalentes. D'après **0.2**, on a $\overline{k}[H]^{\times}/\overline{k}^{\times} = H^*$. Les conditions (1), (1.a) et (1.b) sont donc équivalentes.

En appliquant aux suites exactes de k-groupes

$$1 \to H^{ssu} \to H \to H^{tor} \to 1$$

et

$$1 \to H^{u} \to H^{ssu} \to H^{ss} \to 1$$

les énoncés **0.4** et **0.5**, on obtient $\mathrm{Pic}(\overline{H}^{ss}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Pic}(\overline{H}^{ssu})$ et $\mathrm{Pic}(\overline{H}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Pic}(\overline{H}^{ssu})$. D'après **0.6**, le groupe semi-simple H^{ss} est simplement connexe si et seulement si $\mathrm{Pic}(\overline{H}^{ss}) = 0$. □

On verra plus loin (Prop. 6.5) une autre caractérisation des groupes quasi-triviaux, qui justifie peut-être encore plus la terminologie : un groupe linéaire connexe G est quasi-trivial si et seulement si son groupe fondamental algébrique $\pi_1(G)$ est un module de permutation.

Proposition 2.3 *Soit*

$$1 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 1$$

une suite exacte de k-groupes linéaires connexes, supposés réductifs si $\mathrm{car}(k) > 0$. *Si G_1 et G_3 sont quasi-triviaux, alors il en est de même de G_2.*

Démonstration D'après **0.5**, on a la suite exacte de modules galoisiens :

$$0 \to G_3^* \to G_2^* \to G_1^* \to \mathrm{Pic}(\overline{G}_3) \to \mathrm{Pic}(\overline{G}_2) \to \mathrm{Pic}(\overline{G}_1) \to 0.$$

Sous les hypothèses de la proposition, on a $\mathrm{Pic}(\overline{G}_3) = 0$ et $\mathrm{Pic}(\overline{G}_1) = 0$, donc $\mathrm{Pic}(\overline{G}_2) = 0$. Par ailleurs le module galoisien G_2^* est extension du module de permutation G_1^* par le module de permutation G_3^*, donc est un module de permutation. □

Définition 2.4 *Soit H un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si* $\mathrm{car}(k) > 0$. *On dit que H est un groupe coflasque si la k-variété algébrique H est une variété $\mathbf{G}_m$-coflasque, c'est-à-dire que les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) Le groupe $\overline{k}[H]^{\times}/\overline{k}^{\times}$ est un $\mathfrak{g}$-module coflasque.

(2) Le groupe de Picard de $\overline{H}$ est nul.

Proposition 2.5 *Soit H un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si* $\mathrm{car}(k) > 0$. *Le k-groupe H est coflasque si et seulement si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(1.a) Le k-tore H^{tor} est un tore coflasque.

(1.b) Le groupe des caractères H^* est un module coflasque.

(2.a) Le groupe connexe H^{ssu} est simplement connexe.

(2.b) Le groupe semi-simple H^{ss}, groupe dérivé de $H^{réd} = H/H^u$, est simplement connexe.

Démonstration D'après **0.3**, les conditions (1.a) et (1.b) sont équivalentes. D'après **0.4**, les conditions (2.a) et (2.b) sont équivalentes. D'après **0.2**, on a $\overline{k}[H]^{\times}/\overline{k}^{\times} = H^*$. Les conditions (1), (1.a) et (1.b) sont donc équivalentes.

En appliquant aux suites exactes de k-groupes

$$1 \to H^{ssu} \to H \to H^{tor} \to 1$$

et

$$1 \to H^{u} \to H^{ssu} \to H^{ss} \to 1$$

les énoncés **0.4** et **0.5**, on obtient $\mathrm{Pic}(\overline{H}^{ss}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Pic}(\overline{H}^{ssu})$ et $\mathrm{Pic}(\overline{H}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Pic}(\overline{H}^{ssu})$. D'après **0.6**, le groupe semi-simple H^{ss} est simplement connexe si et seulement si $\mathrm{Pic}(\overline{H}^{ss}) = 0$. □

Proposition 2.6 *Soit H un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si* $\mathrm{car}(k) > 0$*. Le k-groupe H est coflasque si et seulement si la k-variété H est finie-factorielle, c'est-à-dire si pour toute extension finie séparable K/k on a* $\mathrm{Pic}(H_K) = 0$.

Démonstration C'est une application directe de la proposition 1.11. □

§3. Résolutions flasques d'un k-groupe linéaire connexe

La proposition suivante généralise un résultat bien connu pour les k-tores algébriques ([CTS77], [Vo77], [Vo98]).

Proposition-Définition 3.1 *Soit G un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si* $\mathrm{car}(k) > 0$*. Il existe un k-tore flasque S, un k-groupe linéaire quasi-trivial H et une extension centrale de k-groupes*

$$1 \to S \to H \to G \to 1.$$

Une telle suite sera appelée une **résolution flasque** *du k-groupe réductif G.*

Démonstration Supposons d'abord G réductif. Soit G^{ss} son groupe dérivé. Soit Z la composante neutre du centre de G, qui est un k-tore (c'est le radical de G). Ce k-tore est isogène au k-tore G^{tor}, quotient de G par son groupe dérivé. Soit $G^{sc} \to G^{ss}$ le revêtement simplement connexe de G^{ss}. Le morphisme $G^{sc} \to G^{ss}$ est une isogénie centrale. L'image réciproque du centre de G^{ss} est le centre de G^{sc}. On dispose donc du k-homomorphisme surjectif (par quoi l'on entend fidèlement plat) $G^{sc} \times Z \to G$. Soit (α, β) dans le noyau μ de cet homomorphisme (on sous-entend ici la donnée d'une k-algèbre commutative variable dans laquelle on prend les points). Son image $(\alpha', \beta) \in G^{ss} \times Z$ satisfait $\alpha'.\beta = 1 \in G$. Ainsi α' est dans le centre de G^{ss}, et β est déterminé par α. Ceci implique que α est dans le centre ν de G^{sc}. Ainsi $\mu \subset \nu \times Z$ est un k-groupe de type multiplicatif, contenu dans le centre $\nu \times Z$ de $G^{sc} \times Z$. En outre la projection sur le facteur G^{sc} induit un plongement $\mu \hookrightarrow \nu \subset G^{sc}$. Soit $Q \to Z$ un k-homomorphisme surjectif de k-tores, avec Q quasi-trivial. On obtient ainsi un k-homomorphisme surjectif $G^{sc} \times Q \to G$. Soit M le noyau de cet homomorphisme. Soit $(g, q) \in M \subset G^{sc} \times Q$. L'image de (g, q) dans $G^{sc} \times Z$ par la flèche évidente est un couple (g, p) qui est dans μ. On a donc $g \in \nu$, et $(g, q) \in \nu \times Q$, qui est le centre de $G^{sc} \times Q$. Ainsi le k-groupe $M \subset \nu \times Z$ est un k-groupe de type multiplicatif central dans $G^{sc} \times Q$.

On sait trouver une suite exacte

$$1 \to M \to S \to P \to 1,$$

où S est un k-tore flasque et P un k-tore quasi-trivial ([CTSa87a], (1.3.2)). L'application diagonale définit un plongement du k-groupe de type multiplicatif M dans le produit $(G^{sc} \times Q) \times S$. L'image est un sous-groupe central. Soit H le quotient du groupe réductif $(G^{sc} \times Q) \times S$ par ce sous-groupe central. C'est un k-groupe réductif, qui s'insère dans le diagramme commutatif de suites exactes de k-groupes algébriques linéaires suivant (où l'on a remplacé la flèche donnée $M \to S$ par son inverse) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
1 & \rightarrow & M & \rightarrow & G^{sc} \times Q & \rightarrow & G & \rightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = & & \\
1 & \rightarrow & S & \rightarrow & H & \rightarrow & G & \rightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & P & = & P & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 1 & & 1. & & & &
\end{array}$$

Le quotient du groupe H par le sous-groupe distingué $G^{sc} \times 1 \subset G^{sc} \times Q \subset H$ est un k-groupe extension du k-tore P par le k-tore Q. D'après **0.7**, un tel groupe est automatiquement un k-tore. Comme toute extension d'un k-tore quasi-trivial par un k-tore quasi-trivial, dans la catégorie des k-tores, est scindée (comme on voit au niveau des groupes de caractères, en utilisant le lemme de Shapiro), on conclut que le quotient de H par G^{sc} est un k-tore quasi-trivial. D'après **0.3**, le groupe dérivé H^{ss} s'identifie à G^{sc}, et le groupe H^{tor} est un tore quasi-trivial : le groupe réductif H est un groupe quasi-trivial.

Soient maintenant k un corps de caractéristique nulle et G un k-groupe linéaire connexe quelconque. Soit

$$1 \rightarrow S \rightarrow H_1 \rightarrow G^{réd} \rightarrow 1$$

une résolution flasque du k-groupe réductif $G^{réd}$. Soit H le k-groupe produit fibré de H_1 et de G au-dessus de $G^{réd}$. On a alors le diagramme commutatif de suites exactes de k-groupes linéaires

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & S & = & S & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \rightarrow & G^u & \rightarrow & H & \rightarrow & H_1 & \rightarrow & 1 \\
 & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \rightarrow & G^u & \rightarrow & G & \rightarrow & G^{réd} & \rightarrow & 1 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 1 & & 1. & &
\end{array}$$

D'après la proposition 2.3, le groupe H, extension du groupe quasi-trivial H_1 par le groupe quasi-trivial G^u, est quasi-trivial. La suite exacte

$$1 \rightarrow S \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$$

est donc une résolution flasque de G. $\square$

Remarque 3.1.1 En suivant la démonstration ci-dessus, on voit que l'on peut trouver une résolution flasque $1 \rightarrow S \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$ telle que le k-tore S et le k-tore quasi-trivial $P = H^{tor}$ soient déployés par la plus petite extension finie galoisienne K/k qui déploie à la fois le k-tore G^{tor} (c'est équivalent à déployer le k-tore Z centre connexe de G) et le centre ν de G^{sc}.

Remarque 3.1.2 En caractéristique zéro, par une construction toute différente, on donnera plus bas (Théorème 5.4) une autre preuve de l'existence de résolutions flasques pour les groupes linéaires connexes.

z-extensions et résolutions flasques

Si l'on connaît déjà l'existence d'une z-extension d'un k-groupe réductif G, laquelle s'établit d'ailleurs par des arguments analogues à ceux donnés dans la proposition 3.1 ci-dessus (mais la littérature à ce sujet suppose souvent la caractéristique nulle, cf. [Mi-Sh82], §3, Prop. 3.1 p. 297), on peut en déduire rapidement l'existence d'une résolution flasque de G.

On part d'une z-extension de G, c'est-à-dire d'une suite exacte

$$1 \to P_1 \to G_1 \to G \to 1,$$

avec P_1 un k-tore quasi-trivial et G_1 un k-groupe réductif dont le groupe dérivé G_1^{ss} est (semi-simple) simplement connexe. Soit $T = G_1^{tor}$. Soit

$$1 \to S_2 \to P_2 \to T \to 1$$

une résolution flasque du k-tore T ([CTSa77], [Vo77], [Vo98]), c'est-à-dire une suite exacte de k-tores avec S_2 flasque et P_2 quasi-trivial. Soit H le groupe produit fibré de G_1 et P_2 au-dessus de T. On a la suite exacte

$$1 \to G_1^{ss} \to H \to P_2 \to 1.$$

Ainsi H est un groupe réductif quasi-trivial. Par ailleurs le noyau de l'homomorphisme surjectif $H \to G$ composé de $H \to G_1$ et de $G_1 \to G$ est un k-groupe algébrique extension du k-tore P_1 par le k-tore S_2. D'après **0.7**, c'est donc un k-tore S. Comme il est distingué dans le k-groupe connexe H, il est automatiquement central dans H. Par ailleurs, ce k-tore S est extension du k-tore quasi-trivial P_1 par le k-tore flasque S_2. Toute telle extension est automatiquement scindée, comme on voit sur les groupes de caractères, ainsi ce k-tore S est k-isomorphe à $P_1 \times_k S_2$, il est flasque. $\square$

Comparaison entre deux résolutions flasques

Proposition 3.2 *Soient k un corps et G un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si* $\mathrm{car}(k) > 0$. *Soient $1 \to S \to H \to G \to 1$ et $1 \to S_1 \to H_1 \to G \to 1$ deux résolutions flasques du k-groupe G. Soient $P = H^{tor}$ et $P_1 = H_1^{tor}$. Alors*

(i) Il existe un isomorphisme de k-groupes algébriques $S \times_k H_1 \simeq S_1 \times_k H$.

(ii) Les k-groupes simplement connexes H^{ssu} et H_1^{ssu} sont naturellement isomorphes, et les k-groupes semi-simples simplement connexes H^{ss} et H_1^{ss} sont naturellement isomorphes.

(iii) Il existe un isomorphisme de modules galoisiens $S^* \oplus P_1^* \simeq S_1^* \oplus P^*$.

(iv) Il existe un isomorphisme naturel entre $\mathrm{Coker}[S_* \to P_*]$ *et* $\mathrm{Coker}[S_{1*} \to P_{1*}]$.

Démonstration Soit E le produit fibré de H et H_1 au-dessus de G. On a donc le diagramme commutatif de suites exactes de k-groupes

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \to & S & \to & H & \to & G & \to & 1 \\
 & & \uparrow = & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \to & S & \to & E & \to & H_1 & \to & 1 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & S_1 & \stackrel{=}{\to} & S_1 & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & 1 & & 1 & . &
\end{array}$$

Comme le k-tore S_1 est flasque et le groupe H quasi-trivial, d'après le corollaire 1.4 la projection $E \to H$ admet une section σ. Quitte à multiplier cette section par un élément de $S_1(k)$, on peut supposer qu'elle envoie l'élément neutre $e_H \in H(k)$ sur l'élément neutre $e_E \in E(k)$. Cette section est a priori un morphisme de variétés algébriques.

Le morphisme $\theta : H \times H \to E$ défini par $\theta(x, y) = \sigma(xy)\sigma(y)^{-1}\sigma(x)^{-1}$ envoie $H \times H$ dans S_1, et il vérifie $\theta(x, e_H) = e_{S_1}$ et $\theta(e_H, y) = e_{S_1}$. Un tel morphisme s'écrit $\theta(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$, où α et β sont des k-morphismes de groupes algébriques de H dans S_1 (lemme de Rosenlicht, **0.2**). Par la formule ci-dessus, ces morphismes α et β sont constants et envoient H sur e_{S_1}. Ainsi $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$, et σ est un homomorphisme section de l'homomorphisme $E \to H$. (Je remercie O. Gabber pour cet argument.)

Comme le noyau S_1 de cet homomorphisme est central, on conclut que le k-groupe E est k-isomorphe au produit de groupes $S_1 \times_k H$. Le même argument vaut pour $E \to H_1$, ce qui établit l'énoncé (i) : il existe un isomorphisme de k-groupes algébriques $S \times_k H_1 \simeq S_1 \times_k H$. Les projections $E \to H$ et $E \to H_1$ induisent des isomorphismes $E^{ssu} \stackrel{\simeq}{\to} H^{ssu}$ et $E^{ssu} \stackrel{\simeq}{\to} H_1^{ssu}$. L'énoncé (ii) en résulte immédiatement.

Toute extension d'un k-tore quasi-trivial par un k-tore flasque est automatiquement scindée. On voit alors que le diagramme ci-dessus induit un diagramme de suites exactes scindées de k-tores

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & \uparrow & & & & \\
 & & & & P & & & & \\
 & & & & \uparrow & & & & \\
1 & \to & S & \to & E^{tor} & \to & P_1 & \to & 1 \\
 & & & & \uparrow & & & & \\
 & & & & S_1 & & & & \\
 & & & & \uparrow & & & & \\
 & & & & 1 & & & &
\end{array}$$

Les énoncés (iii) et (iv) en résultent. $\square$

Remarque 3.2.1 Le diagramme de suites exactes scindées ci-dessus induit pour tout entier $n \geq 0$ un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Ker}[H^n(k, S) \to H^n(k, P)] \simeq \mathrm{Ker}[H^n(k, S_1) \to H^n(k, P_1)].$$

Pour $n = 1$, ceci donne en particulier un isomorphisme naturel

$$H^1(k, S) \simeq H^1(k, S_1).$$

Remarque 3.2.2 Si l'on se donne trois résolutions flasques $1 \to S_i \to H_i \to G \to 1$ $(i = 1, 2, 3)$ de G, on vérifie que le composé des isomorphismes naturels $\mathrm{Coker}[S_{1*} \to P_{1*}] \simeq \mathrm{Coker}[S_{2*} \to P_{2*}]$ et $\mathrm{Coker}[S_{2*} \to P_{2*}] \simeq \mathrm{Coker}[S_{3*} \to P_{3*}]$ construits au point (iv) est l'isomorphisme naturel $\mathrm{Coker}[S_{1*} \to P_{1*}] \simeq \mathrm{Coker}[S_{3*} \to P_{3*}]$.

Groupe de Picard d'un groupe linéaire et résolution flasque

Proposition 3.3 *Soit G un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si* $\mathrm{car}(k) > 0$. *Soit $1 \to S \to H \to G \to 1$ une résolution flasque de G. Soit P le k-tore quasi-trivial H^{tor}. Le noyau de l'application composée $S \to H \to H^{tor} = P$ est fini, et on a la suite exacte naturelle*

$$(P^*)^{\mathfrak{g}} \to (S^*)^{\mathfrak{g}} \to \mathrm{Pic}(G) \to 0,$$

où la flèche $(S^*)^{\mathfrak{g}} \to \mathrm{Pic}(G)$ associe à tout caractère $\chi : S \to \mathbf{G}_{m,k}$ la classe du $\mathbf{G}_{m,k}$-torseur sur G déduit de la résolution flasque en poussant le long de χ.

