NOTICE DE JEAN-MICHEL BISMUT (MAI 2025)

JEAN-MICHEL BISMUT

Dans mon travail de mathématicien, j'ai abordé sept domaines :

(1) L'optimisation stochastique.
(2) Le calcul de Malliavin et la mécanique aléatoire.
(3) Le théorème de l'indice.
(4) Les invariants η, et la torsion analytique de Ray-Singer réelle ou complexe.
(5) Les déformations hypoelliptiques du laplacien.
(6) La formule des traces.
(7) La cohomologie de Bott-Chern et le théorème de Riemann-Roch.

Avant de décrire ces travaux, je dirai que la théorie des probabilités et le calcul des variations y jouent un rôle essentiel. J'estime n'avoir travaillé que sur un seul et même sujet, dont l'unité ne m'est apparue que progressivement. Le fait que les équations que j'utilise pour décrire quelques aspects de la formule des traces soient essentiellement les mêmes que celles que j'avais dégagées quand je travaillais sur le principe du maximum stochastique ne doit rien au hasard, mais plutôt à la nécessité. Seul les sépare un certain labeur.

Dans cette notice, je ne passe en revue que quelques travaux, renvoyant à la bibliographie complète pour plus de détails.

1. Travaux d'optimisation stochastique

Dans des travaux contenus dans ma thèse, j'établis un principe du maximum pour des équations différentielles stochastiques. Si on contrôle une équation différentielle ordinaire du type $\dot{x}_t = f(t, x_t, u_t)$ en rendant extrémale une fonctionnelle du type $\int_0^T L(t, x_t, u_t)\, dt$, sous des hypothèses adéquates, le principe de Pontryagin nous permet de construire un Hamiltonien $H(t, x, p)$. L'extrémalisation de la fonctionnelle considérée conduit alors soit à des équations d'Euler-Lagrange, soit à des équations de Hamilton.

Dans [Bis73, Bis78d, Bis80], j'ai obtenu un principe de Pontryagin pour des équations différentielles stochastiques de Itô du type [1]

$$dx_t = f(t, x_t, u_t)\, dt + \sum_1^m \sigma_i(t, x_t, u_t)\, \delta w^i,$$

quand on rend extrémale une fonctionnelle du type $E \int_0^T L(t, x_t, u_t)\, dt$, où E désigne l'espérance. Les équations de Hamilton sont remplacées par des équations différentielles stochastiques. La variable duale p est solution d'une équation différentielle stochastique avec condition terminale (commme dans le cas déterministe !), alors qu'elle

1. Ici, w est un movement brownien dans $\mathbf{R}^m$, et δw est sa différentielle de Itô.

n'anticipe sur la filtration du mouvement brownien. Cette apparente contradiction a valu à des articles parfaitement corrects d'être bloqués pendant plusieurs années.

J'ai appliqué ce type de résultats soit à des équations différentielles stochastiques linéaires avec critère quadratique dans [Bis76a, Bis78b], soit à des systèmes stochastiques contraints [Bis74]. J'ai également donné des applications du principe du maximum en économie mathématique [Bis75]. L'idée qu'on peut déformer un processus stochastique se retrouve dans l'ensemble de mes travaux ultérieurs, qu'ils soient consacrés à la mécanique aléatoire, au calcul de Malliavin, au théorème de l'indice ou au Théorème de Riemann-Roch.

Une autre série de travaux est consacrée à des problèmes variationnels sur des processus de Markov. Ceci a donné lieu au travail [Bis76b] consacré au contrôle des diffusions markoviennes (où on contrôle la « dérive » du processus). La référence [Bis78c] représente une synthèse des deux points de vue. J'ai également étendu les méthodes précédentes à des processus plus généraux, comportant des sauts [Bis78a].

Les techniques de contrôle des mesures de probabilité associées à des processus de Markov m'ont amené à considérer des problèmes d'arrêt optimal. Dans des travaux menés en partie avec Skalli [Bis77a, Bis77b, Bis77c, Bis77d, BS77, Bis79a, Bis79b, Bis79c, Bis79d, Bis81a], et motivés par la caractérisation par Rost [Ros71] des mesures associées à des temps d'arrêt à l'aide des fonctions excessives du processus de Markov considéré, j'ai étudié des questions d'arrêt optimal de processus de Markov, d'arrêt optimal avec contrôle, de jeux à somme nulle avec arrêt optimal, de contrôle de processus alternants, avec une fonctionnelle dépendant du nombre et de la position des transitions. Dans ces problèmes, j'ai de nouveau mis en œuvre des techniques d'optimisation convexe, en définissant un problème dual du problème initial, et en reliant les deux problèmes duaux par des conditions classiques d'extrémalité.

2. Calcul de Malliavin et mécanique aléatoire

Malliavin [Mal78] avait étudié le flot d'une équation différentielle stochastique, et développé un calcul différentiel sur l'espace de Wiener, qui, appliqué aux équations différentielles stochastiques, permettait de démontrer des résultats d'analyse sur le semi-groupe de la chaleur d'une diffusion à l'aide de l'équation différentielle stochastique correspondante. Les idées de Malliavin avaient été prolongées par Stroock [Str81b, Str81a].

Dans [Bis81c, Bis81d], j'ai montré que la formule d'intégration par parties de Malliavin pouvait être considérée comme une conséquence de la formule de Girsanov, reliée à la formule de représentation d'Haussman des variables aléatoires du mouvement brownien comme intégrales stochastiques. Dans un travail mené avec D. Michel [BM81, BM82], nous avons appliqué le calcul de Malliavin à des problèmes de filtrage. Dans [Bis81b], j'ai démontré une formule de Itô pour l'image d'une diffusion par un flot stochastique sur $\mathbf{R}^n$. Je démontre en particulier que le flot est effectivement un flot de difféomorphismes de $\mathbf{R}^n$.

Le livre [Bis82] est consacré à l'étude du calcul différentiel associé à des flots stochastiques. On développe une théorie de cycles aléatoires associés à des équations différentielles stochastiques, et on intègre des formes différentielles sur ces cycles. On introduit l'idée que les équations de Hamilton associées à un problème variationnel classique peuvent être convenablement perturbées par un mouvement brownien, idée que je reprendrai dans mes travaux sur le laplacien hypoelliptique [Bis05].

Dans [Bis84b], je développe un calcul des variations stochastiques pour les processus de sauts. Dans [Bis84c, Bis84e], je montre comment la théorie des excursions browniennes permet d'utiliser les propriétés d'invariance du mouvement brownien par changement de temps pour obtenir des formules naturelles d'intégration par partie sur des processus de sauts.

Dans [Bis84d], je montre que le calcul de Malliavin possède une version déterministe. Je démontre une formule d'intégration par parties sur le mouvement brownien d'une variété Riemannienne. Une autre propriété d'invariance du mouvement brownien par action du groupe orthogonal local y est utilisée, qui explique l'apparition du tenseur de Ricci dans la formule. On obtient le développement asymptotique du noyau de la chaleur par utilisation de l'équation différentielle stochastique sous-jacente.

