

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

81 - 06

LES FONCTIONS RESURGENTES
(en trois parties)

Jean ECALLE

Tome II : Les fonctions résurgentes appliquées à l'itération.

Université de Paris-Sud
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

81 - 06

LES FONCTIONS RESURGENTES
(en trois parties)

Jean ECALLE

Tome II : Les fonctions résurgentes appliquées à l'itération.

Université de Paris-Sud
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

LES FONCTIONS RESURGENTES

et leurs applications

Deuxième partie :

LES FONCTIONS RESURGENTES APPLIQUEES A L'ITERATION

(Chapitres 8 à 13)

TABLE DES MATIERE DE LA DEUXIEME PARTIE

<u>Introduction à la deuxième partie.</u>		p 251
<u>Chapitre 8 : Le groupe G° et les groupes apparentés.</u>		
8a : Introduction. La notion de groupe plein.		p 257
8b : Le prototype des groupes pleins et la triade G°, G', G^∞ .		p 265
8c : Résultats classiques relatifs au groupe maximal G^∞ .		p 272
8d : Résultats classiques relatifs au groupe minimal G° .		p 275
8e : Les ultrarayons et l'intervalle de Lie $[G', G^\infty]$.		p 281
8f : La transformation de Borel et l'intervalle critique $[G^\circ, G']$.		p 300
8g : Résumé.		p 306
<u>Chapitre 9 : L'itération continue dans G° et dans les groupes apparentés.</u>		
<u>Le phénomène de la résurgence.</u>		
9a : Introduction. Les quatre équations fondamentales.		p 308
9b : Itération continue dans les groupes G' et G'^- .		p 310
9c : Itération continue dans le groupe G° .		p 321
9d : Itération continue dans les groupes apparentés à G° .		p 328
9e : Les équations de résurgence. Formes déployées et formes restreintes.		
9f : Le cas général (r, α, ρ quelconques)	p 346 \	p 337
9g : Résumé.		p 354
<u>Chapitre 10: Les algèbres de résurgence réduites.</u>		
10a : L'algèbre réduite $\underline{A}(1, \Omega)$.		p 356
10b : Calculs dans l'algèbre réduite.		p 361
10c : Formules de Taylor et décompositions canoniques.		p 371
10d : Décomposition canonique de $\langle f^* \rangle$ et $\langle *f \rangle$.		p 378
10e : Les algèbres réduites $\underline{A}(r, \Omega)$.		p 380
10f : Résumé.		p 383

Chapitre 11 : Le phénomène de l'enrichissement algébrique et les théorèmes d'indépendance.

- 11a : Enrichissement algébrique des extensions. p 384
- 11b : Théorèmes d'indépendance faible. p 391
- 11c : Théorèmes d'indépendance forte. p 397
- 11d : Résumé. p 402

Chapitre 12 : L'analyse harmonique sur G° et les groupes apparentés.

- 12a : Introduction. Fonctions centrales et invariants. p 403
- 12b : Analyse harmonique sur G^+ . p 404
- 12c : Analyse harmonique sur G° . p 415
- 12d : Analyse harmonique sur les groupes apparentés à G° . p 423
- 12e : Calcul pratique des invariants fondamentaux. p 426
- 12f : Le cas général (μ, α, ρ quelconques). Analyse harmonique multiple. p 434
- 12g : Représentation de G° et des groupes apparentés dans des Hilberts.
- 12h : Résumé. p 439 \ p 436

Chapitre 13 : La synthèse harmonique sur G° et les groupes apparentés.

- 13a : Introduction. Position du problème. p 442
- 13b : Synthèse harmonique sur G^+ . p 443
- 13c : Synthèse harmonique sur G° . Existence et construction. p 449
- 13d : Représentants canoniques. Invariants et coinvariants. p 456
- 13e : Représentants canoniques. Le cas unitaire. p 472
- 13f : Représentants canoniques. Le cas binaire. p 476
- 13g : Représentants canoniques. Le cas unilatéral. p 492
- 13h : Représentants canoniques. Le cas bilatéral. p 517
- 13i : Synthèse harmonique sur les groupes apparentés à G° . p 525
- 13j : Le cas général (μ, α, ρ quelconques). Questions connexes. p 526
- 13k : Résumé. p 528

INTRODUCTION A LA DEUXIEME PARTIE

Cette Partie II applique la théorie de la résurgence à l'étude du groupe G° (le groupe de tous les germes de transformations holomorphes tangentes à l'identité et de point fixe donné) ainsi qu'à toute une famille de groupes apparentés.

1. La triade fondamentale G°, G^1, G^∞ .

Il est commode d'envoyer le point fixe à l'infini. Les éléments de G° sont alors représentables par des séries de la forme :

$$(II.1) \quad f(z) = z \left(1 + \sum_{n \geq 1} a_n z^{-n} \right)$$

avec

$$(II.2) \quad \limsup_n |a_n|^{1/n} < \infty$$

La loi de groupe est évidemment la composition des séries : $f, g \rightarrow f \circ g = f(g)$

En remplaçant (II.2) par des conditions de croissance plus générales et en ajoutant deux clauses de plénitude destinées à écarter certains groupes définis par des propriétés étrangères à la croissance (*), on obtient toute une famille de groupes pleins, qui sont dits apparentés à G° . Les plus typiques sont les G^t (resp. G^{t-}) définis pour tout $t \geq 0$ (resp. $t > 0$) par :

$$(II.3) \quad \limsup_n n^{-t} |a_n|^{1/n} < \infty \quad (\text{resp. } \lim_n n^{-t} |a_n|^{1/n} = 0)$$

(*) par exemple : appartenance des a_n à un sous-anneau de \mathbb{C} ; prolongeabilité "sans coupure" de $f(z)$; algébricité de $f(z)$; etc...

La famille des groupes pleins apparentés à G° possède trois éléments remarquables :

- (i) un élément minimal, le groupe G° lui-même
- (ii) un élément médian, le groupe G' , qui est le plus petit groupe de Lie de la famille, c'est-à-dire le plus petit groupe dont chaque élément soit insérable dans un sous-groupe continu à un paramètre.
- (iii) un élément maximal, le groupe G^∞ , consistant en toutes les séries (II.1) sans exclusive.

Le famille se scinde ainsi en trois parties :

- (i) l'intervalle de Lie $[G', G^\infty]$, formé de groupes G dont il y a peu à dire, car ils n'ont que des éléments continument itérables et ne possèdent que trois fonctions centrales α, μ, ρ , au demeurant parfaitement élémentaires.
- (ii) les groupes à cheval sur G' , c'est-à-dire ceux qui ne sont ni des sur-groupes, ni des sous-groupes du groupe médian. Ils sont à tous égards très irréguliers.
- (iii) l'intervalle critique $[G^\circ, G[$, formé de groupes G dont les éléments ne sont presque jamais itérables et sur lesquels existent, outre α, μ, ρ , une infinité dénombrable de fonctions centrales indépendentes.

Ce dernier cas, de loin le plus intéressant, est au centre de la présente étude.

2. Itération continue et résurgence.

Fixons un groupe G dans l'intervalle critique $[G^0, G^1[$.
 Ses éléments f ont pour itérées d'ordre w (réel ou complexe) des séries de la forme :

$$(II.4) \quad f^w(z) = z \left(1 + \sum_{n \geq 1} a_n(w) z^{-n} \right)$$

avec des coefficients $a_n(w)$ polynomiaux en w . Les $a_n(w)$ croissent généralement plus vite que les a_n , si bien que les itérées ne sont qu'exceptionnellement dans G , encore qu'elles soient toujours dans G' . On peut en dire autant des itérateurs directs et inverses, f^* et *f , qui dans le cas-type (*) conjuguent f à la translation l :

$$(II.5) \quad f = {}^*f \circ l \circ f^* \quad \text{avec} \quad {}^*f \circ f^*(z) = z \quad \text{et} \quad l(z) = z + 1$$

Ces itérées et ces itérateurs qui n'appartiennent pas à G sont dits étrangers. Pour les étudier, on doit les soumettre à la transformation de Borel B :

$$(II.6) \quad B : \quad z \rightarrow \delta'(z) ; \quad 1 \rightarrow \delta(z) ; \quad z^{-n} \rightarrow \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \quad (\forall n \geq 1)$$

On montre en effet que les séries $f^w, f^*, {}^*f$, même et surtout quand elles n'appartiennent pas à G , possèdent des transformées de Borel $\tilde{f}^w, \tilde{f}^*, \tilde{{}^*f}$ aux propriétés inattendues. D'une façon précise :

(i) les séries $\tilde{f}^w, \tilde{f}^*, \tilde{{}^*f}$ ont des rayons de convergence non nul.

(ii) elles définissent à l'origine (aux diracs près) des germes analytiques qu'on peut prolonger holomorphiquement le long de tout chemin qui évite le

(*) c'est-à-dire pour $(h, \alpha, \rho) = (1, 1, 0)$ ou encore $(a_1 = 1, a_2 = 0, a_n \forall)$
 On peut se limiter à ce cas, car il donne une bonne idée du cas général.

réseau $\Omega = 2\pi i \mathbb{Z}$. On obtient ainsi trois fonctions résurgentes encore notées $\tilde{f}, f^*, {}^*f$

(iii) ces fonctions résurgentes le sont au sens plein du terme, autrement dit elles vérifient des équations de résurgence. On a ainsi, pour les itérateurs et en se plaçant dans le modèle formel :

$$\left. \begin{aligned} \text{(II.7)} \quad \Delta_\omega f^*(z) &= -A_\omega e^{-\omega(f^*(z)-z)} \\ \text{(II.8)} \quad \Delta_\omega {}^*f(z) &= A_\omega \frac{d}{dz} {}^*f(z) \end{aligned} \right\} (\forall \omega \in \Omega^*)$$

avec des scalaires A_ω qui sont fonction de f . Ces équations de résurgence sont à la base de tout ce qui suit.

3. Enrichissement algébrique et théorèmes d'indépendance.

Les équations (II.7) et (II.8) permettent d'analyser la structure algébrique des extensions de \mathbb{G} obtenues par adjonction d'éléments étrangers (itérées, itérateurs, conjuguantes...). Cette structure, fort différente de la structure de départ et beaucoup plus riche qu'elle, peut être décrite au moyen de pseudovariables particulières, les pseudovariables réduites.

Les équations (II.7) et (II.8) conduisent aussi à des théorèmes d'indépendance, lesquels grosso modo nient l'existence, entre éléments étrangers, de relations autres que les relations de définition et celles qui en découlent élémentairement.

4. Analyse et synthèse harmonique.

Chaque groupe \mathbb{G} de l'intervalle critique $[G^\circ, G']$ possède une infinité de classes de conjugaison que l'on peut paramétrer au moyen des

coefficients $A_\omega = A_\omega(f)$ des équations (II.7) et (II.8). Ceux-ci jouissent en effet d'une propriété d'invariance :

$$(II.9) \quad A_\omega(\tilde{h} \circ f \circ h) = e^{-\omega c} A_\omega(f) \quad (\forall h \in G; h(z) = z + c + O(z^{-1}))$$

qui permet d'en tirer aussitôt des fonctions centrales en nombre suffisant.

L'analyse harmonique sur G consiste à étudier le système complet des invariants $\{A_\omega\}$ leurs rapports avec d'autres invariants du même genre, leur dépendance par rapport à f , leur expression en fonction des coefficients de Taylor a_n , etc...

La synthèse harmonique sur G consiste inversement à partir d'une famille scalaire $\{A_\omega\}$ et à chercher des f qui admettent ces A_ω pour invariants (*). On construit de tels f par l'intermédiaire de leurs itérateurs f^* , lesquels se calculent en résolvant, à l'aide du calcul différentiel étranger, le système infini des équations de résurgence (II.7).

Le groupe minimal G° est le plus intéressant à cet égard car :

- (i) ses classes de conjugaison possèdent des représentants canoniques f_t (qui dépendent d'un paramètre complexe t)
- (ii) la recherche des f_t , ou synthèse canonique, est dominée par une dualité très riche entre les invariants A_ω (qui sont liés à la représentation Δ -stable des pseudovariabes) et des scalaires analogues, les B_ω , dits coinvariants (et qui sont liés à la représentation ∂ -stable des pseudovariabes).

En pratique, la synthèse canonique sur G° amène à distinguer quatre cas de généralité croissante :

(*) En l'absence de "caractères" véritables sur G , la synthèse harmonique ne peut que se réduire à celà.

- (i) le cas unitaire (tous les A_ω sont nuls sauf un)
- (ii) le cas binaire (tous les A_ω sont nuls sauf deux)
- (iii) le cas unilatéral (la "moitié" des A_ω sont nuls)
- (iiii) le cas bilatéral (ou cas général)

Entendus au sens strict, ces cas ont chacun leur physionomie propre. Les cas unitaire et binaire conduisent à des équations algébrico-différentielles et à des solutions parfaitement explicites. Le cas unilatéral conduit à des coinvariants B_ω dont les fonctions génératrices présentent des propriétés tout à fait inattendues. Le cas bilatéral, enfin, admet lui aussi des solutions constructives, mais parfois au prix d'une légère modification du paramétrage en k .

Chapitre 8 : Le groupe G^0 et les groupes apparentés.

Section 8a : Introduction. La notion de groupe plein.

La partie II de ce travail est consacrée au groupe G^0 , constitué par tous les germes (au point ∞) de transformations holomorphes tangentes à l'identité. Nous examinerons aussi toute une série de groupes apparentés à G^0 , notamment les groupes G^t .

Les fonctions résurgentes, construites à la partie I, seront l'outil principal de cette étude. Nous mettrons l'accent sur quatre problèmes, d'ailleurs étroitement liés :

- l'itération continue (ou fractionnaire),
- la structure algébrique des extensions,
- l'analyse harmonique
- la synthèse harmonique.

Afin toutefois de placer d'emblée ces questions dans leur vrai cadre, nous allons commencer par introduire la notion de groupe plein, notion dont G^0 et les G^t sont simplement l'illustration la plus importante. Les groupes pleins généraux ne réapparaîtront que beaucoup plus loin (*) de sorte que le lecteur intéressé par le seul groupe G^0 peut négliger cette section d'introduction.

Soit \mathcal{J} un ensemble ordonné, infini, mais dont chaque élément ne possède qu'un nombre fini d'antécédents. L'ordre strict est noté $<$, l'ordre large \leq . Si deux éléments distincts i, j de \mathcal{J} sont comparables (par exemple $i < j$) mais ne possèdent pas d'intermédiaire (pas de k tel que $i < k < j$) on dit que j suit i . On suppose que tout $i \in \mathcal{J}$ n'est suivi, en ce sens, qu'au plus par un nombre fini d'éléments.

(*) A la partie III, chapitre 17, où nous étudierons six exemples.

Définition 8a1. (Espaces pleins)

Soit \mathcal{J} comme ci-dessus. Un espace vectoriel non vide de suites scalaires $\{a_i\}$ indexées sur \mathcal{J} dit espace plein sur \mathcal{J} si :

(i) il est stable par toute contraction de la forme :

$$\{a_i\} \rightarrow \{\lambda_i a_i\} \quad \text{avec} \quad |\lambda_i| \leq 1$$

(ii) il est stable par les "translations" :

$$\begin{aligned} \{a_i\} &\rightarrow \{b_i = \sum_{i \text{ suit } j} a_j\} \\ \{a_i\} &\rightarrow \{c_i = \sum_{j \text{ suit } i} a_j\} \end{aligned}$$

La stabilité par "translation" fait qu'un espace plein contient toutes les suites finies (c'est-à-dire de termes a_i nuls sauf au plus pour un nombre fini d'indices i) mais la propriété essentielle est la stabilité par contraction (qui justifie le qualificatif "plein"). Les espaces pleins apparaissent ainsi comme des ensembles de suites $\{a_i\}$ qui peuvent commencer n'importe comment, mais qui satisfont à une certaine condition \mathbb{K} de croissance à l'infini. L'intersection de deux espaces pleins sur \mathcal{J} est manifestement un espace plein. Par suite, parmi les espaces pleins sur \mathcal{J} qui vérifient une certaine propriété (par exemple, qui contiennent une ou plusieurs suites données) il en existe toujours un qui est le plus petit.

Définition 8a2 (Groupes pleins)

Un groupe plein est la donnée simultanée de trois choses :

(i) un ensemble \mathcal{J} ordonné, infini, mais dont chaque élément possède un nombre fini d'antécédents,

(ii) une condition de croissance \mathbb{K} , définissant un espace plein sur \mathcal{J} ,

(iii) une loi associative \mathbb{L} , sur l'ensemble des suites sur \mathcal{J} :

$$(8a1) \quad \{a_i\} \cdot \{b_i\} = \{c_i\}$$

à laquelle on impose :

premièrement, d'être compatible avec l'ordre sur \mathcal{J} , en ce sens que :

$$(8a2) \quad c_i = a_i + b_i + P_i(a_j, b_k)$$

où P_i est une fonction polynomiale, sans terme constant, des seuls coefficients a_j et b_k dont les indices j et k sont $< i$ (strictement),

deuxièmement, d'être compatible avec la condition de croissance \mathcal{K} , en ce sens que si, dans (8a1), deux des trois suites vérifient \mathcal{K} , alors la troisième vérifie aussi \mathcal{K} .

Sous ces hypothèses, l'ensemble $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L})$ constitué par les suites complexes indexées sur \mathcal{J} , vérifiant la condition de croissance \mathcal{K} et soumises à la loi \mathcal{L} , est évidemment un groupe, dont l'élément neutre est la suite nulle. On dit que \mathcal{G} est un groupe plein.

Un groupe plein est en somme un espace plein muni d'une loi de groupe assez régulière.

Définition 8a3 (Les triades fondamentales $\mathcal{G}^0, \mathcal{G}', \mathcal{G}^\infty$).

Les groupes pleins relatifs à un même ensemble d'indices \mathcal{J} et à une même loi \mathcal{L} , mais à des conditions de croissance \mathcal{K} différentes, sont dits apparentés. Leur ensemble constitue ce qu'on appelle une famille de groupes pleins. Toute famille de groupes pleins est stable par intersection et possède trois éléments remarquables, notées $\mathcal{G}^0, \mathcal{G}', \mathcal{G}^\infty$ et ainsi définis :

(i) Le groupe maximal \mathcal{G}^∞ est le plus grand de la famille. Il est formé de toutes les suites sur \mathcal{J} , sans aucune restriction de croissance.

(ii) Le groupe minimal \mathcal{G}^0 est le plus petit de la famille. Il n'est jamais réduit à l'élément neutre, car il contient au moins toutes les suites finies.

(iii) Le groupe médian \mathcal{G}^1 est le plus petit groupe de Lie de la famille. Autrement dit, c'est le plus petit groupe plein dont chaque élément soit insérable dans un sous groupe continu à un paramètre complexe.

En pratique, toute famille de groupes pleins sera désignée par sa triade fondamentale $\mathcal{G}^0 \subset \mathcal{G}^1 \subset \mathcal{G}^\infty$. Dans tous les cas intéressants, les inclusions sont strictes.

Remarque sur l'ensemble d'indices \mathcal{J} .

Dans la plupart des cas utiles, \mathcal{J} est dénombrable et s'identifie soit à \mathbb{N} , soit à un produit \mathbb{N}^n , soit à l'ensemble $\mathbb{I}(\mathbb{Z})$ des suites finies d'éléments de \mathbb{Z} . Pour les différents ordres utilisés, voir le chapitre 15. On a parfois aussi affaire à des ensembles plus insolites : par exemple la frontière neutre $\mathcal{D}^0\mathcal{R}$ (*) ordonnée par la relation d'antériorité (**)

Remarque sur la loi \mathbb{L} .

On observe, d'après la forme de la loi \mathbb{L} , que toute suite $a = \{a_i\}$ possède un inverse unique $a^{-1} = \{-a_i + A_i\}$ où A_i est une fonction polynomiale des a_j avec $j < i$. Toujours après la forme de la loi \mathbb{L} , il est clair que tout groupe plein est résoluble. Autrement dit, la suite $\mathcal{G}_1 = \{\mathcal{G}, \mathcal{G}\}, \mathcal{G}_2 = \{\mathcal{G}, \mathcal{G}_1\}, \dots, \mathcal{G}_n = \{\mathcal{G}, \mathcal{G}_{n-1}\}, \dots$ des commutateurs tend vers le groupe trivial. Dans le même ordre d'idées, l'ensemble $\mathcal{G}_{(j)}$ des éléments $a = \{a_i\}$ de \mathcal{G} tels que $a_i = 0$ pour chaque $i \leq j$, est un sous groupe distingué de \mathcal{G} .

(*) voir section 2a

(**) voir section 5b.

Remarque sur la condition de croissance

Les conditions de croissance qu'on est amené à imposer aux suites $\{a_i\}$ revêtent souvent des formes assez simples. Par exemple :

$$(K_1) \quad |a_i| = o(K_i)$$

$$(K_4) \quad \lim \varphi_i(|a_i|) = 0$$

$$(K_2) \quad |a_i| = O(K_i)$$

$$(K_5) \quad \limsup \varphi_i(|a_i|) < \infty$$

$$(K_3) \quad \sum |a_i/K_i| < \infty$$

$$(K_6) \quad \sum \varphi_i(|a_i|) < \infty$$

où $\{K_i\}$ désigne une suite scalaire fixe et $\{\varphi_i\}$ une suite fixe d'applications croissantes de \mathbb{R}^+ sur \mathbb{R}^+ .

Equations sur les groupes pleins.

Soit \mathcal{G} un groupe plein et e son élément neutre. Considérons sur \mathcal{G} les trois équations suivantes, d'inconnue $x = \{x_i\}$

Equation générale (*)

$$(8a3) \quad a x^{n_1} b x^{n_2} c x^{n_3} \dots x^{n_n} = e \quad (n_1, n_2, \dots \in \mathbb{Z}; a, b, \dots \in \mathcal{G})$$

Equation d'itération

$$(8a4) \quad x^n = a^m \quad (n, m \in \mathbb{Z}; a \in \mathcal{G})$$

Equation de conjugaison.

$$(8a5) \quad ax = xb \quad (a, b \in \mathcal{G})$$

On détermine sans peine les conditions sous lesquelles chacune de ces équations admet des solutions formelles, ainsi que les valeurs de ces solutions éventuelles : il suffit de calculer x_i de proche en proche, pour i croissant. Les diffi-

(*) ainsi nommée parce que c'est effectivement l'équation la plus générale qu'on puisse envisager sur un groupe quelconque.

cultés commencent lorsqu'on cherche à vérifier l'appartenance à \mathcal{G} de ces solutions, autrement dit, lorsqu'on cherche à savoir si les suites formelles qu'on a obtenues satisfont bien à la condition de croissance \mathbb{K} .

Grâce à la méthode des perturbations (imposer de petits accroissements aux données a, b, \dots , puis regarder comment ceux-ci se repercutent sur la ou les solutions) on montre qu'en général la \mathbb{K} -croissance des données ne garantit nullement la \mathbb{K} -croissance des solutions formelles. D'où la nécessité de rechercher les conditions générales qui assurent cette \mathbb{K} -croissance.

Donnons d'abord quelques précisions sur le côté formel de la question. Prenons l'équation générale (8a3). Elle équivaut à un système infini :

$$(8a6) \quad (n_1 + n_2 + \dots + n_n) x_i + a_i + b_i + c_i + \dots + A_i = 0 \quad (\forall i \in \mathbb{J})$$

où A_i est un polynôme en les $x_j, a_j, b_j, c_j, \dots (j < i)$. Par suite, si $n_1 + n_2 + \dots + n_n \neq 0$; (8a3) admet une solution formelle unique.

Pour la même raison, l'équation d'itération (8a4), cas particulier de (8a3), admet elle aussi une solution formelle unique. Pour la calculer, remarquons que a^m est nécessairement de la forme $\{a_i(m)\}$ avec pour $a_i(m)$ un polynôme en m , sans terme constant, et de degré n'excédant pas le nombre des antécédents de i dans \mathbb{J} . Comme on a manifestement

$$\{a_i(m_1)\} \cdot \{a_i(m_2)\} = \{a_i(m_1 + m_2)\}, \text{ cela entraîne, d'après (8a2) :}$$

$$a_i(m_1 + m_2) = a_i(m_1) + a_i(m_2) + P_i(a_j(m_1), a_k(m_2))$$

Une telle identité entre polynômes, étant vérifiée pour toute paire d'entiers (m_1, m_2) , l'est automatiquement pour toute paire de complexes (w_1, w_2) . Si donc, pour tout w complexe, on pose :

$$(8a7) \quad a^w = \{a_i(w)\}$$

on aura identiquement

$$(8a8) \quad a^{w_1} \cdot a^{w_2} = a^{w_1 + w_2}$$

On voit par là que tout élément a d'un groupe plein s'insère formellement dans un groupe $\{a^w\}$ à un paramètre complexe. En particulier, l'équation (8a4) à un paramètre complexe. En particulier, l'équation (8a4) a pour solution unique $x = \{a_i(m/n)\}$.