Démonstration En utilisant **0.4** et **0.5**, on établit $\mathrm{Pic}(H^{ssu}) = 0$, puis $\mathrm{Pic}(H) = 0$. On voit aussi que l'on a $P^* \simeq H^*$. Appliquant **0.5** à la résolution flasque, on obtient la suite exacte annoncée. Ceci vaut sur tout corps, en particulier pour $k = \overline{k}$. On voit ainsi que le conoyau de $P^* \to S^*$ est le groupe $\mathrm{Pic}(\overline{G})$, qui est fini (rappel **0.5**). Par dualité, la flèche de k-tores $S \to P$ a un noyau fini. $\square$

Le diagramme fondamental attaché à une résolution flasque d'un k-groupe linéaire

Soit G un k-groupe linéaire connexe, supposé lisse si $\mathrm{car}(k) > 0$. Soit $1 \to S \to H \to G \to 1$ une résolution flasque de G, avec H extension du k-tore quasi-trivial $P = H^{tor}$ par le k-groupe simplement connexe H^{ssu}. Le morphisme $H \to G$ induit un épimorphisme de k-tores $H^{tor} \to G^{tor}$. Soit M le k-groupe de type multiplicatif noyau de $H^{tor} \to G^{tor}$. On a un homomorphisme induit $S \to M$. Soit $\mu \subset S$ le k-groupe de type multiplicatif noyau de la flèche composée $S \to H \to H^{tor} = P$, qui est aussi le noyau de $S \to M$. D'après la proposition 3.3, c'est un k-groupe de type multiplicatif fini. Le groupe H^{ssu}, resp. G^{ssu}, est le noyau de la flèche $H \to H^{tor}$, resp. de la flèche $G \to G^{tor}$. Le morphisme de k-groupes $H \to G$ induit un morphisme de k-groupes $H^{ssu} \to G^{ssu}$. On a donc le diagramme de suites exactes de k-groupes linéaires suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & \mu & \to & H^{ssu} & \to & G^{ssu} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & S & \to & H & \to & G & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & M & \to & P & \to & G^{tor} & \to & 1 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 1 & & 1. & &
\end{array}$$

Le k-groupe G^{ssu} est une extension d'un k-groupe semi-simple par un k-groupe unipotent. Il n'admet donc pas de k-morphisme non constant dans le k-groupe de type multiplicatif quotient de M par l'image de S. Ceci montre que le diagramme ci-dessus se complète en le diagramme de suites exactes de k-groupes linéaires

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & \mu & \to & H^{ssu} & \to & G^{ssu} & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & S & \to & H & \to & G & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & M & \to & P & \to & G^{tor} & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1. & &
\end{array}$$

Le groupe H^{ssu}, qui est simplement connexe, est le revêtement simplement connexe de G^{ssu}, le k-groupe de type multiplicatif fini μ s'identifie au groupe fondamental de G^{ssu}, qui est le noyau de $G^{sc} \to G^{ss}$.

Pour G réductif, le diagramme fondamental s'écrit

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & \mu & \to & G^{sc} & \to & G^{ss} & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & S & \to & H & \to & G & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & M & \to & P & \to & G^{tor} & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1. & &
\end{array}$$

§4 Résolutions coflasques d'un k-groupe linéaire connexe

L'énoncé ci-dessous généralise l'existence des résolutions coflasques "du deuxième type" pour G un k-tore algébrique ([CTSa87a], (1.3.4)). Pour un k-groupe donné G, il distingue aussi une sous-classe particulière parmi toutes les z-extensions possibles pour ce groupe.

Proposition 4.1 *Soit G un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si* $\mathrm{car}(k) > 0$. *Il existe un k-tore quasi-trivial P, un k-groupe linéaire connexe (réductif si* $\mathrm{car}(k) > 0$*) extension d'un k-tore coflasque Q par un groupe (semi-simple si* $\mathrm{car}(k) > 0$*) simplement connexe H, et une extension centrale de k-groupes linéaires connexes*

$$1 \to P \to H \to G \to 1.$$

Démonstration Soit

$$1 \to S \to H_1 \to G \to 1$$

une résolution flasque de G (pour la démonstration qui suit, on pourrait aussi partir d'une z-extension). On sait (voir [CTSa87a], Lemma 0.6 et Prop. 1.3) qu'il existe une suite exacte de k-tores

$$1 \to S \to P \to Q \to 1,$$

où P est un k-tore quasi-trivial et Q est un k-tore coflasque.

Considérons alors le k-groupe algébrique linéaire H qui est le quotient de $P \times_k H_1$ par l'image diagonale de S, qui est centrale et donc distinguée dans $P \times_k H_1$. Le k-groupe H s'insère dans le diagramme commutatif de suites exactes de k-groupes algébriques linéaires suivant (où l'on a remplacé la flèche donnée $S \to P$ par son inverse) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
1 & \to & S & \to & H_1 & \to & G & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = & & \\
1 & \to & P & \to & H & \to & G & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & Q & = & Q & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 1 & & 1 & & . & &
\end{array}$$

On a $H^{ssu} = H_1^{ssu}$, donc H_1^{ssu} est un groupe simplement connexe. Le tore H^{tor} est extension du k-tore coflasque Q par le k-tore quasi-trivial H_1^{tor}. Toute extension d'un k-tore coflasque par un k-tore quasi-trivial est scindée, donc H^{tor} est un k-tore coflasque. $\square$

Proposition 4.2 *Soient k un corps et G un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si* car$(k) > 0$. *Soient* $1 \to P \to H \to G \to 1$ *et* $1 \to P_1 \to H_1 \to G \to 1$ *deux résolutions coflasques du k-groupe G. Soient $Q = H^{tor}$ et $Q_1 = H_1^{tor}$ les k-tores coflasques associés.*

(i) Il existe un k-isomorphisme de k-groupes algébriques $P \times_k H_1 \simeq P_1 \times_k H$.

(ii) Les k-groupes simplement connexes H^{ssu} et H_1^{ssu} sont naturellement isomorphes, et les k-groupes semi-simples simplement connexes H^{ss} et H_1^{ss} sont naturellement isomorphes.

(iii) Il existe un k-isomorphisme de k-tores $P \times_k Q_1 \simeq P_1 \times_k Q$.

(iv) Il existe un isomorphisme naturel entre $\mathrm{Coker}[P_* \to Q_*]$ *et* $\mathrm{Coker}[P_{1*} \to Q_{1*}]$.

Démonstration Soit E le produit fibré de H et H_1 au-dessus de G. On a donc le diagramme commutatif de suites exactes de k-groupes

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \to & P & \to & H & \to & G & \to & 1 \\
 & & \uparrow = & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \to & P & \to & E & \to & H_1 & \to & 1 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & P_1 & \stackrel{\simeq}{\to} & P_1 & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & 1 & & 1 & . &
\end{array}$$

Comme le k-tore P_1 est quasi-trivial et le k-groupe algébrique H coflasque, le P_1-torseur $E \to H$ est trivial (proposition 1.10 et proposition 2.6). Le même argument que dans la démonstration de la proposition 3.2 assure qu'alors le k-groupe E est k-isomorphe, comme k-groupe, au k-groupe $P_1 \times_k H$. On voit de même qu'il est k-isomorphe au k-groupe $P \times_k H_1$. Ceci établit (i). Les énoncés (ii) et (iii) sont des conséquences immédiates. L'argument pour (iv) est identique à celui donné dans la démonstration de la proposition 3.2. $\square$

Remarque 4.2.1 Si $1 \to P \to H \to G \to 1$ et $1 \to P_1 \to H_1 \to G \to 1$ sont deux z-extensions du même k-groupe réductif G, on peut montrer que les k-tores H_1^{tor} et H_2^{tor} sont stablement k-birationnels, i.e. k-birationnels après multiplication de chacun d'eux par un espace affine convenable.

§5. Propriétés birationnelles et comparaison avec les torseurs universels

La lecture de ce paragraphe suppose une familiarité avec la notion de torseur universel ([CTSa87b]).

Proposition 5.1 *Soit X une k-variété projective, lisse et géométriquement intègre. Supposons que le groupe* $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ *est libre de type fini. Soit $\mathcal{T} \to X$ un torseur universel sur X. Tout ouvert U de $\mathcal{T}$ est une variété $\mathbf{G}_m$-quasi-triviale.*

Démonstration Dans [CTSa87b], §2.1, on a établi ce résultat pour $U = \mathcal{T}$. D'après le lemme 1.2, ceci implique le résultat pour tout ouvert. $\square$

Proposition 5.2 *Soient k un corps et G un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si* $\mathrm{car}(k) > 0$. *Soit $1 \to S \to H \to G \to 1$ une résolution flasque de G. Soit X une k-compactification lisse de G. Soit S_0 le k-tore de groupe des caractères le module galoisien* $\mathrm{Pic}(\overline{X})$. *Soit $\mathcal{T} \to X$ un torseur universel sur X de fibre triviale en l'élément neutre e_G de $G(k)$. Alors :*

(i) Il existe un k-isomorphisme de k-variétés $S_0 \times_k H \simeq S \times_k \mathcal{T}_G$, où $\mathcal{T}_G$ désigne la restriction de $\mathcal{T}$ au-dessus de G.

(ii) Il existe des modules de permutation P^* et P_0^* et un isomorphisme de modules galoisiens $S^* \oplus P^* \simeq S_0^* \oplus P_0^*$.

Démonstration On considère la k-variété Y produit fibré de H et de $\mathcal{T}_G$ au-dessus de G. Cette variété possède un k-point. Elle est munie d'une part d'une structure de torseur sur H sous S_0, d'autre part d'une structure de torseur sur $\mathcal{T}_G$ sous S. D'après le théorème **0.9** (Borovoi et Kunyavskiĭ), le k-tore S_0 est flasque. D'après le corollaire 1.4, on voit qu'on a des isomorphismes de k-variétés $Y \simeq S_0 \times_k H$ et $Y \simeq S \times_k \mathcal{T}_G$. Ceci établit le point (i).

Pour établir le point (ii), on applique le foncteur $Z \mapsto \overline{k}[Z]^\times/\overline{k}^\times$ à $Z = S_0 \times_k H$ et à $Z = S \times_k \mathcal{T}_G$, on utilise les énoncés de Rosenlicht (**0.1** et **0.2**) et le fait (Prop. 5.1) que l'ouvert $Z = \mathcal{T}_G$ de $\mathcal{T}$ est $\mathbf{G}_m$-quasi-trivial, ce qui implique que le module galoisien $\overline{k}[\mathcal{T}_G]^\times/\overline{k}^\times$ est un module de permutation. $\square$

Corollaire 5.3 *Soient k un corps et G un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si* $\mathrm{car}(k) > 0$. *Si G est stablement k-rationnel, i.e. k-birationnel à un espace affine sur son corps de base après produit par un espace affine, et si G admet une k-compactification lisse, alors il existe une suite exacte*

$$1 \to P \to H \to G \to 1,$$

où H est un k-groupe quasi-trivial et P est un k-tore quasi-trivial central dans H.

Démonstration Soit $1 \to S \to H \to G \to 1$ une résolution flasque de G. Soit X une k-compactification lisse de G. Si X est stablement k-rationnelle, alors $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est stablement de permutation ([CTSa87b], Prop. 2.A.1). D'après la proposition 5.2, on voit que S^* est aussi stablement de permutation. Il existe donc des k-tores quasi-triviaux P_1 et P_2 tels que $S \times_k P_1 \simeq P_2$. En remplaçant la résolution flasque donnée par

$$1 \to P_2 \to H \times_k P_1 \to G \to 1,$$

on obtient une suite du type annoncé. □

Théorème 5.4 *Soient k un corps et G un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si* $\mathrm{car}(k) > 0$. *Soit X une k-compactification lisse de G. Soit $\mathcal{T} \to X$ un torseur universel sur X de fibre triviale en l'élément neutre $e_G \in G(k) \subset X(k)$.*

(i) L'ouvert $\mathcal{T}_G = \mathcal{T} \times_X G \subset \mathcal{T}$ peut être muni d'une structure de k-groupe algébrique connexe H tel que la projection $\mathcal{T}_G \to G$ soit un homomorphisme surjectif de noyau le k-tore S_0 de groupe des caractères le groupe $\mathrm{Pic}(\overline{X})$.

(ii) La suite exacte $1 \to S_0 \to H \to G \to 1$ est une résolution flasque de G.

Démonstration L'énoncé (i) est un cas particulier du théorème 5.6 ci-dessous. La variété $\mathcal{T}_G$ est une variété $\mathbf{G}_m$-quasi-triviale (Prop. 5.1). Ainsi H est un groupe linéaire connexe quasi-trivial. D'après le théorème **0.9** (Borovoi-Kunyavskiĭ), le k-tore S_0 est flasque. Ceci établit le point (ii). □

Remarque 5.4.1 En caractéristique zéro, d'après Hironaka, il existe une k-compactification lisse de la k-variété lisse G. En caractéristique zéro, on obtient ainsi une démonstration alternative de l'existence de résolutions flasques (Proposition 3.1).

Remarque 5.4.2 Dans [Gi97], III.4.b, Gille étudie les torseurs universels sur les compactifications lisses de groupes semi-simples, et il établit un lien avec le revêtement simplement connexe d'un tel groupe.

Notre but maintenant est d'établir le théorème 5.6 ci-dessous, ce qui se fera en adaptant un argument de Serre ([Se59], Chapitre VII, §15).

Commençons par des préliminaires. Soient k un corps, S un k-groupe de type multiplicatif lisse et X une k-variété. Le groupe de cohomologie étale $H^1_{ét}(X,S)$ classifie les torseurs sur X sous S, à isomorphisme non unique près. Tout endomorphisme d'un torseur sur X sous S est un automorphisme (de S-torseur), donné par un élément de $S(X) = \mathrm{Mor}_k(X,S)$. Le morphisme structural $X \to \mathrm{Spec}(k)$ donne naissance à un plongement de groupes $S(k) \subset S(X)$.

On a une variante, utile pour la suite, où la k-variété X est (k-)pointée par un k-point $e_X \in X(k)$, et chaque torseur est (k-)pointé au-dessus du point e_X de X. Tout endomorphisme d'un tel torseur pointé est un automorphisme, donné par un élément de $S(X)$ envoyant le point marqué de X sur l'élément neutre e_S de S.

Pour tout entier i on introduit le groupe $H^i_{e_X}(X,S)$ défini comme le noyau de l'évaluation au point $e_X \in X(k)$:

$$H^i_{e_X}(X,S) = \mathrm{Ker}\,[\mathrm{ev}_{e_X} : H^i(X,S) \to H^i(k,S)].$$

La suite spectrale $H^p(k, H^q(\overline{X},S)) \Longrightarrow H^n(X,S)$ donne naissance à la suite exacte

$$0 \to H^1(k, H^0(\overline{X},S)) \to H^1(X,S) \to H^0(k, H^1(\overline{X},S)) \to H^2(k, H^0(\overline{X},S)) \to H^2(X,S).$$

Par comparaison avec le point marqué de X, on en déduit la suite exacte

$$0 \to H^1(k, H^0_{e_X}(\overline{X},S)) \to H^1_{e_X}(X,S) \to H^0(k, H^1(\overline{X},S)) \to H^2(k, H^0_{e_X}(\overline{X},S)) \to H^2_{e_X}(X,S).$$

On dit qu'un foncteur contravariant F d'une catégorie $\mathcal{C}$ de k-variétés, stable par produits, à valeurs dans une catégorie de modules, est additif si, pour X et Y dans $\mathcal{C}$, la flèche naturelle $F(X) \oplus F(Y) \to F(X \times_k Y)$ définie comme la somme des deux images inverses des projections est un isomorphisme.

Supposons $\overline{X}$ connexe et normale. On a alors $H^0(\overline{X}, S)/H^0(\overline{k}, S) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(S^*, \overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times)$, et le foncteur envoyant X sur $H^0(\overline{X}, S)/H^0(\overline{k}, S)$ est additif sur la catégorie des k-variétés X telles que $\overline{X}$ soit normale connexe. La suite exacte ci-dessus s'écrit alors

$$0 \to H^1(k, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(S^*, \overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times)) \to H^1_{e_X}(X, S) \to H^0(k, H^1(\overline{X}, S)) \to H^2(k, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(S^*, \overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times)).$$

Soient X et Y deux k-variétés lisses, géométriquement intègres, $\overline{k}$-rationnelles. Alors le foncteur qui à X associe le module galoisien $H^1(\overline{X}, S)$ est additif. On établit ce résultat par réduction au cas $S = \mathbf{G}_m$ et au cas $S = \mu_n$. Ce dernier cas se traite par la suite de Kummer : on utilise le résultat pour $H^1(\overline{X}, \mathbf{G}_m)$ (et dans ce cas on utilise le fait que les variétés sont $\overline{k}$-rationnelles, voir [CTSa77], Lemme 11 p. 188) et le résultat pour $H^0(\overline{X}, \mathbf{G}_m)/n$ (Rappel **0.1**).

Lemme 5.5 *Soit S un k-groupe de type multiplicatif lisse. Sur la catégorie des k-variétés lisses pointées géométriquement connexes, $\overline{k}$-rationnelles, le foncteur qui à X associe $H^1_{e_X}(X, S)$ est additif.*

En d'autres termes, étant données deux telles k-variétés pointées (X, e_X) et (Y, e_Y), tout torseur $\mathcal{T}$ sur $X \times_k Y$ sous S trivial au-dessus de $e_X \times e_Y$ est isomorphe à l'image, par la flèche de multiplication $S \times_k S \to S$, des torseurs $p_X^* \circ i_X^*(\mathcal{T})$ et $p_Y^* \circ i_Y^*(\mathcal{T})$, où p_X et p_Y sont les projections de $X \times_k Y$ sur les deux facteurs, et où $i_X : X \times e_Y \hookrightarrow X \times_k Y$, resp. $i_Y : e_X \times_k Y \hookrightarrow X \times_k Y$ sont les immersions naturelles.

Démonstration La somme des suites exactes ci-dessus pour X et Y s'envoie naturellement dans la suite exacte pour $X \times_k Y$. L'additivité des foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(S^*, \overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times)$ et $H^1(\overline{X}, S)$ et le lemme des 5 donnent le résultat. □

Théorème 5.6 *Soient k un corps, G un k-groupe algébrique linéaire connexe, supposé réductif si $\mathrm{car}(k) > 0$. Soit S un k-groupe de type multiplicatif lisse. Soit $p : Y \to G$ un torseur sur G sous S, de fibre triviale en l'élément neutre $e_G \in G(k)$. Il existe alors une structure de k-groupe algébrique linéaire sur Y, telle que de plus $p : Y \to G$ soit un homomorphisme de k-groupes algébriques, de noyau S central.*

Démonstration La k-variété lisse G est $\overline{k}$-rationnelle.