Dans [Bis85c], l'étude des problèmes avec conditions limites conduit à l'étude d'une décomposition des trajectoires browniennes jusqu'à un temps dont la loi est la mesure de Lebesgue. On donne aussi une décomposition correspondante des excursions browniennes, étroitement reliée à la décomposition de Williams.

3. Le théorème de l'indice

Lors d'une conférence en l'honneur de Laurent Schwartz en 1983, M.F. Atiyah [Ati85] fit un exposé consacré aux travaux de Witten sur le théorème de l'indice. Witten avait montré que formellement, la formule de McKean-Singer pour l'indice d'un opérateur de Dirac agissant sur les spineurs d'une variété riemannienne X peut s'écrire sous la forme d'une intégrale fonctionnelle 'supersymétrique' sur l'espace des lacets LX. De manière équivalente, on intègre sur l'espace des lacets une forme différentielle fermée pour l'opérateur $d + i_K$, où K est le vecteur vitesse engendrant l'action naturelle de S^1 sur LX. Un argument algébrique de localisation montre que cette intégrale doit se localiser sur $X \subset LX$ vu comme la variété des zéros de K. L'application de cette formule conduit directement et sans analyse à la ≪ preuve ≫ du théorème de l'indice.

Cet exposé m'a conduit à donner une preuve probabiliste du théorème de l'indice et des formules de point fixe de Lefschetz [Bis83, Bis84a]. Le genre $\widehat{A}$ est obtenu à l'aide de la formule d'aire de Paul Lévy [Lév51].

L'exposé d'Atiyah m'avait perturbé, car il montrait qu'était à l'œuvre dans l'intégrale brownienne un mécanisme algébrique, invisible pour un probabiliste. Dans [Bis85a], j'ai montré que les considérations d'Atiyah et Witten s'appliquent à tous les opérateurs de Dirac. On construit en particulier un relèvement naturel de la forme sur X pour le caractère de Chern en une forme équivariante sur LX. J'élabore un dictionnaire de plus en plus précis permettant de passer du formalisme des opérateurs à l'intégration de formes différentielles sur l'espace des lacets.

Après avoir cherché à étendre les preuves connues des formules de localisation à LX, je montre dans [Bis86b] que la preuve du théorème de l'indice par l'équation de la chaleur peut être considérée comme l'application à LX d'une preuve existant universellement pour les formules de localisation de Nicole Berline et Michèle Vergne [BV83]. Je montre en particulier que le mécanisme des *fantastic cancellations* de McKean-Singer n'est pas un miracle lié au théorème de l'indice, mais existe en tant que phénomène universel pour toutes les formules de localisation en cohomologie équivariante.

Suite à une suggestion de Berline et Vergne, dans [Bis85b], je donne une preuve par l'équation de la chaleur de formules délocalisées à la Kirillov. Je lis un article de Quillen [Qui85b], où il propose une nouvelle théorie des superconnexions, unifiant algébriquement le formalisme de la théorie de Chern-Weil et le formalisme du théorème de l'indice. Quillen indique que ce formalisme devrait conduire à une preuve du théorème de l'indice des familles par l'équation de la chaleur. Or le résultat de [Bis85b] est précisément une telle preuve dans le contexte équivariant. Dans [Bis86a], je donne une preuve par l'équation de la chaleur du théorème de l'indice des familles, par l'introduction de la superconnexion, dite de Levi-Civita, naturellement associée à une fibration.

Le formalisme des superconnexions se prête naturellement au calcul de formes de transgression. J'assiste à un exposé de Quillen où il propose un lien entre théorème de l'indice des familles et sa démonstration d'un théorème de courbure [Qui85a] pour le fibré déterminant d'une famille de connexions sur un fibré au dessus d'une surface de Riemann fixe. Avec Freed [BF86a, BF86b], nous donnons une construction par transgression d'une métrique et d'une connexion unitaires sur le fibré déterminant d'une famille d'opérateurs de Dirac, et nous donnons un théorème de courbure local pour cette connexion. La superconnexion de Levi-Civita joue un rôle essentiel dans la construction. Nous lions l'holomorphie en 0 de la fonction η d'un opérateur de Dirac au mécanisme des *fantastic cancellations*. Nous montrons un théorème d'holonomie conjecturé par Witten, qui indique que l'holonomie de la connexion décrite précédemment au dessus d'un lacet de la base est la limite adiabatique des invariants η du cylindre construit au dessus de ce lacet.

Dans [Bis87b], je lie la superconnexion de Levi-Civita à mes résultats antérieurs sur le filtrage. Dans [Bis87a], je donne une preuve par l'équation de la chaleur des inégalités de Demailly [Dem85]. L'intérêt de cette preuve est qu'elle est parallèle à la preuve du théorème de l'indice, et que la formule de Paul Lévy y joue encore un rôle crucial. Naturellement, ce n'est pas un hasard.

4. Invariants η et torsion analytique de Ray-Singer

Avec Cheeger [BC89], j'étudie la limite adiabatique des invariants η des variétés fibrées. Nous construisons les formes de transgression $\widetilde{\eta}$ dans le formalisme du théorème local d'indice des familles. Dans [BC92], nous appliquons ce résultat pour donner une nouvelle preuve de la conjecture de Hirzebruch sur la signature des variétés modulaires de Hilbert, qui avait été démontrée par Atiyah-Donnelly-Singer [ADS83].

Dans une série d'articles avec Gillet et Soulé [BGS88a, BGS88b, BGS88c], nous démontrons un théorème de courbure pour la métrique de Quillen sur le déterminant de l'image directe d'un fibré holomorphe. Nous y intégrons le formalisme de la double transgression de Bott et Chern. Le résultat principal est obtenu par la vérification de la compatibilité des constructions de [BF86a, BF86b] à la géométrie complexe, et aussi par la démonstration de formules d'anomalie étendant les formules de Polyakov. Ce résultat n'est en aucun cas une conséquence directe de mes travaux avec Freed.

L'objectif de Gillet et Soulé est de montrer un théorème arithmétique en géométrie d'Arakelov, en suivant la voie ouverte par Grothendieck, par utilisation de propriétés de fonctorialité.

Je m'intéresse de très près au problème de la fonctorialité par immersion des métriques de Quillen, d'autant plus que l'intégrale fonctionnelle révèle l'importance du rôle de l'immersion de X dans LX.

Avec Vasserot [BV89], répondant à une question de Miyaoka, j'étudie l'asymptotique de la torsion analytique holomorphe des puissances d'un fibré en droites positif, par les méthodes utilisées dans [Bis87a] pour la preuve des inégalités de Demailly.

Dans [Bis90b], j'applique le formalisme des superconnexions à la question des immersions, et démontre la convergence de formes de superconnexion en tant que courants. Dans [BGS90a, BGS90b], Gillet, Soulé et moi-même construisons des courants de Bott-Chern associés à des plongements complexes, et nous montrons leur fonctorialité.

L'intégrale fonctionnelle m'indique que la torsion analytique holomorphe s'écrit formellement comme l'intégrale d'un courant de Bott-Chern sur l'espace des lacets. L'étude du comportement de la métrique de Quillen par immersion peut s'interpréter géométriquement sur l'espace des lacets comme un problème d'intersection avec excès. Il s'agit là de considérations formelles, dont seules des preuves rigoureuses confirmeront a posteriori la vérité.

