Variétés hilbertiennes et sauts du rang du groupe de Mordell–Weil

Séminaire de théorie des nombres de Paris

8 février 2021

Jean-Louis Colliot-Thélène
(CNRS et Université Paris-Saclay)

Thèmes

• Le théorème d'irréductibilité de Hilbert

• Le comportement du rang de Mordell-Weil dans une famille de variétés abéliennes

Buts (simultanés)

• Sur un corps de nombres, trouver de nouvelles variétés sur lequelles le théorème d'irréductibilité de Hilbert vaut

• Sur un corps de nombres, prouver l'existence de courbes elliptiques de rang de Mordell-Weil plus grand que prévu

Résumé :

• Beaucoup était déjà dans les travaux d'André Néron vers 1950.

k un corps, dans l'exposé, $\mathrm{char}(k) = 0$
X une k-variété lisse, géométriquement intègre, $d = dim(X)$.
Diverses propriétés (chacune implique la suivante)

• X k-rationnelle : k-birationnelle à un espace projectif $\mathbb{P}^d_k$
• X est **Hilbert-unirationnelle** (convention pour l'exposé) : Il existe un k-morphisme dominant $f : Y \to X$ avec Y k-rationnelle et **la fibre générique de f géométriquement intègre**
• X is k-unirationnelle : il existe $f : Y \to X$ dominant avec Y k-rationnelle (avec si l'on veut $dim(Y) = dim(X)$)
• L'ensemble $X(k)$ des k-points de X est dense dans X pour la topologie de Zariski

Ensembles minces (définis par Serre)

Un sous-ensemble de $X(k)$ est appelé mince s'il est inclus dans une union finie de sous-ensembles $f(Y(k)) \subset X(k)$ avec $f : Y \to X$ avec Y une k-variété intègre, et

– soit f est une immersion fermée avec $Y \neq X$

– soit f est un k-morphisme dominant génériquement fini de degré $[k(Y) : k(X)] > 1$.

• On dit que X/k est hilbertien si l'ensemble $X(k)$ n'est pas mince. L'ensemble $X(k)$ est alors Zariski dense dans X.

• On dit qu'un corps k est hilbertien si $\mathbb{P}^1_k$ est hilbertien. Toute k-variété X k-rationnelle est alors hilbertienne.

• Un corps de nombres est hilbertien.

• Tout corps de fonctions d'au moins une variable sur un corps est hilbertien.

• Une courbe elliptique sur un corps de nombres n'est pas hilbertienne (Mordell-Weil faible).

Proposition facile.

Soit k un corps. Soit $Y \to X$ un k-morphisme dominant de k-variétés intègres **à fibre générique géométriquement intègre**.
(a) Si $\mathcal{R} \subset Y(k)$ n'est pas mince dans Y, alors $f(\mathcal{R}) \subset X(k)$ n'est pas mince dans X.
(b) En particulier, si Y/k est hilbertienne, alors $f(Y(k))$ n'est pas mince dans X et donc X/k est Hilbertienne.

En particulier une k-variété Hilbert-unirationnelle est hilbertienne.

Dans ces notes, pour M un groupe abélien de type fini, on note $rang(M) := dim_{\mathbb{Q}}(M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$.

Théorème de spécialisation de Néron (livre de Serre sur M-W).

Théorème *Soit k un corps, $\mathrm{char}(k) = 0$. Soient U une k-variété lisse géométriquement intègre avec $U(k) \neq \emptyset$ et $X \to U$ un schéma abélien. Soit $A = X_\eta$ la fibre générique. C'est une variété abélienne sur $K = k(U)$. Supposons que $A(K)$ est un groupe de type fini. L'ensemble des points $m \in U(k)$ tels que la spécialisation $A(K) = X_\eta(K) \to X_m(k)$ n'est pas injective est mince dans $U(k)$.*

Si k est un corps de type fini sur $\mathbb{Q}$, le groupe $A(K)$ est de type fini (thm. de Mordell-Weil-Néron).

Si k est quelconque et si $Tr_{K/k}(A) = 0$ (pas de partie constante pour A/K) alors $A(K)$ est de type fini (Lang-Néron).