Passons enfin à l'équation de conjugaison (8a5). C'est encore un cas particulier de (8a3) mais avec cette fois-ci $n_1 + n_2 = 1 - 1 = 0$. La résolubilité formelle de (8a5) dépend donc d'un nombre N de conditions sur les données a et b . N peut être fini ou infini (cela dépend de la loi \mathbb{L}) mais chaque condition, prise séparément, ne porte que sur un nombre fini de coefficients a_i et b_i (*). Enfin, quand ces N conditions sont vérifiées, (8a5) possède une solution formelle dépendant au plus de N paramètres complexes.

Voilà pour l'aspect formel. L'étude analytique, qui vise à établir si les solutions formelles appartiennent à \mathcal{G} , est heureusement plus intéressante, mais aussi plus ardue. C'est elle, en tout cas, qui justifie l'introduction des groupes pleins et qui nous retiendra dans toute la suite.

Supposons que \mathcal{G} parcoure une famille de groupes pleins apparentés, de triade fondamentale $\mathcal{G}^0, \mathcal{G}^1, \mathcal{G}^\infty$. Le groupe médian a été défini comme le plus petit groupe de Lie de la famille. C'est un groupe charnière, en ce sens que les propriétés du groupe générique \mathcal{G} changent du tout au tout selon ses rapports d'inclusion avec \mathcal{G}^1 . Plus précisément, on est amené à distinguer trois cas :

(*) c'est donc le "contraire" exact d'une condition de croissance à l'infini.

(i) $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^\infty$ (sur-groupes du groupe médian)

Alors \mathfrak{g} est généralement un groupe de Lie et les équations (8a3), (8a4), (8a5) sont résolubles effectivement dès lors qu'elles le sont formellement.

(ii) $\mathfrak{g}^0 \subset \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}'$ avec $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}'$ (sous-groupes stricts du groupe médian)

Alors \mathfrak{g} n'est pas un groupe de Lie et les solutions formelles des équations (8a3), (8a4), (8a5), quand bien même elles existent, ne sont "presque jamais" dans \mathfrak{g} . Appliquant cette remarque à l'équation de conjugaison (8a5), on voit qu'il doit exister sur \mathfrak{g} des classes de conjugaisons non élémentaires (i.e. non définissables par des conditions portant chacune sur un nombre fini de coefficients) et par suite des fonctions centrales non élémentaires. Il est en général possible de construire des systèmes complets de telles fonctions centrales ("analyse harmonique") par une application judicieuse de la théorie des fonctions résurgentes. De plus, on peut s'arranger pour que ces fonctions centrales soient, en un sens naturel, holomorphes sur \mathfrak{g} et par suite entièrement déterminées par leur restriction au groupe minimal \mathfrak{g}^0 . Enfin, les diverses extensions du groupe \mathfrak{g} obtenues par adjonction d'éléments "étrangers" (solutions formelles d'équations d'itération, de conjugaison, etc...) présentent des propriétés algébriques très riches et très inattendues.

(iii) $\mathfrak{g} \not\subset \mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_1 \not\subset \mathfrak{g}$ (groupes non comparables au groupe médian)

La situation est alors, en gros, la même qu'en (ii), à quelques anomalies près, dont la plus sérieuse est celle-ci : on ne peut plus, semble-t-il, construire sur \mathfrak{g} , en nombre suffisant, des fonctions centrales non élémentaires qui soient holomorphes et qui prolongent analytiquement des fonctions centrales non élémentaires du groupe minimal \mathfrak{g}^0 . Cette circonstance complique énormément l'analyse harmonique sur ceux des groupes \mathfrak{g} qui ne sont pas comparables à \mathfrak{g}' .

En résumé, le cas (i) ne pose guère de problèmes et le cas (iii) en pose de presque insurmontables. Le cas fécond et intéressant est le cas (ii).

On trouvera des précisions supplémentaires sur les groupes pleins généraux au chapitre 15 de la partie III. Mais pour l'instant, et jusqu'à la fin de la partie II, nous nous limiterons à un groupe particulier, le groupe G^0 , et aux groupes pleins qui lui sont apparentés.

Section 8b : Le prototype des groupes pleins et la triade G^0, G^1, G^∞ .

Le groupe G^0 , prototype des groupes pleins.

Soit G^0 le groupe des germes (en un point donné) de transformations holomorphes (à une variable) et tangentes à l'identité. Comme point fixe commun à toutes les transformations, il est commode de prendre non pas l'origine 0, mais ∞ , point à l'infini de la sphère de Riemann. G^0 s'identifie alors à l'ensemble des séries du type :

$$(8b1) \quad f(z) = z \left(1 + \sum_{n \geq 1} a_n z^{-n} \right) \quad (8b2) \quad \limsup |a_n|^{1/n} < \infty$$

avec pour loi de groupe la substitution des séries :

$$f, g \rightarrow f \circ g = f(g)$$

L'inverse de l'élément générique f sera noté f^{-1} pour éviter toute confusion avec $f^{-1} = 1/f$. De même, l'itérée $f \circ f \circ \dots \circ f$ (n fois) sera notée f^n pour éviter toute confusion avec $f^n = (f)^n$.

Envisagé ainsi, le groupe G^0 rentre manifestement dans la catégorie des groupes pleins, introduite à la section précédente:

- pour ensemble \mathcal{J} , on prend \mathbb{N}^* avec son ordre naturel,
- pour condition \mathcal{K} de croissance à l'infini, on prend (8b2),
- pour loi \mathcal{L} , on prend la loi

$$(8b3) \quad \{a_n\}, \{b_n\} \rightarrow \{c_n = a_n + b_n + P_n(a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1})\}$$

qui, aux coefficients de f de g , associe ceux de $f \circ g = f(g)$. La compatibilité de (8b2) et (8b3) résulte simplement des théorèmes sur la composition et l'inversion locale des fonctions holomorphes.

L'importance du groupe G° est double : d'une part, c'est le plus simple des groupes pleins et d'autre part, c'est leur prototype à tous, en ce sens que leur étude se ramène largement, grâce à divers artifices, à celle du groupe G° . Ceci vaut d'ailleurs non seulement pour les groupes apparentés à G° (voir ci-après) mais aussi pour des groupes pleins beaucoup plus généraux (voir chapitre 1.). Le groupe G° joue en quelque sorte, dans l'étude des groupes pleins, le même rôle privilégié que le groupe $Sl(2, \mathbb{R})$ dans l'étude des groupes de Lie.

Groupes pleins apparentés à G° et algèbres associées. Topologie naturelle.

D'après les définitions de la section précédente, tout groupe plein apparenté à G° est de la forme $I+A$, où $I=z$ est l'élément neutre du groupe et où A est un espace plein de séries entières de z^{-1} , c'est-à-dire un espace

(8b4) contenant tous les polynômes en z^{-1} ,

(8b5) stable pour toute contraction $\sum a_n z^{-n+1} \rightarrow \sum a_n \lambda_n z^{-n+1}$ (avec $|\lambda_n| < 1$)

(8b6) stable pour la "translation" $\sum a_n z^{-n+1} \rightarrow \sum a_n z^{-n+2}$

En principe, il faudrait ajouter la stabilité pour la multiplication par z^{-1} (à quoi se réduit ici la seconde "translation" de la définition 8a2) mais cette stabilité est automatiquement acquise dès lors que G est un groupe et que A vérifie (8b4), (8b5), (8b6). (cf. exercice 862). En fait,

sous ces hypothèses, \mathbb{A} est même une algèbre pour la multiplication ordinaire des séries (cf exercice 8b2). A tout groupe \mathbb{G} apparenté à \mathbb{G}° se trouve donc associée une algèbre $\mathbb{A} = \mathbb{G} - \mathbb{I}$ dans laquelle \mathbb{G} agit de manière naturelle :

$$\varphi, f \rightarrow \varphi \circ f = \varphi(f) \quad (\varphi \in \mathbb{A}, f \in \mathbb{G})$$

Remarquons à ce propos qu'il est commode de noter les éléments de \mathbb{G} sous la forme $z + \sum_1^{\infty} a_n z^{-n+1}$ (et non $z + \sum_0^{\infty} a_n z^{-n}$) car alors le coefficient a_n est homogène à z^n et par suite le polynôme $P_n(a_i, b_j)$ de la formule (8b3) ne comporte que des monômes de la forme :

$$(8b7) \quad a_i \prod_j b_j^{n_j} \quad \text{avec} \quad i + \sum_j n_j = n$$

On munit l'algèbre \mathbb{A} (et du même coup le groupe $\mathbb{G} = \mathbb{I} + \mathbb{A}$) de sa topologie naturelle : c'est par définition la topologie la plus faible qui rende continues toutes les formes linéaires explicitables sur \mathbb{A} , c'est-à-dire toutes les formes du type :

$$\sum \alpha_n z^{-n+1} \longrightarrow \sum \alpha_n \beta_n < \infty$$

Quand \mathbb{G} est un groupe plein, sa topologie naturelle est toujours complète (cf exercice 8b3). Dans le cas du groupe minimal \mathbb{G}° et de l'algèbre associée \mathbb{A}° , la convergence séquentielle possède une caractérisation très simple : une suite f_n de \mathbb{A} converge vers φ pour la topologie naturelle si et seulement si il existe $R < \infty$ tel que les $\varphi_n(z)$ soient définies sur $|z| > R$ et y convergent uniformément vers $\varphi(z)$.

Remarquons que le changement de variable $z \rightarrow 1/z$ change tout f de la forme (8b1) en :

$$(8b8) \quad g(z) = 1/f(1/z) = z \left(1 + \sum_{n \geq 1} \beta_n z^{-n} \right)$$

et tout groupe plein $I + A$ en un groupe plein $I + B$ (cf exercice 8b4).

Il n'y a donc aucun inconvénient à considérer, comme nous le faisons, les séries (8b1) au lieu des séries (8b8) qui paraissent plus simples mais qui sont en fait moins maniables, surtout lorsqu'il s'agit de prendre la transformation de Borel (cf section 8f).

Eléments maximaux et groupes à bord.

Pour toute série $f(z) = z(1 + \sum a_n z^{-n})$, il existe un plus petit groupe plein contenant f . C'est le groupe plein "engendré" par f et on le notera $G^{(a_n)}$. Inversement, si un groupe plein G est de la forme $G^{(a_n)}$, on dira que f est un élément maximal de G . Les G qui possèdent des éléments maximaux sont dits groupes à bord (le bord étant précisément l'ensemble de ces éléments maximaux).

Les groupes pleins apparentés à G^0 ne possèdent pas toujours d'éléments maximaux : par exemple, les groupes $G^t (t > 0)$ introduits ci-après n'en possèdent pas, pas plus que les groupes radiaux étudiés à la section 8e.

Lorsque G possède des éléments maximaux, il en existe toujours qui sont de la forme

$$(8b9) \quad z \left(1 + \sum_1^{\infty} K_n z^{-n} \right)$$

avec des coefficients $K_n \geq 1$ tels que

$$(8b10) \quad K_{n_1} K_{n_2} \dots K_{n_r} \leq K_{n_1 + n_2 + \dots + n_r}$$

En effet, soit $f(z) = z(1 + \sum a_n z^{-n})$ un élément maximal de G . On peut toujours supposer $|a_n| \geq 1$. D'après (8b5), G contient

$$g(z) = z(1 - \sum |a_n| z^{-n}) \quad \text{et par suite aussi} \quad g \circ g(z) = z(1 - \sum c_n z^{-n}).$$

Mais on vérifie que c_n est une combinaison linéaire, à coefficients entiers positifs, de tous les monômes $\prod_i |a_i|^{n_i}$ pour lesquels $\sum n_i = n$.

Il s'ensuit que si l'on définit K_n au moyen des relations de récurrence :

$$K_1 = |a_1|, \quad K_2 = \sup \{ |a_2|, K_1 K_1 \}, \quad K_3 = \sup \{ |a_3|, K_2 K_1, K_1 K_1 K_1 \}, \dots$$

$$K_m = \sup \{ |a_m|, \sup_{n_1 + \dots + n_m = m} K_{n_1} \dots K_{n_m} \}, \dots$$

alors la suite K_m vérifie (8b10) et $\sup \{ 1, |a_m| \} \leq K_m \leq C_m$.

La série (8b9) est donc un élément maximal du group G .

Comme (8b10) s'écrit évidemment

$$(8b11) \quad \log K_{n_1} + \log K_{n_2} + \dots + \log K_{n_m} \leq \log K_{n_1 + n_2 + \dots + n_m}$$

on dit que la suite $\{ \log K_n \}$ est surlinéaire. C'est une propriété plus faible que la convexité, mais on doit s'en contenter, car il existe des groupes à bord sans éléments maximaux de la forme (8b9) avec $\{ \log K_n \}$ non convexe (cf. exercice 8b5).

En pratique, les groupes pleins qui possèdent des éléments maximaux (groupes à bord) seront toujours caractérisés à l'aide d'une suite $\{ \log K_n \}$ surlinéaire. On les notera donc $G^{(K_n)}$. Lorsque la suite $\{ \log K_n \}$ est suffisamment régulière, la condition pour que $z(1 + \sum a_n z^{-n})$ appartienne à $G^{(K_n)}$ est assez simple. On vérifie par exemple que pour $K_n = R^n n^{nt}$ ($R, t > 0$) cette condition s'écrit

$$(8b12) \quad -\infty \leq \limsup \frac{\log |a_n / K_n|}{n^{1-t} \log n} < \infty \quad \text{si } 0 < t \leq 1$$

$$(8b13) \quad -\infty \leq \limsup \frac{\log |a_n / K_n|}{\log n} < \infty \quad \text{si } 1 \leq t$$

Mais lorsque la suite $\{ K_{n+1} / K_n \}$ a un comportement erratique, la condition

d'appartenance à $G^{(K_n)}$ peut être beaucoup plus compliquée (cf. exercice 8b6).

Proposition 8b1 (Les groupes G^t)

L'ensemble G^t formé par les séries $f(z) = z(1 + \sum a_n z^{-n})$ telles $|a_n|^{1/n} = O(n^t)$ est un groupe pour la composition des séries si et seulement si $t \geq 0$. Ces groupes, pleins et mutuellement apparentés, ne possèdent pas d'éléments maximaux, à l'exception de G^0 , qui ne possède que des éléments maximaux.

On vérifie sans peine que les G^t sont des groupes. Cela découle aussi de la proposition 8el ci-après.

Etant le groupe minimal, G^0 n'a que des éléments maximaux (cf. proposition 8b2 ci-dessous). Au contraire, pour $t > 0$, G^t n'a pas d'élément maximaux. Soit en effet $f(z) = z(1 + \sum a_n z^{-n})$ dans G^t . Il existe $R < \infty$ tel que $|a_n| \leq K_n$ avec $K_n = R^n n^{nt}$. Si f était maximal, la série $g(z) = z(1 + \sum K_n z^{-n})$ le serait a fortiori. Mais le groupe plein engendré par g est donné tantôt par (8b12), tantôt par (8b13) et ne contient donc jamais G^t . Ceci prouve la proposition 8b1.

De tous les groupes apparentés à G^0 , les G^t sont les plus simples et les plus importants. D'ailleurs, ils contiennent la triade fondamentale :

Proposition 8b2 (La triade fondamentale G^0, G^1, G^∞).

$\alpha)$ le groupe plein $G^0 = \{f; \limsup |a_n|^{1/n} < \infty\}$ est minimal, autrement dit, c'est le plus petit de sa famille.

$\beta)$ le groupe plein $G^1 = \{f; \limsup n^{-1}|a_n|^{1/n} < \infty\}$ est médian, autrement dit c'est le plus petit groupe de Lie de sa famille.

γ) Le groupe plein $G^\infty = \{f; a_n \text{ quelconque}\}$ est évidemment maximal,
si bien que la famille des groupes pleins apparentés aux G^t admet G^0, G^1, G^∞
pour triade fondamentale (*).

Le point α est immédiat. En effet, d'après (8b4), chaque G appa-
 renté à G^0 doit contenir toutes les séries f de coefficients a_n nuls à
 partir d'un certain rang, donc aussi leurs inverses de composition f^{-1} . Mais
 parmi ces inverses, il en existe dont les coefficients b_n vérifient :

$$\liminf |b_n|^{1/n} = R$$

pour tout R spécifié à l'avance. D'après (8b5), il s'ensuit que G contient
 toutes les séries convergentes, et donc G^0 tout entier.

Le point important est le point β . Nous verrons à la section 9c
 que pour chaque $R < \infty$ on peut trouver dans G^0 , et par suite dans
 chaque G apparenté, des f dont les itérées formelles f^w ont des coeffi-
 cients $a_n(w)$ qui pour w irrationnel vérifient :

$$\liminf \frac{1}{n} |a_n(w)|^{1/n} = R$$

Le groupe médian contient nécessairement ces f^w . Par suite, d'après la
 stabilité par contraction (8b5), il contient le groupe G^1 tout entier.

Inversement, on montrera à la section 8e que G^1 est un groupe de
 Lie, autrement dit que chacun de ses éléments s'insère dans un sous-groupe
 continu à un paramètre complexe. G^1 est donc le groupe médian que nous
 cherchons.

(*) Ceci justifie après coup l'emploi des indices $0, 1, \infty$ pour désigner
 les termes des triades fondamentales générales G^0, G^1, G^∞ (cf section 8a).

Nous allons, dans la suite de ce chapitre, donner quelques précisions sur les trois groupes G^0, G^1, G^∞ puis discuter les propriétés des autres groupes apparentés, selon leurs rapports d'inclusion avec le groupe médian G^1 .

Section 8c : Résultats classiques relatifs au groupe maximal G^∞ .

Voici un bref rappel des principaux énoncés concernant le groupe G^∞ . Pour Plus de détails, se reporter à Th. Inv. Hol., chapitres 1 et 2. Ces résultats, très simples, n'ont d'autre but que de préparer à l'étude des groupes pleins non "triviaux", c'est-à-dire des sous-groupes stricts de G^∞ et, plus encore, des sous groupes stricts de G^1 .

Proposition 8c1 (Automorphismes et fonctions centrales).

α) La topologie naturelle de G^∞ est celle de la convergence terme à terme des coefficients. Tout automorphisme de G^∞ peut s'écrire comme produit :

- d'un automorphisme interne : $f(z) \rightarrow \bar{h}^{-1} \circ f \circ h(z)$
- d'un changement de variable $z \rightarrow az$: $f(z) \rightarrow a^{-1} f(az)$
- éventuellement, de la conjugaison $f \rightarrow \bar{f}$: $f(z) \rightarrow \overline{f(\bar{z})}$

β) A tout élément $f(z) = z(1 + \sum a_n z^{-n})$ de G^∞ différent de l'élément neutre $I = z$, associons trois scalaires μ, α, ρ ainsi définis :

(8c1) $\mu(f) =$ indice du premier coefficient non nul

(8c2) $\alpha(f) = a_\mu =$ valeur du premier coefficient non nul

(8c3) $\rho(f) = \frac{1}{2}(\mu-1) +$ coefficient de z^{-1} dans la série $1/(f(z)-z)$.

Alors μ, α, ρ sont invariants pour les automorphismes internes de G^∞ : ce sont donc trois fonctions centrales.

$\mu(f)$ et $\rho(f)$ sont dits valuation itérative et résidu itératif de f .

γ) Ensemble μ, α, ρ constituent un système complet de fonctions centrales sur G^∞ . Autrement dit, deux éléments $f, g \in G^\infty$ sont conjugués $(f \circ h = h \circ g)$ si et seulement si

$$\mu(f) = \mu(g), \quad \alpha(f) = \alpha(g), \quad \rho(f) = \rho(g)$$

D'où une paramétrisation $\mu, \alpha, \rho \rightarrow G_{\mu, \alpha, \rho}^\infty$ des classes de conjugaison du groupe G^∞ .

Proposition 8c2 (Itération continue)

α) Il existe une unique application continue $w, f \rightarrow f^w$ de $\mathbb{C} \times G^\infty$ dans G^∞ telle que

$$f^{w_1} \circ f^{w_2} = f^{w_1 + w_2} \quad \text{et} \quad f^1 = f$$

La série f^w est dite itérée d'ordre w de f . Elle est caractérisée par :

$$(8c4) \quad f^w \circ f = f \circ f^w \quad \text{avec} \quad (8c4 \text{ bis}) \quad (f^w(z) - z) / (f(z) - z) = w + o(1)$$

β) Si $\mu(f) = \mu$ et $f(z) = z(1 + \sum_{n \geq 1} a_n z^{-n})$ alors $\mu(f^w) = \mu$ et $f^w(z) = z(1 + \sum_{n \geq 1} a_n(w) z^{-n})$ avec pour coefficient $a_n(w)$ un polynôme en w sans terme constant et de degré $\leq n/\mu$.

γ) La série $f_* = \left(\frac{\partial}{\partial w} f^w \right)_{w=0}$ est dite logarithme itératif (ou générateur infinitésimal) de f . Elle est caractérisée par :

$$(8c5) \quad f_* \circ f = f \circ \frac{d}{dz} f \quad \text{avec} \quad (8c5 \text{ bis}) \quad f_*(z) / (f(z) - z) = 1 + o(1)$$

De plus

$$(8c6) \quad \frac{\partial}{\partial w} f^w = \int_* \frac{\partial}{\partial z} f^w = \int_* \circ f^w$$

$$(8c7) \quad g = h \circ f \circ h^{-1} \iff g_* = (\int_* \circ h) / \left(\frac{d}{dz} h \right) \quad (\forall f, g, h \in G^\infty)$$

δ) La fonction centrale $p = p(f)$ est égale au coefficient de z^{-1} dans la série $1 / \int_* (z)$. De là son nom de résidu itératif.

L'algèbre pleine associée à G^∞ n'est autre que l'algèbre $\mathbb{A}^\infty = \mathbb{C}[[z^{-1}]]$ formée de toutes les séries entières de la variable z^{-1} . Il est commode d'associer à f, f^w, \int_* des opérateurs sur \mathbb{A}^∞ notés F, F^w, F_* et ainsi définis :

$$(8c8) \quad F \cdot \varphi = \varphi \circ f \quad ; \quad F^w \cdot \varphi = \varphi \circ f^w \quad ; \quad F_* \cdot \varphi = \int_* \frac{d}{dz} \varphi$$

Proposition 8c3 (Calcul explicite de \int_*^w et \int_*)

Les opérateurs F, F^w, F_* satisfont aux relations :

$$(8c9) \quad F_* = \log F = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} (F-1)^n$$

$$(8c10) \quad F^w = (F)^w = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{w(w-1)\dots(w-n+1)}{n!} (F-1)^n$$

$$(8c11) \quad F^w = \exp(w F_*) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{w^n}{n!} (F_*)^n$$

Ces relations ont un sens car, pour toute série d'épreuve $\varphi \in \mathbb{A}^\infty$, on vérifie que les séries

$$(F-1)^n = \sum_{l=0}^n (-1)^l C_n^l \varphi \circ f^l \quad \text{et} \quad (F_*)^n \cdot \varphi = \left(\int_* \cdot \frac{d}{dz} \right)^n \cdot \varphi$$

sont au moins des $o(z^{-n})$. Par suite, pour tout n donné, les seconds

membres de (8c9), (8c10), (8c11), appliqués à φ , ne donnent qu'un nombre fini de termes en z^{-n} .

Bien que z n'appartienne pas à \mathbb{A}^∞ on peut quand-même appliquer (8c9), (8c10), (8c11) à z et obtenir ainsi $f_*(z), \tilde{f}_*(z), \tilde{\tilde{f}}_*(z)$ explicitement en fonction de $f(z), g(z), g_*(z)$ respectivement.

Proposition 8c4 (Formule de Campbell-Hausdorff)

Soient f, g, h trois éléments de G^∞ , soient f_*, g_*, h_* leurs générateurs infinitésimaux et F_*, G_*, H_* les opérateurs associés. Alors, si $f = g \circ h$, c'est-à-dire $F = HG$, on a :

$$(8c12) \quad F_* = H_* + G_* + \frac{1}{2} [H_*, G_*] + \frac{1}{12} [\dots] + \frac{1}{12} [\dots] + \dots$$

Pour les coefficients généraux de la formule de Campbell-Hausdorff, voir (*). Ici encore, en appliquant (8c12) à n'importe quelle série d'épreuve, on a convergence terme à terme et, en appliquant (8c12) à z , on obtient

$(g \circ h)_*$ en fonction du crochet de Lie $[f_*, g_*] = f_* g'_* - g_* f'_*$ et des crochets itérés.

Section 8d : Résultats classiques relatifs au groupe minimal G^0 .

Le groupe minimal G^0 est constitué par les séries de la forme $f(z) = z(1 + \sum a_n z^{-n})$ qui convergent au voisinage de l'infini. On peut donc identifier ces séries f aux germes de transformations $z \rightarrow f(z)$ qu'elles définissent en ∞ . Cette circonstance très particulière permet d'appliquer à l'étude de G^0 des méthodes élémentaires qui se trouvent en défaut dès qu'on passe aux groupes apparentés. Enumérons brièvement les résultats auxquels on aboutit ainsi.