Dans [Bis90a], j'accomplis une étape que je crois décisive pour établir la formule d'immersion. Gillet et Soulé [GS91] avaient conjecturé l'apparition de leur genre $R(x)$, dont le développement fait apparaître des dérivées de la fonction zêta de Riemann aux entiers négatifs impairs. La formule d'immersion devait elle-même contenir ce genre R. Or le schéma de preuve que j'élabore pour calculer la formule fait apparaître des classes caractéristiques exotiques, qui expriment l'excès dans une formule d'intersection en dimension infinie. Dans [Bis90a], le calcul est mené rigoureusement et fait effectivement apparaître le genre R.

Avec Bost [BB90], j'étudie le comportement de la métrique de Quillen associée à une surface de Riemann, lorsque celle-ci dégénère avec des singularités ordinaires. Je reprendrai cette question dans [Bis97b] en dimension relative arbitraire.

Avec Cheeger [BC90a, BC90b, BC91], nous démontrons un théorème d'indice pour une famille de variétés à bord. La contribution du bord à la formule d'indice fait apparaître les formes $\widetilde{\eta}$ décrites précédemment. Ce résultat doit être vu comme un prolongement de résultats d'Atiyah-Patodi-Singer [APS75] et Cheeger [Che83].

Dans [BL91], un travail de longue haleine mené avec Lebeau nous conduit à la démonstration de la formule d'immersion rêvée pour les métriques de Quillen. Bien que le plan général de la démonstration soit simple, sa mise en œuvre est techniquement difficile, et requiert de mêler à la fois des techniques d'analyse fonctionnelle, et des méthodes de théorie d'indice local. Les objets locaux construits dans [Bis90a, BGS90a, BGS90b] apparaissent effectivement dans la démonstration, dans une formule exprimant des objets secondaires globaux à l'aide d'objets secondaires locaux. Gillet et Soulé [GS92] utiliseront ce résultat pour achever leur démonstration d'un théorème de Riemann-Roch-Grothendieck en géométrie d'Arakelov.

Avec Köhler [BK92], je m'attaque ensuite à la démonstration de formules d'anomalie pour les formes de torsion analytique holomorphe.

Dans [Bis92a], je montre une formule d'excès en K-théorie pour des courants de Bott-Chern. Dans [Bis92b], je montre une autre formule d'excès pour des courants de Bott-Chern, qui appliquée en dimension infinie, redonne formellement le résultat démontré avec Lebeau sur le comportement de la métrique de Quillen par immersion. Ce texte donne quelques clés sur le travail préparatoire ayant mené à un schéma de démonstration de la formule d'immersion.

Avec Zhang [BZ92], nous donnons une extension du théorème de Cheeger-Müller : ce résultat dit que la torsion de Ray-Singer [RS71] en théorie de de Rham est égale à la torsion de Reidemeister [Rei35], un invariant combinatoire. Nous formulons la question comme étant la comparaison de deux métriques sur le déterminant de la cohomologie d'un fibré plat, l'une construite analytiquement, l'autre par une méthode combinatoire. Nous utilisons pour cela la déformation du complexe de de Rham suggérée par Witten [Wit82], ainsi que des résultats de Helffer-Sjöstrand [HS85] et de Laudenbach (ceux-ci sont contenus dans l'appendice de [BZ92]). Pour des fibrés plats arbitraires, notre formule explicite un terme de défaut local dans la comparaison des deux métriques. Dans [BZ94], nous étendons ces résultats dans un contexte équivariant, et nous simplifions radicalement nos preuves antérieures, en remplaçant les arguments d'Helffer-Sjöstrand par des considérations géométriques inspirées de Laudenbach. Avec Zhang [BZ93], nous étudions le comportement de l'invariant η par immersion.

Avec Berthomieu [BB94], nous montrons une formule de compatibilité des formes de torsion analytique à la composition de deux submersions quand la base de la seconde submersion est un point. La démonstration met en œuvre des techniques de limite adiabatique, le théorème d'indice local, et des méthodes inspirées de Dai et Melrose [DM12].

Dans [Bis94, Bis95], j'étends les résultats obtenus pour les immersions en situation équivariante. J'obtiens ainsi l'extension équivariante du genre R, ainsi qu'une formule d'immersion pour le déterminant équivariant.

Dans [BL95], avec Lott, je démontre un théorème de Riemann-Roch-Grothendieck pour les images directes par submersion de fibrés plats. La preuve utilise le formalisme des superconnexions. Dans [BL97], Lott et moi-même appliquons ce résultat au cas de $\mathrm{SL}\,(n, \mathbf{Z})$-fibrés.

Dans [Bis97a], je démontre la compatibilité des formes de torsion holomorphes à la composition d'une immersion et d'une submersion.

Dans un travail avec Labourie [BL99], nous donnons une preuve des formules de Verlinde par application de la formule de Riemann-Roch-Kawasaki à l'espace des modules des fibrés plats sur une surface de Riemann.

Avec Goette [BG00], je montre la compatibilité de deux versions de la torsion analytique équivariante holomorphe. Ce résultat confirme le principe suivant lequel la torsion holomorphe est l'intégrale sur l'espace des lacets d'un courant existant universellement, même en dimension finie. La formule obtenue n'est que la manifestation d'un principe de fonctorialité pour ces courants.

Avec Goette [BG01], nous étendons les résultats obtenus avec Zhang aux formes de torsion analytique de de Rham. On montre en particulier des résultats de rigidité des formes de torsion analytique. On calcule ces formes explicitement sous une hypothèse très forte d'existence d'une fonction de Morse dans les fibres.

Avec Goette, dans [BG04], nous obtenons un résultat de comparaison de deux versions des formes de torsion en théorie de de Rham. Le formalisme cohomologique sur l'espace des lacets est subtil. On obtient une formule exprimant la différence entre les objets à l'aide d'un nouvel objet, le V-invariant. La torsion analytique de de Rham est-elle même formellement le V-invariant de l'espace des lacets. Le V-invariant se localise naturellement sur les points critiques d'une fonction de Morse-Bott.

Dans [Bis04], je montre que les formes de torsion équivariante holomorphe du complexe de de Rham sont nulles. Ce résultat est obtenu par comparaison de ces formes aux formes que j'avais construites avec Lott en théorie de de Rham. Cette torsion est en effet un terme peu explicite apparaissant dans la formule de points fixes de Köhler-Rössler en géométrie d'Arakelov. Le fait que cette torsion soit nulle est intéressant et a été exploité par Burgos, Freixas and Litcanu [BGFiML14]. .