Corollaire. *Si* $A(K)$ *est de type fini, si le corps* k *est hilbertien et si la* k*-variété* U *est hilbertienne (par exemple si elle est* k*-rationnelle), alors l'ensemble des points* $m \in U(k)$ *tels que* $rang(X_m(k)) \geq rang(A(K))$ *est Zariski dense dans* U*.*

Ce corollaire ne donne a priori rien quand U est un ouvert d'une courbe elliptique E sur un corps de nombres avec $E(k)$ infini, car $E(k)$ est mince dans E (Mordell-Weil faible).

On a cependant l'énoncé suivant (Silverman 1982, version primitive dans Néron ICM 1954) :

Théorème *Soit k un corps de nombres, U une k-courbe lisse intègre U avec $U(k)$ infini. Soit $K = k(U)$. Soit $X \to U$ un schéma abélien. Supposons que la K/k-trace de la fibre générique $A = X_\eta$ est triviale. L'ensemble des points $m \in U(k)$ tels que $rang(X_m(k)) \geq rang(A(K))$ est infini – en fait a son complémentaire fini.*

L'argument de Néron repose sur :
Théorème pré-Faltings (Néron, ICM 1954) *Soit* E/k *une courbe elliptique sur un corps de nombres avec* $E(k)$ *infini. Soit* h *une hauteur sur* $E(k)$*. Si* C *est une courbe lisse intègre, et* $f : C \to E$ *un* k*-morphisme ramifié, alors le quotient du nombre de points de* $f(C(k)) \subset E(k)$ *de hauteur* $\leq H$ *par le nombre de points de* $E(k)$ *de hauteur* $\leq H$ *tend vers* 0 *quand* H *tend vers l'infini.*

Néron 1954 établit cela par un argument qui mériterait d'être relu attentivement (passage au niveau des tores complexes).
Énoncé analogue retrouvé par Manin 1967. Manin utilise Mumford 1965 (A remark on Mordell's conjecture).
Aujourd'hui c'est bien sûr une conséquence du théorème de Faltings sur la conjecture de Mordell.

Question étudiée par plusieurs auteurs sur k corps de nombres, en général sur U ouvert de $\mathbb{P}^1_k$:

Soient k un corps de nombres, U une k-variété lisse géométriquement intègre et $X \to U$ un schéma abélien (de dimension relative ≥ 1). Soit $A = X_\eta$ la fibre générique. Que dire de l'ensemble des points $m \in U(k)$ tels que $rang(X_m(k)) > rang(A(K))$? Est-il non mince ? Est-il Zariski dense ?

Résultats de Billard 1998, plus récemment de Salgado, Hindry, Loughran, **sous une hypothèse de k-rationalité ou au moins de k-unirationalité de l'espace total X/k de la fibration $X \to U$.**

Le lemme suivant est en substance déjà dans Néron 1952.

Lemme-clé. *Soient F un corps et A/F une variété abélienne. Soit $\xi \in A$ un point schématique de A,* **non fermé**, *et soit $F(\xi)$ le corps résiduel en ξ. Le quotient $A(F(\xi))/A(F)$ n'est pas un groupe de torsion.*

Principe de la démonstration. Pour toute extension de corps $F \subset L \subset M$ avec L et M algébriquement clos, $A(L)_{tors} = A(M)_{tors}$.

Passer de ρ à $\rho + 1$

Théorème "du point générique" (CT 2019)
Soit k un corps, $\mathrm{char}(k) = 0$. Soit U une k-variété lisse géométriquement intègre avec $U(k) \neq \emptyset$ et $X \to U$ un schéma abélien de dimension relative ≥ 1. Soient $K = k(U)$ et A/K la fibre générique X_η. Supposons que $A(K)$ est un groupe de type fini, de rang ρ.
(a) Si l'ensemble $X(k)$ n'est pas mince dans X, par exemple si k est hilbertien et X est k-rationnelle, alors l'ensemble des points $M \in U(k)$ tels que le rang de Mordell-Weil de $X_m(k)$ est supérieur ou égal à $\rho + 1$ n'est pas mince dans $U(k)$ (et en particulier est Zariski-dense).
(b) Supposons k hilbertien. Si la k-variété X est k-unirationnelle, alors l'ensemble des points $m \in U(k)$ tels que le rang de Mordell-Weil de $X_m(k)$ est supérieur ou égal à $\rho + 1$ est Zariski dense dans $U(k)$.