Soit $p : H \to G$ un torseur sur G sous le k-groupe de type multiplicatif lisse S. Supposons de plus H équipé d'un k-point e_H s'envoyant sur $e_G \in G(k)$.

Considérons la multiplication
$$m : G \times G \to G.$$
D'après le lemme 5.5, tout élément $\alpha \in H^1_{e_G \times e_G}(G \times G, S)$ s'écrit $p_1^*(\alpha_{G \times e_G}) + p_2^*(\alpha_{e_G \times G})$. Pour tout élément $\alpha \in H^1_{e_G}(G, S)$, on a donc $m^*(\alpha) = p_1^*(\alpha) + p_2^*(\alpha)$. On décrit ce fait en disant que tout élément de $H^1_{e_G}(G, S)$ est "primitif".

Ceci établit l'existence d'un diagramme commutatif de morphismes de k-variétés

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi & : & H & \times & H & \to & H \\ & & \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow p \\ m & : & G & \times & G & \to & G, \end{array}$$

où m désigne la multiplication de G et φ est compatible avec la multiplication $S \times S \to S$, en ce sens que l'on a

$$\varphi(t_1h_1, t_2h_2) = t_1t_2\varphi(h_1, h_2).$$

On a $p(\varphi(e_H, e_H)) = e_G = p(e_H) \in G(k)$. Il existe donc un (unique) élément $c \in S(k)$ tel que $c.\varphi(e_H, e_H) = e_H \in H(k)$. La multiplication par un élément de $S(k) \subset S(G)$ sur H respecte la flèche $p : H \to G$, et elle respecte l'action de S sur H. En faisant agir c sur H en haut à droite dans le diagramme, on obtient ainsi un nouveau diagramme formellement identique au précédent, mais pour lequel $\varphi(e_H, e_H) = e_H$.

Le morphisme $\varphi(e_H, h) : H \to H$ est alors un morphisme de S-torseurs pointés sur G. On a donc $\varphi(e_H, h) = \chi_2(p(h)).h$, où $p : H \to G$ est la projection naturelle, et $\chi_2 : G \to S$ est un caractère. De même, $\varphi(h, e_H) = \chi_1(p(h)).h$, avec $\chi_1 : G \to S$ un caractère.

Si l'on remplace $\varphi(h_1, h_2)$ par

$$(\chi_1(p(h_1)))^{-1}.(\chi_2(p(h_2)))^{-1}.\varphi(h_1, h_2),$$

on a maintenant un nouveau morphisme $\varphi = H \times H \to H$ satisfaisant

$$\varphi(e_H, h) = h = \varphi(h, e_H).$$

Autrement dit, e_H est un élément neutre pour l'opération φ. Noter que ce morphisme donne encore lieu à un diagramme commutatif comme ci-dessus, i.e. la projection $H \to G$ est compatible avec l'opération $\varphi : H \times H \to H$, avec l'action de $S \times S \to S$ et (par projection) avec la multiplication $G \times G \to G$.

A-t-on associativité ? Soient $h_1, h_2, h_3 \in H$. En utilisant le diagramme ci-dessus, l'associativité de la multiplication pour G et le lemme de Rosenlicht, on voit qu'il existe un k-morphisme de groupes $\sigma : H \times_k H \times_k H \to S$ tel que

$$\varphi(h_1, \varphi(h_2, h_3)) = \sigma(h_1, h_2, h_3).\varphi(\varphi(h_1, h_2), h_3) \in H.$$

Comme φ est compatible avec l'action de S, on voit que

$$\sigma(t_1h_1, t_2h_2, t_3h_3) = \sigma(h_1, h_2, h_3).$$

Ainsi σ passe au quotient par l'action de $S \times_k S \times_k S$, et est induit par un k-morphisme de groupes $\tau : G \times_k G \times_k G \to S$. Une autre application du lemme de Rosenlicht assure que

$$\tau(g_1, g_2, g_3) = \chi_1(g_1).\chi_2(g_2).\chi_3(g_3),$$

où les $\chi_i : G \to S$ sont des caractères.

En utilisant la propriété $\varphi(e_H, h) = h = \varphi(h, e_H)$, on voit que l'on a $\tau(e_G, g_2, g_3) = 1 \in S$. Ceci établit $\chi_2 = 1$ et $\chi_3 = 1$. Par symétrie, on obtient de même $\chi_1 = 1$. Ceci établit l'associativité de φ.

Il reste à établir l'existence de l'inverse. On va adapter l'argument de Serre ([Se59], Chap. VII, §3, no. 15, Théorème 5, p. 183). Soit $i_G : G \to G$ le morphisme de k-variétés défini par $g \mapsto g^{-1}$. On commence par montrer que l'application $i_G^* : H^1_{e_G}(G, S) \to H^1_{e_G}(G, S)$ est l'application $x \to -x$. Ceci n'est pas formel, sur une courbe elliptique, il y a des éléments du groupe de Picard de degré non nul invariants par $g \mapsto g^{-1}$. Mais ici, tout élément de $H^1_{e_G}(G, S)$ est "primitif". Notons $\alpha \in H^1_{e_G}(G, S)$ la classe du torseur pointé $p : H \to G$. Le composé de $G \to G \times G$ donné par $u \mapsto (u, u^{-1})$ et de la multiplication $m : G \times G \to G$ est la flèche constante $G \to e_G$. Du fait que α est primitif, on déduit immédiatement $i_G^*(\alpha) = -\alpha$. Par ailleurs, la flèche $(i_S)_* : H^1_{e_G}(G, S) \to H^1_{e_G}(G, S)$ induite, via les coefficients S, par l'isomorphisme de k-groupes commutatifs $i_S : S \to S$ défini par $s \mapsto s^{-1}$ est, de façon évidente, l'application $x \mapsto -x$. On a donc $i_G^*(\alpha) = i_{S*}(\alpha) \in H^1_{e_G}(G,S)$ et on trouve ainsi un morphisme $\theta : H \to H$ au-dessus de l'application inverse $G \to G$, tel que de plus $\theta(s.h) = s^{-1}.\theta(h)$. Par un argument identique à celui donné plus haut, on peut assurer $\theta(e_H) = e_H$. Ce morphisme est un isomorphisme de k-variétés, car il est induit par la projection $H \times_G G \to H$, la flèche $G \to G$ étant l'isomorphisme i_G. Le morphisme $\lambda : x \mapsto \varphi(\theta(x), x)$ envoie H dans l'image réciproque de e_G par $H \to G$, c'est-à-dire dans S. Ce morphisme satisfait $\lambda(s.x) = \lambda(x)$. Il définit donc un morphisme pointé de G dans S, c'est-à-dire un caractère $\chi : G \to S$. Tout caractère $\chi : G \to S$ définit un isomorphisme de S-torseurs $H \to H$ via $x \to \chi(p(x)).x$. Remplaçons alors le k-isomorphisme pointé (de k-variétés) θ par $\xi : H \to H$ défini par le k-isomorphisme pointé (de k-variétés) $\xi(x) = \chi(p(x))^{-1}.\theta(x)$. On a alors $\varphi(\xi(x), x) = e_H$. On a donc défini un inverse à gauche pour la loi de composition φ sur H. Comme chacun sait, c'est alors un inverse à droite pour la loi φ, qui est associative et possède un élément neutre.

Que le morphisme $H \to G$ soit un homomorphisme résulte du diagramme ci-dessus. Le groupe H est alors une extension du groupe linéaire connexe G par le k-groupe de type multiplicatif lisse S. C'est donc un k-groupe linéaire. L'action de conjugaison de H sur S induit une action du groupe connexe G sur le le k-groupe de type multiplicatif lisse S. Une telle action est triviale, et donc S est central dans H. $\square$

Remarques 5.6.1

(1) Dans [Se59] (Chapitre VII, §15), Serre étudie les torseurs primitifs sur une variété abélienne A, sous un groupe linéaire connexe (commutatif) B. Serre utilise le fait que tout morphisme de A dans B est constant. Cette propriété vaut encore si la variété abélienne A est remplacée par un groupe G semi-simple. Mais elle ne vaut plus pour G un groupe réductif quelconque.

(2) Le cas particulier du théorème 5.6 où k est algébriquement clos et S est un k-groupe abélien fini est le théorème 2 de [Mi72].

(3) Le théorème 5.6 ne s'étend pas à des groupes S quelconques. M. Florence m'a donné des contre-exemples, sur un corps k algébriquement clos, avec $S = PGL_n$ et $G = \mathbf{G}_m^2$.

On déduit du théorème le résultat essentiellement équivalent suivant.

Corollaire 5.7 *Soit G un k-groupe algébrique linéaire connexe, supposé réductif si* $\mathrm{car}(k) > 0$. *Pour tout k-groupe de type multiplicatif lisse S la flèche naturelle*

$$\mathrm{Ext}_{k-gp}(G,S) \to \mathrm{Ker}[H^1(G,S) \to H^1(k,S)],$$

est un isomorphisme.

Démonstration La flèche dont il est ici question est la suivante. La donnée d'une extension de k-groupes algébriques

$$1 \to S \to G_1 \to G \to 1$$

donne par oubli un torseur sur G sous S, dont la restriction au-dessus de l'élément neutre $e_G \in G(k)$ possède un k-point. Cette application induit un homomorphisme de groupes abéliens $\mathrm{Ext}_{k-gp}(G,S) \to \mathrm{Ker}[H^1_{ét}(G,S) \to H^1(k,S)]$ (la flèche $H^1_{ét}(G,S) = H^1(G,S) \to H^1(k,S)$ étant définie par la restriction à e_G), dont le théorème 5.6 montre qu'il est surjectif. L'argument donné dans la démonstration de la proposition 3.2 montre que cet homomorphisme est injectif. $\square$

§6. Le groupe fondamental algébrique des groupes algébriques linéaires connexes via les résolutions flasques

Proposition-Définition 6.1 *Soit G un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si* $\mathrm{car}(k) > 0$. *Soit $1 \to S \to H \to G \to 1$ une résolution flasque de G. Soit P le k-tore quasi-trivial H^{tor}. On dispose donc d'un morphisme de k-tores $S \to P$. Le module galoisien discret de type fini* $\mathrm{Coker}[S_* \to P_*]$ *ne dépend pas de la résolution flasque choisie. On le note $\pi_1(G)$ et on l'appelle le groupe fondamental algébrique de G.*

Démonstration Le seul point à établir est que le quotient $\mathrm{Coker}[S_* \to P_*]$ est canoniquement défini. C'est l'objet de la proposition 3.2 (iv) et de la remarque 3.2.2. □

Proposition 6.2 *La suite*

$$0 \to S_* \to P_* \to \pi_1(G) \to 0$$

est exacte. C'est une résolution coflasque du module galoisien $\pi_1(G)$.

Démonstration La flèche $S \to P$ a un noyau fini (proposition 3.3), donc la flèche $S_* \to P_*$ est injective. Ceci établit l'exactitude de la suite. Comme S_* est un module coflasque et P_* un module de permutation, ceci est une résolution coflasque du module galoisien de type fini $\pi_1(G)$ ([CTSa77], §1 ; CTSa87a], §0). □

Remarques 6.2.1

(1) On verra dans l'appendice A que le groupe fondamental algébrique ici défini coïncide avec le groupe défini par Borovoi dans [Bo96] et [Bo98], groupe qui sera ici noté $\pi_1^{Bor}(G)$.

(2) Compte tenu des propriétés des résolutions coflasques ([CTSa87a], Lemma 0.6), le module galoisien S_* est déterminé à addition près d'un module de permutation par le module galoisien $\pi_1(G)$.

(3) Borovoi et Kunyavskiĭ [BoKu04] partent de la donnée du module galoisien $\pi_1^{Bor}(G)$, et considèrent (op. cit., §1) une résolution coflasque du module galoisien $\pi_1^{Bor}(G)$:

$$0 \to S_* \to P_* \to \pi_1^{Bor}(G) \to 0.$$

Ceci définit S_* à addition près d'un module de permutation. En caractéristique nulle, pour $G \subset X$ une k-compactification lisse, ils montrent que le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est flasque (op. cit., §2 ; théorème **0.9** ci-dessus). Ils montrent enfin (op. cit., §3, Thm. 3.21 p. 309) que $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ et S^* sont isomorphes à addition près de modules de permutation.

On note $M_{\mathfrak{g}}$ le groupe abélien des coinvariants d'un $\mathfrak{g}$-module continu discret, c'est-à-dire le plus grand $\mathfrak{g}$-quotient de M sur lequel le groupe de Galois $\mathfrak{g}$ agit trivialement.

Proposition 6.3 *Soit G un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si* $\mathrm{car}(k) > 0$. *Les groupes abéliens finis* $\mathrm{Pic}(G)$ *et $(\pi_1(G)_{\mathfrak{g}})_{tors}$ sont duaux l'un de l'autre.*

Démonstration Soit $1 \to S \to H \to G \to 1$ une résolution flasque de G. Soit P le k-tore quasi-trivial H^{tor}. On dispose de la suite exacte de la proposition 6.2 :

$$0 \to S_* \to P_* \to \pi_1(G) \to 0.$$

Cette dernière suite donne naissance de façon évidente au diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\pi_1(G),\mathbf{Z}) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\pi_1(G),\mathbf{Q}) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\pi_1(G),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P_*,\mathbf{Z}) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P_*,\mathbf{Q}) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P_*,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})) & \rightarrow & H^1(\mathfrak{g},\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(P_*,\mathbf{Z})) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(S_*,\mathbf{Z}) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(S_*,\mathbf{Q}) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(S_*,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \rightarrow & H^1(\mathfrak{g},\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(S_*,\mathbf{Z})) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & \mathrm{Pic}(G) & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

où le conoyau de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P_*,\mathbf{Z}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(S_*,\mathbf{Z})$, c'est-à-dire de $(P^*)^{\mathfrak{g}} \rightarrow (S^*)^{\mathfrak{g}}$, a été identifié, grâce à la proposition 3.3, à $\mathrm{Pic}(G)$. Que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P_*,\mathbf{Q}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(S_*,\mathbf{Q})$ soit surjectif résulte simplement du fait que $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}}(M,\mathbf{Q}) = 0$ pour tout $\mathfrak{g}$-module continu discret. Comme P_* et donc aussi $P^* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(P_*,\mathbf{Z})$ sont des modules de permutation, on a $H^1(\mathfrak{g},\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(P_*,\mathbf{Z})) = 0$.

Le lemme du serpent donne alors la suite exacte

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\pi_1(G),\mathbf{Q}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\pi_1(G),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow \mathrm{Pic}(G) \rightarrow 0,$$

soit encore

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(G)_{\mathfrak{g}},\mathbf{Q}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(G)_{\mathfrak{g}},\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow \mathrm{Pic}(G) \rightarrow 0.$$

Il reste alors à appliquer le lemme général suivant. Pour tout groupe abélien de type fini A, on a une suite exacte naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(A,\mathbf{Q}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(A,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(A_{tors},\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow 0. \quad \square$$

Remarque 6.3.1 Soient k un corps de caractéristique nulle et G un k-groupe réductif. Comme le montre Borovoi ([Bo98], Prop. 1.10), le groupe $\pi_1^{Bor}(G)$ admet aussi une interprétation en termes du centre d'un groupe dual de Langlands (connexe) de G. Plus précisément, le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1^{Bor}(G),\mathbf{C}^*)$, muni de sa structure de $\mathfrak{g}$-module via l'action sur $\pi_1(G)$, s'identifie au groupe des points complexes $Z(\hat{G})(\mathbf{C})$ du centre $Z(\hat{G})$ d'un dual de Langlands connexe de G. On a donc

$$(Z(\hat{G})(\mathbf{C}))^{\mathfrak{g}} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\pi_1^{Bor}(G),\mathbf{C}^*) = \mathrm{Hom}((\pi_1^{Bor}(G))_{\mathfrak{g}},\mathbf{C}^*)$$

d'où il résulte que le groupe abélien fini $\pi_0((Z(\hat{G})(\mathbf{C}))^{\mathfrak{g}})$ des composantes connexes de $(Z(\hat{G})(\mathbf{C}))^{\mathfrak{g}}$ utilisé par Kottwitz dans [Ko86] s'identifie à $\mathrm{Hom}((\pi_1^{Bor}(G)_{\mathfrak{g}})_{tors},\mathbf{C}^*)$ soit au dual du groupe abélien fini $(\pi_1^{Bor}(G)_{\mathfrak{g}})_{tors}$. La proposition 6.3 et l'identification $\pi_1(G) = \pi_1^{Bor}(G)$ faite dans l'appendice A montrent alors que le groupe $\pi_0((Z(\hat{G})(\mathbf{C}))^{\mathfrak{g}})$ n'est autre que le groupe $\mathrm{Pic}(G)$. Ce dernier résultat est déjà établi par Kottwitz dans [Ko84] (2.4.1).

Etant donné un k-groupe fini de type multiplicatif μ et $\mu^* = \mathrm{Hom}_{\overline{k}-gp}(\mu,\mathbf{G}_{m,k})$ son groupe des caractères, qui est un $\mathfrak{g}$-module fini, on note $\mu(-1)$ le $\mathfrak{g}$-module fini $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mu^*,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. On peut aussi définir ce groupe de la façon suivante. Soit $N > 0$ un entier annulant μ^*. On a

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mu^*, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mu^*, \mathbf{Z}/N) = \mathrm{Hom}_{\overline{k}-gp}(\mu_N, \mu),$$

où la dernière égalité est obtenue par dualité. Ainsi $\mu(-1) = \mathrm{Hom}_{\overline{k}-gp}(\mu_N, \mu)$.