5. Théorie de Hodge et laplacien hypoelliptique

Si on admet le paradigme décrit précédemment sur le V-invariant, la torsion analytique de de Rham devrait se localiser naturellement sur les points critiques de toute fonctionnelle naturelle sur l'espace des lacets, comme la fonctionnelle d'énergie. Ces considérations sont le point de départ de [Bis05], où je construis une déformation du laplacien de Hodge d'une variété riemannienne X, en une famille de laplaciens hypoelliptiques sur l'espace total $\mathcal{X}^*$ du fibré cotangent T^*X, qui interpole entre le laplacien usuel et le générateur du flot géodésique. Le laplacien hypoelliptique est essentiellement une somme pondérée de l'oscillateur harmonique de la fibre et du générateur du flot géodésique sur $\mathcal{X}^*$. Les équations de mécanique aléatoire dégagées dans [Bis73, Bis81e] réapparaissent ici dans un contexte géométrique.

Dans un travail mené avec Lebeau [BL08], nous démontrons une série de résultats d'analyse sur le laplacien hypoelliptique. Un calcul adéquat y est développé, qui permet de montrer que le laplacien hypoelliptique est bien une déformation du laplacien de Hodge usuel. Nous vérifions que la torsion analytique du laplacien hypoelliptique est égale à la torsion analytique du laplacien elliptique. Plus précisément, on montre que la métrique de Ray-Singer sur le déterminant de la cohomologie d'un fibré plat coïncide avec la métrique hypoelliptique correspondante, qu'on construit à l'aide du laplacien hypoelliptique.

Dans [Bis06], nous relions la construction du laplacien hypoelliptique en théorie de de Rham au théorème de Chern-Gauss-Bonnet. Dans l'article [Bis08c], nous donnons plusieurs motivations heuristiques qui toutes aboutissent à la construction du laplacien hypoelliptique de [Bis05].

Dans [Bis08a], nous montrons que tout opérateur de Dirac sur une variété compacte X possède une déformation hypoelliptique agissant sur l'espace total $\mathcal{X}$ du fibré tangent TX. Cette déformation est différente de celle qui a été traitée en [Bis05], bien qu'au niveau des symboles des opérateurs, elle soit de même nature. Pour les variétés complexes kählériennes, elle permet d'obtenir une déformation du laplacien de Hodge associé au complexe de Dolbeault. Dans ce cas, la déformation hypoelliptique fait intervenir le complexe de Koszul de la fibre TX. Nous relions la métrique de Quillen hypoelliptique à la métrique de Quillen elliptique par une formule où intervient le genre R de Gillet-Soulé.

Dans [Bis08d], nous donnons une présentation synthétique de la construction du laplacien hypoelliptique en théorie de de Rham, et aussi pour l'opérateur de Dirac.

6. Laplacien hypoelliptique et formule de traces

Dans [Bis08b], nous amorçons l'application de la théorie du laplacien hypoelliptique aux espaces symétriques. Cet article est consacré à une nouvelle dérivation de la formule de Poisson pour le noyau de la chaleur sur un groupe de Lie compact à l'aide d'un laplacien hypoelliptique. Ce travail s'inscrit dans le prolongement de travaux de Frenkel [Fre84] et Atiyah [Ati85].

L'opérateur de Dirac de Kostant joue un rôle clef dans la construction du laplacien hypoelliptique adapté à la situation considérée. Cet opérateur est distinct des opérateurs décrits précédemment. Sa construction a deux motivations.

(1) On souhaite montrer le lien entre le noyau de la chaleur sur le groupe et la cohomologie équivariante de son espace de lacets, la déformation hypoelliptique réalisant explicitement la preuve de la formule de localisation de Berline-Vergne correspondante.

(2) Il s'agit de mettre à l'épreuve les méthodes que nous comptons appliquer ultérieurement aux espaces symétriques de type non compact.

Dans [Bis09, Bis11b], nous réalisons le programme décrit précédemment. Soit en effet G un groupe réductif d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, soit $K \subset G$ un compact maximal, et soit $X = G/K$ l'espace symétrique correspondant. Soit $\gamma \in G$ un élément semi-simple, et soit $\rho : K \to \mathrm{Aut}(E)$ une représentation unitaire de K, de telle sorte que E descend en un fibré Hermitien F sur X. Dans [Bis09, Bis11b], on donne une formule explicite pour l'intégrale orbitale associée à $\exp\left(t\Delta^X/2\right)$, où $-\Delta^X$ est l'action du Casimir sur $C^\infty(X, F)$. Plus généralement, si $\mu : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction paire à décroissance rapide dont la transformée de Fourier est à décroissance gaussienne, on obtient une formule correspondante pour l'intégrale orbitale associée à $\mu\left(\sqrt{-\Delta^X + c}\right)$. On utilise encore l'opérateur de Dirac de Kostant. Le laplacien hypoelliptique agit ici sur $G \times_K \mathfrak{g} \simeq X \times \mathfrak{g}$. Les démonstrations utilisent de manière essentielle des techniques probabilistes issues du calcul de Malliavin, et également une application systématique du théorème de Toponogov, de manière à contrôler quantitativement la convergence de la diffusion hypoelliptique vers le flot géodésique, quand le paramètre b de déformation hypoelliptique tend vers $+\infty$. Les formules de [Bis11b] ressemblent, au moins formellement, aux formules d'indice d'Atiyah-Singer. Le rôle du $\widehat{A}$-genre est rempli ici par une fonction $J_\gamma\left(Y_0^k\right)$ définie sur la partie compacte $\mathfrak{k}(\gamma)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{z}(\gamma)$ du centralisateur $Z(\gamma)$.

Dans [Bis11a, Bis12], nous présentons l'ensemble des idées qui relient indice, intégration sur l'espace des lacets, formules de localisation, et laplacien hypoelliptique. Ces deux articles donnent une approche non technique des idées décrites précédemment.

Des travaux de Bergeron et Venkatesh [BV13] d'une part, de Müller [Mül12] d'autre part, ont montré l'intérêt de l'étude de l'asymptotique de la torsion analytique en théorie de de Rham, soit lorsqu'on monte dans la tour des revêtements de la variété considérée, soit lorsqu'on fait croître le fibré plat vers « l'infini » de manière convenable. Avec Ma et Zhang [BMZ11, BMZ17], nous donnons un calcul de l'asymptotique de la torsion analytique d'une variété compacte, lorsque les fibrés plats sont des images directes holomorphes F_p des puissances L^p d'un fibré en droites positif L le long des fibres complexes d'une fibration plate au dessus de la variété considérée. Sous une hypothèse forte de non platitude d'une métrique, on calcule la torsion asymptotique. Quand la variété est un espace localement symétrique, on retrouve ces résultats en utilisant les formules de trace de [Bis11b].

Dans [Bis19], nous appliquons les méthodes du laplacien hypoelliptique pour obtenir à nouveau des résultats de Moscovici et Stanton [MS89] sur le calcul des invariants êta d'opérateurs de Dirac sur les espaces localement symétriques. Une telle extension n'allait pas de soi. Dans [Bis11b], nous n'avions en effet traité que les intégrales orbitales associées à l'opérateur de Casimir. Ici, il s'agit de faire intervenir l'opérateur de Dirac classique, dont le carré coïncide avec le Casimir à un opérateur constant près. Pour résoudre cette difficulté, le formalisme des superconnexions de Quillen s'applique à nouveau. Nous avions en effet montré que l'invariant êta s'écrit naturellement comme une transgression dans le formalisme des superconnexions. Dans le contexte de la formule des traces, ce formalisme peut à nouveau être utilisé, mais avec une signification différente. La déformation hypoelliptique a maintenant deux paramètres, le paramètre $b > 0$ originel, et le paramètre ϑ qui exprime une rotation dans l'algèbre de Clifford.