(*) Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, II, §6.

Itération continue dans G° .

Proposition 8d1 (Ordres d'itération admissibles)

Pour chaque $f \in G^\circ$, notons W_f le groupe additif des w complexes pour lesquels f admet dans G° une itérée f^w . Deux cas seulement peuvent se présenter :

- ou bien $W_f = \mathbb{C}$ et alors on dit que f est continûment itérable
- ou bien W_f est de la forme $\frac{1}{m} \mathbb{Z}$ (m entier).

Ceci écarte donc les sous-groupes qui sont denses dans \mathbb{C} ou dans \mathbb{R} ainsi que les réseaux discrets à deux dimensions. Pour la démonstration, voir Th. Inv. Hol., A-III-4.

Proposition 8d2 (Rareté des f continûment itérables).

Les éléments de G° ne sont "presque jamais" continûment itérables.

Par exemple :

$\alpha)$ Si l'on part d'un élément quelconque f de G° et si l'on fait varier n de ses coefficients de Taylor (a_n, \dots, a_{n_n}) dans \mathbb{C}^n , alors f n'est pleinement itérable qu'au plus pour une partie de \mathbb{C}^n de mesure nulle et cette partie peut être vide.

$\beta)$ Ceci s'étend à presque tous les paramétrages qu'on peut imaginer :

- développement de $f(z)$ en fractions continues,
- factorisation de $f(z)$ du type $z^p \varphi(z) \prod_{i=1}^n (1 - a_i z^{-1})$,
- multiplication ou composition de $f(z)$ par une fonction algébrique de degré donné, etc. etc...

$\gamma)$ Si f_1, \dots, f_n sont des éléments continûment itérables de G° qui ne commutent pas deux à deux, alors l'ensemble des (w_1, \dots, w_n) de \mathbb{C}^n qui rendent

(*) Théorie des Invariants Holomorphes, J. Ecalle, aux Publications Mathématiques d'Orsay, N° 67 - 74.09

continûment itérable l'élément $f = f_1^{w_1} \circ f_2^{w_2} \circ \dots \circ f_n^{w_n}$ est toujours de mesure nulle (et généralement vide)

δ) Cela reste vrai si l'on intercale entre $f_i^{w_i}$ et $f_{i+1}^{w_{i+1}}$ un élément g_i fixe dans \mathbb{C}° .

Pour les démonstrations, voir Th. Inv. Hol., A-IV-2.

Proposition 8d3 (Itérées sectorielles)

Soit f dans \mathbb{C}° et distinct de l'élément neutre, soit $\mu = \mu(f)$, $\alpha = \alpha(f)$, $\rho = \rho(f)$ les valeurs en f des trois fonctions centrales élémentaires et soit $\theta_0 = \frac{1}{\mu} \text{Arg } \alpha$, $\theta_j = \theta_0 + \frac{2\pi i}{\mu} \cdot j$. Alors :

α) Pour tout $w \in \mathbb{C}$ et pour tout $j \in \mathbb{Z} / 2\mu \mathbb{Z}$, f possède une itérée sectorielle, notée $f_{(j)}^w$ et caractérisée par les trois propriétés suivantes :

- (i) $f_{(j)}^w$ est un germe holomorphe défini au voisinage de ∞ sur le secteur \mathcal{S}_j de bissectrice θ_j et d'ouverture $2\pi/\mu$
- (ii) $f_{(j)}^w \circ f = f \circ f_{(j)}^w$
- (iii) $(f_{(j)}^w(z) - z) / (f(z) - z) = w + o(1)$

β) L'équation (ii) admet une infinité de solutions dans le secteur \mathcal{S}_j , mais $f_{(j)}^w$ est la seule qui vérifie (iii).

Inversement, dans le secteur $\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_{j+1}$ limité par les rayons θ_j et θ_{j+1} , (ii) + (iii) admet une infinité de solutions, mais $f_{(j)}^w$ est la seule qui s'étende à \mathcal{S}_j tout entier.

γ) Le germe $f_{(j)}^w$ possède, au point ∞ et dans son secteur de définition, un développement asymptotique indépendant de j et égal à la série f^w (généralement divergente).

δ) La série $f_{(j)}^w$ converge (autrement dit $w \in W_j$) si et seulement si $f_{(j)}^w$ et $f_{(j+1)}^w$ coïncident sur $\mathcal{G}_j \cap \mathcal{G}_{j+1}$ pour $j = 1, 2, \dots, 2\mu$.

Proposition 8d4 (générateurs sectoriels).

Soit f et j comme ci-avant.

α) Sur chaque secteur \mathcal{G}_j , f possède un générateur infinitésimal sectoriel unique, que l'on note $f_{*(j)}$ et qui vérifie (8c5) + (8c5bis).

β) Sur tout compact de \mathcal{G}_j assez proche de ∞ on a uniformément :

$$(8d1) \quad f_{*(j)}(z) = \lim_{n \rightarrow (-1)^{j+1} \infty} \frac{f^{n+1}(z) - f^n(z)}{\frac{d}{dz} f^n(z)}$$

γ) La relation (8d1) ci-dessus, jointe à la relation :

$$(8d2) \quad \int_z^{\infty} \frac{f_{*(j)}^w(z)}{f_{*(j)}^w(z)} dz = w$$

fournit le moyen de construire effectivement les itérées sectorielles

$f_{(j)}^w$

On trouvera les démonstrations et quelques précisions supplémentaires dans Th. Inv. Hol., partie A, chap. 3.

Analyse harmonique dans G° .

Proposition 8d5 (construction de fonctions centrales non élémentaires)

Soit f, μ, α, ρ comme ci-avant.

α) L'équation

$$(8d3) \quad f^* \circ f = 1 + f^*$$

admet une infinité de solutions holomorphes dans le secteur \mathcal{S}_j , mais celles qui vérifient en outre

$$(8d3bis) \quad f^*(z) = \frac{1}{h\alpha} z^h + o(z^h)$$

ne diffèrent entre elles que par une constante et admettent chacune en ∞ un développement asymptotique de la forme :

$$(8d4) \quad \frac{1}{h\alpha} z^h + \alpha_{-h+1} z^{h-1} + \dots + \alpha_{-2} z^2 + \alpha_{-1} z + \alpha_0 + \rho \log z + \sum_{n \gg 1} \alpha_n z^{-n}$$

L'unique solution de (8d3) + (8d3bis) pour laquelle $\alpha_0 = 0$ est notée $f_{(j)}^*$.
Elle est liée à $f_{*(j)}$ par l'équation :

$$(8d5) \quad \frac{d}{dz} f_{(j)}^* = 1 / f_{*(j)}$$

β) Pour tout j impair (resp. pair) il existe une unique application $z \rightarrow \pi^j(z)$ qui soit définie holomorphe pour $\text{Im} z$ grand (resp. $-\text{Im} z$ grand), qui commute avec les translations de pas 1 :

$$(8d6) \quad \pi^j(1+z) = 1 + \pi^j(z)$$

et telle que, sur le secteur $\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_{j+1}$:

$$(8d7) \quad \pi^j \circ f_{(j)}^* = f_{(j+1)}^*$$

γ) Quand on change f en $\bar{h} \circ f \circ h$ (automorphisme interne), $\pi^j(z)$ est changée en $\gamma + \pi^j(z - \gamma)$, où la constante γ dépend de h mais pas de j .

δ) A condition de regarder les germes de transformation $z \rightarrow \pi^j(z)$ comme définis modulo les translations $z \rightarrow z - \gamma$, les trois scalaires

$\{\mu, \alpha, \rho\}$ et les 2μ germes $\{\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^{2\mu}\}$ constituent, ensemble, un système complet de fonctions centrales sur G°

Pour les démonstrations, voir Th. Inv. Hol., B-II.

Synthèse harmonique dans G° .

Proposition 8d6 (Liberté des π^j)

Le système de fonction centrales sur G° introduit à la fin de la proposition précédente est libre en ce sens que pour tout triplet μ, α, ρ de scalaires (*) et pour toute suite π^j de 2μ germes d'applications périodiques (**), il existe dans G° des f tels que :

$$\mu(f) = \mu, \quad \alpha(f) = \alpha, \quad \rho(f) = \rho \quad \text{et} \quad \pi_j^j = \pi^j \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, 2\mu.$$

On trouvera en appendice une démonstration de ce fait, due à M.B. Malgrange. On en trouvera deux autres, constructives celles-ci et s'étendant aux groupes apparentés à G° , au chapitre 13.

Enrichissement algébrique.

Les itérées étrangères de G° , c'est-à-dire les f^w n'appartenant pas à G° mais issues de f appartenant à G° , présentent de remarquables propriétés d'indépendance mutuelle et engendrent des groupes à la structure algébrique bien plus riche que celle de G° . Toutefois, ces phénomènes échappent aux méthodes élémentaires et requièrent la théorie des fonctions résurgentes.

(*) μ entier, $\alpha \neq 0$.

(**) définis modulo une translation (commune) et pour $\pm Im \tau$ grand (selon la parité de j).

Section 8e : Les ultrarayons et l'intervalle de Lie $[G', G^\infty]$

Cette section est consacrée à la recherche, parmi les groupes pleins apparentés à G° , de ceux qui n'ont que des éléments continûment itérables et que nous qualifierons, pour faire bref, de groupes de Lie. Il se trouve que ce sont exactement les surgroupes pleins de G' ou, si l'on préfère, l'intervalle $[G', G^\infty]$. Mais, pour commencer, il est commode de rechercher les groupes de Lie non pas dans la catégorie des groupes pleins, mais dans celle des groupes radiaux, dont voici la définition :

Définition 8e1 (ultrarayons et groupes radiaux)

On appelle ultrarayons toute application R_K de G^∞ dans $[0, \infty]$ du type

$$(8e1) \quad \mathcal{F} \rightarrow R_K(\mathcal{F}) = \limsup_n |a_n / K_n|^{1/n}$$

pour une certaine suite positive $K = \{K_n\}$. On appelle groupe radial tout sous-groupe de G^∞ de la forme

$$(8e2) \quad G = \{ \mathcal{F} ; R_K(\mathcal{F}) \leq R \} \quad (0 \leq R \leq \infty)$$

pour un ultrarayon R_K et un scalaire R fixes. Quitte à remplacer la suite $\{K_n\}$ par $\{R^n K_n\}$, on peut se limiter aux seules valeurs $0, 1, \infty$ du scalaire R . De plus, les groupes radiaux de type extrême, correspondant à $R = 0$ (resp. $R = \infty$) s'obtiennent comme intersection (resp. comme limites croissantes) de groupes radiaux de type moyen, correspondant à $R = 1$. Nous pouvons donc nous restreindre aux groupes radiaux de type moyen, que nous noterons

$$G^{(K_n)} = \{ \mathcal{F} ; R_K(\mathcal{F}) \leq 1 \}$$

et que nous nous garderons de confondre avec les groupes à bord $G^{(K_n)}$, dont ils sont toujours distincts (*)

Il est clair que deux ultrarayons R_K et $R_{K'}$ sont égaux si et seulement si $\lim_n (K_n / K'_n)^{1/n} = 1$. Ceci laisse une certaine latitude dans le choix de la suite K et permet souvent de considérer les K_n comme valeurs aux points entiers d'une fonction $x \rightarrow K_x$ définie sur tout R^+ et assez régulière.

Si on prend $K_n \equiv 1$, on trouve pour R_K le classique rayon de convergence. Comme $f(z)$ est une série en $1/z$, la relation $R_K(f) \leq R$ entraîne la convergence de f sur le domaine $|z| > R$. D'autre part, toujours lorsque $K_n \equiv 1$, on a en général

$$(8e3) \quad R_K(f \circ g) \geq \sup \{ R_K(f), R_K(g) \}$$

et il est clair que, dans ce cas, l'ensemble $\{f; R_K(f) \leq 1\}$ n'est pas un groupe. Ceci engage à rechercher quels ultrarayons définissent effectivement des groupes et à quelles conditions ces groupes sont pleins.

Proposition 8e1 (Groupes radiaux et surlinéarité)

$\alpha)$ Tout groupe radial (de type moyen) peut s'écrire sous la forme

$$(8e4) \quad G^{(K_n)} = \{f; \limsup_n |a_n / K_n|^{1/n} \leq 1\}$$

où $\{\log K_n\}$ désigne une suite positive, ne croissant pas trop lentement :

$$(8e5) \quad \frac{1}{n} \log K_n \rightarrow \infty$$

et vérifiant la propriété de surlinéarité :

(*) cf section 8b.

$$(8e6) \quad \log K_{n_1 + \dots + n_r} \geq \log K_{n_1} + \dots + \log K_{n_r} \quad (\forall n_1, \dots, n_r)$$

$\beta)$ Un groupe radial $G^{((K_n))}$ est plein si et seulement si

$$(8e7) \quad \frac{1}{n+1} \log K_{n+1} - \frac{1}{n} \log K_n \rightarrow 0$$

ce qui implique que K_n ne croisse pas trop vite :

$$(8e7 \text{ bis}) \quad \frac{1}{n^2} \log K_n \rightarrow 0.$$

Preuve : Soit G un groupe radial général (de type moyen). Par définition,

G est de la forme $\{f; \limsup |a_n / Q_n|^{1/n} \leq 1\}$ pour une certaine suite positive Q_n et on peut toujours supposer $Q_i \geq 1$. Manifestement,

$f(z) = z(1 - \sum Q_n z^{-n})$ appartient à G et donc aussi

$f \circ f(z) = z(1 - \sum Q'_n z^{-n})$. Or Q'_n est une combinaison linéaire, à coefficients entiers positifs, de tous les monômes $\prod_i Q_i^{n_i}$ pour lesquels

$\sum n_i = n$. Par un raisonnement déjà employé à la section 8b4, on voit

qu'en posant :

$$K_1 = Q_1, \dots, K_n = \sup \{ Q'_n, \sup_{n_1 + \dots + n_r = n} K_{n_1} \dots K_{n_r} \}$$

on obtient une suite $\{ \log K_n \}$ surlinéaire et telle que

$Q_n \leq K_n \leq Q'_n$. Il est clair alors que

$$\lim (K_n / Q_n)^{1/n} = \lim (Q'_n / Q_n)^{1/n} = 1$$

Tout groupe radial $G^{((K_n))}$ est donc définissable au moyen

d'une suite $\{ \log K_n \}$ surlinéaire. De plus, on a nécessairement

$\frac{1}{n} \log K_n \rightarrow \infty$. En effet, si la suite $(K_n)^{1/n}$ admettait une borne

inférieure u , la série

$$f(z) = z \left(1 - \sum_{n \geq 1} u^n z^{-n} \right) = z \left(1 - 2 \frac{u}{z} \right) \left(1 - \frac{u}{z} \right)^{-1}$$

aurait pour ultrarayon $R_K(f) = 1$, tandis que son carré d'itération

$$f^2(z) = z \left(1 - 2\frac{u}{z}\right) \left(1 - 4\frac{u}{z} + 2\frac{u^2}{z^2}\right) \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{-1} \left(1 - 3\frac{u}{z} + \frac{u^2}{z^2}\right)^{-1}$$

aurait un ultrarayon $R_K(f^2) \gg \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ puisque

$$1 - 3\frac{u}{z} + \frac{u^2}{z^2} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{u}{z}\right) \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} - \frac{u}{z}\right)$$

Ceci établit la partie directe du point α de la proposition 8e1.

Montrons qu'inversement $G^{(K_n)}$ est un groupe si $\{\log K_n\}$ vérifie (8e5) et (8e6). Pour cela, prouvons deux lemmes, qui utilisent les abréviations suivantes, destinées à revenir constamment dans la suite :

$$(8e8) \begin{cases} \underline{n} = (n_1, \dots, n_n) = \text{multiindice sans ordre sur } \mathbb{N}^* = \text{partie non ordonnée de } \mathbb{N}^* \\ \|\underline{n}\| = n_1 + \dots + n_n = \text{somme de } \underline{n} \\ \ell(\underline{n}) = \ell = \text{longueur de } \underline{n} \end{cases}$$

Lemme 8e1 :

Soit $f(z) = z \left(1 + \sum_{n \geq 1} a_n z^{-n}\right)$ l'élément générique de G^{∞} .

D'après la section 8c, il existe des polynômes universels $H^{\underline{n}}(w)$ en w tels que :

$$(8e9) \quad f^w(z) = z \left(1 + \sum_{\underline{n}} H^{\underline{n}}(w) a_{\underline{n}} z^{-\underline{n}}\right) \text{ avec } a_{\underline{n}} = a_{n_1} \dots a_{n_n}$$

Ces polynômes possèdent les propriétés suivantes :

- α) Si w est un entier positif, alors $(-1)^{\ell(\underline{n})} H^{\underline{n}}(w)$ est un entier positif.
 Si w est un entier négatif, alors $-H^{\underline{n}}(w)$ est un entier positif.
 Si w n'est pas entier, on ne peut rien dire de simple quant au signe de

β) Soit w un entier non nul et fixons θ dans $]0, 1]$. Alors :

$$(8e10) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{\substack{\|z\|=n \\ r(z) \leq \theta n}} |H^n(w)| \right\}^{1/n} = C(w, \theta)$$

où $C(w, \theta)$ est une fonction strictement positive, bornée en θ et telle que :

$$(8e10bis) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} C(w, \theta) = 1 \quad (w = \text{cste})$$

γ) Soit w non entier et fixons θ dans $]0, 1[$. Alors :

$$(8e11) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-\theta} \left\{ \sum_{\substack{\|z\|=n \\ r(z) \leq \theta n}} |H^n(w)| \right\}^{1/n} = C^*(w, \theta)$$

où $C^*(w, \theta)$ est une fonction strictement positive, uniformément bornée en w, θ et telle que

$$(8e11 bis) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} C^*(w, \theta) = 1$$

Le point α , très simple, est laissé au lecteur. Pour montrer le point β , posons $f_u(z) = z(1 + u \sum_{n \geq 1} z^{-n}) = z + \frac{u}{1-z^{-1}}$. La série f_u et chacune de ses itérées $f_u^{(w)}$ d'ordre entier w définissent des fonctions algébriques de z et de u . Considérées comme séries en z^{-1} , elles ont donc des rayons de convergence

$$R(f_u^{(w)}) = \limsup_n |a_{n,u}(w)|^{1/n} = R(w, u)$$

qui sont finis et non nuls pour $u, w \neq 0$. Pour w fixe non nul, $R(w, u)$ est algébrique par morceaux en u et varie continûment, sauf au point $u = 0$, où l'on a manifestement :

$$(8e12) \quad R(w, 0) = 0, \quad \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u \neq 0}} R(w, u) = 1.$$

D'autre part, d'après le point α , il est clair que :

$$(8e13) \quad f_u^w(z) = z \left(1 + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \geq 1}} H_n^n(w) u^n z^{-n} \right)$$

avec

$$(8e13bis) \quad H_n^n(w) = \sum_{\substack{\|a\|=n \\ \nu(a)=n}} H^a(w)$$

l'entier $H_n^n(w)$ étant ^{positif} pour $w > 0$ et n impair et négatif pour $w > 0$ et n pair ou pour $w < 0$.

Par suite, pour $w \in \mathbb{N}^*$, $-u \in]0, 1]$, $\theta \in]0, 1]$ on a $H_n^n(w) u^n < 0$

et donc :

$$(8e14) \quad R(w, u) = \limsup_n \left\{ - \sum_{n=1}^n H_n^n(w) u^n \right\}^{1/n} \geq u^\theta \limsup_n \left\{ \sum_{\substack{\|a\|=n \\ \nu(a) \leq \theta n}} |H^a(w)| \right\}^{1/n} \geq |u|^\theta$$

De même, pour $-w \in \mathbb{N}^*$, $u \in]0, 1]$, $\theta \in]0, 1]$ on a encore $H_n^n(w) u^n < 0$ et (8e14) reste en vigueur. Finalement, pour $w \in \mathbb{Z}^*$, $\theta \in]0, 1]$ et

$u = \theta \operatorname{sgn}(w) = \theta \frac{w}{|w|}$ on aura :

$$(8e15) \quad 1 \leq \limsup_n \left\{ \sum_{\substack{\|a\|=n \\ \nu(a) \leq \theta n}} H^a(w) \right\}^{1/n} = C(w, \theta) \leq \theta^{-\theta} R(w, \theta \operatorname{sgn}(w))$$

et par suite, compte tenu de (8e12) :

$$(8e15 bis) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} C(w, \theta) = 1$$

Ceci établit le point β du lemme 8e1. Reste le point γ . Soit

$f(z) = z \left(1 + \sum_{n \geq 1} a_n z^{-n} \right)$ l'élément générique du groupe G^∞ et soit $f_u^w(z) = z \left(1 + \sum_{n \geq 1} a_n(w) z^{-n} \right)$ non itérée d'ordre w complexe quelconque.

D'après (8c11) on a, pour toute série d'épreuve φ :

$$(8e16) \quad \varphi \circ f^w = F^w \cdot \varphi = \left\{ 1 + \sum_{n \geq 1} A_n(w) (F-1)^n \right\} \cdot \varphi$$

avec un opérateur $F-1$ et des scalaires $A_n(w)$ ainsi définis :

$$(8e17) \quad F-1 = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n!} \left\{ \sum_{m \geq 1} a_m z^{-m} \right\}^n \frac{d^n}{dz^n}$$

$$(8e18) \quad A_n(w) = \frac{w(w-1)\dots(w-n+1)}{n!}$$

Si maintenant on pose :

$$(8e19) \quad X = - \left(\sum_{n \geq 1} |a_n| z^{-n} \right) z \frac{d}{dz}$$

il est patent qu'à toute série d'épreuve φ du type :

$$(8e20) \quad \varphi(z) = -\alpha_1 z + \sum_{n \geq 0} \alpha_n z^{-n} \quad \text{avec } \alpha_1, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots > 0$$

l'opérateur X et ses puissances entières X^n associent des séries du même type. Par suite, pour toute φ du type (8e20), la série $(F-1)^n \cdot \varphi$ a ses coefficients majorés terme à terme par ceux de la série

$$(8e21) \quad \left\{ 1 + \sum_{n \geq 1} |A_n(w)| (e^X - 1)^n \right\} \cdot \varphi$$

Mais comme $|A_n(w)| \leq (-1)^n A_n(-|w|)$ et que

$$(8e22) \quad 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n A_n(-|w|) (e^X - 1)^n = (2 - e^X)^{-|w|} = 1 + \sum_{n \geq 1} B_n(|w|) X^n$$

on obtient finalement que la série (8e16) est majorée terme à terme par la série

$$(8e23) \quad \varphi + \sum_{n \geq 1} B_n(|w|) X^n \cdot \varphi$$

avec :

$$(8e24) \quad B_n(|w|) > 0 \quad \text{et} \quad \limsup_n |B_n(|w|)|^{1/n} = \log 2$$

Pour la fonction d'épreuve particulière $\varphi(z) = -z$ on voit que

$|a_n(w)|$ est majoré par :

$$(8e25) \quad |a_n(w)| = \sum_{r=1}^n \sum_{n_1+\dots+n_r=n} B_r(|w|) \frac{(n_1-1)(n_1+n_2-1)\dots(n_1+n_2+\dots+n_{r-1}-1)}{r!} |a_{n_1}| |a_{n_2}| \dots |a_{n_r}|$$

Comme cela vaut pour tout θ et que d'après (8e9) :

$$a_n(w) = \sum_{\underline{n}} H^{\underline{n}}(w) a_{\underline{n}}$$

(8e25 implique que, pour tout $\theta \in]0, 1]$:

$$(8e26) \quad \sum_{\substack{\|\underline{n}\|=n \\ r(\underline{n}) \leq \theta n}} |H^{\underline{n}}(w)| \leq \sum_{r \leq \theta n} \sum_{n_1+\dots+n_r=n} B_r(|w|) \frac{(n_1-1)(n_1+n_2-1)\dots(n_1+n_2+\dots+n_{r-1}-1)}{r!}$$

Or il y a exactement C_{n-1}^{n-1} manières d'écrire n comme somme ordonnée de

r entiers $n_i \geq 1$. D'autre part $(n_1-1)\dots(n_1+\dots+n_{r-1}-1) \leq n^n$. Enfin,

d'après (8e24) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C(\varepsilon)$ telle que

$0 < B_n(|w|) \leq C(\varepsilon) (\varepsilon + \log 2)^n$. En portant ceci dans (8e26) et en posant

$[\theta n]$ = partie entière de θn , on obtient :

$$(8e27) \quad \sum_{\substack{\|\underline{n}\|=n \\ r(\underline{n}) \leq \theta n}} |H^{\underline{n}}(w)| \leq C(\varepsilon) \sum_{r=1}^{[\theta n]} (\varepsilon + \log 2)^n n^n C_{n-1}^{n-1} \leq C(\varepsilon) (\varepsilon + \log 2)^{[\theta n]} n^{[\theta n]} C_n^{[\theta n]}$$