Proposition 6.4 *Soit G un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si* $\mathrm{car}(k) > 0$. *Soit μ le noyau de $G^{sc} \to G^{ss}$. On a la suite exacte naturelle de modules galoisiens*

$$0 \to \mu(-1) \to \pi_1(G) \to G^{tor}_* \to 0.$$

Démonstration Soit $1 \to S \to H \to G \to 1$ une résolution flasque de G. Soit P le k-tore quasi-trivial H^{tor}. Notons $T = G^{tor}$. Le diagramme fondamental du paragraphe 3 donne naissance à la suite exacte de k-groupes de type multiplicatif

$$1 \to \mu \to S \to P \to T \to 1.$$

La suite des groupes de caractères associée est la suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to T^* \to S^* \to P^* \to \mu^* \to 0.$$

On peut couper cette suite exacte en deux suites exactes courtes

$$0 \to T^* \to S^* \to R^* \to 0$$

et

$$0 \to R^* \to P^* \to \mu^* \to 0,$$

où R^*, S^*, T^* sont sans $\mathbf{Z}$-torsion, et μ^* est un groupe de torsion.

Appliquant à ces deux suites le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\bullet, \mathbf{Z})$, et combinant les suites exactes courtes obtenues, on obtient une suite exacte naturelle

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}}(\mu^*, \mathbf{Z}) \to \mathrm{Coker}[S_* \to P_*] \to T_* \to 0,$$

soit encore

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}}(\mu^*, \mathbf{Z}) \to \pi_1(G) \to T_* \to 0,$$

La considération de la suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0$$

donne un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mu^*, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}}(\mu^*, \mathbf{Z})$. $\square$

Les deux cas extrêmes de l'énoncé précédent, cas qu'on peut bien sûr établir directement, sont celui où $G = T$ est un k-tore, auquel cas $\pi_1(T) = T_*$ et celui où G est un k-groupe semi-simple, auquel cas $\pi_1(G) = \mu(-1)$. On voit donc que pour G un k-groupe semi-simple, le groupe fondamental algébrique $\pi_1(G)$ diffère du groupe fondamental $\mu = \mathrm{Ker}[G^{sc} \to G]$ par une torsion galoisienne.

Remarque 6.4.1 Soit L/k la plus petite extension (automatiquement) galoisienne déployant (au sens des groupes de type multiplicatif) à la fois G^{tor} et le centre de G^{sc}. On a vu (Remarque 3.1.1) qu'il existe une résolution flasque $1 \to S \to H \to G \to 1$ telle que S et H^{tor} soient déployés par L/k. De la définition de $\pi_1(G)$ il résulte donc que le module galoisien $\pi_1(G)$ est déployé par L. Soit $K \subset L$ la plus petite sous-extension (automatiquement) galoisienne de k déployant le module galoisien $\pi_1(G)$. On n'a pas forcément $K = L$, comme l'on voit déjà en prenant pour G

un descendu à la Weil d'un groupe SL_n. Existe-t-il une résolution flasque $1 \to S \to H \to G \to 1$ telle que S et H^{tor} soient déployés par K/k ?

Proposition 6.5 *Soit G un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si* $\mathrm{car}(k) > 0$.
(i) On a $\pi_1(G) = \pi_1(G^{réd})$.
(ii) Si G est réductif, il est semi-simple si et seulement si $\pi_1(G)$ est fini.
(iii) Le groupe G est simplement connexe si et seulement si $\pi_1(G) = 0$.
(iv) Le groupe $\pi_1(G^{ssu}) = \pi_1(G^{ss})$ s'identifie à la torsion de $\pi_1(G)$.
(v) Le groupe $\pi_1(G)$ est sans torsion si et seulement si G^{ssu} est simplement connexe, si et seulement si G^{ss} est simplement connexe.
(vi) Le k-groupe G est quasi-trivial si et seulement si $\pi_1(G)$ est un module de permutation.
(vii) Le k-groupe G est coflasque si et seulement si $\pi_1(G)$ est un module coflasque.

Démonstration Rappelons que G est quasi-trivial si et seulement si $\mu = 1$ et $T = G^{tor}$ est un k-tore quasi-trivial. De même G est coflasque si et seulement si $\mu = 1$ et $T = G^{tor}$ est un k-tore coflasque. L'énoncé est une conséquence immédiate du diagramme fondamental (§3) et de la proposition 6.4. $\square$

Proposition 6.6 *Soient G_1, G_2, G_3 des k-groupes linéaires connexes, supposés réductifs si* $\mathrm{car}(k) > 0$.
(i) Tout morphisme de k-groupes algébriques $\lambda : G_1 \to G_2$ induit un homomorphisme naturel de modules galoisiens $\lambda_* : \pi_1(G_1) \to \pi_1(G_2)$.
(ii) Si $\lambda : G_1 \to G_2$ et $\mu : G_2 \to G_3$ sont des morphismes de k-groupes algébriques, alors les homomorphismes $(\mu \circ \lambda)_*$ et $\mu_* \circ \lambda_* \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\pi_1(G_1), \pi_1(G_3))$ coïncident.

Démonstration Soit $1 \to S_1 \to H_1 \to G_1 \to 1$ une résolution flasque de G_1 et $1 \to S_2 \to H_2 \to G_2 \to 1$ une résolution flasque de G_2. Soit $E = H_1 \times_{G_2} H_2$ le produit fibré, où l'homomorphisme $H_1 \to G_2$ est le composé de $H_1 \to G_1$ et de $\lambda : G_1 \to G_2$. On a la suite exacte de k-groupes

$$1 \to S_2 \to E \to H_1 \to 1.$$

Comme H_1 est un groupe quasi-trivial et S_2 est un k-tore flasque, cette suite exacte est scindée (voir la démonstration de la proposition 3.2). Il existe donc un diagramme commutatif de morphismes de k-groupes

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & S_1 & \to & H_1 & \to & G_1 & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & S_2 & \to & H_2 & \to & G_2 & \to & 1.
\end{array}$$

Deux choix différents de $H_1 \to H_2$ diffèrent par un k-morphisme de H_1 dans S_2 (par le lemme de Rosenlicht, c'est nécessairement un k-morphisme de groupes algébriques). Le diagramme ci-dessus induit un diagramme commutatif de morphismes de modules galoisiens

$$\begin{array}{ccc}
S_{1*} & \to & H_{1*} \\
\downarrow & & \downarrow \\
S_{2*} & \to & H_{2*}
\end{array}$$

Ceci définit un homomorphisme de modules galoisiens $\pi_1(G_1) \to \pi_1(G_2)$. Comme deux choix différents de $H_1 \to H_2$ induisent des homomorphismes $H_{1*} \to H_{2*}$ qui diffèrent par l'image d'un homomorphisme de H_{1*} dans S_{2*}, on voit que cet homomorphisme est indépendant du choix de $H_1 \to H_2$. Que l'homomorphisme ne dépende pas du choix des deux résolutions a déjà été établi (voir la définition 6.1). Ceci établit la proposition. $\square$

Proposition 6.7 *Soit G un k-groupe réductif. Soit $n > 0$ un entier inversible dans k. On a un isomorphisme naturel $H^1(\overline{G}, \mu_n) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(G), \mathbf{Z}/n)$.*

Démonstration Soit $1 \to S \to H \to G \to 1$ une résolution flasque de G. Notons p l'homomorphisme $H \to G$. Soit P le k-tore quasi-trivial H^{tor}. De la proposition 6.2 on tire l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(G), \mathbf{Z}/n) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ker}[P^*/n \to S^*/n],$$

soit encore

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(G), \mathbf{Z}/n) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ker}[H^*/n \to S^*/n],$$

compte tenu de l'isomorphisme $P^* \xrightarrow{\simeq} H^*$ (conséquence de **0.5**).

De la suite exacte

$$1 \to S \to H \to G \to 1$$

on tire la suite exacte de faisceaux étales sur G :

$$1 \to \mathbf{G}_{m,G} \to p_*\mathbf{G}_{m,H} \to S^* \to 1$$

([CTSa87b], Prop. 1.4.2 p. 383). Localement pour la topologie étale sur G, la fibration $H \to G$ s'identifie à un tore déployé au-dessus d'un schéma régulier. On a donc $R^1p_*(\mathbf{G}_{m,H}) = 0$. Le lemme du serpent appliqué à la multiplication par n sur la suite exacte ci-dessus donne donc un isomorphisme

$$R^1p_*\mu_n \xrightarrow{\simeq} S^*/n.$$

On a par ailleurs de façon évidente $\mu_{n,G} \xrightarrow{\simeq} p_*\mu_{n,H}$. La suite des termes de bas degré de la suite spectrale de Leray pour le morphisme p et le faisceau $\mu_{n,H}$, sur $\overline{k}$, s'écrit donc

$$0 \to H^1(\overline{G}, \mu_n) \to H^1(\overline{H}, \mu_n) \to S^*/n.$$

On a $\mathrm{Pic}(\overline{H}) = 0$ et $P^* \xrightarrow{\simeq} H^*$. De la suite de Kummer sur $\overline{H}$ on déduit donc un isomorphisme naturel $H^*/n \xrightarrow{\simeq} H^1(\overline{H}, \mu_n)$. On a donc

$$H^1(\overline{G}, \mu_n) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ker}[H^*/n \to S^*/n]$$

ce qui établit la proposition. $\square$

Remarque 6.7.1 Supposons k de caractéristique nulle. On sait ([Mi72], Thm. 1) que le groupe fondamental de Grothendieck $\pi_1^{Groth}(\overline{G})$ est un groupe profini *abélien* (noter que le "groupe fondamental algébrique" qui intervient dans le titre de l'article de Miyanishi est le groupe fondamental de Grothendieck, ce n'est pas le groupe fondamental algébrique considéré ici). La proposition ci-dessus implique que le module galoisien

$$\pi_1^{Groth}(\overline{G})(-1) = \mathrm{Hom}(\hat{\mathbf{Z}}(1), \pi_1^{Groth}(\overline{G}))$$

est naturellement le complété profini du module galoisien de type fini $\pi_1(G)$ défini ici.

Proposition 6.8 *Soit k un corps de caractéristique nulle. Si $1 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 1$ est une suite exacte de k-groupes linéaires connexes, on a une suite exacte courte induite de modules galoisiens*

$$0 \to \pi_1(G_1) \to \pi_1(G_2) \to \pi_1(G_3) \to 0.$$

Démonstration D'après **0.5**, on a la suite exacte naturelle

$$0 \to G_3^* \to G_2^* \to G_1^* \to \mathrm{Pic}(\overline{G}_3) \to \mathrm{Pic}(\overline{G}_2) \to \mathrm{Pic}(\overline{G}_1) \to 0.$$

On a $T_i^* \stackrel{\simeq}{\to} G_i^*$, où $T_i = G_i^{tor}$, et on a $\mu_i^* \stackrel{\simeq}{\to} \mathrm{Pic}(\overline{G}_i^{ss}) \simeq \mathrm{Pic}(\overline{G}_i)$, ceci de façon fonctorielle. Le groupe $\mathrm{Pic}(\overline{G}_3)$ étant fini, on voit que la flèche naturelle $T_{1*} \to T_{2*}$ est injective. Par ailleurs, la flèche $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mu_1^*, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mu_2^*, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, qui s'identifie à la flèche naturelle $\mu_1(-1) \to \mu_2(-1)$, est injective. On vérifie facilement qu'un diagramme de résolutions flasques

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & S_1 & \to & H_1 & \to & G_1 & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & S_2 & \to & H_2 & \to & G_2 & \to & 1 \end{array}$$

comme considéré à la proposition 6.6 induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mu_1(-1) & \to & \mathrm{Coker}[S_{1*} \to P_{1*}] & \to & T_{1*} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mu_2(-1) & \to & \mathrm{Coker}[S_{2*} \to P_{2*}] & \to & T_{2*} & \to & 0. \end{array}$$

Comme les flèches verticales de gauche et de droite sont injectives, on conclut que la flèche médiane, c'est-à-dire $\pi_1(G_1) \to \pi_1(G_2)$, est injective.

Soit p l'homomorphisme : $G_2 \to G_3$. Soit $n > 0$ un entier. On vérifie que l'on a des isomorphismes naturels de faisceaux étales sur $\overline{G}_3$: $\mathbf{Z}/n \stackrel{\simeq}{\to} p_*\mathbf{Z}/n$ et $H^1(\overline{G}_1, \mathbf{Z}/n) \stackrel{\simeq}{\leftarrow} R^1 p_* \mathbf{Z}/n$, où les termes de gauche sont "constants", i.e. proviennent de faisceaux sur k. La suite exacte

$$0 \to H^1(\overline{G}_3, p_*\mathbf{Z}/n) \to H^1(\overline{G}_2, \mathbf{Z}/n) \to H^0(\overline{G}_3, R^1 p_* \mathbf{Z}/n)$$

des termes de bas degré de la suite spectrale de Leray pour $\overline{p}$ s'écrit donc

$$0 \to H^1(\overline{G}_3, \mathbf{Z}/n) \to H^1(\overline{G}_2, \mathbf{Z}/n) \to H^1(\overline{G}_1, \mathbf{Z}/n).$$

Pour établir qu'un complexe (borné) $A^\bullet$ de groupes abéliens de type fini est exact, il suffit de voir que le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(A^\bullet, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est exact, et pour cela il suffit de montrer que pour tout entier positif n, le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(A^\bullet, \mathbf{Z}/n)$ est exact. Combinant ceci avec la proposition 6.7, on voit que le complexe

$$\pi_1(G_1) \to \pi_1(G_2) \to \pi_1(G_3) \to 0$$

est exact. Comme on a établi ci-dessus l'injectivité de $\pi_1(G_1) \to \pi_1(G_2)$, ceci achève la démonstration. $\square$

Remarque 6.8.1 Pour le groupe $\pi_1^{Bor}(G)$, la proposition ci-dessus est énoncée dans [Bo98] (Lemma 1.5).

§7. Groupe de Brauer d'une compactification lisse

Etant donnés k un corps et X une k-variété algébrique, on pose

$$\mathrm{Br}_1(X) = \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{X})].$$

Théorème 7.1 *Soient k un corps et G un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si $p = \mathrm{car}(k) > 0$. Soit X une k-compactification lisse de G et soit $1 \to S \to H \to G \to 1$ une résolution flasque du k-groupe G. On a alors*

$$\mathrm{Br}_1(X)/\mathrm{Br}(k) \stackrel{\simeq}{\to} H^1(k, S^*).$$

Le groupe $H^1(k, S^*)$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$, le quotient étant un groupe de torsion p-primaire.

Démonstration Le premier isomorphisme résulte de la proposition 5.2 et de la formule $\mathrm{Br}_1(X)/\mathrm{Br}(k) \stackrel{\simeq}{\to} H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$, valable pour toute k-variété projective lisse géométriquement intègre possédant un k-point. La $\overline{k}$-variété $\overline{G}$ est $\overline{k}$-birationnelle à un espace affine. La $\overline{k}$-variété projective, lisse, connexe $\overline{X}$ est donc $\overline{k}$-birationnelle à un espace projectif $\mathbf{P}^n_{\overline{k}}$. On sait que la partie première à la caractéristique du groupe de Brauer est un invariant birationnel des variétés projectives, lisses, connexes ([Gr68]) et que le groupe de Brauer de $\mathbf{P}^n_{\overline{k}}$ est trivial ([Gr68]). Ainsi $\mathrm{Br}(\overline{X})$ est nul si $\mathrm{car}(k) = 0$ et il est de torsion p-primaire si $p = \mathrm{car}(k) > 0$. Ceci achève d'établir l'énoncé. $\square$

Soit $\mathfrak{g}$ le groupe de Galois de $\overline{k}$ sur k. A tout $\mathfrak{g}$-module continu M et tout entier naturel i on associe le groupe

$$Ш^i_\omega(k, M) = \mathrm{Ker}[H^i(\mathfrak{g}, M) \to \prod_{\mathfrak{h}} H^i(\mathfrak{h}, M)],$$

où $\mathfrak{h}$ parcourt les sous-groupes fermés procycliques de $\mathfrak{g}$. Avec la définition de Borovoi du groupe fondamental algébrique, l'énoncé suivant a été établi par Borovoi et Kunyavskiĭ [BoKu00].

Théorème 7.2 *Soient k un corps et G un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si $p = \mathrm{car}(k) > 0$. Soit X une k-compactification lisse de G. On a*

$$\mathrm{Br}_1(X)/\mathrm{Br}(k) \simeq Ш^1_\omega(k, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})).$$

Le groupe $Ш^1_\omega(k, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}))$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$, le quotient étant un groupe de torsion p-primaire.

Démonstration Soit $1 \to S \to H \to G \to 1$ une résolution flasque de G. Soit P le k-tore quasi-trivial H^{tor}. D'après la définition de $\pi_1(G)$, on a la suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to S_* \to P_* \to \pi_1(G) \to 0.$$

Appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\bullet, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, on en déduit la suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to P^* \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to S^* \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to 0$$

(le groupe abélien $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est injectif). Ceci donne naissance à la suite exacte de groupes abéliens

$$(P^* \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z}))^{\mathfrak{g}} \to (S^* \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z}))^{\mathfrak{g}} \to H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})) \to H^1(\mathfrak{g}, P^* \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})).$$

Tensorisant la suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0$$

par P^* et par S^*, et prenant la suite de cohomologie associée, on obtient le diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
(P^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})^{\mathfrak{g}} & \to & (P^* \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z}))^{\mathfrak{g}} & \to & H^1(\mathfrak{g}, P^*) & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
(S^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})^{\mathfrak{g}} & \to & (S^* \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z}))^{\mathfrak{g}} & \to & H^1(\mathfrak{g}, S^*) & \to & 0.
\end{array}$$

La flèche $P^* \to S^*$ a un conoyau fini (Proposition 3.3). Ainsi la flèche induite $P^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \to S^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ est surjective, et il en est donc aussi ainsi de $(P^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})^{\mathfrak{g}} \to (S^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})^{\mathfrak{g}}$. Par ailleurs $H^1(\mathfrak{g}, P^*) = 0$. Ceci implique que le conoyau de la flèche $(P^* \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z}))^{\mathfrak{g}} \to (S^* \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z}))^{\mathfrak{g}}$ s'identifie à $H^1(\mathfrak{g}, S^*)$, on a donc la suite exacte

$$0 \to H^1(\mathfrak{g}, S^*) \to H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})) \to H^1(\mathfrak{g}, P^* \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})).$$

On a des suites exactes compatibles en remplaçant $\mathfrak{g}$ par tout sous-groupe fermé, en particulier tout sous-groupe fermé procyclique $\mathfrak{h}$. On a donc une suite exacte induite

$$0 \to Ш^1_{\omega}(\mathfrak{g}, S^*) \to Ш^1_{\omega}(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})) \to Ш^1_{\omega}(\mathfrak{g}, P^* \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})).$$

Comme S^* est flasque, on a $H^1(\mathfrak{h}, S^*) = 0$ pour tout sous-groupe fermé procyclique, donc $Ш^1_{\omega}(\mathfrak{g}, S^*) = H^1(\mathfrak{g}, S^*)$. Par ailleurs, comme P^* est un module de permutation, on a $Ш^1_{\omega}(\mathfrak{g}, P^* \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})) = 0$ (ceci est clair pour $P = \mathbf{Z}$, et se ramène à ce cas par le lemme de Shapiro). On a donc bien

$$H^1(\mathfrak{g}, S^*) \xrightarrow{\simeq} Ш^1_{\omega}(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})),$$

ce qui compte tenu du théorème 7.1 établit le théorème. $\square$

Remarques 7.2.1

(1) A la torsion p-primaire près, on calcule donc le groupe de Brauer d'une compactification lisse de G, et donc le groupe de Brauer non ramifié du corps des fonctions $k(G)$ sans avoir à construire une compactification lisse explicite. Il serait intéressant de donner une démonstration directe du fait que le groupe de Brauer non ramifié de $k(G)$ est donné par les formules des théorèmes 7.1 et 7.2.