Démonstration de (a).
Notons $W = X$. On considère le produit fibré $Y = X \times_U W$, les deux projections $X \to U$ et $W = X \to U$ étant celle donnée. Cela définit un schéma abélien $Y \to W$. Le lemme-clé appliqué à $A = X_\eta/K$ et au point générique $\xi \in A$ donne que le rang de Mordell-Weil de la fibre générique de $Y \to W$ est de rang au moins $\rho + 1$. Par hypothèse l'ensemble des points de $W(k) = X(k)$ n'est pas mince dans W. Le théorème de spécialisation de Néron donne alors que l'ensemble E des point $n \in W(k)$ tels que la fibre Y_n/k ait un rang de Mordell-Weil au moins $\rho + 1$ n'est pas mince dans W. La projection $q = W \to U$ a sa fibre générique géométriquement intègre. Par la proposition facile, $q(E) \subset U(k)$ n'est pas mince dans U. Pour $n \in E \subset W$, la fibre de $X \to U$ en $m = q(n)$ est la fibre de $X \times_U W$ en le point n. QED

Démonstration de (b).
On a $f : W \to U$. On a un k-morphisme dominant $W \to X$ avec W k-rationnelle. On considère le composé $g : W \to X \to U$.
Soit $Y = X \times_U W$ le produit fibré de f et de g.
On dispose de la section $W \to X \times_U W = Y$ donnée par $W \to X$, et le composé $W \to Y \to X$ est le k-morphisme dominant donné.
Par le lemme clé, la fibre générique de $Y \to W$ a un rang de Mordell-Weil $\sigma > \rho = rang(A(K))$.
Comme k est hilbertien et W est k-rationnelle, le théorème de spécialisation de Néron appliqué à $Y \to W$ implique que l'ensemble $\mathcal{R}$ des points $n \in W(k)$ avec $rang(Y_n(k)) \geq \sigma$ n'est pas mince dans W, donc est Zariski dense dans W. Son image $f(\mathcal{R})$ par $f : W \to U$ est donc Zariski dense dans U. Et pour $n \in W(k)$, on a $X_{f(n)} = Y_n$, avec $rang(X_{f(n)}) \geq \rho + 1$. QED

Remarque. Pour k un corps de nombres, et $X \to U$ une famille de courbes elliptiques, sous la simple hypothèse que $X(k)$ est Zariski dense dans X, le théorème de Merel sur la torsion uniformément bornée permet de conclure que l'ensemble des points $m \in U(k)$ à fibre X_m de rang de Mordell-Weil au moins 1 est Zariski-dense dans U.

Exemples familiers de familles de courbes elliptiques dont l'espace total est k-rationnel.

$y^2 = x^3 + rx + s$ avec $(r, s) \in U \subset \mathbb{A}^2_k$
$y^2 = x^3 + ax + s$ avec $a \in k$ fixé et $s \in U \subset \mathbb{A}^1_k$
$y^2 = x^3 + rx$ avec $r \in U \subset \mathbb{A}^1_k$
$ry^2 = x^3 + ax + b$, avec $a \in k$, $b \in k^*$ fixés, et $r \in U \subset \mathbb{A}^1_k$
(tordues quadratiques).
Surface cubique (Euler)

$$x^3 + y^3 = z^3 + t^3$$

avec diverses fibrations en courbes elliptiques au-dessus de $\mathbb{P}^1_k$ définies par une droite.

Passer de ρ à $\rho + 2$ (Salgado 2012, Loughran-Salgado 2019)

Soit k un corps de nombres. Soit X une surface avec une fibration $f : X \to \mathbb{P}^1_k$ en courbes elliptiques, telle que $X \times_k k^{\mathrm{alg}}$ est k^{alg}-rationnel.
[Un exemple générique est la fibration en courbes elliptiques associée à une surface de del Pezzo de degré 1.]
On considère le cas où il existe $C \subset X$ avec $C \simeq \mathbb{P}^1_k$ et $f : C \to \mathbb{P}^1_k$ de degré 2 (bisection de la fibration). On suppose en outre que la fibre générique de f n'est pas constante après une extension quadratique de $k(\mathbb{P}^1)$.