Or $(C_n^{[\theta n]})^{1/n} \rightarrow \frac{1}{\theta(1-\theta)^{1-\theta}}$ quand $n \rightarrow \infty$. Finalement il vient :

$$(8e28) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{\substack{\|z\|=n \\ |z| \leq \theta n}} |H^z(w)| \right\}^{1/n} \leq (\log 2)^\theta \frac{n^\theta}{\theta^\theta (1-\theta)^{1-\theta}}$$

d'où l'on tire aussitôt (8e11) et (8e11 bis). Ceci achève la démonstration du lemme 8e1 (*)

Lemme 8e2 :

Soit $\{\log K_n\}$ une suite surlinéaire telle que $\frac{1}{n} \log K_n \rightarrow \infty$.
 Posons $K_n = K_{n_1} \dots K_{n_r}$ et $n = \|n\| = n_1 + \dots + n_r$. Alors :

$$(8e29) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \geq \theta n}} (K_{\underline{n}} / K_n)^{1/n} = 0 \quad \forall \theta \in]0, 1[$$

Soit en effet n^+ (resp. n^-) le nombre de n_i qui sont $\geq 2/\theta$ (resp. $< 2/\theta$) et soit n^+ (resp. n^-) la somme de ces n_i . Manifestement $n^+ < \frac{1}{2} \theta n$. Or $n = n^+ + n^- \geq \theta n$. Donc :

$$(8e30) \quad \frac{1}{2} \cdot \theta \cdot n \leq n^- \leq n^+$$

De plus, par surlinéarité on a :

$$\log K_{n^-} + \sum_{n_i \geq 2/\theta} \log K_{n_i} \leq \log K_n$$

Par suite :

$$\log (K_{\underline{n}} / K_n)^{1/n} = -\frac{1}{n} \log K_n + \frac{1}{n} \sum_i \log K_{n_i} \leq -\frac{1}{n} \log K_n + \frac{1}{n} \sum_{n_i \leq 2/\theta} \log K_{n_i}$$

Soit, en posant $C = \sup_{n_i \leq 2/\theta} \log K_{n_i}$ et compte tenu de (8e30) :

(*) $C(w, \theta)$ et $C^*(w, \theta)$ sont continue en θ et $C^*(w, \theta)$ est constante en w (non entier), mais peu nous importe.

$$\log (K_m / K_n)^{1/m} \leq -\frac{\bar{n}}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \log K_n + \frac{\bar{n}}{n} C \leq -\frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \log K_n + C$$

et finalement, à cause de l'hypothèse $\frac{1}{n} \cdot \log K_n \rightarrow \infty$:

$$\log (K_m / K_n)^{1/m} \rightarrow -\infty \text{ ce qui prouve le lemme.}$$

Nous pouvons maintenant reprendre la démonstration de la proposition 8e1 et montrer que si $\{\log K_n\}$ vérifie (8e5) et (8e6), alors $G^{(K_n)}$ est un groupe. Pour cela, il suffit d'établir les deux implications suivantes :

$$(8e31) \quad R_K(f) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad R_K(\bar{f}) \leq 1$$

$$(8e32) \quad R_K(f) \leq 1 \quad \text{et} \quad R_K(g) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad R_K(f \circ g) \leq 1$$

Commençons par (8e31). Notant a_n et $a_n(-1)$ les coefficients de f et \bar{f} , nous aurons, d'après (8e9) :

$$(8e33) \quad a_n(-1) = \sum_{\|\underline{n}\|=n} H^n(-1) a_{\underline{n}} \quad (a_{\underline{n}} = a_{n_1} \dots a_{n_r})$$

Mais si $R_K(f) \leq 1$, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une constante $C(\varepsilon)$ telle que :

$$|a_n| \leq C(\varepsilon) (1+\varepsilon)^n K_n$$

Par suite, si nous fixons $\theta \in]0, 1]$, nous aurons :

$$(8e34) \quad \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \left| \frac{a_n(-1)}{K_n} \right| \leq \sum_{r=1}^n \left\{ \sum_{\substack{\|\underline{n}\|=n \\ n(\underline{n})=r}} |H^n(-1)| C^n(\varepsilon) \frac{K_n}{K_n} \right\} = \sum_{r \leq \theta n} \{ \dots \} + \sum_{r > \theta n} \{ \dots \}$$

D'où :

$$(8e34 \text{ bis}) \quad \frac{1}{1+\varepsilon} \left| \frac{a_n(-1)}{K_n} \right| \leq \left(\sum_{r \leq \theta n} \{ \dots \} \right)^{1/m} + \left(\sum_{r > \theta n} \{ \dots \} \right)^{1/m} \quad (\forall \varepsilon, \theta)$$

avec les majorations :

$$(8e35) \left(\sum_{r \leq \theta \cdot n} \{ \dots \} \right)^{1/n} \leq \left(\sum_{\substack{\|n\|=n \\ r(n) < \theta \cdot n}} H^n(-1) \right)^{1/n} \cdot (C(\varepsilon))^\theta \cdot \sup_{\|n\|=n} (K_n / K_n)^{1/n}$$

$$(8e36) \left(\sum_{r > \theta \cdot n} \{ \dots \} \right)^{1/n} \leq \left(\sum_{\|n\|=n} |H^n(-1)| \right)^{1/n} \cdot C(\varepsilon) \cdot \sup_{\substack{\|n\|=n \\ r(n) > \theta \cdot n}} (K_n / K_n)^{1/n}$$

D'après (8e10) et la surlinéarité de $\{ \log K_n \}$:

$$(8e35 \text{ bis}) \limsup_n \left(\sum_{r \leq \theta \cdot n} \{ \dots \} \right)^{1/n} \leq C(-1, \theta) \cdot (C(\varepsilon))^\theta$$

D'après (8e10) et (8e29)

$$(8e36 \text{ bis}) \limsup_n \left(\sum_{r > \theta \cdot n} \{ \dots \} \right)^{1/n} \leq C(-1, 1) \cdot C(\varepsilon) \cdot \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ r > \theta \cdot n}} (K_n / K_n)^{1/n} = 0.$$

Finalement, en portant (8e35 bis) et (8e36 bis) dans (8e34 bis) il vient :

$$(8e37) \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\varepsilon} \left| \frac{a_n(-1)}{K_n} \right|^{1/n} \leq C(-1, \theta) \cdot (C(\varepsilon))^\theta \quad (\forall \varepsilon > 0, \forall \theta \in]0, 1])$$

Faisons tendre θ vers 0. Il vient d'après (8e10 bis) :

$$(8e38) \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\varepsilon} \left| \frac{a_n(-1)}{K_n} \right|^{1/n} \leq 1 \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

Autrement dit, $R_K(\bar{f}) \leq 1$ et ceci prouve l'implication (8e31). En raisonnant exactement de la même manière, on établirait l'implication

$$(8e39) R_K(f) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad R_K(\bar{f}) \leq 1$$

qui à son tour entraîne l'implication (8e32). Soit en effet :

$f(z) = z(1 + \sum a_n z^{-n})$ et $g(z) = z(1 + \sum b_n z^{-n})$. Posons :

Posons $h(z) = z(1 - \sum (|a_n| + |b_n|) z^{-n})$. Alors on a manifestement :

$$R_K(h) = \sup (R_K(f), R_K(g))$$

et, vu que $(-1)^{n(n)} H^n(r) < 0$ (cf. lemme 8e1) on a aussi :

$$R_K(h^2) \geq R_K(f \circ g)$$

Ceci prouve la partie α de la proposition 8e1. La partie β en résulte aussitôt. En effet, la stabilité par "translation" des groupes pleins (cf. hypothèse (8b6)) s'exprime par l'inégalité :

$$(8e40) \quad \limsup_n \left(\frac{1}{n+1} \log K_{n+1} - \frac{1}{n} \log K_n \right) = 0$$

qui entraîne aussitôt (8e7 bis). Mais la surlinéarité empêche $\log K_n$ de décroître. Par suite :

$$\frac{1}{n+1} \log K_{n+1} - \frac{1}{n} \log K_n \geq \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \log K_n = -\frac{1}{n(n+1)} \log K_n$$

D'où, compte tenu de (8e7 bis) :

$$(8e41) \quad \liminf_n \left(\frac{1}{n+1} \log K_{n+1} - \frac{1}{n} \log K_n \right) = 0$$

ce qui, joint à (8e40), entraîne (8e7) et achève de démontrer la proposition 8e1.

Proposition 8e2 : (Radialité et groupes de Lie)

Pour qu'un groupe radial et plein

$$(8e42) \quad G^{((K_n))} = \left\{ f; \limsup_n |a_n / K_n|^{1/n} \leq 1 \right\}$$

soit de Lie, il faut et il suffit que G contienne le groupe médian G' .
 Autrement dit, outre les conditions (8e6) et (8e7), la suite K_n doit vérifier :

$$(8e43) \quad \frac{1}{n} (K_n)^{1/n} \rightarrow \infty$$

La partie directe est déjà acquise, car nous avons vu à la section 8b1 que G' était le plus petit groupe apparenté à G' qui fût de Lie. Pour la partie réciproque nous avons besoin d'un lemme analogue au lemme 8e2, mais plus long à établir.

Lemme 8e3

Soit $\{ \log K_n \}$ une suite positive, surlinéaire et vérifiant

$$(8e43 \text{ bis}) \quad \frac{1}{n} \log K_n - \log n \rightarrow \infty$$

$$(8e44) \quad \frac{1}{n^2} \log K_n \rightarrow 0$$

Posons comme d'habitude $K_n = K_{n_1} \dots K_{n_r}$ et $n = \|n\| = n_1 + \dots + n_r$. Alors :

$$(8e45) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{r/n} (K_{n_1} / K_n)^{1/n} \leq 1$$

$$(8e46) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ r \geq \theta \cdot n}} n^{r/n} (K_{n_1} / K_n)^{1/n} = 0 \quad \forall \theta \in]0, 1[$$

Sous les hypothèses du lemme, on peut trouver deux fonctions $A(x)$ et $B(x)$ positives, croissantes, tendant vers l'infini et telles que :

$$(8e47) \quad \log n + A(n) \leq \frac{\log K_n}{n} \leq \frac{n}{B(n)} \quad (\text{avec } \frac{n}{B(n)} \text{ croissante})$$

Notons $[x]$ la partie entière de x et posons :

$$(8e48) \quad n^* = \frac{1}{4} [B(\log n)] [\log n]$$

$$(8e49) \quad r_1 = \sum_{n_i=1} 1 \quad ; \quad v_1 = \sum_{n_i=1} n_i = r_1 \quad ;$$

$$(8e50) \quad r_2 = \sum_{2 \leq n_i \leq n^*} 1 \quad ; \quad v_2 = \sum_{2 \leq n_i \leq n^*} n_i \geq 2r_2 ;$$

$$(8e51) \quad r_3 = \sum_{n^* < n_i} 1 \quad ; \quad v_3 = \sum_{n^* < n_i} n_i$$

Bien entendu, $r = r_1 + r_2 + r_3$ et $n = v_1 + v_2 + v_3$. Si donc on pose

$$(8e52) \quad \mathcal{K}^n = \log \left(n^{r/n} (K_m / K_n)^{1/n} \right) = \frac{r}{n} \log n + \frac{1}{n} \sum_{n_i} \log K_{n_i} - \frac{1}{n} \log K_n$$

on peut envisager la décomposition :

$$(8e53) \quad \mathcal{K}^n = \mathcal{K}_1^n + \mathcal{K}_2^n + \mathcal{K}_3^n$$

avec

$$(8e54) \quad \mathcal{K}_1^n = \frac{r_1}{n} \log n + \frac{1}{n} \sum_{n_i=1} \log K_{n_i} - \frac{1}{n} \log K_{v_1}$$

$$(8e55) \quad \mathcal{K}_2^n = \frac{r_2}{n} \log n + \frac{1}{n} \sum_{2 \leq n_i \leq n^*} \log K_{n_i} - \frac{1}{n} \log K_{v_2}$$

$$(8e56) \quad \mathcal{K}_3^n = \frac{r_3}{n} \log n + \frac{1}{n} \log K_{v_1} + \frac{1}{2} \log K_{v_2} + \frac{1}{n} \sum_{n^* < n_i} \log K_{n_i} - \frac{1}{n} \log K_n$$

Etude de \mathcal{K}_1^n .

Compte tenu de (8e47) on tire de (8e54) :

$$\mathcal{K}_1^n \leq \frac{n_1}{n} \log n + \frac{n_1}{n} \log K_1 - \frac{n_1}{n} \log n_1 - \frac{n_1}{n} A(n_1) = \frac{n_1}{n} \left\{ \log \frac{n}{n_1} - A(n_1) + \log K_1 \right\}$$

Distinguons deux cas. Lorsque $\frac{n}{n_1} > K_1 e^{A(n_1)}$, on a $\frac{n_1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{n_1}{n} \log \frac{n}{n_1} \rightarrow 0$ et par suite :

$$\limsup_n \mathcal{K}_1^n \leq \frac{n_1}{n} \log \frac{n}{n_1} + \frac{n_1}{n} \log K_1 = 0$$

Lorsque $\frac{n}{n_1} \leq K_1 e^{A(n_1)}$, on a $\log \frac{n}{n_1} - A(n_1) + \log K_1 \leq 0$ et par suite :

$$\limsup_n \mathcal{K}_1^n \leq 0.$$

Enfin, dans le cas particulier ou $\frac{n_1}{n} > \theta > 0$ on a :

$$\mathcal{K}_1^n \leq \frac{n_1}{n} \log \frac{n}{n_1} - \theta \{ A(n_1) - \log K_1 \}$$

Or $\frac{n_1}{n} \log \frac{n}{n_1} \leq \frac{1}{e}$ puisque $\frac{n_1}{n} < 1$ et $\{ A(n_1) - \log K_1 \} \rightarrow \infty$ puisque $n_1 > \theta \cdot n$. Donc $\mathcal{K}_1^n \rightarrow -\infty$.

En résumé :

$$(8e57) \quad \limsup_n \mathcal{K}_1^n \leq 0 \quad \text{dans tous les cas}$$

$$(8e58) \quad \lim_n \mathcal{K}_1^n = -\infty \quad \text{lorsque } \liminf \frac{n_1}{n} > 0$$

Etude de \mathcal{K}_2^n .

(8e55) peut s'écrire

$$\mathcal{K}_2^m = \frac{n_2}{n} \log n - \frac{v_2}{n} \left\{ \frac{\log K_{v_2}}{v_2} - \sum_{2 \leq n_i \leq n^*} \frac{n_i}{v_2} \cdot \frac{\log K_{n_i}}{n_i} \right\}$$

Comme la parenthèse $\{ \dots \}$ est positive (par surlinéarité) et que $v_2 \geq 2n_2$ on tire de là :

$$(8e59) \quad \mathcal{K}_2^m \leq \frac{n_2}{n} \log n - \frac{2n_2}{n} \left\{ \frac{\log K_{v_2}}{v_2} - \sum_{n \leq n_i \leq n^*} \frac{n_i}{v_2} \frac{\log K_{n_i}}{n_i} \right\}$$

Mais d'après (8e47) :

$$(8e60) \quad \frac{\log K_{v_2}}{v_2} \geq \log v_2 + A(v_2) \geq \log(2n_2) + A(2n_2) \geq \log n_2 + A(n_2)$$

D'autre part, puisque $\sum_{2 \leq n_i \leq n^*} \frac{n_i}{v_2} = 1$ et compte tenu de (8e47) + (8e48) :

$$(8e61) \quad \sum_{2 \leq n_i \leq n^*} \frac{n_i}{v_2} \frac{\log K_{n_i}}{n_i} \leq \sup_{n_i \leq n^*} \frac{\log K_{n_i}}{n_i} \leq \frac{n^*}{B(n^*)} \leq \frac{\frac{1}{4} [B(\log n)] [\log n]}{B(\frac{1}{4} B(\log n) [\log n])} \leq \frac{\log n}{4}$$

Finalement, en portant (8e60) et (8e59) on trouve :

$$(8e62) \quad \mathcal{K}_2^m \leq \frac{n_2}{n} \log n - \frac{2n_2}{n} \left\{ \log n_2 + A(n_2) - \frac{1}{4} \log n \right\} \leq \frac{3}{2} \frac{n_2}{n} \log \frac{n}{n_2} - \frac{1}{2} \frac{n_2}{n} \log n_2$$

Distinguons encore deux cas. Lorsque $\frac{n}{n_2} > \log \log n$, on a $\frac{n_2}{n} \log \frac{n}{n_2} \rightarrow 0$ et $\limsup_n \mathcal{K}_2^m \leq 0$. Au contraire, lorsque $\frac{n_2}{n} \leq \log \log n$ et en particulier lorsque $\frac{n_2}{n} \geq \theta > 0$, on a :

$$\frac{n_2}{n} \log \frac{n}{n_2} \leq \frac{1}{e} ; \quad \frac{n_2}{n} \log n_2 \geq \frac{\log n - \log \log \log n}{\log \log n} \rightarrow \infty$$

et par suite $\mathcal{K}_2^m \rightarrow -\infty$. On peut donc énoncer, ici encore :

$$(8e63) \quad \limsup_n \mathcal{K}_2^m \leq 0 \quad \text{dans tous les cas}$$

$$(8e64) \quad \lim_n \mathcal{K}_2^m = -\infty \quad \text{lorsque} \quad \liminf \frac{n_2}{n} > 0$$

Etude de \mathcal{K}_3^m .

Par définition
$$\mathcal{K}_3^m = \frac{n_3}{n} \log n + \frac{1}{n} \left\{ \log K_{V_1} + \log K_{V_2} + \sum_{n^* < n_i} \log K_{n_i} - \log K_n \right\}$$

Or $V_1 + V_2 + \sum_{n^* < n_i} n_i = n$. La parenthèse $\{ \dots \}$ est donc ≤ 0 par surlinéarité. D'autre part, on a manifestement $n_3 \cdot n^* \leq n$. Par suite :

$$\frac{n_3}{n} \log n \leq \frac{\log n}{n^*} = \frac{4 \log n}{[B(\log n)][\log n]} \rightarrow 0$$

Finalement :

$$(8e65) \quad \limsup_n \mathcal{K}_3^m \leq 0.$$

En rapprochant (8e57), (8e63) et (8e65) on voit que $\limsup_n \mathcal{K}^m \leq 0$ ce qui établit (8e45).

Supposons maintenant que $\liminf \frac{n}{m} > 0$. Puisque $n = n_1 + n_2 + n_3$ et que $\frac{n_3}{n} \leq \frac{1}{n^*} \rightarrow 0$, on a soit $\liminf \frac{n_1}{m} > 0$ soit $\liminf \frac{n_2}{m} > 0$, soit les deux à la fois. Compte tenu de (8e58) et (8e64) on voit alors que $\lim_n \mathcal{K}^m = -\infty$, ce qui établit (8e46) et achève la démonstration du lemme 8e3.

Nous pouvons maintenant montrer que si la suite $K = \{K_n\}$ vérifie (8e6), (8e7) et (8e43) alors le groupe $G^{(K_n)}$ est de Lie. Il suffit pour cela de prouver l'implication :

$$(8e66) \quad R_K(\beta) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad R_K(\beta^w) \leq 1 \quad (w \in \mathbb{C})$$

Notons a_n et $a_n(w)$ les coefficients de f et f^w . D'après (8e9) nous avons :

$$(8e67) \quad a_n(w) = \sum_{\|\underline{n}\|=n} H^{\underline{n}}(w) a_{\underline{n}} \quad (a_{\underline{n}} = a_{n_1} \dots a_{n_m})$$

Mais si $R_K(f) \leq 1$, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une constante $C(\varepsilon) > 1$ telle que

$$|a_n| \leq C(\varepsilon) (1+\varepsilon)^n K_n$$

En portant ceci dans (8e67) il vient successivement :

$$(8e68) \quad \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \left| \frac{a_n(w)}{K_n} \right| \leq \sum_{r=1}^n \left\{ \sum_{\substack{\|\underline{n}\|=n \\ r(\underline{n})=r}} |H^{\underline{n}}(w)| C(\varepsilon)^r \frac{K_{\underline{n}}}{K_n} \right\} \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

$$(8e69) \quad \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \left| \frac{a_n(w)}{K_n} \right| \leq \sum_{r=1}^n \left\{ n^{-r} \sum_{\substack{\|\underline{n}\|=n \\ r(\underline{n})=r}} |H^{\underline{n}}(w)| \right\} \left\{ C(\varepsilon)^r \right\} \left\{ n^r \frac{K_{\underline{n}}}{K_n} \right\} \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

$$(8e70) \quad \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \left| \frac{a_n(w)}{K_n} \right|^{1/n} \leq n^{1/n} \sup_{1 \leq r \leq n} \left\{ \dots \right\}^{1/n} \left\{ \dots \right\}^{1/n} \left\{ \dots \right\}^{1/n} \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

Finalement :

$$(8e71) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\varepsilon} \left| \frac{a_n(w)}{K_n} \right|^{1/n} \leq \sup_{\{r_n\}} L_1^{\{r_n\}} L_2^{\{r_n\}} L_3^{\{r_n\}}$$

avec les notations

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1^{\{\rho_n\}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{\rho_n}{n}} \left(\sum_{\substack{\|\alpha\|=n \\ \rho(\alpha) = \rho_n}} H^n(\omega) \right)^{1/n} \\ L_2^{\{\rho_n\}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} (C(\varepsilon))^{\frac{\rho_n}{n}} \\ L_3^{\{\rho_n\}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{\rho_n}{n}} \sup_{\substack{\|\alpha\|=n \\ \rho(\alpha) = \rho_n}} \left(\frac{K_\alpha}{K_n} \right)^{1/n} \end{array} \right.$$

et étant entendu que dans (8e71) le sup doit être pris par rapport à toutes les suites entières $\{\rho_n\}$ telles que $1 \leq \rho_n < n$. En fait, il est clair qu'on peut se restreindre aux suites $\{\rho_n\}$ telles que ρ_n/n possède une limite. Lorsque cette limite est nulle, on a d'après (8e11), (8e11 bis) et (8e45) :

$$L_1^{\{\rho_n\}} = 1 \quad ; \quad L_2^{\{\rho_n\}} = 1 \quad ; \quad L_3^{\{\rho_n\}} = 1$$

De même, lorsque $\frac{\rho_n}{n} \rightarrow \theta > 0$, on obtient, en appliquant cette fois (8e11) et (8e46) :

$$L_1^{\{\rho_n\}} \leq C^*(\omega, \theta) < \infty \quad ; \quad L_2^{\{\rho_n\}} = (C(\varepsilon))^\theta < \infty \quad ; \quad L_3^{\{\rho_n\}} = 0.$$

On trouve donc dans tous les cas $L_1^{\{\rho_n\}} \quad L_2^{\{\rho_n\}} \quad L_3^{\{\rho_n\}} \leq 1$

Mais comme (8e71) vaut pour tout ξ , on aboutit en fin de compte à

$R_K(\xi) \leq 1$, ce qui établit l'implication (8e66) et prouve la proposition 8e2.

Désignons par $[G', G^\infty]$ l'ensemble de tous les groupes pleins qui sont apparentés à G^0 et qui contiennent le groupe médian G' .

On vient de voir qu'un groupe plein et radial était de Lie si et seulement si il appartenait à l'intervalle $[G', G^\infty]$. En fait, l'hypothèse de

radialité facilite la démonstration, mais n'est pas essentielle et on a le résultat plus général :

Proposition 8e3 (L'intervalle de Lie $[G', G^\circ]$)

Un groupe plein apparenté à G° est de Lie si et seulement si il contient G' . L'ensemble de tous ces groupes est dit intervalle de Lie et noté $[G', G^\circ]$.

Comme ce résultat ne nous sert pas directement dans la suite, nous ne le mentionnons que pour sa simplicité et sa généralité, et nous en reléguons la démonstration à l'exercice 8e2. Celle-ci est plus longue que la précédente et nécessite non seulement la majoration des coefficients $H^n(w)$ mais aussi leur minoration.

Remarque 1 : Un groupe radial $G^{(K_n)}$ peut très bien être de Lie sans pour autant être plein. Il en est ainsi, par exemple, chaque fois que la suite $\{\log K_n\}$ est convexe (et donc surlinéaire) et qu'elle croît plus vite que n^2 (ce qui met (8e7 bis) en défaut et empêche $G^{(K_n)}$ d'être plein). Voir à ce sujet l'exercice 8e3.

Remarque 2 : Il existe aussi des groupes radiaux $G^{(K_n)}$ qui contiennent le groupe médian G' (autrement dit $\frac{1}{n}(K_n)^{1/n} \rightarrow \infty$) mais qui ne sont pas de Lie. Bien entendu, ces groupes-là ne sauraient être pleins et (8e7 bis) doit être en défaut. Pour un exemple, voir l'exercice 8e4.

Section 8f : La transformation de Borel et l'intervalle critique $[G^\circ, G']$.