Dans un article avec Shen [BS22, BS19], nous étendons les formules de [Bis11b] à tous les noyaux naturels sur un espace symétrique associés au centre de l'algèbre enveloppante. Nos résultats prennent comme point de départ les formules de [Bis11b] où seul apparaît le Casimir. On utilise des méthodes de déformation inspirées d'Harish-Chandra pour évaluer les intégrales orbitales semi-simples quand γ est régulier, puis des arguments de limite quand γ est semi-simple sans être nécessairement régulier. Les symétries cachées de la fonction $J_\gamma\left(Y_0^\gamma\right)$ interviennent dans les preuves. La fonction J_γ s'exprime en effet simplement à l'aide des racines imaginaires.

7. Cohomologie de Bott-Chern et théorème de Riemann-Roch

Soit $\pi : M \to S$ une projection holomorphe propre, soit F un fibré holomorphe sur M, et soit $R^{\cdot}\pi_* F$ sont image directe dérivée, qu'on suppose localement libre. Soit $H_{\mathrm{BC}}^{(=)}(S, \mathbf{C})$ la cohomologie de Bott-Chern de S, qui est le quotient de l'espace des formes fermées qui sont somme de formes de type (p, p) par l'image de $\overline{\partial}\partial$. Dans [Bis11c, Bis13], nous démontrons le théorème de Riemann-Roch-Grothendieck attendu dans $H_{\mathrm{BC}}^{(=)}(S, \mathbf{C})$, sans aucune autre hypothèse. Dans le cas où les variétés sont projectives, ou même kählériennes, ce résultat était déjà connu. Dans le cas général, les preuves analytiques traditionnelles échouent pour des raisons fondamentales. Plus précisément, en général, les « annulations extraordinaires » que nous avions utilisées avec Gillet et Soulé dans [BGS88a, BGS88b] ne se produisent plus. Bien plus la déformation hypoelliptique du complexe de Dolbeault-Hodge que nous avions introduite dans [Bis08a] ne permet pas d'obtenir le résultat. Dans [Bis11c, Bis13], on construit une déformation hypoelliptique exotique de la théorie de Hodge pour le complexe de Dolbeault. Dans le laplacien hypoelliptique correspondant, le potentiel quadratique traditionnel associé à l'oscillateur harmonique de la fibre est remplacé par une potentiel d'ordre 4. Pour ce nouveau laplacien, on peut montrer que les « annulations extraordinaires » se produisent encore, ce qui permet d'obtenir le résultat.

Dans un travail avec Shen et Wei [BSW21], nous levons les restrictions imposées par les résultats de [Bis13]. L'article [BSW21] contient deux progrès significatifs.

(1) Le premier est la construction d'un caractère de Chern défini sur $K_{\cdot}(X)$, le groupe de Grothendieck des faisceaux cohérents sur X, qui prend ses valeurs dans $H_{\mathrm{BC}}^{(=)}(X, \mathbf{R})$. On utilise une équivalence de catégories démontrée par Block [Blo10] entre la catégorie dérivée $D_{\mathrm{coh}}^{\mathrm{b}}(X)$, et la catégorie des superconnexions antiholomorphes. On peut alors développer une théorie de Chern-Weil pour les superconnexions de Block, et obtenir un caractère de Chern pour les faisceaux cohérents.

(2) La démonstration du théorème de Riemann-Roch-Grothendieck pour les superconnexions antiholomophes. Pour les immersions, on utilise la déformation au cône normal, pour les submersions, on utilise le laplacien hypoelliptique comme dans [Bis13].

8. Sections de Fried

Dans un travail avec Shen [BS25], nous donnons une formulation très générale de la conjecture de Fried [Fri87]. Soit Z est un champ de vecteurs d'Anosov sur une variété compacte connexe Y, et soit F un fibré vectoriel complexe plat sur Y muni d'une métrique plate. On peut définir une fonction zêta dynamique associée, suivant les méthodes de Ruelle. La conjecture de Fried prévoit que cette fonction a un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, et de plus que si la fonction est bien définie en 0, le module de sa valeur en 0 est égal à la torsion de Reidemeister ou de Ray-Singer correspondante.

Dans l'article, nous construisons une section canonique non nulle $\tau\left(i_Z\right)$ de $\det H\left(Y,F\right)$. Quand il n'y a pas de résonance (ce qui veut dire que L_Z est inversible), cette section peut être identifiée à la valeur en 0 de la fonction zêta de Fried. L'article utilise les techniques de Faure-Sjöstrand [FS11] et Dyatlov-Zworski [DZ19] relatives à la théorie spectrale des champs de vecteurs d'Anosov.

Références

[ADS83] M. F. Atiyah, H. Donnelly, and I. M. Singer, *Eta invariants, signature defects of cusps, and values of L-functions*, Ann. of Math. (2) **118** (1983), no. 1, 131–177. MR 86g :58134a

[APS75] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **77** (1975), 43–69. MR 53 #1655a

[Ati85] M. F. Atiyah, *Circular symmetry and stationary-phase approximation*, Astérisque (1985), no. 131, 43–59, Colloquium in honor of Laurent Schwartz, Vol. 1 (Palaiseau, 1983). MR 87h :58206

[BB90] J.-M. Bismut and J.-B. Bost, *Fibrés déterminants, métriques de Quillen et dégénérescence des courbes*, Acta Math. **165** (1990), no. 1-2, 1–103. MR 91h :58122

[BB94] A. Berthomieu and J.-M. Bismut, *Quillen metrics and higher analytic torsion forms*, J. Reine Angew. Math. **457** (1994), 85–184. MR 96d :32036

[BC89] J.-M. Bismut and J. Cheeger, *η-invariants and their adiabatic limits*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), no. 1, 33–70. MR 966608 (89k :58269)

[BC90a] ———, *Families index for manifolds with boundary, superconnections, and cones. I. Families of manifolds with boundary and Dirac operators*, J. Funct. Anal. **89** (1990), no. 2, 313–363. MR 91e :58180

[BC90b] ———, *Families index for manifolds with boundary, superconnections and cones. II. The Chern character*, J. Funct. Anal. **90** (1990), no. 2, 306–354. MR 91e :58181

[BC91] ———, *Remarks on the index theorem for families of Dirac operators on manifolds with boundary*, Differential geometry, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., vol. 52, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991, pp. 59–83. MR MR1173033 (93k :58211)

[BC92] ———, *Transgressed Euler classes of* $\mathrm{SL}(2n,\mathbf{Z})$ *vector bundles, adiabatic limits of eta invariants and special values of L-functions*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **25** (1992), no. 4, 335–391. MR 94e :57042

[BF86a] J.-M. Bismut and D.S. Freed, *The analysis of elliptic families. I. Metrics and connections on determinant bundles*, Comm. Math. Phys. **106** (1986), no. 1, 159–176. MR 88h :58110a