(2) Des cas particuliers des théorèmes 7.1 et 7.2 avaient été établis par Sansuc [Sa81] pour k un corps de nombres. Pour $G = T$ un k-tore, le théorème 7.2 se lit $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \simeq Ш^2_{\omega}(k, T^*)$ (à la torsion p-primaire près). Cet énoncé avait été établi dans [CTSa87a]. Pour un k-groupe semi-simple G de groupe fondamental $\mu = \mathrm{Ker}[G^{sc} \to G]$, le théorème 7.2 se lit $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \simeq Ш^1_{\omega}(k, \mu^*)$ (à la torsion p-primaire près). Cet énoncé est établi dans [CTKu98] sur un corps k de caractéristique nulle quelconque, par un argument assez détourné (recours aux corps finis).

(3) Pour la comparaison entre les résultats ci-dessus et les résultats de Borovoi et Kunyavskiĭ [BoKu00, BoKu04], voir les remarques 6.2.1 et l'appendice A.

§8. Cohomologie galoisienne des groupes linéaires connexes

Dans ce paragraphe et le suivant, étant donné un k-groupe linéaire lisse connexe, nous cherchons à déterminer le groupe $G(k)/R$ et l'ensemble $H^1(k, G)$. Pour les notions de base sur la R-équivalence sur un groupe algébrique, le lecteur consultera [CTSa77] et [Gi97]. En caractéristique zéro, la suite exacte

$$1 \to G^u \to G \to G^{réd} \to 1$$

induit une bijection $G(k)/R \xrightarrow{\simeq} G^{réd}(k)/R$ et une bijection $H^1(k,G) \xrightarrow{\simeq} H^1(k,G^{réd})$. Le premier énoncé résulte simplement du fait que G^u est un espace affine et que de la suite ci-dessus on tire un isomorphisme de k-variétés $G^u \times G^{réd} \simeq G$. Pour le second énoncé, voir [Sa81], Lemme 1.13 p. 20.

On se limitera donc dans la suite à considérer le cas où G est un k-groupe réductif.

Soit G un k-groupe réductif. Soit

$$1 \to S \to H \to G \to 1$$

une résolution flasque de G, avec H^{ss} simplement connexe et H^{tor} quasi-trivial :

$$1 \to H^{ss} \to H \to H^{tor} \to 1.$$

Comme S est central dans H, cette suite exacte donne naissance à une suite exacte de groupes

$$1 \to S(k) \to H(k) \to G(k) \to H^1(k,S)$$

qui s'insère dans une suite exacte d'ensembles pointés de cohomologie galoisienne

$$1 \to S(k) \to H(k) \to G(k) \to H^1(k,S) \to H^1(k,H) \to H^1(k,G) \to H^2(k,S) \quad (8.1)$$

On peut préciser les fibres des applications (Serre, [SeCG], chap. I, §5). En particulier toute fibre de l'application $H^1(k,G) \to H^2(k,S)$ est soit vide soit un quotient d'un ensemble $H^1(k,{}_cH)$ par une action de $H^1(k,S)$, le groupe ${}_cH$ étant un groupe obtenu par torsion de H, et dont on vérifie qu'il est comme H quasi-trivial.

On a en outre la suite exacte de groupes

$$1 \to H^{ss}(k) \to H(k) \to H^{tor}(k)$$

qui s'insère dans la suite exacte d'ensembles pointés

$$1 \to H^{ss}(k) \to H(k) \to H^{tor}(k) \to H^1(k,H^{ss}) \to H^1(k,H) \to H^1(k,H^{tor})$$

qui compte tenu du théorème 90 de Hilbert donne la suite exacte d'ensembles pointés

$$1 \to H^{ss}(k) \to H(k) \to H^{tor}(k) \to H^1(k,H^{ss}) \to H^1(k,H) \to 1 \quad (8.2)$$

Théorème 8.1 *Soit k un corps.*

(i) Une résolution flasque $1 \to S \to H \to G \to 1$ d'un k-groupe réductif G induit une suite exacte de groupes

$$H(k)/R \to G(k)/R \to \mathrm{Ker}[H^1(k,S) \to H^1(k,H)] \to 1.$$

(ii) Le quotient de $G(k)/R$ par l'image de $H(k)$, c'est-à-dire l'image de $G(k)$ dans $H^1(k,S)$, est un quotient abélien de $G(k)/R$ qui ne dépend pas de la résolution flasque choisie.

(iii) Si k est un corps de type fini sur le corps premier, ou si k est un corps de type fini sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, alors ce quotient est fini.

Démonstration Considérons la suite exacte (8.1). Comme le k-tore S est flasque, l'application $G(k) \to H^1(k,S)$ passe au quotient par la R-équivalence ([CTSa77], Prop. 12). La R-équivalence étant fonctorielle, l'homomorphisme $H(k) \to G(k)$ induit un homomorphisme $H(k)/R \to G(k)/R$. Ceci donne la suite exacte du (i).

Soient $1 \to S \to H \to G \to 1$ et $1 \to S_1 \to H_1 \to G \to 1$ deux résolutions flasques de G. Les projections du produit fibré $E = H \times_G H_1$ sur H et sur H_1 admettent des sections (§3). Ainsi le quotient de $G(k)$ par l'image de $H(k)$ et le quotient de $G(k)$ par l'image de $H_1(k)$ coïncident tous deux avec le quotient de $G(k)$ par l'image de $E(k)$. Ceci établit le point (ii).

La finitude énoncée en (iii) résulte de la finitude de $H^1(k,S)$ pour S un k-tore flasque et k comme dans l'énoncé ([CTSa77] ; [CTGiPa04, Thm. 3.4]). □

Remarque 8.1.1 Pour k de type fini sur le corps premier et G/k réductif, c'est un problème ouvert de savoir si le groupe $G(k)/R$ est fini. La proposition ci-dessus ramène le problème au cas où G est un groupe réductif quasi-trivial. La suite exacte (8.2) ne semble pas permettre de réduire le problème au seul cas des groupes semi-simples simplement connexes.

Pour k corps de nombres ou k corps local et G semi-simple simplement connexe ou adjoint, le quotient $G(F)/R$ peut être non trivial pour F/k extension (transcendante) convenable. Pour le cas simplement connexe, voir Merkur'ev [Me93]. Pour le cas adjoint, voir Merkur'ev [Me96]. A noter que dans ces deux cas, on peut montrer que pour toute résolution flasque $1 \to S \to H \to G \to 1$ et toute extension de corps F/k, on a $H^1(F,S) = 0$ (voir [CTGiPa04], Cor. 4.11).

Proposition 8.2 *Soient k un corps, X un k-schéma et G un k-groupe linéaire connexe, supposé réductif si* $\mathrm{car}(k) > 0$. *Soit*

$$1 \to S \to H \to G \to 1$$

une résolution flasque de G, et soit $P = H^{tor}$. Une telle résolution induit une application naturelle

$$H^1(X,G) \to \mathrm{Ker}[H^2(X,S) \to H^2(X,P)].$$

Il existe un homomorphisme naturel

$$\mathrm{Ker}[H^2(X,S) \to H^2(X,P)] \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(G), \mathrm{Br}(X)).$$

L'application naturelle composée

$$H^1(X,G) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(G), \mathrm{Br}(X))$$

ne dépend pas du choix de la résolution flasque.

Démonstration On a le diagramme commutatif de suites exactes de k-groupes algébriques

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & S & \to & H & \to & G & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & M & \to & P & \to & T & \to & 1,
\end{array}$$

où $T = G^{tor}$ et $P = H^{tor}$. Soit X un k-schéma. De ce diagramme on déduit (en passant par $H^1(X,T)$) que la flèche naturelle $H^1(X,G) \to H^2(X,S)$ a son image dans le noyau de $H^2(X,S) \to H^2(X,P)$.

D'après la proposition 3.3, la résolution flasque induit une suite exacte

$$(P^*)^{\mathfrak{g}} \to (S^*)^{\mathfrak{g}} \to \mathrm{Pic}(G) \to 0,$$

où la flèche $(S^*)^{\mathfrak{g}} \to \mathrm{Pic}(G)$ admet la description simple suivante : la donnée d'un caractère $S \to \mathbf{G}_{m,k}$ associe à l'extension donnée par la résolution flasque une extension de G par $\mathbf{G}_{m,k}$, donc un élément de $\mathrm{Ext}_{k-gp}(G, \mathbf{G}_{m,k})$, groupe qui s'envoie (de façon isomorphique, voir le corollaire 5.7) vers $\mathrm{Pic}(G)$ par l'application d'oubli évidente.

Le diagramme d'accouplements

$$\begin{array}{ccccc}
H^2(X,S) & \times & (S^*)^{\mathfrak{g}} & \to & \mathrm{Br}(X) \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow = \\
H^2(X,P) & \times & (P^*)^{\mathfrak{g}} & \to & \mathrm{Br}(X)
\end{array}$$

étant clairement commutatif, on en déduit un accouplement entre le noyau de $H^2(X,S) \to H^2(X,P)$ et le conoyau de $(P^*)^{\mathfrak{g}} \to (S^*)^{\mathfrak{g}}$, conoyau dont on vient de rappeler qu'il s'identifie à $\mathrm{Pic}(G)$. On a donc une application induite

$$H^1(X,G) \times \mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Br}(X).$$

Cette application est induite par l'accouplement évident

$$H^1(X,G) \times \mathrm{Ext}_{k-gp}(G, \mathbf{G}_{m,k}) \to \mathrm{Br}(X).$$

Elle est donc indépendante de la résolution flasque de G. $\square$

Remarque Sur une k-variété lisse X, l'existence d'une application naturelle

$$H^1(X,G) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(G), \mathrm{Br}(X))$$

est déjà établie par Sansuc ([Sa81], Prop. 6.10). Il montre en effet que la donnée d'un torseur Y sur une telle k-variété X sous le k-groupe G définit un homomorphisme $\mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Br}(X)$. Comme la suite est "naturelle", deux G-torseurs isomorphes donnent naissance à la même application $\mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Br}(X)$. Ceci donne bien une application $H^1(X,G) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(G), \mathrm{Br}(X))$.

Proposition 8.3 *Soient k un corps et G un k-groupe réductif. Soit*

$$1 \to S \to H \to G \to 1$$

une résolution flasque de G. Soit $P = H^{tor}$. Une telle résolution induit une application

$$H^1(k,G) \to \mathrm{Ker}[H^2(k,S) \to H^2(k,P)]$$

dont toute fibre est vide ou est un quotient d'un ensemble $H^1(k, {}_cH^{ss})$ pour un k-groupe semi-simple simplement connexe ${}_cH^{ss}$ convenable.

Par ailleurs une telle résolution induit un complexe d'ensembles pointés

$$H^1(k, H^{ss}) \to H^1(k,G) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(G), \mathrm{Br}(k)).$$

Démonstration L'énoncé résulte des suites (8.1) et (8.2) et de la proposition 8.2. $\square$

Le théorème suivant repose sur un grand nombre de résultats antérieurs. En particulier, il utilise et étend des résultats de [Gi97], [CTGiPa04] et [BoKu04].

Théorème 8.4 *Soit k un corps de caractéristique nulle, de dimension cohomologique ≤ 2, tel que sur toute extension finie K de k, indice et exposant des K-algèbres simples centrales coïncident. On suppose en outre que la dimension cohomologique de l'extension abélienne maximale de k est ≤ 1 (cette hypothèse n'est requise qu'en présence de facteurs de type E_8.) Soit $1 \to S \to H \to G \to 1$ une résolution flasque d'un k-groupe réductif G.*

(i) Cette résolution induit un isomorphisme $G(k)/R \xrightarrow{\simeq} H^1(k,S)$.

(ii) Cette résolution induit une bijection $H^1(k,G) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ker}[H^2(k,S) \to H^2(k,P)]$.

Démonstration Pour k comme dans l'énoncé et H un k-groupe semi-simple simplement connexe, on a $H^1(k,H) = 1$. On renvoie à [CTGiPa04], Thm. 1.2, pour l'historique de la démonstration de ce résultat. Pour H un k-groupe quasi-trivial, donc extension du k-tore quasi-trivial H^{tor} par le k-groupe semi-simple simplement connexe H^{ss}, l'énoncé $H^1(k,H) = 1$ résulte alors de la suite exacte (8.2).

Pour H un k-groupe semi-simple simplement connexe et k comme ci-dessus, $H(k)/R = 1$. On trouvera dans [CTGiPa04], Thm. 4.5, la démonstration de ce résultat ainsi qu'un historique. C'est un théorème délicat de Philippe Gille ([Gi01], appendice de [BoKu04]) qu'une suite exacte de k-groupes réductifs

$$1 \to H_1 \to H \to T \to 1$$

avec H_1 semi-simple simplement connexe et T un k-tore, et k comme dans l'énoncé ci-dessus, induit une suite exacte

$$H_1(k)/R \to H(k)/R \to T(k)/R \to 1.$$

Si le tore T est quasi-trivial, on a $T(k)/R = 1$. Ainsi pour H quasi-trivial sur k comme ci-dessus, on a $H(k)/R = 1$. L'énoncé (i) résulte alors du théorème 8.1.

L'énoncé (ii) est une variante d'un théorème de Borovoi et Kunyavskiĭ ([BoKu04], théorème 6.7). L'injectivité de l'application $H^1(k,G) \to \mathrm{Ker}[H^2(k,S) \to H^2(k,P)]$ résulte de la proposition 8.3 et de la trivialité des ensembles $H^1(k,H_1)$ pour tout k-groupe semi-simple simplement connexe H_1. Indiquons les points-clés utilisés pour établir la surjectivité. Pour k comme dans le théorème et G un k-groupe semi-simple, le théorème 2.1 de [CTGiPa04] établit que la flèche $H^1(k,G) \to H^2(k,\mu)$ déduite de la suite naturelle $1 \to \mu \to G^{sc} \to G \to 1$ est une bijection. Une variante d'un argument de Borovoi ([Bo93], Thm. 5.5) permet alors d'en déduire que pour k comme ci-dessus et $L = (\overline{H}, \kappa)$ un k-lien avec $\overline{H}$ un $\overline{k}$-groupe semi-simple, tout élément de l'ensemble de cohomologie $H^2(k,L)$ est neutre ([CTGiPa04], Prop. 5.4, noter que pour un tel $\overline{H}$ on a $\overline{H}^{tor} = 1$). Pour terminer la démonstration, on suit alors la démonstration du §6 de [BoKu04], qui passe par la cohomologie de modules croisés, et on utilise l'appendice A ci-dessous, qui permet de comparer l'application $H^1(k,G) \to \mathrm{Ker}[H^2(k,S) \to H^2(k,P)]$ avec la flèche $H^1(k,G) \to H^1_{ab}(k,G)$ de Borovoi. □

Remarques 8.4.1

(1) L'énoncé (i) est déjà établi dans [CT05] (Théorème 3 et remarque subséquente).

(2) De l'énoncé (ii) et du diagramme fondamental (§3) on peut déduire le théorème 2.1 de [CTGiPa04], utilisé dans la démonstration ci-dessus. Mais partant de ce diagramme et du théorème 2.1 de [CTGiPa04], je n'ai pas réussi à donner une démonstration de l'énoncé (ii) évitant le recours à la cohomologie des modules croisés, comme introduite par Borovoi dans [Bo 98] et appliquée dans [BoKu04].

(3) Rappelons que les hypothèses du théorème 8.4 sont satisfaites dans chacun des cas suivants (voir [CTGiPa04] et [BoKu04]) :

– Corps p-adique.

– Corps de nombres totalement imaginaire.

– Corps de type (ll) : k est le corps des fractions d'un anneau local intègre strictement hensélien de dimension 2 et de corps résiduel (algébriquement clos) de caractéristique 0. (Exemple : une extension finie du corps $\mathbf{C}((x,y))$ quotient de l'anneau des séries formelles à deux variables.)

– Corps de type (gl) : Un corps k de fonctions de deux variables sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0 est de dimension cohomologique 2 ; l'hypothèse indice/exposant est satisfaite (théorème de de Jong [dJ04]). On ne connaît pas dans ce dernier cas la dimension cohomologique de l'extension abélienne maximale de k, mais l'hypothèse qu'elle est au plus 1 n'est utilisée dans le théorème ci-dessus que lorsque G possède un facteur de type E_8.

(4) Dans chacun des cas mentionnés dans la remarque précédente, le groupe $H^1(k,S)$ est fini pour S un k-tore flasque (voir [CTGiPa04], Thm. 3.4), donc dans chacun de ces cas le groupe quotient $G(k)/R$ est fini.

(5) Une fois le théorème 8.4 établi, il est facile d'en déduire de façon un peu plus fonctorielle, sur les corps géométriques mentionnés ci-dessus, la généralisation des résultats de [CTGiPa04] obtenue dans [BoKu04] (§5, contrôle de l'approximation faible sur un corps de type (ll) ou (gl) ; §7, contrôle du défaut du principe de Hasse sur un corps de type (ll)).