Théorème. *Sous les hypothèses ci-dessus (en particulier k est un corps de nombres) si le rang générique est ρ, l'ensemble des points de $m \in \mathbb{P}^1(k)$ avec $X_m(k)$ de rang $\geq \rho + 2$ n'est pas mince.*

Démonstration (esquisse).

On montre que le système linéaire $H^0(X, \mathcal{O}_X(C))$ définit une fibration en coniques sur X. On montre ensuite que X est k-unirationnelle, on dispose donc de beaucoup de bisections $\mathbb{P}^1_k \simeq C_\alpha \to \mathbb{P}^1_k$ de $f : X \to \mathbb{P}^1_k$. On montre ensuite que la ramification de ces applications $C_\alpha \to \mathbb{P}^1_k$ varie. Une variante du théorème "du point générique" montre qu'il existe beaucoup de $D := D_{\alpha,\beta} := C_\alpha \times_{\mathbb{P}^1_k} C_\beta$ tels que la fibre générique de $X \times_{\mathbb{P}^1_k} D$ ait un rang au moins $\rho + 2$. En général, D est une courbe de genre 1. En faisant attention on impose que la courbe D a une infinité de points rationnels. On applique alors le théorème de spécialisation de Néron-Silverman *au-dessus d'une courbe elliptique* pour spécialiser en des k-points de D en gardant $\rho + 2$ pour le rang de MW. En variant la ramification des C_α et C_β on montre ainsi que l'ensemble des points $m \in \mathbb{P}^1(k)$ tel que la fibre X_m soit de rang au moins $\rho + 2$ n'est pas mince dans $\mathbb{P}^1(k)$.

L'exemple classique de Néron 1951

Soit k un corps, $\mathrm{car}(k) = 0$. On choisit 8 points rationnels en position générale dans $\mathbb{P}^2_k$. Alors le pinceau des cubiques par ces 8 points consiste uniquement en cubiques géométriquement intègres. Il y a un autre point commun $P \in \mathbb{P}^2(k)$. On éclate les 9 points, on obtient une surface X k-rationnelle avec un morphisme $X \to \mathbb{P}^1_k$ à fibres géométriques intègres. On a une suite exacte $0 \to \mathbb{Z} \to Pic(X) \to Pic(X_\eta) \to 0$. Soit $K = k(\mathbb{P}^1)$. Le rang de $Pic(X)$ est 10. On fixe une section de $X \to \mathbb{P}^1_k$ correspondant à l'un des points éclatés. La fibre générique X_η est une courbe elliptique E/K de rang 8.

(0) Le théorème de spécialisation de Néron donne que l'ensemble des $m \in \mathbb{P}^1(k)$ avec $rang(X_m(k)) \geq 8$ n'est pas mince dans $\mathbb{P}^1_k$.

(1) L'espace total X est k-rationnel, le théorème "du point générique" implique que l'ensemble des $m \in \mathbb{P}^1(k)$ avec $rang(X_m(k)) \geq 9$ n'est pas mince dans $\mathbb{P}^1_k$.

(2) Si k est un corps de nombres, le pinceau $X \to \mathbb{P}^1_k$ satisfait les hypothèses de Loughran-Salgado, car les droites de $\mathbb{P}^2_k$ passant par P définissent des bisections de ce pinceau. Leur résultat donne alors que l'ensemble des $m \in \mathbb{P}^1(k)$ avec $rang(X_m(k)) \geq 10$ n'est pas mince dans $\mathbb{P}^1_k$.

Sur un corps hilbertien quelconque, on peut aussi obtenir des courbes elliptiques de rang ≥ 10 de la façon suivante, en partant d'une construction de Néron et Serre. Par 9 points généraux de $\mathbb{P}^2_k$ il passe une seule cubique. Le graphe de la relation "9 points de $\mathbb{P}^2_k$ et une cubique de $\mathbb{P}^2_k$ par ces 9 points" donne naissance à une fibration lisse $X \to U$ où U est un ouvert du $\mathbb{P}^9_k$ paramétrant les cubiques, et X est k-birationnel à $(\mathbb{P}^2_k)^9$. La fibre générique est une courbe elliptique $E/k(U)$ avec $rang(E(k(U)) \geq 9$ (utiliser les 9 points et la trace d'une droite de $\mathbb{P}^2$). Le théorème de spécialisation de Néron sur U ouvert de $\mathbb{P}^9_k$ donne des courbes elliptiques E_m/k de rang ≥ 9. Comme l'espace total X est k-rationnel, le théorème "du point générique" donne des courbes elliptiques E_m/k de rang ≥ 10. Dans chaque cas, on a un ensemble non mince de tels points $m \in U(k)$, non vide si k est Hilbertien.