[BF86b] ———, *The analysis of elliptic families. II. Dirac operators, eta invariants, and the holonomy theorem*, Comm. Math. Phys. **107** (1986), no. 1, 103–163. MR 88h :58110b

[BG00] J.-M. Bismut and S. Goette, *Holomorphic equivariant analytic torsions*, Geom. Funct. Anal. **10** (2000), no. 6, 1289–1422. MR 1 810 746

[BG01] ______, *Families torsion and Morse functions*, Astérisque (2001), no. 275, x+293. MR 2002h :58059

[BG04] ______, *Equivariant de Rham torsions*, Ann. of Math. (2) **159** (2004), no. 1, 53–216. MR 2051391 (2005f :58059)

[BGFiML14] J. I. Burgos G., G. Freixas i Montplet, and R. Liţcanu, *Generalized holomorphic analytic torsion*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **16** (2014), no. 3, 463–535. MR 3165730

[BGS88a] J.-M. Bismut, H. Gillet, and C. Soulé, *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. I. Bott-Chern forms and analytic torsion*, Comm. Math. Phys. **115** (1988), no. 1, 49–78. MR 89g :58192a

[BGS88b] ______, *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. II. Direct images and Bott-Chern forms*, Comm. Math. Phys. **115** (1988), no. 1, 79–126. MR 89g :58192b

[BGS88c] ______, *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. III. Quillen metrics on holomorphic determinants*, Comm. Math. Phys. **115** (1988), no. 2, 301–351. MR 89g :58192c

[BGS90a] ______, *Bott-Chern currents and complex immersions*, Duke Math. J. **60** (1990), no. 1, 255–284. MR 91d :58239

[BGS90b] ______, *Complex immersions and Arakelov geometry*, The Grothendieck Festschrift, Vol. I, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 249–331. MR MR1086887 (92a :14019)

[Bis73] J.-M. Bismut, *Conjugate convex functions in optimal stochastic control*, J. Math. Anal. Appl. **44** (1973), 384–404. MR 48 #8067

[Bis74] ______, *An example of optimal stochastic control with constraints*, SIAM J. Control **12** (1974), 401–418. MR 51 #5134

[Bis75] ______, *Growth and optimal intertemporal allocation of risks*, J. Econom. Theory **10** (1975), no. 2, 239–257. MR 55 #11928

[Bis76a] ______, *Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients*, SIAM J. Control Optimization **14** (1976), no. 3, 419–444. MR 53 #10449

[Bis76b] ______, *Théorie probabiliste du contrôle des diffusions*, Mem. Amer. Math. Soc. **4** (1976), no. 167, xiii+130. MR 56 #11428

[Bis77a] ______, *Contrôle stochastique, jeux et temps d'arrêt : applications de la théorie probabiliste du potentiel*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **39** (1977), no. 4, 315–338. MR 58 #31378

[Bis77b] ______, *Dualité convexe, temps d'arrêt optimal et contrôle stochastique*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **38** (1977), no. 3, 169–198. MR 55 #11377

[Bis77c] ______, *Probability theory methods in zero-sum stochastic games*, SIAM J. Control Optimization **15** (1977), no. 4, 539–545. MR 58 #15609

[Bis77d] ______, *Sur un problème de Dynkin*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **39** (1977), no. 1, 31–53. MR 56 #2576

[Bis78a] ______, *Control of jump processes and applications*, Bull. Soc. Math. France **106** (1978), no. 1, 25–60. MR 80a :60063

[Bis78b] ______, *Contrôle des systèmes linéaires quadratiques : applications de l'intégrale stochastique*, Séminaire de Probabilités, XII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1976/1977), Lecture Notes in Math., vol. 649, Springer, Berlin, 1978, pp. 180–264. MR MR520007 (80e :93132)

[Bis78c] ______, *Duality methods in the control of densities*, SIAM J. Control Optim. **16** (1978), no. 5, 771–777. MR 58 #26461

[Bis78d] ______, *An introductory approach to duality in optimal stochastic control*, SIAM Rev. **20** (1978), no. 1, 62–78. MR 57 #9256

[Bis79a] ______, *Contrôle de processus alternants et applications*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **47** (1979), no. 3, 241–288. MR 80g :60045

[Bis79b] ———, *Potential theory in optimal stopping and alternating processes*, Stochastic control theory and stochastic differential systems (Proc. Workshop, Deutsch. Forschungsgemeinsch., Univ. Bonn, Bad Honnef, 1979), Lecture Notes in Control and Information Sci., vol. 16, Springer, Berlin, 1979, pp. 285–293. MR MR547478 (81d :60074)

[Bis79c] ———, *Problèmes à frontière libre et arbres de mesures*, Séminaire de Probabilités, XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/78), Lecture Notes in Math., vol. 721, Springer, Berlin, 1979, pp. 495–520. MR MR544820 (82d :60129)

[Bis79d] ———, *Temps d'arrêt optimal, quasi-temps d'arrêt et retournement du temps*, Ann. Probab. **7** (1979), no. 6, 933–964. MR 81d :60052

[Bis80] ———, *Duality methods in the control of semimartingales*, Analysis and optimisation of stochastic systems (Proc. Internat. Conf., Univ. Oxford, Oxford, 1978), Academic Press, London, 1980, pp. 49–72. MR 83g :93041

[Bis81a] ———, *Convex inequalities in stochastic control*, J. Funct. Anal. **42** (1981), no. 2, 226–270. MR 83k :49026

[Bis81b] ———, *A generalized formula of Itô and some other properties of stochastic flows*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **55** (1981), no. 3, 331–350. MR MR608026 (82e :60093)

[Bis81c] ———, *Martingales, the Malliavin calculus and Hörmander's theorem*, Stochastic integrals (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1980), Lecture Notes in Math., vol. 851, Springer, Berlin, 1981, pp. 85–109. MR 82h :60114

[Bis81d] ———, *Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander's conditions*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **56** (1981), no. 4, 469–505. MR 82k :60134

[Bis81e] ———, *Mécanique aléatoire*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 866, Springer-Verlag, Berlin, 1981, With an English summary. MR MR629977 (84a :70002)

[Bis82] ———, *Mécanique aléatoire*, Tenth Saint Flour Probability Summer School—1980 (Saint Flour, 1980), Lecture Notes in Math., vol. 929, Springer, Berlin, 1982, pp. 1–100. MR MR665595 (84g :60088)

[Bis83] ———, *Le théorème d'Atiyah-Singer pour les opérateurs elliptiques classiques : une approche probabiliste*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **297** (1983), no. 8, 481–484. MR 85b :58119

[Bis84a] ———, *The Atiyah-Singer theorems : a probabilistic approach. II. The Lefschetz fixed point formulas*, J. Funct. Anal. **57** (1984), no. 3, 329–348. MR 86g :58128b

[Bis84b] ———, *The calculus of boundary processes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **17** (1984), no. 4, 507–622. MR 86d :60087

[Bis84c] ———, *Jump processes and boundary processes*, Stochastic analysis (Katata/Kyoto, 1982), North-Holland Math. Library, vol. 32, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 53–104. MR MR780753 (87c :60046)