Lorsqu'un groupe plein G n'appartient pas à l'intervalle de Lie $[G', G^\circ]$, c'est-à-dire lorsque G est soit incomparable à G' soit contenu dans G' , il se comporte en gros comme le groupe G° . Autrement

dit, il présente des classes de conjugaison non élémentaires, possède beaucoup d'éléments non itérables, etc... Toutefois, ces groupes ont pour éléments des séries généralement divergentes, si bien que les méthodes élémentaires applicables à G° sont ici en défaut (même lorsqu'on a quasianalyticité).

Dans le premier cas (G non comparable à G') on a affaire à des groupes très irrégulières, devant lesquels on est plutôt désarmé. On peut pourtant prouver la rareté des éléments continûment itérables (cf. exercice 9d1) et l'abondance des classes de conjugaison (cf. exercice 12d1)

Mais dans le deuxième cas ($G \subset G'$) qui est heureusement le plus important en pratique et qui englobe notamment le cas "quasianalytique", on peut rétablir la convergence des séries grâce à la transformation de Borel et, par cette méthode, aller très loin dans l'étude du groupe G et des problèmes connexes : itération continue, analyse harmonique, etc...

Nous axerons donc les chapitres qui suivent sur l'intervalle $[G^\circ G']$, que nous appellerons intervalle critique (*) et qui consiste en tous les groupes pleins, apparentés à G° et strictement plus petits que G' .

La transformation de Borel.

Si on pose

$$(8f1) \quad \left\{ \begin{array}{l} z^{-n} \rightarrow B.z^{-n} = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \quad (\forall n \geq 1) \\ 1 \rightarrow B.1 = \delta(z) = \text{dirac de masse 1 au point} \\ z \rightarrow B.z = \delta'(z) = \text{dérivée de } \delta(z) \text{ au sens des distributions} \end{array} \right.$$

(*) par opposition à l'intervalle de Lie $[G' G^\infty]$ qui lui fait pendant et qui est non critique (en ce sens que l'itération continue et l'analyse harmonique n'y posent aucune difficulté).

on définit par linéarité une transformation de Borel \mathcal{B} sur les algèbres pleines \mathcal{A} ainsi que sur les groupes pleins $\mathcal{G} = I + \mathcal{A}$ qui leur correspondent. On notera par des lettres grasses les ensembles images :

$$\mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A} \quad , \quad \mathcal{B} \cdot \mathcal{G} = \mathcal{G}$$

ainsi que leurs éléments :

$$\mathcal{B} \cdot \varphi = \varphi \quad , \quad \mathcal{B} \cdot f = f$$

\mathcal{B} transpose la multiplication des séries en convolution formelle $*$:

$$(8f2) \quad \frac{z^{m-1}}{(m-1)!} * \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{z^{m+n-1}}{(m+n-1)!} ; \quad \delta * \varphi = \varphi ; \quad \delta' * \varphi = \varphi'$$

\mathcal{B} transpose la dérivation $\frac{d}{dz}$ en multiplication par $-z$. Enfin, \mathcal{B} transpose la composition des séries formelles (notée \circ maigre)

$$(8f3) \quad g, f \rightarrow g \circ f = g + \sum_{n \geq 1} (f-z)^n \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} g = g(f)$$

en composition convolutive (notée \bullet gras) :

$$(8f3 \text{ bis}) \quad g, f \rightarrow g \bullet f = g + \sum_{n \geq 1} (f-\delta')^n * \left[\frac{(z)^n}{n!} g \right]$$

Or le groupe médian \mathcal{G}' et son algèbre \mathcal{A}' correspondent à la condition de croissance $\limsup \frac{1}{n} |a_n|^{1/n} < \infty$. Compte tenu de (8f1) et du comportement asymptotique de $n!$ on voit tout de suite que les éléments de \mathcal{G}' ou \mathcal{A}' ont pour transformés de Borel (aux diracs près) des séries convergentes de la variable z . On peut donc considérer ces transformés comme germes holomorphes en 0 (aux diracs près) et remplacer la convolution formelle (8f2) par l'usuelle convolution intégrale :

$$(8f4) \quad \varphi \star \Psi(z) = \int_0^z \varphi(z-\zeta) \Psi(\zeta) d\zeta \quad (\text{cf. chapitre 1})$$

Ceci vaut a fortiori pour chacun des groupes de l'intervalle critique et pour les algèbres associées. Ainsi, les groupes pleins G^t ($0 \leq t < 1$) définis ci-dessus ont pour transformés de Borel des groupes G^t dont les éléments sont des fonctions entières $f(z)$ à la croissance limitée par :

$$(8f5) \quad \limsup_{|z| \rightarrow \infty} |z|^{-\frac{1}{1-t}} \log |f(z)| < \infty \quad (\text{croissance exponentielle pour } t=0)$$

Tous ces groupes sont contenus dans le groupe plein :

$$(8f6) \quad G^1 = \left\{ f ; \lim_n \frac{1}{n} |a_n|^{1/n} = 0 \right\}$$

qui a pour transformé de Borel le groupe G^{1-} consistant en toutes les fonctions entières (de croissance quelconque).

Les groupes pleins intermédiaires entre G^{1-} et G^1 ont des transformés de Borel consistant en fonctions holomorphes sur un certain disque $|z| \leq R$ (R dépendant du groupe). Ces groupes présentent peu d'intérêt. Les groupes intéressants sont situés entre G^0 et G^{1-} . Chacun d'eux est défini par une certaine restriction K sur la croissance des coefficients et son transformé de Borel consiste en fonctions entières soumises (en module) à une certaine restriction de croissance K héritée de K . Toutefois, deux groupes pleins G et G' , répondant à des croissances $K \neq K'$, peuvent très bien, après transformation de Borel, donner lieu à des croissances identiques $K = K'$.

Sous quelles réserves peut-on remonter de K à K ? Examinons la question dans le cas des groupes à bord et des groupes radiaux.

Proposition 8f1. (groupes réguliers)

Soit $G^{(K_n)}$ le groupe à bord et $G^{((K_n))}$ le groupe radial définis par une certaine suite $\{\log K_n\}$ surlinéaire. On suppose $\frac{1}{n} (K_n)^{1/n} \rightarrow 0$ de sorte que ces deux groupes soient inclus dans G^+ et que la série

$$(8f7) \quad K(r) = \sum r^n \frac{K_n}{n!}$$

converge pour tout r . Alors :

α) Les éléments f du transformé de Borel $G^{(K_n)}$ vérifient

$$(8f8) \quad \limsup_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z)}{K(r)} \right|^{1/n} < \infty \quad (r = |z|)$$

β) Les éléments f du transformé de Borel $G^{((K_n))}$ vérifient

$$(8f9) \quad \limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{\log |f(z)|}{\log |K((1+\varepsilon)r)|} \leq 1 \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

et lorsque $\limsup \frac{1}{n} \log K_n < 1$, cette relation équivaut à

$$(8f10) \quad \limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{\log |f(z)|}{\log K(r)} \leq 1 \quad (r = |z|)$$

ou encore a

$$(8f11) \quad \limsup \frac{\log |f(r)|}{\log K(r)} \leq 1$$

avec

$$(8f12) \quad k(r) = \sup_n \frac{r^n}{n!} K_n$$

γ) Si K_m est défini et deux fois différentiable pour tout n réel > 0 et si

$$(8f13) \quad 0 \leq \liminf n \frac{d^2}{dn^2} \log K_m \leq \limsup n \frac{d^2}{dn^2} \log K_m < 1$$

alors les conditions de croissance (8f8) et (8f10) caractérisent effectivement les éléments de $G^{(K_m)}$ et $G^{((K_m))}$ respectivement.

Pour les démonstration, voir les exercices 8§3.

Le point γ signifie que, moyennant (8f13), on peut remonter de \mathbb{K} à \mathbb{K} . Cela vaut non seulement pour les $G^{(K_m)}$ et les $G^{((K_m))}$ mais aussi, bien sûr, pour tous les groupes pleins qu'on peut en déduire par intersection ou limite croissante. Pour faire bref, ces groupes seront dits réguliers et c'est eux surtout que nous étudierons.

Notons que la condition (8f13) est naturelle car, d'une part, elle est invariante pour la substitution $K_m \rightarrow R^n K_m$ et, d'autre part, dans le cas extrême du groupe minimal G^0 (resp. du groupe médian G^1) qui est défini par la condition $R_K(\beta) < \infty$ avec $K_m \equiv 1$ (resp. n^n) on a $n \frac{d^2}{dn^2} \log K_m \rightarrow 0$ (resp. $\rightarrow 1$). En fait, on pourrait affaiblir quelque peu la condition (8f13) (*) mais ce n'est pas utile en pratique, car la condition indiquée en (8f13) conduit à une notion de groupe "régulier" qui coiffe tous les groupes importants de l'intervalle critique (cf. exercice 8§4).

Notons enfin que lorsque (8f13) est réalisée, $\log K(n)$ est

(*) Ainsi (8f10) caractérise $G^{((K_m))}$ pour peu que la suite $\left\{ \log \frac{n!}{K_m} \right\}$ soit convexe.

réalisée, $\log K(n)$ est une fonction convexe non seulement de $\log n$ (ce qui est toujours le cas) mais encore de n .

Section 8g : Résumé du chapitre 8.

Dans ce chapitre d'introduction, on cherche à classer les groupes dont les éléments sont des séries de la forme $f(z) = z(1 + \sum_{n \geq 1} a_n z^{-n})$ et dont la loi est la composition des séries formelles. Plus exactement, on se restreint aux groupes pleins, c'est-à-dire aux groupes \mathcal{G} qui sont stables par contraction (si \mathcal{G} contient une série f , il contient toute série g aux coefficients majorés en valeur absolue par ceux de f) et stable par translation (si \mathcal{G} contient une série f de coefficients a_n , il contient les séries de coefficients a_{n+1} et a_{n-1}).

Comme exemples simples de groupes pleins, on étudie les groupes à bord $\mathcal{G}^{(K_n)}$, intersections de tous les groupes pleins qui contiennent une série donnée $f(z) = z(1 + \sum_{n \geq 1} K_n z^{-n})$ et les groupes radiaux $\mathcal{G}^{(K_n)}$, définis par des ultrarayons R_K :

$$f \in \mathcal{G}^{(K_n)} \iff R_K(f) = \limsup_n |a_n / K_n|^{1/n} \leq R$$

On montre qu'on peut dans les deux cas se limiter à des suites $\{\log K_n\}$ surlinéaires, c'est-à-dire telles que :

$$\log K_{n_1 + \dots + n_r} \geq \log K_{n_1} + \dots + \log K_{n_r} \quad (K_{n_i} \geq 1)$$

Trois groupes pleins jouent un rôle de premier plan. Ce sont :

- le groupe minimal $\mathcal{G}^0 = \{ f ; \limsup |a_n|^{1/n} < \infty \}$
- le groupe médian $\mathcal{G}^1 = \{ f ; \limsup \frac{1}{n} |a_n|^{1/n} < \infty \}$
- le groupe maximal $\mathcal{G}^\infty = \{ f ; a_n \text{ quelconque} \}$

Il s'avère que les propriétés des groupes pleins changent du tout au tout selon leur rapport d'inclusion avec le groupe médian G' . On est ainsi amené à distinguer trois sortes de groupes pleins :

α) l'intervalle de Lie $[G', G^\infty]$ constitué par les surgroupes de G' et ainsi nommé parce qu'il contient rien que des groupes de Lie et tous les groupes de Lie (qui soient pleins). Les groupes de cet intervalle se comportent à peu près comme G^∞ .

β) l'intervalle critique $[G^0, G' [$ constitué par les sous-groupes stricts de G' . Tout comme G^0 , les groupes de cet intervalle possèdent des fonctions centrales non élémentaires et leurs éléments ne sont presque jamais itérables. Mais le groupe G^0 , étant constitué de séries qui convergent à l'infini, est justiciable de méthodes élémentaires tandis qu'avec les autres groupes de l'intervalle critique, il faut recourir à la transformation de Borel pour rétablir la convergence et obtenir des résultats précis.

γ) les groupes non comparables à G' , qui présentent un caractère fortement irrégulier et dont l'étude est très ardue.

En somme, les groupes à la fois intéressants et abordables sont ceux de l'intervalle critique. Aussi les placerons-nous au centre de la partie II de ce travail.

Chapitre 9 : L'itération continue dans G° et dans les groupes apparentés.
Le phénomène de résurgence.

Section 9a : Introduction. Les quatre équations fondamentales.

Soit G un groupe plein apparenté à G° et soit $A = G - I$ l'algèbre pleine qui lui correspond. On sait que G et A sont respectivement constitués par des séries formelles du type

$$(9a1) \quad f(z) = z \left(1 + \sum_{n \geq 1} a_n z^{-n} \right)$$

$$(9abis) \quad \varphi(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^{-n}$$

avec des coefficients a_n vérifiant une certaine condition K de croissance à l'infini. On sait aussi que le groupe G admet une partition en classes formelles

$$G = \{I\} \cup_{h, \alpha, \rho} G_{h, \alpha, \rho} \quad (h \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C}^*, \rho \in \mathbb{C})$$

paramétrées par les trois fonctions centrales ainsi définies :

$$(9a2) \quad h(f) = \text{indice du premier } a_n \text{ non nul dans (9a1).}$$

$$(9a3) \quad \alpha(f) = a_h$$

$$(9a4) \quad \rho(f) = \frac{1-h}{2} + \text{coefficient de } z^{-1} \text{ dans } (f(z) - z)^{-1}$$

Pour chacun des problèmes que nous nous sommes proposés (itération, extensions algébriques, analyse et synthèse harmoniques) on a intérêt à considérer séparément les différentes classes formelles $G_{h, \alpha, \rho}$. Nous commencerons à chaque fois par la classe $G_{1, 1, 0}$, parce que c'est la plus simple et qu'elle donne une bonne idée de la situation générale, puis

nous indiquerons ce qui change lors du passage aux autres classes $G_{p,\alpha,p}$.

Prenons donc un f élément de $G_{1,1,0}$, c'est-à-dire de la forme

$$(9a5) \quad f(z) = z + 1 + a_3 z^{-2} + a_4 z^{-3} + \dots + a_n z^{1-n} + \dots$$

et considérons les quatre équations qui suivent :

$$(9a6) \quad f \circ f = f \circ f^w \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f^w(z) = z + w + O(z^{-2}) \\ w \text{ donné dans } \mathbb{C}^* \end{cases} \quad (f^w \text{ inconnue dans } G^{\infty})$$

$$(9a7) \quad f^* \circ f = 1 + f^* \quad \text{avec} \quad f^*(z) = z + O(z^{-1}) \quad (f^* \text{ inconnue dans } G^{\infty})$$

$$(9a8) \quad f \circ {}^*f(z) = {}^*f(z+1) \quad \text{avec} \quad {}^*f(z) = z + O(z^{-1}) \quad ({}^*f \text{ inconnue dans } G^{\infty})$$

$$(9a9) \quad f_* \circ f = f_* \frac{d}{dz} f \quad \text{avec} \quad f_*(z) = 1 + O(z^{-2}) \quad (f_* \text{ inconnue dans } \mathbb{H}^{\infty})$$

Chacune de ces équations possède une solution formelle unique du type spécifié.

Les solutions f^w et f_* de (9a6) et (9a9) sont respectivement l'itérée d'ordre w et le logarithme itératif, que nous avons déjà rencontrés à la section 8c et qui vérifient les relations :

$$(9a10) \quad f_* = \left(\frac{\partial}{\partial w} f^w \right)_{w=0}$$

$$(9a11) \quad f^w(z) = z + \sum_{n \geq 1} \frac{w^n}{n!} \left(f_* \frac{d}{dz} \right)^n \cdot z = e^{(w f_* \frac{d}{dz})} \cdot z$$

La solution f^* de (9a7) est dite itérateur de f et la solution *f de (9a8) est dite itérateur inverse. Elles vérifient :

$$(9a12) \quad {}^*f \circ f^* = I \quad ; \quad f_* \frac{d}{dz} f^* = 1$$

$$(9a13) \quad f = {}^*f \circ l \circ f^* \quad ; \quad \tilde{f}^w = {}^*f \circ \tilde{l}^w \circ f^* \quad (\text{avec } l(z) = z+1; \tilde{l}^w(z) = z+w)$$

(9a13) montre que f^* conjugue l'itérée \tilde{f}^w avec la translation \tilde{l}^w , ce qui justifie son nom d'itérateur.

Même lorsque f converge (i.e. $f \in G^0$) les solutions des quatre équations fondamentales divergent presque toujours. Pour rétablir la convergence et obtenir des résultats intéressants, il faut leur appliquer la transformation de Borel. C'est ce que nous allons faire, en commençant par les groupes G^1 et G^{1-} , pour passer ensuite à G^0 et aux autres groupes apparentés.

Section 9b : Itération continue dans les groupes G^1 et G^{1-} .

Proposition 9b1 : (Itération continue dans G^{1-})

Lorsque f appartient au groupe G^{1-} , les équations fondamentales (9a6), (9a7), (9a8), (9a9) ont pour solutions des fonctions résurgentes. Plus précisément, f_* appartient à l'algèbre $A(1, \Omega)$ et $f^*, {}^*f, \tilde{f}^w$ appartiennent au groupe $G(1, \Omega) = I + A(1, \Omega)$, où Ω désigne le réseau $2\pi i \mathbb{Z}$.

Ici, $A(1, \Omega)$ et $G(1, \Omega)$ dénotent les modèles formels de l'algèbre $A(1, \Omega)$ et du groupe $G(1, \Omega)$. Voir à ce sujet la section 3e. L'énoncé ci-dessus signifie donc que si φ est la solution d'une équation fondamentale et que si on note Ψ sa transformée de Borel $B\varphi$ (cf. section 8f), alors la série Ψ converge au voisinage de l'origine et y définit un germe holomorphe qui se prolonge le long de tout chemin évitant les points $2\pi i m$ ($m \in \mathbb{Z}$) et se décompose, au voisinage de chacun de ces points, en une partie régulière, une partie logarithmique et un pôle simple (cf. section 2c). Enfin, f est continûment itérable si et seulement si toutes les parties

logarithmiques et toutes les parties polaires sont nulles, ce qui n'a lieu qu'exceptionnellement. Nous allons établir ceci successivement pour les équation (9a7), (9a8), (9a9), (9a6).

Cas de l'équation (9a7).

Puisque f est de la forme (9a5), on a la factorisation :

$$(9b1) \quad f = l \circ g \quad \text{avec} \quad l(z) = z + 1 \quad \text{et} \quad g(z) = z + \sum_{n \geq 3} a_n z^{1-n}$$

Désignons par F, F^*, L, G les opérateurs qui substituent respectivement $f(z), f^*(z), l(z), g(z)$ à la variable z . Ainsi $F.\varphi = \varphi \circ f$, $F^*.\varphi = \varphi \circ f^*$ etc... Pour tout opérateur A opérant dans l'algèbre A^∞ , posons :

$$\bar{L}.A = L.A.L^{-1}$$

ce qui entraîne

$$(9b2) \quad (\bar{L})^{n_2} A_n (\bar{L})^{n_{n-1}} A_{n-1} \dots (\bar{L})^{n_1} A_1 = L^{n_n} A_n L^{n_{n-1}} A_{n-1} \dots L^{n_1} A_1 L^{-(n_1 + \dots + n_n)}$$

Traduite en termes d'opérateurs, l'équation (9a7) s'écrit :

$$(9b3) \quad F.F^* = F^*.L$$

c'est-à-dire, compte tenu de (9b1) :

$$(9b4) \quad G.L.F^* = F^*.L$$

Par des manipulations formelles, qu'il restera ensuite à justifier, on tire successivement de (9b4), d'une part :

$$G L F^* L^{-1} = F^*$$

$$G \bar{L} F^* = F^*$$

$$(G-1) \bar{L} F^* = ((\bar{L})^{-1}-1) \bar{L} F^*$$

$$\{1 - ((\bar{L})^{-1}-1)(G-1)\} \bar{L} F^* = 1$$

soit finalement :

$$(9b5+) \quad F^* = (\bar{L})^{-1} \{1 - ((\bar{L})^{-1}-1)(G-1)\}^{-1} \cdot 1$$

et d'autre part :

$$L F^* L^{-1} = G^{-1} F^*$$

$$\bar{L} F^* = G^{-1} F^*$$

$$(\bar{L}-1) F^* = (G^{-1}-1) F^*$$

$$\{1 - (\bar{L}-1)(G^{-1}-1)\} \cdot F^* = 1$$

soit finalement :

$$(9b5-) \quad F^* = \{1 - (\bar{L}-1)(G^{-1}-1)\}^{-1} \cdot 1$$

Remarquons maintenant que les opérateurs $(G-1)$ et $(G^{-1}-1)$ annulent les séries formelles réduites à une constante. Par suite :

$$(G-1)(L^n-1) \cdot z = (G^{-1}-1)(L^n-1) \cdot z = 0$$

On voit donc, compte tenu de (9b2), que lorsqu'on applique les deux membres de (9b5+) ou de (9b5-) à $I(z) = z$, on peut remplacer \bar{L} (opérateur sur opérateurs) par L (opérateur sur séries). On obtient ainsi :

$$(9b6+) \quad F^* \cdot z = f_1^*(z) = z + \sum_{n \geq 1} L^{-1}((L^{-1}-1)^{-1}(G-1))^n \cdot z$$

$$(9b6-) \quad F^* \cdot z = f_2^*(z) = z + \sum_{n \geq 1} ((L-1)^{-1}(G^{-1}-1))^n \cdot z$$

Montrons que ces relations, pour l'instant purement formelles, ont un sens.