[A revoir : les exemples de rang ≥ 10 et ≥ 11 de Néron 1954 et Serre 1989.]

Théorème *Soit k un corps de nombres. Toute hypersurface cubique lisse $Y \subset \mathbb{P}^n_k$, $n \geq 3$ avec un k-point est hilbertienne.*
Manin 1967 ; Кубические Формы 1972, VI.1 ; Demeio 2018.

Démonstration (esquisse). On se ramène au cas des surfaces cubiques. Soit $f_i : Y_i \to Y$, $i = 1, \ldots, n$, des k-morphismes génériquement finis de degré au moins 2, avec chaque Y_i géométriquement intègre. Soit $D_i \subset Y$ le lieu de ramification (non vide car Y est géométriquement rationnelle). On choisit une k-droite générale dans $\mathbb{P}^3_k$ coupant Y en trois k-points, définissant par éclatement des 3 points une fibration $Z \to \mathbb{P}^1_k$ telle que toutes les fibres soient géométriquement intègres et que les D_i soient horizontaux par rapport à la fibration. On note $Z_i = Y_i \times_Y Z$.

La fibre générique $E/K = k(\mathbb{P}^1)$ de $Z \to \mathbb{P}^1_k$ est munie d'une structure de courbe elliptique de rang de Mordell-Weil au moins 2. D'après le théorème de spécialisation de Néron, l'ensemble des points $m \in \mathbb{P}^1(k)$ de fibre $Z_m(k)$ de rang au moins 2, et en particulier avec $Z_m(k)$ infini, n'est pas mince dans $\mathbb{P}^1(k)$, et en particulier est infini. [Manin précise la taille de cet ensemble, Silverman le fera encore plus.]
La restriction des $Z_i \to Z$ aux fibres E_m est *ramifiée* pour $m \in \mathbb{P}^1(k)$ hors d'un ensemble fini. On a donc des applications ramifiées $Z_{i,m} \to E_m$. Le théorème de Néron 1951 (pré-Faltings) donne que les $Z_{i,m}(k)$ ne peuvent couvrir $E_m(k)$ si $E_m(k)$ est infini. Ainsi le complémentaire des images des $Y_i(k)$ dans $Y(k)$ est Zariski-dense. QED

Remarques

1. Comme le théorème de Faltings vaut sur k de type fini sur $\mathbb{Q}$, le théorème vaut sur tout corps k de type fini sur $\mathbb{Q}$.

2. En combinant le théorème ci-dessus et le théorème "du point générique" on voit que sur toute surface cubique lisse X sur un corps k de type fini sur $\mathbb{Q}$, avec $X(k) \neq \emptyset$, il existe des pinceaux de courbes elliptiques dont une infinité a rang de Mordell-Weil au moins 3.

Autres méthodes pour établir que certaines variétés sont hilbertiennes.

- Unirationalité hilbertienne
- Double fibration en coniques
- Approximation faible-faible
- Multiples fibrations en courbes elliptiques

Unirationalité hilbertienne

Soit un corps de caractéristique zéro.
Pour chacun des types suivants de k-variété X avec $X(k) \neq \emptyset$ il existe $f : Y \to X$ avec Y k-rationnelle et la fibre générique géométriquement intègre.

• X k-groupe algébrique linéaire connexe (CT-Sansuc 1987)

• X surface projective lisse fibrée en coniques sur une droite, avec 4 fibres géométriques singulières (CT-Skorobogatov 1987)

Question ouverte pour les surfaces de del Pezzo dP_n, $n = 4, 3, 2, 1$ en général, et de façon générale pour les surfaces géométriquement rationnelles.