[Bis84d] ———, *Large deviations and the Malliavin calculus*, Progress in Mathematics, vol. 45, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1984. MR MR755001 (86f :58150)

[Bis84e] ———, *On the set of zeros of certain semimartingales*, Proc. London Math. Soc. (3) **49** (1984), no. 1, 73–86. MR 86a :60059

[Bis85a] ———, *Index theorem and equivariant cohomology on the loop space*, Comm. Math. Phys. **98** (1985), no. 2, 213–237. MR 86h :58129

[Bis85b] ———, *The infinitesimal Lefschetz formulas : a heat equation proof*, J. Funct. Anal. **62** (1985), no. 3, 435–457. MR 87a :58144

[Bis85c] ———, *Last exit decompositions and regularity at the boundary of transition probabilities*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **69** (1985), no. 1, 65–98. MR 86i :60192

[Bis86a] ———, *The Atiyah-Singer index theorem for families of Dirac operators : two heat equation proofs*, Invent. Math. **83** (1986), no. 1, 91–151. MR 87g :58117

[Bis86b] ———, *Localization formulas, superconnections, and the index theorem for families*, Comm. Math. Phys. **103** (1986), no. 1, 127–166. MR 87f :58147

[Bis87a] ———, *Demailly's asymptotic Morse inequalities : a heat equation proof*, J. Funct. Anal. **72** (1987), no. 2, 263–278. MR 88j :58131

[Bis87b] ———, *Filtering equation, equivariant cohomology and the Chern character*, VIIIth international congress on mathematical physics (Marseille, 1986), World Sci. Publishing, Singapore, 1987, pp. 17–56. MR 90c :58172

[Bis90a] ———, *Koszul complexes, harmonic oscillators, and the Todd class*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 1, 159–256, With an appendix by the author and C. Soulé. MR 91b :58245

[Bis90b] ———, *Superconnection currents and complex immersions*, Invent. Math. **99** (1990), no. 1, 59–113. MR 91b :58240

[Bis92a] ———, *Bott-Chern currents, excess normal bundles and the Chern character*, Geom. Funct. Anal. **2** (1992), no. 3, 285–340. MR 94a :58206

[Bis92b] ———, *Complex equivariant intersection, excess normal bundles and Bott-Chern currents*, Comm. Math. Phys. **148** (1992), no. 1, 1–55. MR 94a :58207

[Bis94] ———, *Equivariant short exact sequences of vector bundles and their analytic torsion forms*, Compositio Math. **93** (1994), no. 3, 291–354. MR 96g :58201

[Bis95] ———, *Equivariant immersions and Quillen metrics*, J. Differential Geom. **41** (1995), no. 1, 53–157. MR 1316553 (96m :58261)

[Bis97a] ———, *Holomorphic families of immersions and higher analytic torsion forms*, Astérisque (1997), no. 244, viii+275. MR 1623496 (2000b :58057)

[Bis97b] ———, *Quillen metrics and singular fibres in arbitrary relative dimension*, J. Algebraic Geom. **6** (1997), no. 1, 19–149. MR 1486991 (2000a :58084)

[Bis04] ———, *Holomorphic and de Rham torsion*, Compos. Math. **140** (2004), no. 5, 1302–1356. MR 2081158 (2005h :58054)

[Bis05] ———, *The hypoelliptic Laplacian on the cotangent bundle*, J. Amer. Math. Soc. **18** (2005), no. 2, 379–476 (electronic). MR MR2137981

[Bis06] J.-M. Bismut, *The hypoelliptic Laplacian and Chern-Gauss-Bonnet*, Differential geometry and physics, Nankai Tracts Math., vol. 10, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006, pp. 38–52. MR MR2322387 (2008e :58045)

[Bis08a] J.-M. Bismut, *The hypoelliptic Dirac operator*, Geometry and dynamics of groups and spaces, Progr. Math., vol. 265, Birkhäuser, Basel, 2008, pp. 113–246. MR MR2402405

[Bis08b] ———, *The hypoelliptic Laplacian on a compact Lie group*, J. Funct. Anal. **255** (2008), no. 9, 2190–2232. MR MR2473254

[Bis08c] ———, *Loop spaces and the hypoelliptic Laplacian*, Comm. Pure Appl. Math. **61** (2008), no. 4, 559–593. MR MR2383933

[Bis08d] ———, *A survey of the hypoelliptic Laplacian*, Astérisque (2008), no. 322, 39–69, Géométrie différentielle, physique mathématique, mathématiques et société. II. MR 2521653 (2010j :58044)

[Bis09] ———, *Laplacien hypoelliptique et intégrales orbitales*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **347** (2009), no. 19-20, 1189–1195. MR 2567001 (2010j :58045)

[Bis11a] ———, *Duistermaat-Heckman formulas and index theory*, Geometric Aspects of Analysis and Mechanics, Progr. Math., vol. 292, Birkhäuser/Springer, New York, 2011, pp. 1–55. MR 2809466

[Bis11b] ———, *Hypoelliptic Laplacian and orbital integrals*, Annals of Mathematics Studies, vol. 177, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011. MR 2828080

[Bis11c] ———, *Laplacien hypoelliptique et cohomologie de Bott-Chern*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **349** (2011), no. 1-2, 75–80. MR 2755701 (2012e :58063)

[Bis12] ———, *Index theory and the hypoelliptic Laplacian*, Metric and differential geometry, Progress in Mathematics, no. 297, Birkhäuser/Springer, Basel, 2012, pp. 181–232. MR 3220444

[Bis13] ———, *Hypoelliptic Laplacian and Bott-Chern cohomology*, Progress in Mathematics, vol. 305, Birkhäuser/Springer, Cham, 2013. MR 3099098

[Bis19] ———, *Eta invariants and the hypoelliptic Laplacian*, J. Eur. Math. Society **21** (2019), no. 8, 2355–2515.

[BK92] J.-M. Bismut and K. Köhler, *Higher analytic torsion forms for direct images and anomaly formulas*, J. Algebraic Geom. **1** (1992), no. 4, 647–684. MR 94a :58209

[BL91] J.-M. Bismut and G. Lebeau, *Complex immersions and Quillen metrics*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1991), no. 74, ii+298 pp. (1992). MR 94a :58205

[BL95] J.-M. Bismut and J. Lott, *Flat vector bundles, direct images and higher real analytic torsion*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), no. 2, 291–363. MR 96g :58202

[BL97] ———, *Torus bundles and the group cohomology of* $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$, J. Differential Geom. **47** (1997), no. 2, 196–236. MR 2000b :58040

[BL99] J.-M. Bismut and F. Labourie, *Symplectic geometry and the Verlinde formulas*, Surveys in differential geometry : differential geometry inspired by string theory, Surv. Differ. Geom., vol. 5, Int. Press, Boston, MA, 1999, pp. 97–311. MR MR1772272 (2001i :53145)

[BL08] J.-M. Bismut and G. Lebeau, *The hypoelliptic Laplacian and Ray-Singer metrics*, Annals of Mathematics Studies, vol. 167, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008. MR MR2441523