Pour toute série φ entière en z^{-1} et de la forme $\mathcal{O}(z^{-2})$, désignons

par $(L^\pm - 1)^{-1} \cdot \varphi$ l'unique solution sans terme constant de l'équation

$(L^\pm - 1) \psi = \varphi$. Si φ est un $\mathcal{O}(z^{-n})$, alors $(L^{\pm 1} - 1)^{-1} \cdot \varphi$

est un $\mathcal{O}(z^{-n+1})$, $(G^\pm - 1) \varphi$ est un $\mathcal{O}(z^{-n-2})$ et

$(L^\pm - 1)^{-1}(G^\mp - 1) \varphi$ est un $\mathcal{O}(z^{-n-2})$. Les seconds membres de (9b6 $^\pm$)

ont donc un sens et, pour montrer que leurs sommes f_1^*, f_2^* vérifient

l'équation $f^* \circ f = 1 + f^*$, il suffit de reprendre à l'envers les

manipulations qui ont donné (9b5 $^\pm$) à partir de (9b3). Comme enfin f_1 et f_2

sont tous deux de la forme $z + \mathcal{O}(z^{-2})$ il est clair que

$$(9b7) \quad f_1^* = f_2^* = f^*$$

Cela étant, d'après la formule de Taylor, on a :

$$(9b8+) \quad G-1 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} (\gamma_+)^n \frac{d^n}{dz^n} \quad (9b8-) \quad G^{-1}-1 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} (\gamma_-)^n \frac{d^n}{dz^n}$$

avec

$$(9b9+) \quad \gamma_+(z) = g(z) - z \quad (9b9-) \quad \gamma_-(z) = \overset{-1}{g}(z) - z$$

En portant (9b8 $^\pm$) et (9b9 $^\pm$) dans (9b6 $^\pm$) et en introduisant les opérateurs

auxiliaires H_n^\pm :

$$(9b10+) \quad H_n^+ = (\gamma_+)^n \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (L^{-1}-1)^{-1}$$

$$(9b10-) \quad H_n^- = (\gamma_-)^n \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (L-1)^{-1}$$

il vient :

$$(9b11+) \quad f^*(z) - z = (1-L)^{-1} \sum_{n, n_i \geq 1} H_{m_n}^+ \dots H_{m_1}^+ \cdot \gamma_+(z)$$

$$(9b11-) \quad f^*(z) - z = (L-1)^{-1} \sum_{n, n_i \geq 1} H_{m_n}^- \dots H_{m_1}^- \cdot \gamma_-(z)$$

Soit, en passant aux transformées de Borel :

$$(9b12+) \quad f^+ - \delta' = (1-e^{-z})^{-1} \sum_{n, n_i \geq 1} H_{m_n}^+ \dots H_{m_1}^+ \cdot \gamma_+$$

$$(9b12-) \quad f^+ - \delta' = (e^{-z}-1)^{-1} \sum_{n, n_i \geq 1} H_{m_n}^- \dots H_{m_1}^- \cdot \gamma_-$$

avec $\gamma_{\pm} = B \gamma_{\pm}$ et avec des opérateurs H_n^{\pm} dont l'action est définie par

$$(9b13) \quad H_n^{\pm} \cdot \varphi = (\gamma_{\pm})^{+n} * (E_n^{\pm} \cdot \varphi)$$

avec

$$(9b14+) \quad E_n^+(z) = \frac{(-z)^n}{n!} \frac{1}{e^z-1}$$

$$(9b14-) \quad E_n^-(z) = \frac{(-z)^n}{n!} \frac{1}{e^{-z}-1}$$

Mais puisque f, g, \bar{g} (resp. γ_+, γ_-) appartiennent à G^+ (resp. A^+) ces séries en z^{-1} ont des transformées de Borel qui, aux diracs près, sont des fonctions entières de la variable z . On peut donc remplacer la convolution formelle de (9b13) par la convolution intégrale :

$$(9b15) \quad (H_n^\pm \cdot \varphi)(z) = \int_0^z \gamma_\pm^{*n}(z-\zeta) E_n^\pm(\zeta) \varphi(\zeta) d\zeta$$

Soit maintenant un arc de Jordan \mathcal{J} rectifiable et fini. Supposons que \mathcal{J} porte de l'origine, mais évite ensuite les points de la forme $2\pi i m$ avec $m \in \mathbb{Z}$ (y compris $m=0$). Notons enfin $\Delta(z)$ l'abscisse curviligne sur \mathcal{J} , comptée à partir de 0. Il est clair que le germe analytique $H_{m_n}^\pm \dots H_{m_1}^\pm \gamma_\pm$ se prolonge holomorphiquement le long de \mathcal{J} et que l'on a :

$$(9b16) \quad H_{m_n}^\pm \dots H_{m_1}^\pm \gamma_\pm(z) = \int_{0 < \Delta(z_1) < \Delta(z_2) \dots < \Delta(z_n) < \Delta(z)} \gamma_\pm^{*m_n}(z-z_n) E_{m_n}^\pm(z_n) \dots \gamma_\pm^{*m_1}(z-z_1) E_{m_1}^\pm(z_1) \gamma_\pm(z_1) dz_1 \dots dz_n$$

D'autre part, vu la forme de \mathcal{J} , on peut facilement trouver des constantes C_1, C_2, C_3, C_4 fonctions de \mathcal{J} et telles que :

$$(9b17^\pm) \quad |\gamma_\pm(z)| \leq C_1 e^{C_2 |z|} \quad (\forall z \in \mathcal{J})$$

$$(9b18^\pm) \quad |E_n^\pm(z)| \leq C_3 (C_4)^n \quad (\forall z \in \mathcal{J})$$

Comme \mathcal{D} est fini, on pourrait même prendre $C_2 = 0$ et $C_4 = 1$, mais il est préférable, en vue de la suite, de réserver le choix de ces deux constantes. De (9b17±) on tire aisément :

$$(9b19\pm) \quad \left| \gamma_{\pm}^{*n}(z) \right| \leq (C_1)^n e^{C_2|z|} \frac{|\Delta(z)|^{n-1}}{(n-1)!} \quad (\forall z \in \mathcal{D})$$

Portons (9b18±) et (9b19±) dans (9b16). Comme

$$(9b20) \quad e^{C_2|z-z_n|} e^{C_2|z_n-z_{n-1}|} \dots e^{C_2|z_2-z_1|} e^{C_2|z_1|} \leq e^{C_2\Delta(z)}$$

il vient, en posant $\Delta(z_i) = \Delta_i$ et $n_1 + \dots + n_n = n$:

$$(9b21) \quad \left| H_{n_n}^{\pm} \dots H_{n_1}^{\pm} \gamma_{\pm}^*(z) \right| \leq e^{C_2\Delta(z)} (C_1)^{n_1} (C_4)^n (C_3)^n \int_{0 < \Delta_1 < \dots < \Delta_n < \Delta(z)} \frac{(\Delta - \Delta_n)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \frac{(\Delta_n - \Delta_{n-1})^{n_{n-1}-1}}{(n_{n-1}-1)!} \dots \frac{(\Delta_2 - \Delta_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} d\Delta_1 \dots d\Delta_n$$

c'est-à-dire, puisque l'intégrale du second membre vaut $\frac{(\Delta(z))^n}{n!}$:

$$(9b22) \quad \left| H_{n_n}^{\pm} \dots H_{n_1}^{\pm} \gamma_{\pm}^*(z) \right| \leq e^{C_2\Delta(z)} C_1 (C_1 C_4)^n (C_3)^n \frac{(\Delta(z))^n}{n!}$$

Par suite, à un facteur $(\pm 1 \mp e^{-z})^{-1}$ près, qui est inférieure en valeur absolue à C_3 , les séries figurant aux seconds membres de (9b12±) sont majorées uniformément sur \mathcal{D} par la série :

$$(9b23) \quad C_1 \sum_{n, n_i \geq 1} (C_1 C_4)^{n_1 + \dots + n_n} (C_3)^n \frac{(\Delta(z))^{n_1 + \dots + n_n}}{(n_1 + \dots + n_n)!} e^{C_2\Delta(z)}$$

c'est-à-dire, puisqu'il y a C_{n-1}^{n-1} manières d'écrire n comme somme de n entiers ≥ 1 , par la série :

$$\begin{aligned}
 (9b24) \quad & C_1 C_3 \sum_{n, n \geq 1} (C_1 C_4)^n (C_3)^{n-1} C_{n-1} \frac{(\Delta(z))^n}{n!} e^{C_2 \Delta(z)} \\
 &= \frac{C_1 C_3}{1+C_3} \sum_{n \geq 1} (C_1 C_4 (1+C_3) \Delta(z))^n \cdot \frac{1}{n!} e^{C_2 \Delta(z)} \\
 &= \frac{C_1 C_3}{1+C_3} (e^{C_1 C_4 (1+C_3) \Delta(z)} - 1) e^{C_2 \Delta(z)}
 \end{aligned}$$

Comme ceci vaut pour tout \mathcal{J} de la forme spécifiée, on en conclut que le germe $f^* - \delta'$ se prolonge holomorphiquement à toute la surface \mathcal{R} et admet sur chaque \mathcal{J} une majoration du type $C e^{C^* \Delta(z)}$ avec :

$$(9b25) \quad C = \frac{C_1 (C_3)^2}{1+C_3}, \quad C^* = C_2 + C_1 C_4 + C_1 C_3 C_4$$

les constantes C_1, C_2, C_3, C_4 pouvant être considérées comme fonctions continues du chemin \mathcal{J} .

D'autre part, on vérifie élémentairement, par récurrence sur \mathcal{R} , que les fonctions $(\pm 1 \mp e^{-z})^{-1} H_{n_1}^{\pm} \dots H_{n_r}^{\pm} \gamma_{\pm}$ sont, en chacun de leurs points de ramification, somme :

- d'une partie régulière,
- d'une partie logarithmique,
- d'un pôle simple.

Par convergence uniforme sur tout chemin \mathcal{J} et, partant, sur tout compact de \mathcal{R} , ces trois propriétés passent à la fonction $f^* - \delta'$ elle-même (cf. sections 2b et 2c), qui se trouve ainsi appartenir à l'algèbre

$\mathcal{A}(1, \mathcal{R})$. Par suite : $f^* \in \mathcal{G}(1, \mathcal{R})$. Soit, en passant au modèle formel : $f^* \in \mathcal{G}(1, \mathcal{R})$. Ceci établit la proposition 9b1 dans le cas

de l'équation (9a7).

Remarquons que nous avons obtenu ce résultat à partir de (9b12[±]), mais qu'une seule de ces deux formules aurait suffi. C'est seulement lorsqu'on veut étudier la croissance à l'infini de f^* que (9b12+) et (9b12-) jouent des rôles distincts (Voir les sections 9c et 9d ci-après).

Cas des équations (9a8) et (9a6)

Puisque f^* appartient à $G(1, \mathcal{R})$ et que $G(1, \mathcal{R})$ est un groupe pour la composition (proposition 2e1), l'inverse *f et le produit $f^w = {}^*f \circ \ell^w \circ f^*$ appartiennent aussi à $G(1, \mathcal{R})$.

Cas de l'équation (9a9)

Puisque la série f^* est de la forme $z + A$ avec $A = O(z^{-1})$ et appartient à $G(1, \mathcal{R})$, la série $\frac{d}{dz} f^*$ est de la forme $1 + B$ avec $B = O(z^{-2})$ et appartient à $A(1, \mathcal{R})$. Par suite $f_* = 1 / \frac{d}{dz} f^*$ appartient aussi à $A(1, \mathcal{R})$, comme on le voit en prenant les transformées de Borel et en montrant la convergence uniforme, sur tout compact de \mathcal{R} , de la série (*) :

$$\delta + \sum_{n \geq 1} (-1)^n B^{*n} \quad (B = \mathcal{B} B)$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 9b1.

Remarque : On peut aussi démontrer directement l'appartenance de f_* à

$$A(1, \mathcal{R}) :$$

- en introduisant, parallèlement à F, G, L , des opérateurs F_*, G_*, L_* définis par :

(*) Voir exercice 2d3.

$$F_1 \cdot \varphi = \varphi \circ f / f' , G_1 \cdot \varphi = \varphi \circ g / g' , L_1 \varphi = \varphi \circ l / l'$$

- en remarquant que $L_1 = L$ (car $l'(z) \equiv 1$) et que $F_1 = G_1 L_1$ (car $f = \log g$)

- en remplaçant $F_1 \cdot f^* = 1 + f^*$ par $F_1 \cdot f_* = f_*$

- en tirant de là les relations :

$$(9b26+) \quad f_*(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} L_1^{-1} ((L_1^{-1} - 1)^{-1} (G_1 - 1))^n \cdot z$$

$$(9b26-) \quad f_*(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} ((L_1 - 1)^{-1} (G_1^{-1} - 1))^n \cdot z$$

parallèles aux relations (9b6±)

- puis en achevant le raisonnement comme dans le cas de f^* .

Proposition 9b2 (Itération fractionnaire dans G')

Lorsque f appartient au groupe G' , les itérées f^w appartiennent aussi à G' pour chaque w complexe. G' est donc un groupe de Lie et c'est aussi le plus petit groupe de Lie apparenté à G^0 .

Autrement dit, G' est bien le groupe médian associé à G^0 . La proposition 8b2 anticipait déjà sur ce résultat, qu'il s'agit maintenant de démontrer.

Si f est de la forme (9a5) et appartient à G' , sa transformée de Borel \tilde{f} est, au diracs près, une série entière de rayon de convergence $R > 0$ (cf. section 8e). En se reportant à la démonstration de la proposition 9b2, on voit que tout ce qui a été dit concernant la prolongeabilité holomorphe de $\tilde{f}, \tilde{f}^*, *f, f_*$ dans le cas où $f \in G'$ reste valable, à condition de se restreindre aux chemins \int contenus dans le disque

$|z| < R$ et évitant les points $2\pi i m$ ($m \in \mathbb{Z}$). Il en résulte en particulier que la série \mathcal{J}_λ^w a un rayon de convergence $\geq \inf(R, 2\pi)$. Donc $\mathcal{J}_\lambda^w \in \mathcal{G}'$ pour tout w . Ceci reste vrai lorsque $r(\mathcal{J}), \alpha(\mathcal{J}), \rho(\mathcal{J})$ sont quelconques : voir la section 9f ci-après.

En conclusion, \mathcal{G}' est un groupe de Lie. Montrons maintenant que tout groupe de Lie apparenté à \mathcal{G}^0 contient \mathcal{G}' (*).

Soit \mathcal{G} un tel groupe. \mathcal{G} contient évidemment les \mathcal{J} de la forme :

$$\mathcal{J}_\lambda(z) = z + 1 + \lambda z^{-2}$$

Appliquant la proposition 9b1 à ces \mathcal{J}_λ , on trouve que \mathcal{J}_λ^w est holomorphe sur le disque $|z| < 2\pi$ et ne possède sur $|z| = 2\pi$ que deux singularités au plus, situées aux points $\omega_\pm = \pm 2\pi i$. D'après l'équation de résurgence (9e33) établie ci-après, ces singularités sont de la forme :

$$\frac{1}{2\pi i} (1 - e^{-w\omega_\pm}) A_\pm \frac{1}{z - \omega_\pm} + \frac{1}{2\pi i} \varphi_\pm(z - \omega_\pm) \log(z - \omega_\pm)$$

avec pour A_\pm deux scalaires indépendants de w et pour φ_\pm deux germes holomorphes en 0. De là et de (9e33) on déduit facilement que \mathcal{J}_λ^w et $\mathcal{J}_\lambda^{\bar{w}}$ sont respectivement de la forme :

$$\delta'(z) + w \delta(z) + \sum_{n \geq 3} \frac{a_n(\lambda, w)}{(n-2)!} z^{n-2}; \quad z + w + \sum_{n \geq 3} a_n(\lambda, w) z^{1-n}$$

avec

(*) La proposition 8e3, énoncée sans démonstration, ajoute que tout surgroupe plein de \mathcal{G}' est de Lie.

$$\frac{a_n(\lambda, \omega)}{(n-2)!} = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^{n-1} \left[(1 - e^{-2\pi i \omega}) A_+ - (-1)^n (1 - e^{2\pi i \omega}) A_- \right] \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

Comme les A_{\pm} sont des fonctions holomorphes non constantes de λ (cf. section 12.) il est clair que pour tout ω non entier et presque tout λ , on a :

$$\liminf_n |a_n(\lambda; \omega)|^{1/n} \cdot n^{-1} = \limsup_n |a_n(\lambda; \omega)|^{1/n} \cdot n^{-1} = \frac{1}{2\pi \cdot e}$$

En remplaçant $f_{\lambda}(z)$ par $f_{\lambda, \nu}(z) = \nu f_{\lambda}(z/\nu)$ on trouverait de même pour les coefficients $a_n(\lambda, \nu; \omega)$ de $f_{\lambda, \nu}$:

$$\liminf_n |a_n(\lambda, \nu; \omega)|^{1/n} \cdot n^{-1} = \limsup_n |a_n(\lambda, \nu; \omega)|^{1/n} \cdot n^{-1} = \frac{\nu}{2\pi \cdot e}$$

Or, si G est de Lie, il contient les $f_{\lambda, \nu}^{\omega}$ et on en déduit aussitôt, en appliquant (8b5), que G contient $G'_{\lambda, \nu}$ tout entier.

Section 9c : Itération continue dans le groupe G° .

Rappelons que $A^{\circ}(1, \Omega)$ désigne la sous-algèbre de $A(1, \Omega)$ formée de toutes les fonctions résurgentes qui sont de croissance au plus exponentielle le long de chaque droite inscrite sur \mathbb{R} et que $G^{\circ}(1, \Omega)$ désigne le groupe associé.

Proposition 9c1 (Itération continue dans G°)

Soit f appartenant à G° et de la forme (9a5). Autrement dit :

$$f(z) = z + 1 + a_3 z^{-2} + a_4 z^{-3} + \dots \quad \text{avec} \quad \limsup_n |a_n|^{1/n} < \infty$$

Soit E l'une des quatre équations fondamentales et φ sa solution formelle.

Alors :

α) φ a pour transformée de Borel ψ une fonction résurgente de croissance exponentielle. Plus précisément :

$$\tilde{f}, f^*, {}^*f \in G^\circ(1, \Omega) \quad \text{et} \quad f_* \in A^\circ(1, \Omega) \quad \text{avec} \quad \Omega = 2\pi i \mathbb{Z}$$

β) Pour chaque direction θ non horizontale, il existe une infinité de germes analytiques à l'infini, définis dans la direction θ et solutions de l'équation E . Au contraire, dans la direction de l'axe réel positif (resp. négatif), il existe un unique germe à l'infini, solution de E . On le note φ_+ (resp. φ_-). Les germes φ_+ et φ_- sont dits solutions sectorielles de E . Ils se prolongent holomorphiquement à des secteurs \mathcal{J}_+ et \mathcal{J}_- de la forme :

$$\mathcal{J}_\pm = \{ \pm \operatorname{Re} z > A_\pm \} \cup \{ |\operatorname{Im} z| > B_\pm > 0 \}$$

et lorsque $z \rightarrow \infty$ selon toute direction strictement intérieure à \mathcal{J}_\pm , ils admettent chacun un même développement asymptotique, donné bien sûr par la série formelle φ (*).

De plus, on peut construire explicitement les solutions sectorielles en question. On a ainsi, uniformément sur tout compact de \mathcal{J}_\pm :

$$(9c1) \quad \overset{w}{f}_\pm(z) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \overset{-n}{f}(w + \overset{n}{f}(z))$$

$$(9c2) \quad \overset{*}{f}_\pm(z) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} (\overset{n}{f}(z) - n)$$

$$(9c3) \quad \overset{*}{f}_\pm(z) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \overset{-n}{f}(z + n)$$

(*) ce n'est plus vrai lorsque $z \rightarrow \infty$ parallèlement à la frontière de \mathcal{J}_\pm .

$$(9c4) \quad f_{*+}^*(z) = \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{d}{dz} f\right) \circ \tilde{f}^n(z)}$$

$$(9c4bis) \quad f_{*-}^*(z) = \prod_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{d}{dz} f\right) \circ \tilde{f}^n(z)$$

γ) Les solutions sectorielles φ_+ et φ_- sont les deux transformées de Laplace de la fonction résurgente φ :

$$(9c5) \quad \varphi_{\pm}(z) = \mathcal{L}_{Q_{\pm}} \varphi(z) = \int_{Q_0}^{Q_{\pm}} \varphi(M) e^{-z\zeta} dM \quad (\zeta = \dot{M})$$

Démonstration :

(9c4) et (9c4bis) sont des cas particuliers de (8d4) car, pour f de la forme (9a5), on a $\tilde{f}^{n+1}(z) - \tilde{f}^n(z) \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \pm\infty$. (9c1), (9c2) et (9c3) en résultent alors moyennant (9a12) et (9a13). On peut aussi établir directement (9c2) et en déduire les autres formules du point β. Tenons donc ce point pour acquis et tirons-en le :

Lemme 9c1 :

$$(9c6) \quad f_{\pm}^*(z+1) - f_{\pm}^*(z) = 1 + O(z^{-2}) \quad \text{quand } z \rightarrow \infty \text{ sur } \mathcal{I}_{\pm}$$

En effet d'après le point β, dans tout secteur $-\pi + \varepsilon \leq \text{Arg}(\pm z) \leq \pi - \varepsilon$, $f_{\pm}^*(z)$ admet un développement asymptotique de la forme :

$$(9c7) \quad f_{\pm}^*(z) = z + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots$$

(9c6) en résulte aussitôt sur un tel secteur. Il ne reste plus qu'à traiter le cas où z tend vers l'infini parallèlement à la frontière de \mathcal{I}_{\pm} .

Puisque f_{\pm}^* vérifie (9a7) et que g_{\pm}^* vérifie (9a8) sur \mathcal{D}_{\pm} , il est clair que la fonction $\frac{\pm 1}{\pi}(z) - z = f_{\pm}^* \circ g_{\pm}^*(z) - z$ est définie pour $|\operatorname{Im} z|$ grand, qu'elle tend vers 0 quand $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$ et qu'elle est périodique de période 1 sur chacune des deux composantes de son domaine de définition. D'où :

$$(9c8) \quad f_{\pm}^* = f_{\mp}^* \circ \frac{\pm 1}{\pi} \quad \text{avec} \quad \left(\frac{\pm 1}{\pi}(z) - z\right) \text{ périodique}$$

Or, lorsque z tend horizontalement vers $\mp \infty$ dans \mathcal{D}_{\pm} , f_{\mp}^* admet le développement asymptotique (9a7). Par suite, $f_{\pm}^*(z)$ et $f_{\pm}^*(z+1)$ sont de la forme :

$$f_{\pm}^*(z) = z + \left(\frac{\pm 1}{\pi}(z) - z\right) + \frac{\alpha_1}{z} - \frac{\alpha_1}{z} \left(\frac{\pm 1}{\pi}(z) - z\right) + O(z^{-2})$$

$$f_{\pm}^*(z) = z+1 + \left(\frac{\pm 1}{\pi}(z) - z\right) + \frac{\alpha_1}{z+1} - \frac{\alpha_1}{z+1} \left(\frac{\pm 1}{\pi}(z) - z - 1\right) + O(z^{-2})$$

On en tire aussitôt (9c6) pour z tendant horizontalement vers $\mp \infty$ et ceci achève de prouver le lemme 9c1.

Abordons maintenant le point α de la proposition 9c1. Puisque $G^{\circ}(1, \mathcal{R})$ est un groupe, il suffit manifestement de traiter le cas de solution de l'équation (9a7). Reprenons pour cela la démonstration de la proposition 9b1, mais en remplaçant l'arc de Jordan borné \mathcal{J} par le demi-axe \mathcal{J}_θ , issu de l'origine et incliné d'un angle θ sur l'axe réel.

Comme f et donc g appartiennent à G° , en prenant les transformées de Borel on obtient des fonctions entières de croissance exponentielle. D'où pour δ_{\pm} une majoration du type (9b9 \pm), valable cette fois-ci sur tout le plan complexe.

D'autre part, si $\operatorname{Re} z > 0$ et $\operatorname{Arg} z = \theta$ on a :

$$\begin{aligned} E_n^+(z) &= \left| \frac{z^n}{n!} \frac{1}{e^z - 1} \right| = \left| \frac{1}{\cos \theta} \right|^n \frac{(|z| \cos \theta)^n}{n!} |e^{-z}| \left| \frac{1}{1 - e^{-z}} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\cos \theta} \right|^n \left(\sum_{n \geq 0} \frac{|z \cos \theta|^n}{n!} \right) e^{-|z \cos \theta|} \left| \frac{1}{1 - e^{-z}} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\cos \theta} \right|^n \left| \frac{1}{1 - e^{-z}} \right| < 2 \left| \frac{1}{\cos \theta} \right|^{n+1} \end{aligned}$$

Pareillement, si $\operatorname{Re} z < 0$ et $\operatorname{Arg} z = \theta$:

$$E_n^-(z) = \left| \frac{z^n}{n!} \frac{1}{e^{-z} - 1} \right| \leq \left| \frac{1}{\cos \theta} \right|^n \left| \frac{1}{1 - e^{-z}} \right| < 2 \left| \frac{1}{\cos \theta} \right|^{n+1}$$

Par suite, selon que le demi-axe \mathcal{J}_θ est situé dans le demi-plan positif ou négatif, on a dessus une majoration du type (9b18+) ou du type (9b18-) avec par exemple :

$$(9c9) \quad C_3 = C_3(\theta) = \frac{2}{\cos \theta}, \quad C_4 = C_4(\theta) = \frac{1}{\cos \theta}$$

Dans le premier cas, on doit considérer la formule (9b12+), car elle fait intervenir les opérateurs H_n^+ , qui comportent une division par $e^z - 1$.

Dans le second cas, on doit considérer la formule (9b12-), car elle fait intervenir les opérateurs H_n^- , qui comportent une division par $e^{-z} - 1$.

Ainsi, pour chaque $\theta \neq \pm \frac{\pi}{2}$, on ne peut appliquer les majorations (9b25) qu'à l'une des séries $(\pm 1 \mp e^{-z})^{-1} \sum H_{m_n}^\pm \dots H_m^\pm \gamma_\pm$, mais comme celles-ci ont même somme, cela suffit pour obtenir la croissance exponentielle de f^* sur \mathcal{J}_θ . Plus précisément :

$$(9c10) \quad |f^*(z) - \delta'(z)| \leq C e^{C^* |z|} \quad (z \in \mathcal{J}_\theta)$$

avec

$$(9c11) \quad C = C(\theta) = \frac{C_1 (C_3(\theta))^2}{1 + C_3(\theta)} ; \quad C^* = C^*(\theta) = C_2 + C_3(\theta)C_4 + C_1 C_3(\theta)C_4$$

A cause du $\cos \theta$ en dénominateur dans $C_3(\theta)$ et $C_4(\theta)$, on ne peut pas faire tendre θ vers $\pm \frac{\pi}{2}$ et il faut recourir à un autre procédé pour établir la croissance exponentielle de f^* le long des verticales. Laissons provisoirement la question en suspend et passons au point γ .

Puisque d'après le point β le germe ψ se prolonge tout le long de l'axe réel et y croît (au plus) exponentiellement, les intégrales de Laplace

$$\int_0^{\pm\infty} e^{-z\zeta} \psi(\zeta) d\zeta = \int_{Q_0}^{Q_{\pm}} e^{-z\zeta} \psi(M) dM \quad (M = \zeta)$$

sont toutes deux convergentes et leur somme $(\mathcal{L}_{Q_{\pm}} \psi)(z)$ est définie holomorphe dans un demi-plan $\pm \operatorname{Re} z > c$. De plus, puisque, par hypothèse, ψ vérifie E dans le modèle formel (*) et que, par construction, ψ vérifie E dans le modèle additif (*) il est clair que $\mathcal{L}_{Q_{\pm}} \psi$ vérifie E dans le modèle sectoriel (*) associé à Q_{\pm} . Or la solution sectorielle de E sur l'axe réel positif (resp. négatif) est unique. Donc :

$$\psi_+ = \mathcal{L}_{Q_+} \cdot \psi \quad \text{et} \quad \psi_- = \mathcal{L}_{Q_-} \cdot \psi$$

Nous pouvons maintenant achever de prouver le point α . En effet, les relations

$$f_{\pm}^*(z) = \int_{Q_0}^{Q_{\pm}} f^*(M) e^{-z\zeta} dM \quad (M = \zeta)$$

(*) Pour les différents modèles des algèbres et groupes de résurgence, voir le chapitre 3.

s'inversent en

$$(9c12) \quad f^*(M) = \frac{1}{2\pi i} \int_D f_{\pm}^*(z) e^{3z} \frac{dz}{z} \quad (M = \zeta)$$

où M est un point situé sur le demi-feuillet $\mathcal{R}(Q_{\pm})$ et se projetant en un point ζ du plan complexe, et où D désigne n'importe quelle verticale entièrement située dans le domaine \mathcal{Y}_{\pm} .