Proposition 8.5 *Soit k un corps de caractéristique nulle, de dimension cohomologique ≤ 2, tel que sur toute extension finie K de k, indice et exposant coïncident pour les K-algèbres simples centrales. Soit G un k-groupe réductif. Si G contient des facteurs de type E_8, supposons que la dimension cohomologique de l'extension abélienne maximale de k est au plus 1. Si un espace homogène principal X de G possède un zéro-cycle de degré 1, alors il possède un point k-rationnel.*

Démonstration Soit

$$1 \to S \to H \to G \to 1$$

une résolution flasque de G. Soit $[X] \in H^1(k,G)$ la classe de l'espace homogène principal X. Si X possède un zéro-cycle de degré 1, il existe des extensions finies k_i/k, de degrés premiers entre eux dans leur ensemble, telles que $[X]$ ait une image triviale dans $H^1(k_i,G)$. On conclut que l'image de $[X]$ dans $H^2(k,S)$ devient triviale dans les groupes $H^2(k_i,S)$. Comme S est commutatif, ceci implique (argument de norme) que l'image de $[X]$ dans $H^2(k,S)$ est nulle. D'après la proposition 8.3, $[X]$ est donc dans l'image de $H^1(k,H^{ss})$ dans $H^1(k,G)$. Mais les hypothèses sur k assurent $H^1(k,H^{ss})=1$. Ainsi $[X]=1 \in H^1(k,G)$. □

Remarque 8.5.1 L'énoncé précédent s'applique aux corps de nombres totalement imaginaires. Sur un corps de nombres k qui admet un plongement réel, le même énoncé vaut (sans restriction sur les facteurs de type E_8). On utilise le fait que $S(k)$ est dense dans le produit des $S(k_v)$ pour v parcourant les places réelles, et que l'application $H^1(k,H) \to \prod_{v \text{ réelle}} H^1(k_v,H)$ est une bijection (Prop. 9.2 (iii) ci-dessous).

§9. Cohomologie galoisienne des groupes réductifs sur un corps de nombres

Le théorème 8.4 permet de retrouver un grand nombre de résultats classiques sur les corps p-adiques et les corps de nombres totalement imaginaires. Dans ce paragraphe nous discutons aussi le cas d'un corps de nombres arbitraire. Pour les raisons données au début du §8, on peut se limiter au cas des groupes réductifs.

Théorème 9.1 *Soient k un corps local de caractéristique nulle, G un k-groupe réductif et $1 \to S \to H \to G \to 1$ une résolution flasque de G. Une telle résolution induit :*

(i) un isomorphisme de groupes abéliens $G(k)/R \xrightarrow{\simeq} H^1(k,S)$;

(ii) si k est local non archimédien une bijection

$$H^1(k,G) \stackrel{\simeq}{\to} \mathrm{Ker}[H^2(k,S) \to H^2(k,P)]$$

et des bijections

$$H^1(k,G) \stackrel{\simeq}{\to} \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq (\pi_1(G)_{\mathfrak{g}})_{tors};$$

(iii) si k est réel, une surjection

$$H^1(k,G) \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}[H^2(k,S) \to H^2(k,P)]$$

et une application

$$H^1(k,G) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq (\pi_1(G)_{\mathfrak{g}})_{tors}.$$

Dans (ii) et (iii) l'application $H^1(k,G) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est indépendante du choix de la résolution flasque de G.

Démonstration L'énoncé (i) pour k non archimédien est un cas particulier du théorème 8.4 (i). Si k est réel, tout k-tore flasque est quasi-trivial, et pour tout k-tore T on a $T(k)/R = 1$. Ceci implique $G(k)/R = 1$ et $H^1(k,S) = 1$.

Pour k non archimédien, la bijection $H^1(k,G) \stackrel{\simeq}{\to} \mathrm{Ker}[H^2(k,S) \to H^2(k,P)]$ est un cas particulier du théorème 8.4 (ii). Combinant la proposition 3.3, les théorèmes de dualité du corps de classes local pour la cohomologie des tores ([SeCG], Chap. II, §5.8) et la finitude du groupe $\mathrm{Pic}(G)$, on obtient l'isomorphisme

$$\mathrm{Ker}[H^2(k,S) \to H^2(k,P)] \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

L'isomorphisme $\mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq (\pi_1(G)_{\mathfrak{g}})_{tors}$ est un fait général, valable sur tout corps, il a fait l'objet de la proposition 6.3.

Supposons k réel. En utilisant le diagramme fondamental (§3) et un k-tore $T_G \subset G$ tel que $T_{G^{ss}}$ soit un "tore fondamental" (voir [Bo98] §5.3), on établit que l'application $H^1(k,G) \to \mathrm{Ker}[H^2(k,S) \to H^2(k,P)]$ est surjective. Par la dualité locale sur les réels ([MiADT], Chap. I, Thm. 2.13), le groupe fini $\mathrm{Ker}[H^2(k,S) \to H^2(k,P)]$ est dual du groupe $\mathrm{Coker}[\hat{H}^0(\mathfrak{g},P^*) \to \hat{H}^0(\mathfrak{g},S^*)]$, où ici $\mathfrak{g} = \mathbf{Z}/2$. De la proposition 3.3 on déduit que le groupe $\mathrm{Ker}[H^2(k,S) \to H^2(k,P)]$ est un sous-groupe de $\mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(G), \mathbf{Z}/2) \subset \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

La dernière assertion de l'énoncé résulte de la proposition 8.2 et de sa démonstration. La flèche $H^1(k,G) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est en effet induite par l'accouplement naturel $H^1(k,G) \times \mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Br}(k)$ combiné avec le plongement $\mathrm{Br}(k) \hookrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ donné par la théorie du corps de classes local. □

Remarque 9.1.1 L'énoncé 9.1 (ii) est une variante d'un résultat de Kottwitz [Ko84, Prop. 6.4] [Ko86, Thm. 1.2] et de Borovoi [Bo98, Cor. 5.5 (i)]. L'énoncé 9.1 (iii) est une variante d'un résultat de Kottwitz [Ko86, Thm. 1.2] et de Borovoi [Bo98, Cor. 5.5 (ii)].

Proposition 9.2 *Soient k un corps de nombres et H un k-groupe réductif quasi-trivial. Alors*
(i) On a $H^1(k_v,H) = 1$ pour v place non réelle ;
(ii) L'approximation faible vaut pour H ;
(iii) On a $H^1(k,H) \stackrel{\simeq}{\to} \prod_{v \text{ réelle}} H^1(k_v,H)$.

Démonstration Soit $1 \to H^{ss} \to H \to P \to 1$ la suite canonique attachée à H, avec H^{ss} semi-simple simplement connexe et P un k-tore quasi-trivial.

L'assertion (i) résulte immédiatement de la suite exacte d'ensembles pointés

$$H^1(k_v,H^{ss}) \to H^1(k_v,H) \to H^1(k_v,P),$$

où $H^1(k_v,P)=0$ car P est un tore quasi-trivial, et $H^1(k_v,H^{ss})=1$ pour v place non réelle d'après Kneser et Tits.

Soit Σ un ensemble fini de places de k, dont on peut supposer qu'il contient les places réelles. On a alors un diagramme commutatif de suites exactes d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccccccc}
H^{ss}(k) & \to & H(k) & \to & P(k) & \to & H^1(k,H^{ss}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\prod_{v\in\Sigma} H^{ss}(k_v) & \to & \prod_{v\in\Sigma} H(k_v) & \to & \prod_{v\in\Sigma} P(k_v) & \to & \prod_{v\in\Sigma} H^1(k_v,H^{ss})
\end{array}$$

D'après Kneser, Harder et Chernousov, on a une bijection d'ensembles finis

$$H^1(k,H^{ss}) \stackrel{\simeq}{\to} \prod_{v\ réelle} H^1(k_v,H^{ss}) = \prod_{v\in\Sigma} H^1(k_v,H^{ss}).$$

D'après Kneser et Platonov, tout k-groupe semi-simple simplement connexe satisfait l'approximation faible. Le tore quasi-trivial P satisfait l'approximation faible. Enfin chaque application $H(k_v)\to P(k_v)$ est ouverte, puisque $H\to P$ est lisse. Une chasse au diagramme facile montre alors que $H(k)$ est dense dans $\prod_{v\in\Sigma} H(k_v)$, ce qui établit le point (ii).

Pour tout corps F contenant k, on a la suite exacte d'ensembles pointés

$$P(F)\to H^1(F,H^{ss})\to H^1(F,H)\to H^1(F,P),$$

où $P(F)$ agit sur $H^1(F,H^{ss})$. Comme P est quasi-trivial, on a $H^1(F,P)=0$. On a donc le diagramme de suites exactes d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccccccc}
P(k) & \to & H^1(k,H^{ss}) & \to & H^1(k,H) & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\prod_{v\ réelle} P(k_v) & \to & \prod_{v\ réelle} H^1(k_v,H^{ss}) & \to & \prod_{v\ réelle} H^1(k_v,H) & \to & 0
\end{array}$$

Comme rappelé ci-dessus, la verticale médiane est une bijection. En utilisant la densité de $P(k)$ dans $\prod_{v\ réelle} P(k_v)$, on obtient le point (iii). $\square$

L'énoncé suivant est une variante d'énoncés de P. Gille ([Gi97] ; [Gi01] ; appendice à [BoKu04]) et Borovoi et Kunyavskiĭ ([BoKu04, Thm. 8.4]).

Théorème 9.3 *Soit k un corps de nombres. Une résolution flasque $1\to S\to H\to G\to 1$ d'un k-groupe réductif G induit une suite exacte de groupes finis*

$$H^{ss}(k)/R\to G(k)/R\to H^1(k,S)\to 1,$$

où $H^{ss}\subset H$, le groupe dérivé de H, est un groupe semi-simple simplement connexe.

Démonstration On a la suite exacte

$$G(k)\to H^1(k,S)\to H^1(k,H)$$

et les suites exactes locales

$$G(k_v)\to H^1(k_v,S)\to H^1(k_v,H).$$

Pour v place finie, $H^1(k_v, H) = 1$ d'après la proposition précédente. Pour v place réelle, le k_v-tore flasque S_{k_v} est quasi-trivial, donc $H^1(k_v, S) = 0$. Ainsi, pour toute place v, la flèche $H^1(k_v, S) \to H^1(k_v, H)$ a pour image l'élément distingué de $H^1(k_v, H)$. Comme la flèche $H^1(k, H) \to \prod_v H^1(k_v, H)$ a un noyau trivial (proposition précédente), il s'en suit que la flèche $H^1(k, S) \to H^1(k, H)$ a une image réduite à l'élément distingué de $H^1(k, H)$, et donc l'application $G(k) \to H^1(k, S)$ est surjective. D'après le théorème 8.1 on a donc une suite exacte de groupes

$$H(k)/R \to G(k)/R \to H^1(k, S) \to 1.$$

On trouve dans l'appendice de Gille à [BoKu04] (Theorem 1) une démonstration du fait délicat suivant : sur un corps de nombres, pour toute suite exacte de k-groupes réductifs

$$1 \to H^{ss} \to H \to T \to 1$$

avec H^{ss} semi-simple simplement connexe et T un k-tore, on a une suite exacte induite

$$H^{ss}(k)/R \to H(k)/R \to T(k)/R \to 1.$$

De la suite exacte

$$1 \to H^{ss} \to H \to P \to 1,$$

où P est un k-tore quasi-trivial, donc satisfait $P(k)/R = 1$, on déduit que l'application $H^{ss}(k)/R \to H(k)/R$ est surjective, et on obtient donc la suite exacte de l'énoncé.

Il reste à établir la finitude des groupes intervenant dans cette suite. La finitude de $H^1(k, S)$ pour k un corps de nombres (et plus généralement un corps de type fini sur le corps premier) et S un k-tore flasque est connue ([CTSa77], Thm. 1 p. 192). La finitude de $H^{ss}(k)/R$ pour H^{ss} un k-groupe semi-simple simplement connexe et k un corps de nombres est une conséquence d'un théorème général de Margulis. En fait, il a été établi que pour H^{ss} un groupe semi-simple simplement connexe, $H^{ss}(k)/R = 1$ sauf peut-être si H^{ss} contient un facteur anisotrope de type E_6 (voir le livre de Platonov et Rapinchuk [PlRa] et l'article de Chernousov et Timoshenko [ChTi]). □

Théorème 9.4 *Soient k un corps de nombres, G un k-groupe réductif et $1 \to S \to H \to G \to 1$ une résolution flasque de G. Alors*

(i) Cette suite induit un isomorphisme entre le groupe $A(G)$ qui mesure le défaut d'approximation faible pour G et le groupe abélien fini

$$\mathrm{Coker}[H^1(k, S) \to \oplus_v H^1(k_v, S)].$$

(ii) Cette suite induit une bijection de l'ensemble $Ш^1(k, G)$ avec le groupe abélien fini

$$Ш^2(k, S) = \mathrm{Ker}\ [H^2(k, S) \to \prod_v H^2(k_v, S)].$$

(iii) Cette suite induit une surjection

$$H^1(k, G) \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}[H^2(k, S) \to H^2(k, P)].$$

Si k est totalement imaginaire, cette application est une bijection.

(iv) (Kottwitz [Ko86], Borovoi [Bo98]) Cette suite induit une suite exacte d'ensembles pointés

$$H^1(k, G) \to \oplus_v H^1(k_v, G) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

les flèches $H^1(k_v, G) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ *étant les flèches composées*

$$H^1(k_v, G) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(G_{k_v}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

(v) (Sansuc [Sa81, Thm. 9.5]) Soit X *une* k*-compactification lisse de* G*. On a une suite exacte de groupes abéliens finis*

$$0 \to A(G) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to Ш^1(k, G) \to 0.$$

Démonstration

(i) Soit K/k l'extension finie galoisienne déployant le k-tore S. Pour toute place finie v non ramifiée dans K, le k_v-tore S_{k_v} est déployé par une extension cyclique, donc (Endo-Miyata, voir [CTSa77], Prop. 2 p. 184) est un facteur direct d'un k_v-tore quasi-trivial, donc $H^1(k_v, S) = 0$. Soit Σ un ensemble fini de places de k contenant les places ramifiées dans K et les places réelles.

On considère le diagramme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
H(k) & \to & G(k) & \to & H^1(k,S) & \to & H^1(k,H) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\prod_{v\in\Sigma} H(k_v) & \to & \prod_{v\in\Sigma} G(k_v) & \to & \prod_{v\in\Sigma} H^1(k_v,S) & \to & \prod_{v\in\Sigma} H^1(k_v,H).
\end{array}$$

D'après la proposition 9.2 et la démonstration du théorème 9.3, ce diagramme se réduit à

$$\begin{array}{ccccccc}
H(k) & \to & G(k) & \to & H^1(k,S) & \to & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\prod_{v\in\Sigma} H(k_v) & \to & \prod_{v\in\Sigma} G(k_v) & \to & \prod_{v\in\Sigma} H^1(k_v,S) & \to & 1
\end{array}$$

et $H(k)$ est dense dans le produit $\prod_{v\in\Sigma} H(k_v)$. Les groupes finis $H^1(k_v, S)$ sont nuls pour toute place v non ramifiée dans K. Ceci établit l'énoncé (i). Pour plus de détails pour ce type d'argument qui remonte à Kneser, en particulier pour le fait que l'adhérence de $G(k)$ dans $\prod_{v\in\Sigma} G(k_v)$ est un sous-groupe distingué, voir [Sa81, §3]. A noter que la nullité de $H^1(k_v, S)$ pour v en dehors des places ramifiées dans K et l'argument ci-dessus assurent qu'en dehors de ces places, l'approximation faible vaut pour G.

(ii) La flèche bord associée à la suite exacte $1 \to S \to H \to G \to 1$ définit une application naturelle $Ш^1(k, G) \to Ш^2(k, S)$. Si $\alpha \in Ш^1(k, G)$ a une image triviale dans $Ш^2(k, S)$, il est l'image d'un élément $\beta \in H^1(k, H)$ dont l'image dans tout $H^1(k_v, H)$ provient de $H^1(k_v, S)$. Aux places réelles, le k_v-tore flasque S_{k_v} est déployé par une extension cyclique. On a donc $H^1(k_v, S) = 0$ en une telle place. Ainsi β est dans le noyau de l'application $H^1(k, H) \to \prod_{v \text{ réelle}} H^1(k_v, H)$, et ce noyau est trivial (Prop. 9.2). L'argument de torsion donné par Sansuc ([Sa81], preuve du théorème 4.3 pages 28 et 29) s'applique dans notre contexte et montre que l'application est injective.

D'après Kneser, Harder et Borovoi ([Bo98], Lemma 5.6.5) il existe un k-tore maximal $T_{G^{sc}} \subset G^{sc} \subset H$ tel que $Ш^2(k, T_{G^{sc}}) = 0$. Soit $T_H \subset H$ le k-tore maximal qui est le centralisateur connexe de $T_{G^{sc}}$ dans H. Cela définit un diagramme du type précédant la proposition A.1 ci-dessous. De la cohomologie de la suite exacte $1 \to T_{G^{sc}} \to T_H \to P \to 1$, où P est un tore quasi-trivial, et de $Ш^2(k, T_{G^{sc}}) = 0$ on déduit $Ш^2(k, T_H) = 0$. L'image de tout élément $\alpha \in Ш^2(k,S)$ dans $H^2(k,T_H)$ est donc nulle, et tout tel élément est dans l'image de $H^1(k,T_G) \to H^2(k,S)$, ce qui implique qu'il est dans l'image de $H^1(k,G) \to H^2(k,S)$, et établit le point (ii).