[Blo10] J. Block, *Duality and equivalence of module categories in noncommutative geometry*, A celebration of the mathematical legacy of Raoul Bott, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 50, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, pp. 311–339. MR 2648899

[BM81] J.-M. Bismut and D. Michel, *Diffusions conditionnelles. I. Hypoellipticité partielle*, J. Funct. Anal. **44** (1981), no. 2, 174–211. MR 83i :60089a

[BM82] ———, *Diffusions conditionnelles. II. Générateur conditionnel. Application au filtrage*, J. Funct. Anal. **45** (1982), no. 2, 274–292. MR 83i :60089b

[BMZ11] J.-M. Bismut, X. Ma, and W. Zhang, *Opérateurs de Toeplitz et torsion analytique asymptotique*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **349** (2011), no. 17–18, 977–981. MR 2838248

[BMZ17] ———, *Asymptotic torsion and Toeplitz operators*, J. Inst. Math. Jussieu **16** (2017), no. 2, 223–349. MR 3615411

[BS77] J.-M. Bismut and B. Skalli, *Temps d'arrêt optimal, théorie générale des processus et processus de Markov*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **39** (1977), no. 4, 301–313. MR 58 #31377

[BS19] J.-M. Bismut and S. Shen, *Intégrales orbitales semi-simples et centre de l'algèbre enveloppante*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **357** (2019), no. 11-12, 897–906.

[BS22] J.-M. Bismut and S. Shen, *Geometric orbital integrals and the center of the enveloping algebra*, Compositio Mathematica **158** (2022), no. 6, 1189–1253.

[BS25] J.-M. Bismut and S. Shen, *Anosov vector fields and Fried sections*, Communications in Mathematical Physics **406** (2025), no. 10, 240.

[BSW21] J.-M. Bismut, S. Shen, and Z. Wei, *Coherent sheaves, superconnections, and RRG*, arXiv e-prints **To appear in Progress in Mathematics (Birkhäuser)** (2021).

[BV83] N. Berline and M. Vergne, *Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 2, 539–549. MR 84i :58114

[BV89] J.-M. Bismut and É. Vasserot, *The asymptotics of the Ray-Singer analytic torsion associated with high powers of a positive line bundle*, Comm. Math. Phys. **125** (1989), no. 2, 355–367. MR 91c :58141

[BV13] N. Bergeron and A. Venkatesh, *The asymptotic growth of torsion homology for arithmetic groups*, J. Inst. Math. Jussieu **12** (2013), no. 2, 391–447. MR 3028790

[BZ92] J.-M. Bismut and W. Zhang, *An extension of a theorem by Cheeger and Müller*, Astérisque (1992), no. 205, 235, With an appendix by François Laudenbach. MR 93j :58138

[BZ93] ———, *Real embeddings and eta invariants*, Math. Ann. **295** (1993), no. 4, 661–684. MR 94e :58131

[BZ94] ______, *Milnor and Ray-Singer metrics on the equivariant determinant of a flat vector bundle*, Geom. Funct. Anal. **4** (1994), no. 2, 136–212. MR 96f :58179

[Che83] J. Cheeger, *Spectral geometry of singular Riemannian spaces*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 4, 575–657 (1984). MR 730920

[Dem85] J.-P. Demailly, *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d''-cohomologie*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **35** (1985), no. 4, 189–229. MR 812325

[DM12] X. Dai and R.B.. Melrose, *Adiabatic limit, heat kernel and analytic torsion*, Metric and differential geometry, Progr. Math., vol. 297, Birkhäuser/Springer, Basel, 2012, pp. 233–298. MR 3220445

[DZ19] S. Dyatlov and M. Zworski, *Mathematical theory of scattering resonances*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 200, American Mathematical Society, Providence, RI, 2019. MR 3969938

[Fre84] I. B. Frenkel, *Orbital theory for affine Lie algebras*, Invent. Math. **77** (1984), no. 2, 301–352. MR MR752823 (86d :17014)

[Fri87] D. Fried, *Lefschetz formulas for flows*, The Lefschetz centennial conference, Part III (Mexico City, 1984), Contemp. Math., vol. 58, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 19–69. MR 88k :58138

[FS11] F. Faure and J. Sjöstrand, *Upper bound on the density of Ruelle resonances for Anosov flows*, Comm. Math. Phys. **308** (2011), no. 2, 325–364. MR 2851145

[GS91] H. Gillet and C. Soulé, *Analytic torsion and the arithmetic Todd genus*, Topology **30** (1991), no. 1, 21–54, With an appendix by D. Zagier. MR 92d :14015

[GS92] ______, *An arithmetic Riemann-Roch theorem*, Invent. Math. **110** (1992), no. 3, 473–543. MR 94f :14019

[HS85] B. Helffer and J. Sjöstrand, *Puits multiples en mécanique semi-classique. IV. Étude du complexe de Witten*, Comm. Partial Differential Equations **10** (1985), no. 3, 245–340. MR 87i :35162

[Lév51] P. Lévy, *Wiener's random function, and other Laplacian random functions*, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950 (Berkeley and Los Angeles), University of California Press, 1951, pp. 171–187. MR MR0044774 (13,476b)

[Mal78] P. Malliavin, *Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators*, Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations (Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1976) (New York), Wiley, 1978, pp. 195–263. MR 81f :60083

[MS89] H. Moscovici and R. J. Stanton, *Eta invariants of Dirac operators on locally symmetric manifolds*, Invent. Math. **95** (1989), no. 3, 629–666. MR 90b :58252

[Mül12] W. Müller, *The asymptotics of the Ray-Singer analytic torsion of hyperbolic 3-manifolds*, Metric and differential geometry, Progr. Math., vol. 297, Birkhäuser/Springer, Basel, 2012, pp. 317–352. MR 3220447

[Qui85a] D. Quillen, *Determinants of Cauchy-Riemann operators on Riemann surfaces*, Functional Anal. Appl. **19** (1985), no. 1, 31–34. MR 86g :32035

[Qui85b] ______, *Superconnections and the Chern character*, Topology **24** (1985), no. 1, 89–95. MR 86m :58010

[Rei35] K. Reidemeister, *Homotopieringe und Linsenraüm*, Hamburger Abhandl. (1935), 102–109.

[Ros71] H. Rost, *The stopping distributions of a Markov Process*, Invent. Math. **14** (1971), 1–16. MR 346920

[RS71] D. B. Ray and I. M. Singer, *R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds*, Advances in Math. **7** (1971), 145–210. MR 45 #4447

[Str81a] D. W. Stroock, *The Malliavin calculus, a functional analytic approach*, J. Funct. Anal. **44** (1981), no. 2, 212–257. MR MR642917 (83h :60076)

[Str81b] ______, *The Malliavin calculus and its applications*, Stochastic integrals (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1980), Lecture Notes in Math., vol. 851, Springer, Berlin, 1981, pp. 394–432. MR MR620997 (82k :60092)

[Wit82] E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, J. Differential Geom. **17** (1982), no. 4, 661–692 (1983). MR 84b :58111

Institut de Mathématique d'Orsay, Université Paris-Saclay, Bâtiment 307, 91405 Orsay, France

Email address: jean-michel.bismut@universite-paris-saclay.fr