De (9c12) on tire :

$$(9c13) \quad (e^{-3} - 1) f^*(M) = \frac{1}{2\pi i} \int_D (f_{\pm}^*(z+1) - f_{\pm}^*(z)) e^{3z} \frac{dz}{z} \quad (M = \zeta)$$

et comme le lemme 9b1 autorise à faire pivoter l'axe d'intégration D dans \mathcal{Y}_{\pm} jusqu'à l'amener à l'horizontale, on déduit facilement de (9c13) que f^* croît (au plus) exponentiellement sur toute verticale des demi-feuillets $\mathcal{R}(Q_{\pm})$ et donc sur les $\mathcal{R}(Q_{\pm})$ tout entiers.

On passe de là aux feuillets contigus aux $\mathcal{R}(Q_{\pm})$ puis, de proche en proche, à la surface \mathcal{R} toute entière, en utilisant les équations de résurgence

$$(9c14) \quad \Delta_{\omega}^{\pm} f^* = -A_{\omega}^{\pm} e^{-\omega(f^* - I)} \quad (\text{modèle formel})$$

qui seront établies indépendamment à la section 9e et en s'inspirant du raisonnement déjà utilisé pour établir la proposition 2d1.

Ceci achève la démonstration de la proposition 9c1.

Section 9d : Itération continue dans les groupes apparentés à G° .

Nous allons, comme d'habitude, considérer séparément les sous-groupes de G' , les surgroupes de G' et les groupes non comparables à G' .

Intervalle de Lie $[G', G^\infty]$

D'après la proposition 8e, tout groupe plein G contenant G' est de Lie. Autrement dit, si $f \in G$ et $w \in \mathbb{C}$, alors $f^w \in G$ et ceci règle la question de l'itération continue dans ces groupes.

Groupes non comparables à G' .

Comme on l'a signalé, les groupes pleins G tels que $G \not\subset G'$ et $G \not\supset G'$ sont irréguliers et d'étude difficile. On sait toutefois qu'ils ne sont pas de Lie (puisqu'ils ne contiennent pas G') et on peut montrer (cf. exercice 9d2) que pour f dans G et w non entier, les itérées f^w ne sont presque jamais dans G (elles sont dans le plus petit groupe plein contenant G et G').

Intervalle critique $[G^\circ, G']$

C'est le cas le plus intéressant. Pour simplifier, nous allons nous limiter aux groupes réguliers (introduits à la fin de la section 8f) et même, dans un premier temps, aux groupes réguliers à bord.

Proposition 9d1 (Itération continue dans les groupes à bord)

$G^{(K_m)}$ Si $\{K_m\}$ vérifie (8f13) et si f appartient au groupe à bord, alors dans chaque direction, y compris la direction verticale, les fonctions réurgentes ψ solutions des équations fondamentales (9a6), (9a7), (9a8), (9a9) vérifient (*) la condition de croissance :

(*) dans le modèle additif

$$(**) \quad \mathbb{R} = \overline{\mathbb{C} \div 2\pi i \mathbb{Z}}$$

$$(9d1) \quad \limsup \left| \frac{\varphi(z)}{K(r)} \right|^{1/r} < \infty \quad (r = |z|)$$

avec

$$(9d2) \quad K(r) = \sum r^n \frac{K_n}{n!}$$

Nous allons commencer par les demi-axes obliques inscrits sur les demi-feuillets $\mathcal{R}(Q_{\pm})$, puis par les verticales inscrites sur ces mêmes feuillets et passer enfin aux droites générales portées par la surface \mathcal{R} . Pour simplifier, nous noterons z ou ζ le point courant de la surface \mathcal{R} , et non plus P ou M comme précédemment.

Pour chaque f dans $\mathcal{G}^{(K_n)}$ et de la forme (9a5) chaque direction θ , il s'agit de montrer l'existence de deux constantes $C = C(\theta)$ et $C^* = C^*(\theta)$ telles que :

$$(9d3) \quad |\varphi(z)| \leq C e^{C^*|z|} e^{h(|z|)} \quad (\text{Arg } z = \theta, |z| = r, h(r) = \log K_r)$$

où φ désigne l'une quelconque des fonctions résurgentes $f, f^*, {}^*f, f_*$.

En fait, comme à la section 8c, tout se ramène à l'itérateur f^* . Partons donc d'un f de la forme (9a5) et posons comme d'habitude $g = \bar{e}^{-1} \circ f$ et $\gamma_{\pm}(z) = g_{\pm}^{\pm 1}(z) - z$. Puisque f et $g \in \mathcal{G}^{(K_n)}$ il existe des constantes C_1, C_2 telles que pour tout z :

$$(9d4) \quad |\gamma_{\pm}(z)| \leq C_1 e^{C_2|z|} K(|z|) = C_1 e^{C_2|z|} e^{h(|z|)}$$

La condition (8f13) entrainant la convexité de la fonction $h(r) = \log K(r)$ on tire aussitôt de (9d4) :

(*) $\mathcal{R} = \mathbb{C} \div 2\pi i \mathbb{Z}$

$$(9d5) \quad \left| \gamma_{\pm}^{*n}(z) \right| \leq (C_1)^n \frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!} e^{C_2|z|} e^{h(|z|)}$$

Directions obliques sur $\mathcal{R}(Q_+)$:

Soit \mathcal{D}_θ le demi-axe issu de 0 (*) et incliné de θ sur l'axe réel, avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$. Sur \mathcal{D}_θ on a pour $E_n^+(z)$ la majoration (9b18+) avec C_3 et C_4 définis comme en (9c9). On peut alors, à partir de la formule (9b12+), reprendre le raisonnement de la section 9c. Compte tenu de la convexité de $h(n)$, on aboutit facilement à la majoration

$$(9d6) \quad \left| g^*(z) - g'(z) \right| \leq C e^{C^*|z|} e^{h(|z|)}$$

analogue à la formule (9c10) et comportant les constantes C, C^* définies en (9b25).

Directions obliques sur $\mathcal{R}(Q_-)$:

On raisonne exactement de la même manière à partir de la formule (9b12-) et des majorations (9b18-) de $E_n^-(z)$.

Directions verticales sur $\mathcal{R}(Q_{\pm})$:

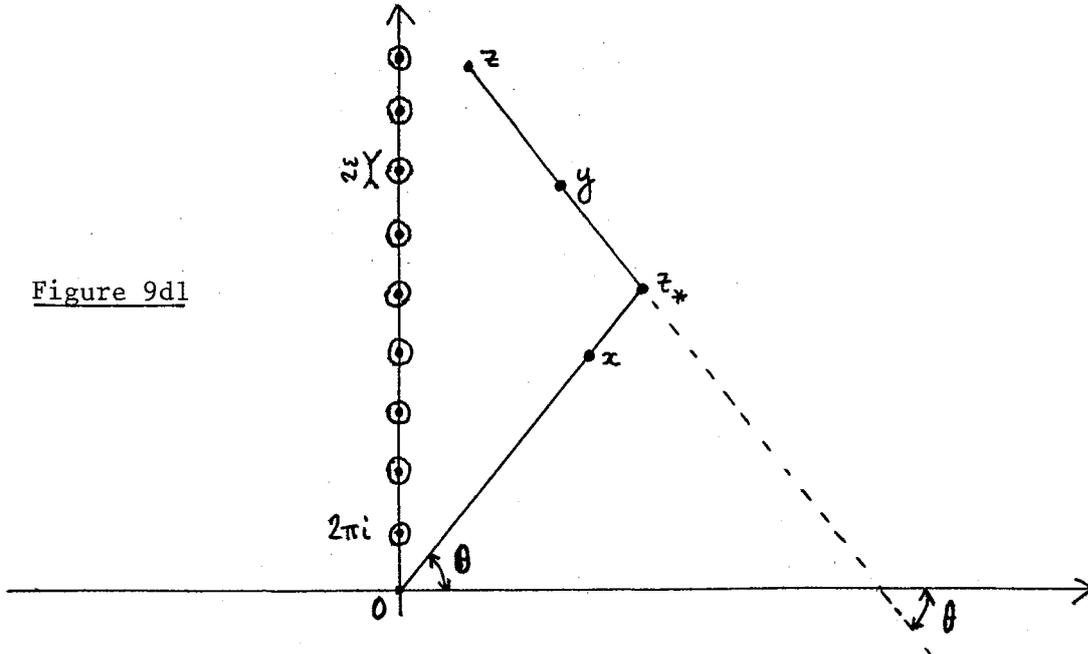
Comme les constantes C, C^* entrant dans la majoration (9d6) tendent vers l'infini lorsque le paramètre θ tend vers $\pm \frac{\pi}{2}$, on doit traiter à part le cas des directions verticales. La démonstration est assez longue, mais nous l'indiquons en détail à cause de ses conséquences pour l'analyse harmonique (cf. section 12d).

Fixons donc ε positif et θ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Prenons un point z

(*) plus exactement : du point $Q_0 \in \mathcal{R}$.

dans le premier cadran de \mathbb{C}^* , proche de l'axe des imaginaires (***) mais distant d'au moins ε des points $2\pi i m$ (***). Appelons enfin z_* le point du premier cadran tel que les segments $0z_*$ et z_*z soient inclinés respectivement de θ et $-\theta$ sur l'axe réel. (Voir figure 9d1)

Figure 9d1



Il s'agit de majorer γ^* au point z . Pour cela, partons de la formule (9b12+) et évaluons chaque terme $H_{m_n}^+ \dots H_{m_1}^+ \gamma_+(z)$ en intégrant par rapport aux variables z_1, \dots, z_n non pas le long du segment $0z$, mais d'abord le long du segment $0z_*$ puis le long du segment z_*z . Il vient :

$$\begin{aligned}
 (9d7) \quad H_{m_n}^+ \dots H_{m_1}^+ \gamma_+(z) &= \int_{0 < z_1 < \dots < z_n < z} \gamma_+^{*n_n}(z-z_n) E_{m_n}^+(z_n) \gamma_+^{*n_{n-1}}(z_n-z_{n-1}) E_{m_{n-1}}^+(z_{n-1}) \dots \gamma_+^{*n_1}(z_1-z_0) E_{m_1}^+(z_1) \gamma_+(z) dz_1 \dots dz_n \\
 &= \int_{0 < z_1 < \dots < z_n < z_*} (\dots) + \int_{z_* < z_1 < \dots < z_n < z} (\dots) + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{0 < z_1 < \dots < z_i < z_* < z_{i+1} < \dots < z_n < z} (\dots)
 \end{aligned}$$

où les signes $<$ indiquent simplement l'ordre sur les vecteurs $\vec{0z_*}$ et $\vec{z_*z}$.

Sommons dans (9d7) par rapport à tous les multiindices (m_1, m_2, \dots, m_n) avec

$m_i \geq 1$ et $n \geq 1$. On trouve :

$$\begin{aligned}
 (9d8) \quad \sum_{m_i} H_{m_n}^+ \dots H_{m_1}^+ \gamma_+(z) &= \sum_{m_i} I_{m_1, \dots, m_n}(0, z_*) + \sum_{m_i} P_{m_1, \dots, m_n}(z_*, z) \\
 &+ \int_0^{z_*} dx \int_{z_*}^z dy \left\{ \sum_n \gamma_+^{*n}(y-x) E_n(x) \right\} \left\{ \gamma_+(x) + \sum_{m_i} J_{m_1, \dots, m_n}(0, x) \right\} \left\{ \sum_{m_i} Q_{m_1, \dots, m_n}(y, z) \right\}
 \end{aligned}$$

avec

$$(9d9) \quad \mathbf{I}_{n_1, \dots, n_n}(0, z_*) = \int_{0 < z_1 < \dots < z_n < z_*} \gamma_+^{*n_n}(z-z_n) E_{n_n}^+(z_n) \dots \gamma_+^{*n_1}(z_2-z_1) E_{n_1}^+(z_1) \gamma_+^{*n_1}(z_1) dz_1 \dots dz_n$$

$$(9d10) \quad \mathbf{P}_{n_1, \dots, n_n}(z_*, z) = \int_{z_* < z_1 < \dots < z_n < z} \gamma_+^{*n_n}(z-z_n) E_{n_n}^+(z_n) \dots \gamma_+^{*n_1}(z_2-z_1) E_{n_1}^+(z_1) \gamma_+^{*n_1}(z_1) dz_1 \dots dz_n$$

$$(9d11) \quad \mathbf{J}_{n_1, \dots, n_n}(0, x) = \int_{0 < z_1 < \dots < z_n < x} \gamma_+^{*n_n}(z-z_n) E_{n_n}^+(z_n) \dots \gamma_+^{*n_1}(z_2-z_1) E_{n_1}^+(z_1) \gamma_+^{*n_1}(z_1) dz_1 \dots dz_n$$

$$(9d12) \quad \mathbf{Q}_{n_1, \dots, n_n}(y, z) = \int_{y < z_1 < \dots < z_n < z} \gamma_+^{*n_n}(z-z_n) E_{n_n}^+(z_n) \dots \gamma_+^{*n_2}(z_3-z_2) E_{n_2}^+(z_2) \gamma_+^{*n_1}(z_2-y) E_{n_1}^+(y) dz_2 \dots dz_n$$

Remarquons l'absence de z_1 dans l'intégrale $\mathbf{Q}_{n_1, \dots, n_n}(y, z)$. Remarquons aussi que $\mathbf{Q}_{n_1}(y, z) = \gamma_+^{*n_1}(z-y) E_{n_1}^+(y)$ (sans intégration).

La majoration des intégrales $\mathbf{I}_{n_1, \dots, n_n}(0, z_*)$ et $\mathbf{J}_{n_1, \dots, n_n}(0, x)$ n'offre pas de difficulté. On intègre le long du segment $0 z_*$ en utilisant la majoration (9b18+) pour E_n^+ , la majoration (9d5) pour $\gamma_+^{*n}(z)$ et la convexité de $h(n)$. On trouve ainsi, en posant $n = n_1 + \dots + n_n$.

$$\begin{aligned} |\mathbf{J}_{n_1, \dots, n_n}(0, x)| &\leq e^{c_2|x|+h(|x|)} \frac{c_1^n}{(c_1)(c_3)(c_4)^n} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < |x|} \frac{(|x|-t_n)^{n_n-1}}{(n_n-1)!} \dots \frac{(t_2-t_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} dt_1 \dots dt_n \\ &= e^{c_2|x|+h(|x|)} c_1 c_3 (c_3)^{n-1} (c_1 c_4)^n \frac{|x|^n}{n!} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n, n_i \geq 1} \mathbf{J}_{n_1, \dots, n_n}(0, x) \right| &\leq \sum_{n, n_i \geq 1} e^{c_2|x|+h(|x|)} c_1 c_3 (c_3)^{n-1} (c_1 c_4)^n \frac{|x|^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 1} e^{c_2|x|+h(|x|)} \frac{c_1 c_3}{1+c_3} ((1+c_3) c_1 c_4)^n \frac{|x|^n}{n!} \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$(9d13) \quad \left| \sum_{n, n_i \geq 1} \mathbf{J}_{n_1, \dots, n_n}(0, x) \right| \leq e^{c_2|x|+h(|x|)} \frac{c_1 c_3}{1+c_3} (e^{(1+c_3) c_1 c_4 |x|} - 1)$$

De même

$$\begin{aligned}
 |I_{n_1, \dots, n_n}(0, z_*)| &\leq e^{2C_2|z_*| + 2h(|z_*|)} C_1 (C_4)^n (C_3)^n \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < |z_*|} \frac{(|z_*| - t_n)^{n_n-1}}{(n_n-1)!} \dots \frac{(t_2 - t_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} dt_1 \dots dt_n \\
 &= e^{2C_2|z_*| + 2h(|z_*|)} C_1 (C_4)^n (C_3)^n \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < |z_*|} \frac{(|z_*| - t_n)^{n_n-1}}{(n_n-1)!} \frac{(t_n)^{n_{n-1} + \dots + n_1}}{(n_{n-1} + \dots + n_1)!} dt_n \\
 &\leq e^{2C_2|z_*| + 2h(|z_*|)} C_1 (2C_1 C_4)^n (C_3)^n \frac{|z|^n}{n!}
 \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$(9d14) \quad \left| \sum_{n, m_i \geq 1} I_{n_1, \dots, n_n}(0, z_*) \right| \leq e^{2C_2|z_*| + 2h(|z_*|)} \frac{C_1 C_3}{1 + C_3} \left(e^{2(1+C_3)C_1 C_4 |z|} - 1 \right)$$

Pour majorer $P_{n_1, \dots, n_n}(z_*, z)$ et $Q_{n_1, \dots, n_n}(y, z)$, il faut maintenant intégrer le long du segment $z_* z$ en utilisant pour $E_n^+(z_i)$ non plus la majoration (9b18+), mais :

$$(9d15) \quad |E_n^+(z_i)| \leq C_5 \frac{|z_i|^n}{n!} e^{-C_6 |z - z_i|}$$

avec $C_6 = \cos \theta$ et C_5 fonction de Σ . On obtient alors

$$\begin{aligned}
 |P_{n_1, \dots, n_n}(z_*, z)| &\leq (C_5)^n (C_1)^{n+1} \int_{z_* < z_1 < \dots < z_n < z} e^{h(|z - z_1|) + h(|z_1|)} \frac{|z|^{n_n}}{n_n!} \frac{|z - z_n|^{n_n-1}}{(n_n-1)!} e^{-C_6 |z - z_n|} \dots \\
 &\dots \frac{|z|^{n_1}}{n_1!} \frac{|z_{i+1} - z_i|^{n_i-1}}{(n_i-1)!} e^{-C_6 |z - z_i|} \dots \frac{|z|^{n_1}}{n_1!} \frac{|z_2 - z_1|^{n_1-1}}{(n_1-1)!} e^{-C_6 |z - z_1|} dz_1 \dots dz_n
 \end{aligned}$$

Soit, en majorant $h(|z - z_1|) + h(|z_1|)$ par $2h(|z_*|)$ et en posant $t_i = |z - z_i|$:

$$(9d16) \quad \left| \mathcal{P}_{m_1, \dots, m_n}(z_*, z) \right| \leq e^{2C_2|z_*| + 2h(|z_*|)} C_1 C_5^n \mathcal{P}_{m_1, \dots, m_n}(|z_*|)$$

avec

$$(9d17) \quad \mathcal{P}_{m_1, \dots, m_n}(t) = (C_1 |z|)^n \int \frac{t_n^{m_n-1}}{m_n! (m_n-1)!} e^{-C_6 t_n (t_{n-1} - t_n)} \frac{t_{n-1}^{m_{n-1}-1}}{m_{n-1}! (m_{n-1}-1)!} e^{-C_6 t_{n-1}} \dots \frac{(t_1 - t_2)^{m_1-1}}{m_1! (m_1-1)!} e^{-C_6 t_1} dt_n \dots dt_1$$

Considérée comme fonction de t , $\mathcal{P}_{m_1, \dots, m_n}(t)$ a pour transformée de Laplace :

$$\mathcal{P}_{m_1, \dots, m_n}(z) = \int_0^\infty e^{-t\beta} \mathcal{P}_{m_1, \dots, m_n}(t) dt = (C_1 |z|)^n \frac{\beta^{-m_1}}{m_1!} \frac{(\beta + C_6)^{-m_2}}{m_2!} \dots \frac{(\beta + (n-1)C_6)^{-m_n}}{m_n!}$$

Soit, en sommant à n fixe par rapport aux m_i :

$$\sum_{m_i \geq 1} \mathcal{P}_{m_1, \dots, m_n}(z) = \prod_{i=1}^n \left(e^{C_1 |z| (\beta + (i-1)C_6)^{-1}} - 1 \right)$$

En inversant la transformation de Laplace et en tenant compte de $e^{-1} \leq C_7 |u|$ (*) il vient :

$$\sum_{m_i \geq 1} \mathcal{P}_{m_1, \dots, m_n}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \prod_{i=1}^n \left(e^{C_1 |z| (\beta + (i-1)C_6)^{-1}} - 1 \right) e^{t\beta} d\beta$$

$$\left| \sum_{m_i \geq 1} \mathcal{P}_{m_1, \dots, m_n}(t) \right| < \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \prod_{i=1}^n \frac{(C_1 C_7 |z|)^n}{|\beta + (i-1)C_6|} |e^{t\beta}| d\beta$$

D'où, en intégrant sur la verticale $\text{Re } \beta = C_6 = \cos \theta$:

$$\left| \sum_{m_i \geq 1} \mathcal{P}_{m_1, \dots, m_n}(t) \right| \leq C_8 \left(\frac{C_1 C_7 |z|}{C_6} \right)^n \frac{1}{n!} e^{tC_6}$$

(*) Pour $\text{Im } u$ fixé.

avec

$$C_8 = \frac{2(C_6)^2}{2\pi} \int_{\operatorname{Re} z = C_6} \frac{|dz|}{|z(z+C_6)|}$$

Puis, en faisant $t = |z_*|$ et en portant dans (9d16) on trouve :

$$\left| \sum_{\substack{n_i \geq 1 \\ n \text{ fixe}}} P_{n_1, \dots, n_n}(z_*, z) \right| \leq e^{|z_*| C_6} e^{2C_2|z_*| + 2h(|z_*|)} C_1 C_8 \left(\frac{C_1 C_5 C_7}{C_6} |z| \right)^n \frac{1}{n!}$$

Soit finalement :

$$(9d18) \quad \left| \sum_{n, n_i \geq 1} P_{n_1, \dots, n_n}(z_*, z) \right| \leq e^{C_6|z_*| + 2C_2|z_*| + 2h(|z_*|)} C_1 C_8 \left(e^{\frac{C_1 C_5 C_7 |z|}{C_6}} - 1 \right)$$

En raisonnant comme pour les $P_{n_1, \dots, n_n}(z_*, z)$ on trouve :

$$\left| Q_{n_1, \dots, n_n}(y, z) \right| \leq e^{2C_2|z-y| + h(|z-y|)} Z_{n_1, \dots, n_n}(|y|)$$

avec

$$Z_{n_1, \dots, n_n}(t) = \frac{d}{dt} P_{n_1, \dots, n_n}(t)$$

D'où en passant aux transformées de Laplace

$$Z_{n_1, \dots, n_n}(z) = \int P_{n_1, \dots, n_n}(z)$$

et cela conduit à une majoration du type (9d18) avec une légère différence dans les premiers facteurs :

$$(9d19) \quad \left| \sum_{n, n_i \geq 1} Q_{n_1, \dots, n_n}(z_*, y) \right| \leq e^{C_6|z-y| + 2C_2|z-y| + 2h(|z-y|)} C_9 \left(e^{\frac{C_1 C_7 C_7 |z|}{C_6}} - 1 \right)$$

avec

$$C_9 = \frac{3}{\pi} (C_6)^3 \int_{\operatorname{Re} z = C_6} \frac{|dz|}{|z + C_6| |z + 2C_6|}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer par rapport à x et y au second membre de

(9d8). On commence par majorer $\exp(h(|x|) + h(|y-x|) + h(|z-y|))$ par $\exp(2h(|z_+|))$. Puis on majore $|\sum J_0|$ en prenant $x = z_+$ et $|\sum Q_0|$ en prenant $y = z_+$. Enfin, on évalue

$$\iint \sum \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!} (C_1 C_4)^n C_3 |dx| |dy|$$

en majorant $|x-y|$ par $|z|$ et $\iint |dx| |dy|$ par $|z_+|^2$, ce qui donne

$$C_1 C_3 C_4 |z_+|^2 \exp(C_1 C_4 |z|)$$

Finalement, compte tenu de la formule (9d8) et des majorations

(9d13), (9d14), (9d18), (9d19) on trouve :

$$\left| \sum_{n, n_i \geq 1} H_{n_n}^+ \dots H_{n_1}^+ \gamma_+(z) \right| \leq e^{2C_2 |z_+| + 2h(|z_+|)} C(z)$$

avec

$$C(z) = C(z, \theta) = \frac{C_1 C_3}{1+C_3} \left(e^{2(1+C_3)C_1 C_4 |z|} - 1 \right) + C_1 C_8 e^{C_6 |z_+|} \left(e^{\frac{C_1 C_5 C_7 |z|}{C_6}} - 1 \right) \\ + C_1 C_3 C_4 C_9 |z_+|^2 e^{C_1 C_4 |z|} e^{|z_+| C_6} \left(e^{\frac{C_1 C_5 C_7 |z|}{C_6}} - 1 \right) \left(C_1 + \frac{C_1 C_3}{1+C_3} \left(e^{(1+C_3)C_1 C_4 |z_+|} - 1 \right) \right)$$

Sous l'hypothèse (8f13) sur $\{K_n\}$ on peut trouver θ tel que

$$2h(|z_+|) < h(|z|) + C_6 \theta \quad (\forall z)$$

et l'on tire de tout ceci une majoration du type (9d6) pour chaque verticale

du demi-feuillet $\mathcal{R}(Q_+)$. Le cas du demi-feuillet $\mathcal{R}(Q_-)$ se traite de

la même manière à partir de la formule (9b12-).