(iii) Soit $\alpha \in \mathrm{Ker}[H^2(k,S) \to H^2(k,P)]$. Soit Σ l'ensemble fini des places de k telles que $\alpha_v \neq 0 \in H^2(k_v,S)$. D'après Kneser, Harder et Borovoi ([Bo98], Lemme 5.6.5), il existe un k-tore maximal $T_{G^{sc}} \subset G^{sc} \subset H$ tel que $H^2(k_v,T_{G^{sc}}) = 0$ pour $v \in \Sigma$ et $Ш^2(k,T_{G^{sc}}) = 0$. Soit $T_H \subset H$ le k-tore maximal qui est le centralisateur connexe de $T_{G^{sc}}$ dans H. Cela définit un diagramme du type précédant la proposition A.1 ci-dessous. De la cohomologie de la suite exacte $1 \to T_{G^{sc}} \to T_H \to P \to 1$, où P est un tore quasi-trivial, et de $Ш^2(k,T_{G^{sc}}) = 0$ on déduit comme ci-dessus $Ш^2(k,T_H) = 0$. L'image de $\alpha \in \mathrm{Ker}[H^2(k,S) \to H^2(k,P)]$ dans $H^2(k,T_H)$ appartient à $Ш^2(k,T_H)$, elle est donc nulle. Ainsi $\alpha \in H^2(k,S)$ est l'image d'un élément de $H^1(k,T_G)$, a fortiori est-ce l'image d'un élément de $H^1(k,G)$. Que l'application soit bijective lorsque k est totalement imaginaire est un cas particulier du théorème 8.4.

(iv) Pour tout k-tore T, un morceau de la suite de Tate-Nakayama ([MiADT], Chap. I, Thm. 4.20) est
$$H^2(k,T) \to \oplus_v H^2(k_v,T) \to \mathrm{Hom}((T^*)^{\mathfrak{g}}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to 0.$$
Du morphisme $S \to P$, de la proposition 3.3 et de $Ш^2(k,P) = 0$ (P est quasi-trivial) on déduit donc la suite exacte
$$\mathrm{Ker}[H^2(k,S) \to H^2(k,P)] \to \oplus_v \mathrm{Ker}[H^2(k_v,S) \to H^2(k_v,P)] \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$
Soit $\xi_v \in \oplus_v H^1(k_v,G)$ d'image triviale dans $\mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Soit
$$\rho_v \in \oplus_v \mathrm{Ker}[H^2(k_v,S) \to H^2(k_v,P)]$$
son image. En combinant la suite exacte obtenue à l'instant, le théorème 9.1 et le point (iii) ci-dessus, on trouve $\eta \in H^1(k,G)$ d'image $\xi_v \in H^1(k_v,G)$ pour chaque place v non réelle et d'image $\rho_v \in \mathrm{Ker}[H^2(k_v,S) \to H^2(k_v,P)]$ pour v place réelle. Pour l'argument de torsion délicat permettant de montrer que l'on peut trouver $\xi \in H^1(k,G)$ d'image ξ_v en toute place de k, y compris aux places réelles, je renvoie au théorème 5.11 de [Bo98].

(v) Un autre morceau de la suite exacte de Tate-Nakayama ([MiADT], Chap. I, Thm. 4.20) pour le k-tore S est
$$H^1(k,S) \to \oplus_v H^1(k_v,S) \to \mathrm{Hom}(H^1(k,S^*), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^2(k,S) \to \oplus_v H^2(k_v,S).$$
D'après le théorème 7.1, on a $H^1(k,S^*) \simeq H^1(k,\mathrm{Pic}(\overline{X})) \simeq \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$. L'énoncé (v) résulte alors des énoncés (i) et (ii). $\square$

Remarques 9.4.1

(1) Des isomorphismes comme aux énoncés 9.4 (i) et 9.4 (ii) sont énoncés dans [BoKu04] (Thm. 8.11 et Thm. 8.16 (i)).

(2) L'énoncé (iv) pour G un k-tore T est une conséquence immédiate de la dualité de Tate-Nakayama et de l'isomorphisme bien connu $H^1(k,T^*) \simeq \mathrm{Pic}(T)$. Lorsque G est un k-groupe semi-simple, on déduit l'énoncé (iv) de la suite exacte de Poitou-Tate pour la cohomologie des modules galoisiens finis et de la suite exacte $1 \to \mu \to G^{sc} \to G \to 1$. Dans le cas général, cet énoncé est établi, sous une forme légèrement différente, par Kottwitz ([Ko86] (voir aussi [Bo98], §5). Le passage d'une formulation à l'autre se fait en utilisant la proposition 6.3 et la remarque 6.3.1. Cet énoncé a été utilisé par Borovoi et Rudnick [BoRu95] et par Harari [Ha02].

(3) Dans (v), pour faire le lien avec l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible pour les espaces homogènes principaux de G, il faudrait suivre les

flèches. Pour l'approximation faible cela ne doit pas être trop délicat, dans la mesure où l'on peut partir de la résolution flasque de G donnée par la restriction d'un torseur universel trivial en $e_G \in G(k)$, et le lien entre évaluation des torseurs et obstruction de Brauer-Manin est fait dans [CTSa87b]. Le cas de l'obstruction au principe de Hasse pour les compactifications d'espaces homogènes principaux pourrait être nettement plus délicat, comme on peut voir en suivant la démonstration de Sansuc [Sa81] ou la présentation de Skorobogatov ([Sk01], Chapitre 6.2).

Appendice A : Comparaison avec les travaux de Borovoi et de Borovoi-Kunyavskiĭ

Soit
$$1 \to S \to H \to G \to 1$$
une résolution flasque du k-groupe réductif G, avec H extension d'un k-tore quasi-trivial P par le k-groupe semi-simple simplement connexe H^{ss}. Comme expliqué au §3, une telle résolution donne naissance à un diagramme commutatif de suites exactes de k-groupes linéaires

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & & 1 & & 1 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & \mu & \to & H^{ss} & \to & G^{ss} & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & S & \to & H & \to & G & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & M & \to & P & \to & T & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 1 & & 1 & & 1. & & \end{array}$$

Dans ce diagramme, $P = H^{tor}$, $T = G^{tor}$, et M est le k-groupe de type multiplicatif noyau de la flèche naturelle $P \to T$ induite par $H \to G$. Le k-groupe H^{ss} s'identifie au revêtement simplement connexe G^{sc} du groupe semi-simple G^{ss}, groupe dérivé de G.

Fixons un tore maximal T_G dans G. En prenant des images réciproques, et en utilisant le fait qu'un groupe algébrique extension d'un tore algébrique par un tore algébrique est un tore algébrique (rappel **0.7**), on obtient un diagramme de suites exactes de k-groupes de type multiplicatif

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & & 1 & & 1 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & \mu & \to & T_{G^{sc}} & \to & T_{G^{ss}} & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & S & \to & T_H & \to & T_G & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & M & \to & P & \to & T & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 1 & & 1 & & 1. & & \end{array}$$

Notons que chacun des k-tores maximaux $T_G \subset G$, $T_H \subset H$, $T_{G^{ss}} \subset G^{ss}$, $T_{H^{ss}} \subset H^{ss}$ détermine les autres. Par exemple T_G est le centralisateur de $T_{G^{ss}}$ dans G.

Du diagramme ci-dessus on tire en particulier les suites exactes de k-groupes de type multiplicatif
$$1 \to \mu \to T_{G^{sc}} \to T_G \to T \to 1$$
et
$$1 \to \mu \to S \to P \to T \to 1.$$

On a les suites duales de groupes de caractères.

Proposition A.1 *Le complexe ci-dessus induit*
(i) un diagramme commutatif de suites exactes de k-groupes de type multiplicatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & \mu & \to & T_{G^{sc}} & \to & T_G & \to & T & \to & 1 \\
 & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = & & \\
1 & \to & \mu & \to & T_H & \to & P \oplus T_G & \to & T & \to & 1 \\
 & & \uparrow = & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow = & & \\
1 & \to & \mu & \to & S & \to & P & \to & T & \to & 1,
\end{array}$$

(ii) un diagramme commutatif de suites exactes de modules galoisiens de type fini

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & T^* & \to & T_G^* & \to & T_{G^{sc}}^* & \to & \mu^* & \to & 0 \\
 & & \uparrow = & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow = & & \\
0 & \to & T^* & \to & P^* \oplus T_G^* & \to & T_H^* & \to & \mu^* & \to & 0 \\
 & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = & & \\
0 & \to & T^* & \to & P^* & \to & S^* & \to & \mu^* & \to & 0,
\end{array}$$

(iii) un diagramme commutatif de suites exactes de modules galoisiens de type fini

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & T_{G^{sc}*} & \to & T_{G*} & \to & R_1 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \\
0 & \to & T_{H*} & \to & P_* \oplus T_{G*} & \to & R_2 & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \simeq & & \\
0 & \to & S_* & \to & P_* & \to & R_3 & \to & 0.
\end{array}$$

En particulier,
(iv) le complexe de k-tores $[T_{G^{sc}} \to T_G]$ *est naturellement quasi-isomorphe au complexe de k-tores* $[S \to P]$,
(v) le complexe de modules galoisiens $[T_G^* \to T_{G^{sc}}^*]$ *est naturellement quasi-isomorphe au complexe de modules galoisiens* $[P^* \to S^*]$,
(vi) le complexe de modules galoisiens $[T_{G^{sc}*} \to T_{G*}]$ *est naturellement quasi-isomorphe au complexe de modules galoisiens* $[S_* \to P_*]$.

Pour ces complexes de longueur 2, on place le terme de gauche en degré -1 et le terme de droite en degré 0. Le complexe de k-tores $[T_{G^{sc}} \to T_G]$ est le complexe utilisé par Borovoi ([Bo96] et [Bo98]).

Démonstration Il s'agit d'un exercice général d'algèbre homologique. Supposons que l'on ait un diagramme commutatif de suites exactes

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \rightarrow & A_1 & \rightarrow & A_2 & \rightarrow & A_3 & \rightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \rightarrow & B_1 & \rightarrow & B_2 & \rightarrow & B_3 & \rightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \rightarrow & C_1 & \rightarrow & C_2 & \rightarrow & C_3 & \rightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

On a alors le diagramme commutatif de suites exactes

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \rightarrow & C_1 & \rightarrow & B_1 & \rightarrow & A_2 & \rightarrow & A_3 & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = & & \\
0 & \rightarrow & C_1 & \rightarrow & B_2 & \rightarrow & A_2 \oplus B_3 & \rightarrow & A_3 & \rightarrow & 0 \\
 & & \uparrow = & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow = & & \\
0 & \rightarrow & C_1 & \rightarrow & C_2 & \rightarrow & B_3 & \rightarrow & A_3 & \rightarrow & 0
\end{array}
$$

Dans les suites horizontales, les flèches sont les flèches évidentes, à l'exception de la flèche $(A_2 \oplus B_3) \rightarrow A_3$ dans la suite horizontale médiane, qui est définie comme la différence $((a,b) \mapsto f(a) - g(b))$ des deux flèches $f : A_2 \rightarrow A_3$ et $g : B_3 \rightarrow A_3$, et de la flèche $B_3 \rightarrow A_3$ dans la suite horizontale inférieure, qui est définie comme l'opposée de la flèche donnée $g : B_3 \rightarrow A_3$. On envoie la première suite horizontale dans la seconde par les applications évidentes et l'application $A_2 \rightarrow A_2 \oplus B_3$ donnée par $a \mapsto (a, 0)$. On envoie la troisième suite horizontale dans la seconde par les flèches évidentes et et l'application $B_3 \rightarrow A_2 \oplus B_3$ donnée par $b \mapsto (0, b)$. On obtient ainsi un quasi-isomorphisme de complexes $B_1 \rightarrow A_2$ vers $B_2 \rightarrow A_2 \oplus B_3$ et un quasi-isomorphisme de $C_2 \rightarrow B_3$ vers $B_2 \rightarrow A_2 \oplus B_3$. Ainsi les complexes $B_1 \rightarrow A_2$ et $C_2 \rightarrow B_3$ sont quasi-isomorphes.

Ceci établit l'énoncé (i). L'énoncé (ii) en résulte immédiatement, le passage au groupe des caractères $M \mapsto \mathrm{Hom}_{\overline{k}-gp}(\overline{M}, \mathbf{G}_{m,\overline{k}})$ transformant suite exacte de k-groupes de type multiplicatif en suite exacte de modules galoisiens. On laisse au lecteur de soin d'établir l'énoncé (iii) à partir de l'énoncé (ii). $\square$

Groupe fondamental algébrique d'un groupe linéaire et groupe de Brauer d'une compactification

Dans [Bo96] et [Bo98], Borovoi définit le groupe fondamental d'un groupe algébrique réductif à partir du diagramme de groupes de type multiplicatif précédant la proposition A.1 ci-dessus. Sa définition est :

$$\pi_1^{Bor}(G) = \mathrm{Coker}[T_{G^{sc}*} \rightarrow T_{G*}].$$

Il démontre que ce module galoisien ne dépend pas du choix du tore maximal T_G.

Proposition A.2 *Le module galoisien $\pi_1^{Bor}(G)$ est naturellement isomorphe au module galoisien $\pi_1(G)$ introduit au §6 ci-dessus.*

Démonstration C'est une application de la proposition A.1 (iii). $\square$

Soit X une k-compactification lisse du groupe G. Dans [BoKu00], sur un corps k de caractéristique zéro, Borovoi et Kunyavskiĭ établissent des isomorphismes :

$$\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \simeq Ш^1_\omega(k, [T^*_G \to T^*_{H^{ss}}])$$

(dans le complexe de longueur 2, le terme de gauche est en degré -1, celui de droite en degré 0), et

$$\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \simeq Ш^1_\omega(k, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1^{Bor}(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})).$$

Pour ce faire, ils utilisent les résultats de [CTKu98] et recourent aux z-extensions.

Le théorème 7.2 et la proposition A.2 du présent article donnent immédiatement une autre démonstration de l'existence d'un isomorphisme entre les deux groupes de la seconde formule. Montrons comment l'existence d'un isomorphisme entre les deux groupes de la première formule résulte aussi du présent article. D'après la proposition A.1, le complexe $[T^*_G \to T^*_{H^{ss}}]$ et le complexe $[P^* \to S^*]$ sont quasi-isomorphes. Le groupe $Ш^1_\omega(k, [T^*_G \to T^*_{H^{ss}}])$ est donc isomorphe au groupe $Ш^1_\omega(k, [P^* \to S^*])$. Il suffit donc de montrer

$$H^1(k, S^*) \simeq Ш^1_\omega(k, [P^* \to S^*]).$$

On a la suite exacte courte de complexes :

$$0 \to [0 \to S^*] \to [P^* \to S^*] \to [P^* \to 0] \to 0.$$

Cette suite induit une suite exacte longue

$$H^1(k, P^*) \to H^1(k, S^*) \to H^1(k, [P^* \to S^*]) \to H^2(k, P^*)$$

et les suites similaires pour la cohomologie de tout sous-groupe fermé procyclique $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Notons que, P^* étant de permutation, on a $H^1(\mathfrak{g}, P^*) = 0 = H^1(\mathfrak{h}, P^*)$ et $Ш^2_\omega(k, P^*) = 0$. Par ailleurs, S^* étant flasque, on a $H^1(\mathfrak{h}, S^*) = 0$. Si l'on considère le diagramme commutatif de suites exactes obtenu par la restriction de $\mathfrak{g}$ à tous ses sous-groupes procycliques $\mathfrak{h}$, le lemme des 5 donne immédiatement

$$H^1(k, S^*) \xrightarrow{\simeq} Ш^1_\omega(k, [P^* \to S^*]).$$

D'après la proposition 7.1, on a $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \simeq H^1(k, S^*)$. Ceci achève la démonstration. $\square$

Cohomologie abélianisée de Borovoi

Dans [Bo96] et [Bo98], pour G un k-groupe réductif, et $i = 0, 1$, Borovoi définit des groupes de cohomologie galoisienne abélianisés $H^i_{ab}(k, G)$. Ce sont les groupes d'hypercohomologie

$$H^0_{ab}(k, G) = H^0(k, [T_{G^{sc}} \to T_G])$$

et

$$H^1_{ab}(k, G) = H^1(k, [T_{G^{sc}} \to T_G])$$

du complexe de k-tores de longueur 2

$$[T_{G^{sc}} \to T_G],$$

où les notations sont celles de la proposition A.1 ci-dessus, et les tores sont placés en degrés -1 et 0.

Borovoi définit un homomorphisme

$$G(k) \to H^0_{ab}(k, G)$$

et une application

$$H^1(k, G) \to H^1_{ab}(k, G).$$

Montrons comment le point de vue adopté ici permet de définir des flèches analogues. Soit G un k-groupe réductif. Soit $1 \to S \to H \to G \to 1$ une résolution flasque de G, avec H extension d'un k-tore quasi-trivial P par un k-groupe semi-simple simplement connexe. Comme indiqué au §8, ces données fournissent un homomorphisme

$$G(k) \to \mathrm{Ker}[H^1(k, S) \to H^1(k, P)]$$

et une flèche

$$H^1(k, G) \to \mathrm{Ker}[H^2(k, S) \to H^2(k, P)].$$

D'après la proposition A.1 (iv), le complexe de k-tores $[T_{G^{sc}} \to T_G]$ est naturellement quasi-isomorphe au complexe de k-tores $[S \to P]$, on a donc

$$H^i(k, [S \to P]) \simeq H^i(k, [T_{G^{sc}} \to T_G]).$$

On a la suite exacte

$$H^1(k, P) \to H^1(k, [S \to P]) \to H^2(k, S) \to H^2(k, P)$$

et comme $H^1(k, P) = 0$ (Hilbert 90) on voit que la flèche bord

$$H^1(k, G) \to \mathrm{Ker}[H^2(k, S) \to H^2(k, P)]$$

se transcrit en une flèche

$$H^1(k, G) \to H^1(k, [S \to P])$$

et donc en une flèche

$$H^1(k, G) \to H^1(k, [T_{G^{sc}} \to T_G]))$$

soit encore $H^1(k, G) \to H^1_{ab}(k, G)$. On laisse au lecteur le soin d'étudier son lien avec l'application définie par Borovoi.

Au niveau H^0, on a la suite exacte

$$H^0(k, S) \to H^0(k, P) \to H^0(k, [S \to P]) \to H^1(k, S) \to H^1(k, P).$$

Borovoi définit une flèche $G(k) \to H^0(k, [T_{G^{sc}} \to T_G]))$, donc une flèche $G(k) \to H^0(k, [S \to P])$.

On doit sans mal vérifier que cette flèche et la flèche évidente $G(k) \to H^1(k, S)$ sont compatibles. Admettant ce point, la flèche $G(k) \to H^0(k, [S \to P])$ contient plus d'information que la flèche bord $G(k) \to H^1(k, S)$ (laquelle passe au quotient par la R-équivalence).