Double fibration en coniques

Théorème (S. Streeter 2019) *Soit k un corps hilbertien, $\mathrm{car}(k) = 0$. Si X/k est une surface de del Pezzo de degré 4 avec un k-point, ou une surface cubique lisse contenant une k-droite, ou une surface de del Pezzo de degré $d = 1$ ou $d = 2$ avec une fibration en coniques, alors X est hilbertienne.*

Sous les hypothèse ci-dessus, X est birationnelle à une surface Y avec deux fibrations en coniques distinctes $p, q : Y \to \mathbb{P}^1_k$. On démontre ensuite que l'ensemble des points $m \in \mathbb{P}^1(k)$ avec $p^{-1}(m)(k) \neq \emptyset$ n'est pas mince. Utilisation pour terminer d'un résultat de Bary-Soroker, Fehm, Petersen sur le comportement de la propriété hilbertienne en famille.

Approximation faible-faible

Soient k un corps de nombres et X une k-variété lisse, $X(k) \neq \emptyset$.

• On dit que l'approximation faible-faible vaut pour X avec $X(k) \neq \emptyset$ s'il existe un ensemble fini S_0 de places de k tel que pour tout ensemble fini S de places de k avec $S \cap S_0 = \emptyset$, $X(k)$ est dense dans $\prod_{v \in S} X(k_v)$.

Conjecturé (CT-Sansuc, CT) pour les k-variétés X géométriquement rationnellement connexes avec $X(k) \neq \emptyset$, en particulier pour les variétés k-unirationnelles. Connu seulement pour quelques classes de variétés.

Théorème. *Soit X une variété lisse géom. intègre sur un corps de nombres k. Si X satisfait l'approximation faible faible avec S_0 est comme ci-dessus, alors pour tout ensemble mince $E \subset X(k)$, et tout ensemble S comme ci-dessus, l'adhérence de $X(k) \setminus E$ dans $\prod_{v \in S} X(k_v)$ coïncide avec celle de $X(k)$.*
[Outils : Tschebotarev et estimations de Lang-Weil pour les courbes sur les corps finis.]

Proposition (Ekedahl, CT). *L'approximation faible-faible pour X/k implique que X est hilbertien : $X(k)$ n'est pas mince.*

Référence pour ces énoncés :
Serre, Topics in Galois Theory, Chap. 3.
La conjecture ci-dessus implique que tout groupe fini est groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$.

On a une version du théorème "du point générique" dans le cadre de l'approximation faible-faible.

Théorème. *Soit* $X \to U$ *une fibration en variétés abéliennes de dimension relative* ≥ 1, *avec* $U(k) \neq \emptyset$. *Soit* $\mathcal{R} \subset U(k)$ *l'ensemble des points* $m \in U(k)$ *tels que* $rang(X_m(k)) > rang(X_\eta(k(U)))$. *Si* X *satisfait l'approximation faible-faible, alors il existe un ensemble fini* S *de places de* k *tel que* $\mathcal{R}$ *est dense dans* $\prod_{v \notin S} U(k_v)$.

Sur k un corps de nombres, on a établi l'approximation faible-faible pour les variétés X avec $X(k) \neq \emptyset$ de l'un des types suivants, qui sont donc hilbertiennes.

• Fibrations en coniques sur $\mathbb{P}^1_k$ avec un k-point et au plus 5 fibres géométriques singulières.
Exemple. Surfaces de Châtelet. Équations $y^2 - az^2 = p(x)$ avec $p(x)$ séparable de degré 3. Soit encore $d(t)y^2 = p(x)$ avec $d(t)$ séparable de degré 2 et $p(x)$ séparable de degré au plus 4. Cela fait une famille de courbes elliptiques tordues quadratiques de $y^2 = p(x)$. En utilisant un peu plus (obstruction de Brauer-Manin contrôle tout, CT-Sansuc-Swinnerton-Dyer 1987) on généralise un résultat de Rohrlich 1993 : sur $k = \mathbb{Q}$, les $t \in \mathbb{Q}$ avec fibre de rang de MW au moins 1 sont denses dans $\mathbb{R}$.