Typiquement, si G est semi-simple et G^{sc} est son revêtement simplement connexe, alors la flèche de Borovoi contrôle le quotient de $G(k)$ par l'image de $G^{sc}(k)$.

De fait, on a la suite exacte

$$G^{sc}(k) \to G(k) \to H^0_{ab}(k, G) \to H^1(k, G^{sc}) \to H^1(k, G) \to H^1_{ab}(k, G).$$

(Borovoi, [Bo 96] p. 405 ; [Bo98] (3.10.1) p. 24) Ainsi un élément de $G(k)$ est dans le noyau de la flèche $G(k) \to H^0(k, [S \to P])$ si et seulement s'il est dans l'image de $G^{sc}(k)$.

Appendice B. Comparaison de deux complexes

Lemme B.1 *Soient k un corps, X une k-variété lisse intègre, T un k-tore déployé, $\pi : Y \to X$ un T-torseur, $\lambda : T^* \to \mathrm{Pic}(X)$ son type. Soient $U \subset X$ un ouvert non vide et $V = \pi^{-1}(U) \subset Y$.*

(i) La flèche $\pi^* : \mathrm{Div}_{X\setminus U}(X) \to \mathrm{Div}_{Y\setminus V}(Y)$ est un isomorphisme.

(ii) On a une flèche naturelle $k[V]^\times \to \mathrm{Div}_{Y\setminus V}(Y)$ associant à une fonction son diviseur. La fibre générique Y_η de π est un T-torseur trivial sur $\mathrm{Spec}(k(X))$, et le quotient du groupe des fonctions inversibles sur Y_η par le groupe multiplicatif $k(X)^\times$ est canoniquement isomorphe à T^*. Ceci définit une flèche $k[V]^\times \to T^*$.

(iii) Le diagramme suivant est anticommutatif

$$\begin{array}{ccc} k[V]^\times & \to & T^* \\ \downarrow & & \downarrow \lambda \\ \mathrm{Div}_{Y\setminus V}(Y) & & \\ \pi^* \uparrow \simeq & & \\ \mathrm{Div}_{X\setminus U}(X) & \to & \mathrm{Pic}(X). \end{array}$$

Démonstration L'énoncé (i) est clair, puisque toutes les fibres géométriques de π sont géométriquement intègres et non vides. L'énoncé (ii) est un rappel de la version torseur du lemme de Rosenlicht ([CTSa87b], Prop. 1.4.2 p. 383), dans le cas simple d'un torseur trivial. Le tore T est un produit $\prod_{i=1}^n \mathbf{G}_{m,k}$. La classe du T-torseur $Y \to X$ dans $H^1(X,T) = \oplus_{i=1}^n H^1(X, \mathbf{G}_m)$ s'écrit $(L_1, \ldots, L_n)$. Soit, pour chaque i, $Y_i \to X$ un $\mathbf{G}_m$-torseur de classe $L_i \in \mathrm{Pic}(X)$. On a un isomorphisme $Y \simeq Y_1 \times_X \times \ldots \times_X Y_n$. Pour établir le résultat, on peut supposer que X possède un k-point p (si ce n'est pas le cas, on s'y ramène en considérant $X \times_k k(X)$ et en utilisant le fait que la flèche naturelle $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X \times_k k(X))$ est injective – pour ce dernier point, voir la démonstration du Lemme 11 de [CTSa77]). On peut alors fixer un k-point $p_i \in Y_i(k)$ au-dessus de p. Ceci permet de définir des immersions fermées $Y_i \hookrightarrow Y$. On vérifie que l'assertion du point (iii) est fonctorielle en de tels morphismes. Ceci permet de ramener la démonstration du point (iii) au cas $T = \mathbf{G}_m = \mathrm{Spec} k[t, 1/t]$.

Pour établir ce résultat, très certainement classique, on peut restreindre U, en particulier supposer que le $\mathbf{G}_m$-torseur $Y \to X$ a une section $U \to V = \pi^{-1}(U)$. Identifions $V = \mathbf{G}_{m,U}$. On a $k[V]^\times / k[U]^\times \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Z}$ la flèche envoyant la classe de t sur $1 \in \mathbf{Z}$. L'image de $1 \in \mathbf{Z}$ dans $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathbf{G}_m)$ est la classe du torseur $Y \to X$. Le diviseur de la fonction rationnelle t sur Y a son support étranger à V, il est donc l'image réciproque d'un diviseur Δ sur X. Soit $\mathrm{div}_Y(t) = \pi^*(\Delta)$. Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X, avec $U_{i_0} = U$ tel que sur chaque ouvert U_i on puisse écrire Δ comme le diviseur d'une fonction rationnelle $f_i \in k(X)$. Sur $U_{i_0} = U$, choisissons $f_{i_0} = 1$. Soit $V_i = \pi^{-1}(U_i)$. Sur V_i, le quotient $v_i = f_i/t$ appartient à $k[V_i]^\times$. La classe de $-\Delta$ dans $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, O_X^\times)$ est donnée par le 1-cocycle $u_{ij} = f_j/f_i$. L'image réciproque de ce cocycle sur Y est $tv_j/tv_i = v_j/v_i$. On dispose des flèches $\rho_i : V_i \to U_i \times \mathbf{G}_m$ données par $y \mapsto (\pi(y), v_i(y))$. Pour i, j donnés, la flèche $U_i \times \mathbf{G}_m \to U_j \times \mathbf{G}_m$ donnée par $(x, z) \mapsto (x, (f_j/f_i)(x)z)$ est compatible avec les flèches ρ_i. On obtient ainsi un morphisme de X-schémas $Y \to Z$, où Z est le schéma obtenu par le recollement via les flèches f_j/f_i, qui est donc le $\mathbf{G}_m$-torseur associé à $-\Delta$. Le X-schéma Y est un $\mathbf{G}_m$-torseur, le X-schéma Z est aussi un $\mathbf{G}_m$-torseur sur X. C'est le $\mathbf{G}_m$-torseur associé au diviseur Δ. La restriction de $Y \to Z$ au-dessus de $U = U_{i_0}$ est l'identité et respecte l'action de $\mathbf{G}_m$. Ceci implique que la flèche $Y \to Z$ est un isomorphisme de $\mathbf{G}_m$-torseurs. □

Proposition B.2 *Soit G un k-groupe réductif, soit $T = G^{tor}$ et μ le noyau de $G^{sc} \to G^{ss}$. Soit X une k-compactification lisse de G.*

(i) On a la suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to G^* \to \mathrm{Div}_{\overline{X}\setminus\overline{G}}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{G}) \to 0.$$

(ii) Le module G^* s'identifie à T^*. Le module $\mathrm{Pic}(\overline{G})$ *s'identifie à* $\mathrm{Pic}(\overline{G}^{ss})$*, c'est-à-dire à μ^*.*

(iii) Soit $1 \to S \to H \to G \to 1$ une résolution flasque de G, et soit $P = H^{tor}$. Le complexe de modules galoisiens $[\mathrm{Div}_{\overline{X}\setminus\overline{G}}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})]$ *est quasi-isomorphe au complexe de modules galoisiens $[P^* \to S^*]$.*

(iv) Avec les notations de l'appendice A, le complexe de modules galoisiens $[\mathrm{Div}_{\overline{X}\setminus\overline{G}}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})]$ *est quasi-isomorphe au complexe de modules galoisiens $[T^*_G \to T^*_{G^{sc}}]$.*

Démonstration Comme G est un ouvert de la k-variété projective, lisse et géométriquement intègre X, on a la suite exacte

$$0 \to \overline{k}[G]^\times/\overline{k}^\times \to \mathrm{Div}_{\overline{X}\setminus\overline{G}}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{G}) \to 0.$$

L'énoncé (i) résulte alors du lemme de Rosenlicht. L'énoncé (ii) est un cas particulier de l'énoncé **0.5**, appliqué à la suite exacte de k-groupes $1 \to G^{ss} \to G \to T \to 1$, et de l'isomorphisme $\mathrm{Pic}(\overline{G}^{ss}) = \mu^*$. Comme S est un k-tore flasque, il existe un torseur $\pi : Y \to X$ de groupe structural S, étendant le torseur de groupe S donné par $H \to G$ ([CTSa77, Prop. 9]). Soit $\lambda : S^* \to \mathrm{Pic}(\overline{X})$ son type ([CTSa87b], (2.0.2)). On a alors le diagramme commutatif de suites exactes suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & G^* & \to & \mathrm{Div}_{\overline{X}\setminus\overline{G}}(\overline{X}) & \to & \mathrm{Pic}(\overline{X}) & \to & \mathrm{Pic}(\overline{G}) & \to & 0 \\
 & & \uparrow = & & \uparrow & & \uparrow -\lambda & & \uparrow (-1) & & \\
0 & \to & G^* & \to & H^* & \to & S^* & \to & \mathrm{Pic}(\overline{G}) & \to & 0
\end{array}$$

La suite horizontale supérieure est celle de l'énoncé (i). La suite horizontale inférieure est donnée par l'énoncé **0.3**, joint au fait que $\mathrm{Pic}(\overline{H}) = 0$. La flèche non évidente $H^* \to \mathrm{Div}_{\overline{X}\setminus\overline{G}}(\overline{X})$ est la composée de la flèche diviseur $H^* \to \mathrm{Div}_{\overline{Y}\setminus\overline{H}}(\overline{Y})$ et de l'inverse de l'isomorphisme $\pi^* : \mathrm{Div}_{\overline{X}\setminus\overline{G}}(\overline{X}) \to \mathrm{Div}_{\overline{Y}\setminus\overline{H}}(\overline{Y})$. La commutativité du carré de gauche est alors évidente. Celle du carré médian est assurée par le lemme B.1. Celle du carré de droite est une fonctorialité évidente. On a l'isomorphisme naturel $P^* \xrightarrow{\simeq} H^*$. On voit donc que le complexe $[P^* \to S^*]$ est quasi-isomorphe au complexe $[\mathrm{Div}_{\overline{X}\setminus\overline{G}}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})]$, ce qui est l'assertion (iii).

L'énoncé (iv) résulte alors de la proposition A.1. □

Remarques B.2.1

(1) Soient X une k-compactification lisse de G, $S^* = \mathrm{Pic}(\overline{X})$ et $\pi : Y \to X$ le torseur universel sur X de fibre triviale au point $e \in G(k)$ (ce torseur est bien défini à isomorphisme de S-torseurs près). On a montré au §5 que l'on peut munir $H = Y \times_X G$ d'une structure de k-groupe quasi-trivial, la projection $H \to G$ étant un homomorphisme de noyau S. Dans ce cas, les flèches $H^* \to \mathrm{Div}_{\overline{X}\setminus\overline{G}}(\overline{X})$ et $\lambda : S^* \to \mathrm{Pic}(\overline{X})$ sont des isomorphismes : dans le diagramme ci-dessus, toutes les flèches sont des isomorphismes, le complexe $[P^* \to S^*]$ est isomorphe au complexe $[\mathrm{Div}_{\overline{X}\setminus\overline{G}}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})]$.

(2) Soit de façon générale X_c une k-compactification lisse d'une k-variété lisse géométriquement intègre X. Comme me l'a fait remarquer Skorobogatov, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\overline{k}(X)^\times/\overline{k}^\times & \rightarrow & \mathrm{Div}(\overline{X}) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\overline{k}(X)^\times/\overline{k}^\times \oplus \mathrm{Div}_{\overline{X}_c\setminus\overline{X}}(\overline{X}_c) & \rightarrow & \mathrm{Div}(\overline{X}_c)\,, \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Div}_{\overline{X}_c\setminus\overline{X}}(\overline{X}_c) & \rightarrow & \mathrm{Pic}(\overline{X}_c)
\end{array}$$

où les flèches verticales de gauche sont les projections évidentes, la flèche horizontale associe à (f,Δ) le diviseur $\mathrm{div}_{\overline{X}_c}(f)-\Delta$, et les autres flèches sont évidentes, induit des quasi-isomorphismes entre les complexes horizontaux.

(3) La remarque précédente et la proposition B.2 (iv) redonnent certains résultats de Borovoi et van Hamel [BovH06].

Bibliographie

[Bo96] M. Borovoi, Abelianization of the first Galois cohomology of reductive groups, IMRN **8** (1996), 401–407.

[Bo98] M. Borovoi, Abelian Galois cohomology of reductive groups, Mem. AMS, Vol. 132, Number 626 (1998).

[BoRu95] M. Borovoi et Z. Rudnick, Hardy-Littlewood varieties and semisimple groups, Invent. math. **119** (1995) 37–66.

[BoKu00] M. Borovoi et B. Kunyavskiĭ, Formulas for the unramified Brauer group of a principal homogeneous space of a linear algebraic group, J. of Algebra **225** (2000) 804–821.

[BoKu04] M. Borovoi et B. Kunyavskiĭ, Arithmetical birational invariants of linear algebraic groups over two-dimensional geometric fields, avec un appendice de P. Gille, J. of Algebra **276** (2004) 292–339.

[BovH06] M. Borovoi et J. van Hamel, Extended Picard complexes for algebraic groups and homogeneous spaces, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **342** (2006) 671–674.

[ChTi] V. I. Chernousov et L. M. Timoshenko, Sur le groupe des classes de R-équivalence des groupes semi-simples sur des corps arithmétiques (en russe), Algebra i Analiz **11** (1999) 191–221 ; trad. ang., St. Petersburg Math. J. **11** (2000), 1097–1121.

[CT04] J.-L. Colliot-Thélène, Résolutions flasques des groupes réductifs connexes, C. R. Acad. Sc. Paris, Série I **339** (2004) 331–334.

[CT05] J.-L. Colliot-Thélène, Un théorème de finitude pour le groupe de Chow des zéro-cycles d'un groupe algébrique linéaire sur un corps p-adique, Invent. math. **159** (2005) 589–606.

[CTGiPa04] J.-L. Colliot-Thélène, P. Gille et R. Parimala, Arithmetic of linear algebraic groups over 2-dimensional geometric fields, Duke Math. J. **121** (2004) 285–341.

[CTHaSk05] J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari et A. N. Skorobogatov, Compactification équivariante d'un tore (d'après Brylinski et Künnemann), Expositiones mathematicae **23** (2005) 161-170.

[CTKu98] J.-L. Colliot-Thélène et B. Kunyavskiĭ, Groupe de Brauer non ramifié des espaces principaux homogènes des groupes linéaires, J. Ramanujan Math. Soc. **13** (1998) 37–49.

[CTSa77] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La R-équivalence sur les tores, Ann. Sc. Éc. Norm. Sup. **10** (1977) 175–229.

[CTSa87a] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, Principal homogeneous spaces under flasque tori : Applications, J. Algebra **106** (1987) 148–205.

[CTSa87b] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles, II, Duke Math. J. **54** (1987) 375–492.

[dJ04] A. J. de Jong, The period-index problem for the Brauer group of an algebraic surface, Duke Math. J. **123** (2004) 71–94.

[SGA3] M. Demazure et A. Grothendieck, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64, Schémas en Groupes I, II et III. Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Springer L.N.M. **151**, **152** et **153** (1970).

[Gi97] P. Gille, La R-équivalence sur les groupes algébriques réductifs définis sur un corps global, Publications Mathématiques de l'I.H.É.S. **86** (1997) 199–235.

[Gi01] P. Gille, Cohomologie galoisienne des groupes quasi-déployés sur des corps de dimension cohomologique ≤ 2, Compositio mathematica **125** (2001) 283–325.

[Gr68] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer, I, II, III, in *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 46–188.

[Ha02] D. Harari, Groupes algébriques et points rationnels, Math. Annalen **322** (2002) 811–826.

[Ko84] R. E. Kottwitz, Stable trace formula : cuspidal tempered terms, Duke Math. J. **51** (1984), 611–650.

[Ko86] R. E. Kottwitz, Stable trace formula : elliptic singular terms, Math. Annalen **275** (1986) 365–399.

[Me93] A. S. Merkur'ev, Generic element in SK_1 for simple algebras, K-Theory **7** (1993) 1–3.

[Me96] A. S. Merkur'ev, R-equivalence and rationality problem for semi-simple adjoint classical algebraic groups. Publications Mathématiques de l'I.H.É.S. **84** (1996), 189–213 (1997).

[Me98] A. S. Merkur'ev, K-Theory and algebraic groups, in Proceedings of the European Congress of Mathematicians (Budapest), Progress in Mathematics **169**, 43–72, Birkhäuser Verlag, 1998.

[MiADT] J. S. Milne, Arithmetic duality theorems, Perspective in Mathematics **1**, Academic Press (1986). Edition corrigée (2004) disponible sur la page personnelle de l'auteur.

[Mi-Sh82] J. S. Milne et K.-y. Shih, Conjugates of Shimura varieties, in *Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties*, 280–356, Springer L. N. M. **900** (1982).

[Mi72] M. Miyanishi, On the algebraic fundamental group of an algebraic group, J. Math. Kyoto Univ. **12-2** (1972) 351–367.

[PlRa] V.P. Platonov et A. S. Rapinchuk, Algebraic groups and number theory, Academic Press, Boston, 1994.

[Sa81] J.-J. Sansuc, Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires, J. für die reine und angew. Math. (Crelle) **327** (1981) 12–80.

[Se59] J-P. Serre, Groupes algébriques et corps de classes, Actualités scientifiques et industrielles **1264**, Publications de l'Institut Mathématique de Nancago VII, Hermann Paris, 1959.

[SeCG] J-P. Serre, Cohomologie galoisienne, cinquième édition, révisée et complétée, Springer L. N. M. **5** (1973, 1994).

[Sk01] A. N. Skorobogatov, Torsors and rational points. Cambridge Tracts in Mathematics **144**. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[Vo77] V. E. Voskresenskiĭ, Algebraicheskie tory, Nauka, Moscou, 1977.

[Vo98] V. E. Voskresenskiĭ, Algebraic groups and their birational invariants, Transl. Mathematical Monographs **179**, Amer. Math. Soc., 1998.

Jean-Louis Colliot-Thélène
C.N.R.S., Mathématiques,
UMR 8628,
Bâtiment 425,
Université Paris-Sud,
F-91405 Orsay
FRANCE
jlct@math.u-psud.fr

Eingegangen 9. Oktober 2006