• Surfaces de del Pezzo de degré 4 (Salberger–Skorobogatov).
• (Hyper)surfaces cubiques lisses (Swinnerton-Dyer).
• Fibrations en coniques $X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ dont les fibres X_m singulières sont seulement en des $\mathbb{Q}$-points m (Browning, Matthiesen et Skorobogatov 2014). Par exemple

$$y^2 - az^2 = \prod_{i=1}^{n}(x - e_i).$$

• Modulo l'hypothèse de Dickson-Bouniakowsky-Schinzel : Fibrations en coniques quelconques sur $\mathbb{P}^1_k$, k corps de nombres.

Résultats plus généraux pour des classes de variétés rationnellement connexes : Harpaz et Wittenberg 2016, 2020.

Utilisation de deux fibrations elliptiques sur des surfaces de Kummer sur un corps de nombres
(Démonstration semblable à celle pour les surfaces cubiques)

• $x^4 + y^4 = z^4 + t^4$ (Corvaja-Zannier 2016) et plus généralement (Demeio 2018) $ax^4 + by^4 + cz^4 + dt^4 = 0$ **avec** $abcd \in k^{*2}$.
Théorème. *Si les points rationnels sont Zariski denses, ces surfaces sont hilbertiennes.*
• Quotient X de produit de courbes elliptiques $E_1 \times E_2$ par l'application $u \mapsto -u$, ce qui donne des équations $z^2 = f(x)(g(y)$ avec f et g séparables de degré 3. On a deux fibrations elliptiques évidentes. Équations considérées par Kuwata-Wang 1993, Rohrlich 1993 ("root numbers"), Zhizhong Huang 2020.)

Théorème (Demeio 2018). *Si $E_1(k)$ et $E_2(k)$ sont infinis, alors X est hilbertien.*
La démonstration utilise Faltings et Merel.

Dans la direction réciproque, citons un résultat que le théorème de spécialisation de Néron combiné au lemme-clé donne facilement.

Théorème (Holmes–Pannekoek 2015)
Soit $r \geq 1$. Si E est une courbe elliptique sur un corps de nombres k, si la variété de Kummer X quotient de E^r par l'involution $u \mapsto -u$ est une variété hilbertienne, alors il existe une tordue quadratique de E sur k de rang de Mordell-Weil au moins r.

Démonstration. On considère la fibration $E \times_k E^r \to E^r$, de fibre générique $E_\eta = E_{k(E^r)})/k(E^r)$, de rang de Mordell-Weil au moins égal à r, on considère la descente à la Weil de la fibre générique E_η pour l'extension quadratique $k(E^r)/k(X)$, et on applique le théorème de spécialisation de Néron sur X.

Quelques références

A. Néron, Les propriétés du rang des courbes algébriques dans les corps de degré de transcendance fini (Colloque, Clermont-Ferrand)

A. Néron, Problèmes arithmétiques et géométriques rattachés à la notion de rang d'une courbe algébrique dans un corps, Bulletin S.M.F. (1952).

A. Néron, Propriétés arithmétiques de certaines familles de courbes algébriques, Proceedings ICM 1954, vol. III (Amsterdam) 481–488.

S. Lang and A. Néron, Rational points of abelian varieties over function fields, Amer. J. Math. LXXXI, no. 1 (1959) 95–118

Yu. I. Manin, Two theorems on rational surfaces, Rendiconti di Matematica (1-2) Vol. 25 (1966) 198–207.

Ю. И. Манин, Кубические Формы, Москва, 1972.

J-P. Serre, Lectures on the Mordell–Weil Theorem, Vieweg 1989.

D. E. Rohrlich, Variation of the root number in families of elliptic curves, Compos. Math. 87 (1993), 119–151.

H. Billard, Sur la répartition des points rationnels de surfaces elliptiques, J. reine angew. Math. 505 (1998), 45–71.
C. Salgado, On the rank of the fibers of rational elliptic surfaces, Algebra & Number Theory 6 (2012), 1289–1314.
M. Hindry and C. Salgado, Lower bounds for the rank of families of abelian varieties under base change. Acta Arith. 189 (2019), 263–282.
D. Loughran and C. Salgado, Rank jumps on elliptic surfaces and the Hilbert property, Annales de l'institut Fourier, à paraître, arXiv :1907.01987 (2019).
J.-L. Colliot-Thélène, Point générique et saut du rang du groupe de Mordell–Weil. Acta Arith. 196 (2020), 93–108.