Ceci règle la question de la croissance (oblique ou verticale) sur les demi-feuillets fondamentaux $\mathcal{R}(Q_{\pm})$. On passe aux feuillets contigus et, de proche en proche, à la surface \mathcal{R} toute entière, en utilisant les équations de résurgence (9c14). Ceci établit la proposition 9d1.

Proposition 9d2 (Itération continue dans les groupes réguliers)

Si f appartient à un groupe régulier (*) contenu dans l'intervalle critique et défini par une condition de croissance \mathbb{K} sur les coefficients, alors dans chaque direction, y compris les directions verticales, les fonctions résurgentes, solutions des équations fondamentales (9a6), (9a7), (9a8), (9a9) vérifient (**) la condition de croissance \mathbb{K} héritée de \mathbb{K} .

C'est un simple corollaire de la proposition 9d1, puisque les groupes réguliers s'obtiennent tous par intersections ou par limites croissantes de groupes à bord $G^{(K_m)}$ avec $\{K_m\}$ vérifiant (8f13).

Section 9e : Les équations de résurgence. Formes déployées et formes restreintes.

Soit f appartenant au groupe G^+ et de la forme (9a5). Nous avons vu à la section 9b que les solutions des quatre équations fondamentales (9a6), (9a7), (9a8), (9a9) avaient pour transformées de Borel des fonctions résurgentes, définies holomorphes sur la surface $\mathcal{R} = \widetilde{\mathbb{C}} \div \Omega$ avec $\Omega = 2\pi i \mathbb{Z}$. Nous allons maintenant montrer que ces mêmes fonctions sont liées simplement à leurs dérivées étrangères ou, si l'on préfère, qu'elles vérifient des équations de résurgence.

(*) voir à la fin de la section 8f.

(**) dans le modèle additif.

Pour plus de commodité d'écriture, nous raisonnerons sur le modèle formel (*). Nous envisagerons donc les séries formelles $\overset{w}{f}, f^*, *f, f_*$ et non pas les fonctions holomorphes $\overset{w}{f}, f^*, *f, f_*$, bien que les équations de résurgence ne s'interprètent commodément que par rapport à ces dernières.

Autre remarque : les équations de résurgence seront obtenues par des manipulations formelles très simples. On risquerait d'en retirer l'impression qu'elles sont "creuses". En fait, tel n'est pas le cas, comme le montreront les applications ultérieures (voir surtout les chapitres 11 et 13). La contradiction apparente se dissipe si on se souvient que les manipulations formelles sur les fonctions résurgentes utilisent, en les condensant, des résultats d'analyse sur ces mêmes fonctions - résultats qui ont fait l'objet de la partie I de ce travail (chapitres 1 à 7).

Equations de résurgence vérifiées par l'itérateur f^* .

Pour tout $\omega \in \Omega^*$, appliquons la dérivation étrangère Δ_ω aux deux membres de l'équation (9a7). Compte tenu de la règle (2e3) il vient :

$$(9e1) \quad e^{-\omega(f-I)} (\Delta_\omega f^*) \circ f = \Delta_\omega f^* \quad (\text{avec } I(z) = z)$$

De (9a7) on tire également :

$$(9e2) \quad (f-I) + (f^*-I) \circ f = (f^*-I) + 1$$

D'où, en exponentiant les deux membres et compte tenu de $e^{-\omega} = 1$:

(* ce qui permettra d'éviter la convolution, la composition convolutive, l'exponentielle convolutive, etc...

$$(9e3) \quad e^{-\omega(\beta-I)} e^{-\omega(\beta^*-I) \circ \beta} = e^{-\omega(\beta^*-I) \circ \beta}$$

En divisant (9e1) par (9e3) et en posant $\varphi = (\Delta_\omega \beta^*) \cdot e^{\omega(\beta^*-I)}$ on aboutit à l'équation :

$$(9e4) \quad \varphi \circ \beta = \varphi$$

dont on vérifie qu'elle n'admet pas d'autre solution, dans \mathbb{A}^∞ et a fortiori dans $\mathbb{A}(1, \Omega)$, que les constantes. On obtient ainsi l'équation de résurgence :

$$(9e5) \quad \Delta_\omega \beta^* = -A_\omega \cdot e^{-\omega(\beta^*-I)} \quad (\omega \text{ indice simple})$$

où A_ω désigne un scalaire qui s'exprime comme combinaison linéaire finie de résidus de $\beta^* = \beta \beta^*$:

$$(9e6) \quad A_\omega = -2\pi i \sum \gamma_j \text{Res}(\beta^*, Q_j)$$

le \sum étant étendu à tous les points Q_j du rapport de Δ_ω (cf. proposition 2c1). L'équation (9e5) s'itère facilement :

$$(9e7) \quad \Delta_{\omega_n} \dots \Delta_{\omega_1} \beta^* = -A_{\omega_1} \dots A_{\omega_n} \omega_1(\omega_1+\omega_2) \dots (\omega_1+\dots+\omega_{n-1}) e^{-(\omega_1+\dots+\omega_n)(\beta^*-I)}$$

Soit, en écriture abrégée :

$$(9e8) \quad \Delta_\omega \beta^* = -A_\omega \Gamma_\omega e^{-\|\omega\|(\beta^*-I)} \quad (\omega \text{ multiindice})$$

avec

$$(9e8bis) \quad \begin{cases} \Delta_{\omega_1, \dots, \omega_n} = \Delta_{\omega_n} \dots \Delta_{\omega_1} \\ A_{\omega_1, \dots, \omega_n} = A_{\omega_1} \dots A_{\omega_n} \\ \Gamma_{\omega_1, \dots, \omega_n} = \omega_1(\omega_1+\omega_2) \dots (\omega_1+\dots+\omega_{n-1}) \end{cases}$$

A partir de là on détermine facilement l'action sur f^* des dérivations étrangères générales. En effet, pour tout $\Gamma \in \Pi$, l'opérateur $(L-R)\Gamma$ est, comme élément de $\Delta(1, \mathcal{R})$, égal à une combinaison linéaire finie de Δ_ω , avec des multiindices ω ayant tous même somme $\|\omega\| = -\dot{\Gamma}$. Par suite, d'après (9e8) :

$$(9e9) \quad (L-R)\Gamma f^* = -A_\Gamma e^{\dot{\Gamma}(f^*-I)}$$

avec un scalaire A_Γ qui est nécessairement égal à $-2\pi i \operatorname{Res}(f^*, \Gamma^{-1}Q_0)$ puisque le support de l'opérateur $(L-R)\Gamma$ est réduit au seul point $\Gamma^{-1}Q_0$. Inversement, comme tous les points de ramification de la surface \mathcal{R} sont de la forme $\Gamma^{-1}Q_0$ avec $\Gamma \in \Pi$, l'équation (9e9) montre que f^* resurgit, légèrement modifiée (en l'occurrence : exponentiée) en chacun de ses points de ramifications (*). D'où le nom générique d'équations de résurgence, conféré aux relations du type (9e5) ou (9e9).

Nous pouvons maintenant calculer les formes déployée et restreinte de f^* selon la base $\{z^\omega\}$ de $\Delta'(1, \mathcal{R})$. En effet d'après (9e8) et la proposition 4a1 α :

$$(9e10) \quad \begin{cases} [f^*] = \sum_{\omega} (\Delta_{\omega} f^*) z^{\omega} \\ = f^* - \sum_{\omega \neq \emptyset} A_{\omega} \Gamma_{\omega} e^{-\|\omega\|} (f^*-I) z^{\omega} \end{cases}$$

De même, d'après (9e8), d'après la proposition 4a1 β et puisque $v(e^{-\|\omega\|} (f^*-I)) = 1$:

$$(9e11) \quad \begin{cases} \langle f^* \rangle = \sum_{\omega} v(\Delta_{\omega} f^*) z^{\omega} \\ = I - \sum_{\omega \neq \emptyset} A_{\omega} \Gamma_{\omega} z^{\omega} \end{cases}$$

(*) dans le modèle additif, on doit bien sûr exponentier par rapport au produit de convolution.

D'autre part, d'après la règle (4a5), les pseudovariables obéissent à la loi de composition :

$$Z^\omega \circ g = Z^\omega \cdot e^{-\|\omega\| (g-I)} \quad (\forall \omega, \forall g)$$

Par suite, en comparant (9e10) et (9e11), on remarque la factorisation :

$$(9e12) \quad [f^*] = \langle f^* \rangle \circ f^*$$

où $[f^*]$ appartient au groupe $I + \Delta'(1, \mathcal{R}) \otimes A(1, \mathcal{R})$ et où $\langle f^* \rangle$ et f^* appartiennent respectivement aux sous-groupes $I + \Delta'(1, \mathcal{R})$ et $I + A(1, \mathcal{R}) = \mathcal{G}(1, \mathcal{R})$ de ce groupe.

La factorisation (9e12) réalise donc une séparation des pseudovariables et de la vraie variable : les premières sont rassemblées dans $\langle f^* \rangle$, les secondes dans f^* .

Equations de résurgence vérifiées par l'itérateur inverse *f .

Puisque *f est l'inverse de f^* dans le groupe $\mathcal{G}(1, \mathcal{R})$, on peut appliquer Δ_ω aux deux membres de la relation $I = {}^*f \circ f^*$ et puisque (2e3) reste valable quand on prend φ dans $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ au lieu de la prendre dans $A(\mathcal{R})$, on obtient (dans le modèle formel) :

$$0 = ((\partial {}^*f) \circ f^*) \cdot (\Delta_\omega f^*) + e^{-\omega(f^*-I)} \cdot ((\Delta_\omega {}^*f) \circ f)$$

ce qui, compte tenu de (9e5), fournit l'équation de résurgence :

$$(9e13) \quad \Delta_\omega {}^*f = A_\omega \partial {}^*f \quad (\text{avec } \partial = \frac{d}{dz})$$

Autrement dit, à un facteur constant près, l'application à *f de la dérivation naturelle ∂ ou de n'importe quelle dérivation étrangère Δ_ω donne le même résultat.

Compte tenu de $[\partial, \Delta_\omega] = \omega \Delta_\omega$, l'équation (9e13) s'itère facilement :

$$(9e14) \quad \Delta_{\omega_n} \dots \Delta_{\omega_1} *f = (-1)^n A_{\omega_1} \dots A_{\omega_n} (-\partial)(-\partial + \omega_n)(-\partial + \omega_n + \omega_{n-1}) \dots (-\partial + \omega_n + \dots + \omega_2) *f$$

Soit, en écriture abrégée :

$$(9e15) \quad \Delta_\omega \cdot *f = - (-1)^{n(\omega)} A_\omega \Gamma_{-\partial, \tilde{\omega}} \cdot *f$$

avec le multiindice symbolique $-\partial, \tilde{\omega} = (-\partial, \omega_n, \omega_{n-1}, \dots, \omega_2, \omega_1)$.

Plus généralement, pour tout $\Gamma \in \Pi$ on trouve :

$$(9e16) \quad (I - R) \Gamma *f = P_\Gamma(\partial) *f$$

où $P_\Gamma(\partial)$ est un polynôme en ∂ , à coefficients constants, ne dépendant que de Γ . A partir de là, on peut calculer les formes déployée et restreinte de $*f$:

$$(9e17) \quad [*f] = *f - \sum_{\omega \neq \emptyset} (-1)^{n(\omega)} A_\omega Z^\omega (\Gamma_{-\partial, \tilde{\omega}} \cdot *f)$$

$$(9e18) \quad \langle *f \rangle = I - \sum_{\omega \neq \emptyset} (-1)^{n(\omega)} A_\omega \Gamma_{\tilde{\omega}} Z^\omega \quad (*)$$

Bien entendu :

$$[*f] \circ [f^*] = I \quad ; \quad \langle *f \rangle \circ \langle f^* \rangle = I \quad ; \quad [*f] = *f \circ \langle *f \rangle$$

Cela tient à ce que $*f \circ f^* = I$ et à ce que les formes déployée et restreinte sont des homomorphismes de groupe. La dernière des trois relations ci-dessus sépare les pseudovariables de la vraie variable.

(*) $\tilde{\omega} = (\omega_n, \dots, \omega_1)$ quand $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$.

Equations de résurgence vérifiées par le logarithme itératif f_* .

Puisque $f_* = 1/\partial f^*$, les résultats relatifs à f_* se déduisent des résultats concernant f^* . Ainsi, pour un indice simple ω :

$$\begin{aligned} \Delta_\omega \cdot f_* &= - \frac{\Delta_\omega \partial f^*}{(\partial f^*)^2} = - \frac{(-\omega + \partial) \Delta_\omega f^*}{(\partial f^*)^2} \\ &= \frac{(-\omega + \partial) A_\omega e^{-\omega(f^* - I)}}{(\partial f^*)^2} = \frac{A_\omega (-\omega - \omega \partial f^* + \omega) e^{-\omega(f^* - I)}}{(\partial f^*)^2} \end{aligned}$$

D'où l'équation de résurgence :

$$(9e19) \quad \Delta_\omega f_* = -\omega A_\omega f_* e^{-\omega(f^* - I)} \quad (\omega \text{ indice simple})$$

qui s'itère facilement :

$$(9e20) \quad \Delta_\omega f_* = A_\omega \Gamma_{\langle \omega \rangle} f_* e^{-\|\omega\| (f^* - I)} \quad (\omega \text{ multiindice})$$

avec

$$(9e20bis) \quad \Gamma_{\langle \omega_1, \dots, \omega_n \rangle} = -\omega_1 (\omega_1 - \omega_2) (\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) \dots (\omega_1 + \dots + \omega_{n-1} - \omega_n)$$

On en déduit les formes déployée et restreinte de f_* :

$$(9e21) \quad [f_*] = f_* + \sum_{\omega \neq \emptyset} A_\omega \Gamma_{\langle \omega \rangle} f_* e^{-\|\omega\| (f^* - I)} Z^\omega$$

$$(9e22) \quad \langle f_* \rangle = 1 + \sum_{\omega \neq \emptyset} A_\omega \Gamma_{\langle \omega \rangle} Z^\omega$$

L'équation (9e19) n'est pas une relation de résurgence au sens strict : elle

fait intervenir $f^* = \int \frac{dz}{f_*}$ et ne relie donc pas directement

$\Delta_\omega f_*$ à f_* . Toutefois, on en tire facilement des équations de résurgence strictes. Par exemple :

$$\left(\Delta_{\omega_1} f_*\right)^{\alpha_1} \left(\Delta_{\omega_2} f_*\right)^{\alpha_2} \left(\Delta_{\omega_3} f_*\right)^{\alpha_3} = \text{Cste} \quad \text{si} \quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 + \alpha_3 \omega_3 = 0 \end{cases}$$

Equations de résurgence vérifiées par l'itérée générale f_*^w .

Partant de $f_*^w = f_* \circ \ell^w \circ f_*^*$ avec $\ell^w(z) = z + w$ et utilisant (2e3), (9e5), (9e13) on obtient pour les équations de résurgence (au sens large) :

$$(9e33) \quad \Delta_\omega f_*^w = A_\omega (e^{-\omega w} - 1) e^{-\omega(f_*^* - I)} f_* \partial f_*^w \quad (\omega \text{ indice simple})$$

$$(9e34) \quad \Delta_\omega f_*^w = A_\omega e^{-\|\omega\| (f_*^* - I)} Q_\omega(f_* \partial) f_*^w \quad (\omega \text{ multiindice})$$

où $A_\omega = A_{\omega_1} \dots A_{\omega_n}$ comme d'habitude et où $Q_\omega(f_* \partial)$ est un polynôme en $f_* \partial$, sans terme constant, de degré $n(\omega)$ et facilement calculable par récurrence sur $n(\omega)$. Par exemple :

$$Q_{\omega_1}(x) = (e^{-\omega_1 w} - 1) x$$

$$Q_{\omega_1, \omega_2}(x) = (e^{-\omega_1 w} - 1) ((\omega_2 e^{-\omega_2 w} - \omega_1) x + (e^{-\omega_2 w} - 1) x^2)$$

On tire de là les formes déployée et restreinte :

$$(9e35) \quad [f_*^w] = f_*^w - \sum_{\omega \neq \emptyset} A_\omega Z^\omega e^{-\|\omega\| (f_*^* - I)} Q_\omega(f_* \partial) f_*^w$$

$$(9e36) \quad \langle f_*^w \rangle = I + w - \sum_{\omega \neq \emptyset} A_\omega Z^\omega q_\omega$$

avec

$$(9e36bis) \quad q_\omega = \frac{\partial}{\partial x} Q_\omega(0) = - \sum_{\omega', \omega' < \omega} \Gamma_{\omega^2 - \omega'} e^{-\|\omega'\| \omega}$$

Résumons les résultats obtenus :

Proposition 9e1 (Equations de résurgence)

Pour f dans le groupe G^{Γ^-} et de la forme (9a5), les solutions $f, f^*, {}^*f, f_*$ des quatre équations fondamentales vérifient chacune des équations de résurgence. Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega^*$ il existe un scalaire

A_ω tel que

$$(9e37) \quad \Delta_\omega f^* = -A_\omega e^{-\omega(f^* - I)}$$

$$(9e38) \quad \Delta_\omega {}^*f = A_\omega \partial {}^*f \quad \left(\partial = \frac{d}{dz} \right)$$

$$(9e39) \quad \Delta_\omega f_* = -\omega A_\omega f_* e^{-\omega(f^* - I)}$$

$$(9e40) \quad \Delta_\omega f^\omega = A_\omega (e^{-\omega\omega} - 1) e^{-\omega(f^* - I)} f_* \partial f^\omega$$

Interprétées dans le modèle additif, ces équations expriment que les fonctions en question "résurgissent", légèrement modifiées en chacune de leurs singularités.

Proposition 9e2 (Formes restreintes et déployées)

Soit encore f dans G^{Γ^-} et de la forme (9a5). On a alors les formes restreintes suivantes :

$$(9e41) \quad \langle f^* \rangle = I - \sum_{\omega \neq \phi} A_\omega \Gamma_\omega Z^\omega$$

$$(9e42) \quad \langle {}^*f \rangle = I - \sum_{\omega \neq \phi} (-1)^{n(\omega)} A_{\omega} \Gamma_{\omega} Z^{\omega}$$

$$(9e43) \quad \langle f_* \rangle = 1 + \sum_{\omega \neq \phi} A_{\omega} \Gamma_{\langle \omega \rangle} Z^{\omega}$$

$$(9e44) \quad \langle \overset{\omega}{f} \rangle = I + \omega - \sum_{\omega \neq \phi} A_{\omega} q_{\omega} Z^{\omega}$$

et les formes déployées correspondantes :

$$(9e45) \quad [f^*] = \langle f^* \rangle \circ f^*$$

$$(9e46) \quad [{}^*f] = {}^*f \circ \langle {}^*f \rangle$$

$$(9e47) \quad [f_*] = f_* \langle f_* \rangle \circ f^*$$

$$(9e48) \quad [\overset{\omega}{f}] = {}^*f \circ \langle \overset{\omega}{f} \rangle \circ f^*$$

avec des factorisations qui séparent les pseudovariables de la vraie variable (*)

Section 9f : Le cas général (μ, α, ρ quelconques)

Soit \mathcal{G} un groupe de croissance apparenté à \mathcal{G}^0 . Voyons ce qui change quand, au lieu de prendre f de la forme (9a5), on le prend quelconque dans \mathcal{G} .

Commençons par traiter le cas où $\mu(f) = 1$. Tout f de cette forme s'écrit :

(*) Ce phénomène n'a pas d'équivalent dans le cas des équations fonctionnelles plus générales étudiées au chapitre 15 et cela complique sérieusement la théorie des dites équations.

$$(9f1) \quad f(z) = z + \alpha - \alpha^2 \rho z^{-1} + o(z^{-1}) \quad \text{avec } \alpha = \alpha(f) \neq 0, \rho = \rho(f)$$

La transformée de Borel f de f est, aux diracs près, une série entière en z . Son rayon de convergence est infini si et seulement si f appartient à \mathcal{G}^+ . Supposons que ce soit le cas et associons à f les quatre équations :

$$(9f2) \quad f \circ f^w = f \circ f^w \quad \text{avec } f^w(z) = z + w + o_1(1)$$

$$(9f3) \quad f^* \circ f = \alpha + f^* \quad \text{avec } f^*(z) = z + \rho \alpha \log z + o_2(1)$$

$$(9f4) \quad f \circ f^*(z) = f^*(z + \alpha) \quad \text{avec } f^*(z) = z - \rho \alpha \log z + o_3(1)$$

$$(9f5) \quad f_* \circ f = f_* \frac{d}{dz} f \quad \text{avec } f_*(z) = \alpha + o_4(1)$$

On vérifie que chaque équation admet une solution formelle unique. Pour $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4$ on trouve des séries entières en z^{-1} et pour σ_3 une série entière en z^{-1} et $\log z$. Grâce à (9f3) on peut définir la transformée de Borel f^* de f^* . Au terme $B \log z = J$ près (cf. (1c6)), f^* est une série entière en z , convergente à l'origine.

En adaptant soigneusement la démonstration de la proposition 9b1 pour tenir compte de la non-nullité du coefficient $a_2 = -\alpha^2 \rho$, on voit qu'ici encore f^* se prolonge holomorphiquement le long de tout chemin évitant l'ensemble $\Omega = 2\pi i \alpha^{-1} \mathbb{Z}$. Donc f^* appartient à l'algèbre $\overline{\mathcal{A}}(\Omega)$ et même, compte tenu de sa forme au voisinage de Q_0 , possède dans $\overline{\mathcal{A}}(\Omega)$ un inverse de composition *f . (cf. exercice 2b1). Par suite les itérées $f^w = {}^*f \circ e^{\alpha w} \circ f^*$ et le générateur infinitésimal f_* appartiennent aussi à $\overline{\mathcal{A}}(\Omega)$.

Les raisonnements qui à la section 8e ont conduit aux équations de

résurgence, restent encore valables, avec cette différence que cette fois-ci il faut a priori envisager des dérivations étrangères non plus de $A(1, \Omega)$ mais de $\overline{A}(\Omega)$, c'est-à-dire des Δ_η indexées par des η appartenant à Ω_∞ . On obtient ainsi :

$$(9f6) \quad \Delta_\eta f^* = -A_\eta e^{-\eta(f^*-I)}$$

$$(9f7) \quad \Delta_\eta {}^*f = A_\eta \partial {}^*f$$

$$(9f8) \quad \Delta_\eta f_* = -\eta A_\eta f_* e^{-\eta(f^*-I)}$$

$$(9f9) \quad \Delta_\eta f^{\overline{w}} = A_\eta (e^{-\eta \overline{w}} - 1) e^{-\eta(f^*-I)} f_* \partial f^{\overline{w}}$$

avec des scalaires A_η bien déterminés dès lors qu'on adopte pour $\log z$ la détermination principale.

Ces équations de résurgence appellent plusieurs remarques. Tout d'abord, à cause du terme en $\log z$ dans f^* , les seconds membres de (9f6), (9f8), (9f9) sont, au facteur $z^{-\omega \alpha \rho}$ près, des séries entières en z^{-1} . En revenant au modèle additif, ceci permet de décrire en détail le comportement des fonctions résurgentes $f^*, {}^*f, f_*, f^{\overline{w}}$ en leurs points de ramification. Comme ω est de la forme $2\pi i \alpha^{-1} m$ avec $m \in \mathbb{Z}$ on a $\omega \alpha \rho = 2\pi i \rho m$ et il faut distinguer les cas où $2\pi i \rho$ est entier, rationnel non entier, irrationnel (Voir à ce sujet les sections 1c et 1d).

D'autre part, comme $f^*(z) - z - \rho \alpha \log z$ est régulier en 0 et que les dérivations étrangères annulent $z + \rho \alpha \log z$, il est clair que $\Delta_\eta f^*$, donc aussi A_η , donc aussi $\Delta_\eta {}^*f, \Delta_\eta f_*, \Delta_\eta f^{\overline{w}}$, ne dépendent que de la projection $\omega = \eta$ de η sur Ω . Il en va de même

lorsqu'on applique à $f, f^*, {}^*f, f_*$ un opérateur $\Delta_{\eta_n} \dots \Delta_{\eta_2} \Delta_{\eta_1}$, car les dérivations étrangères n'agissent pas sur les facteurs $z^{-\omega\alpha\rho}$.

Par suite, bien qu'on ne soit pas dans $A(1, \Omega)$, même pour $2\pi i\rho$ entier, tout se passe comme si on y était. En particulier, on peut indexer les Δ_ω et A_ω par des ω pris directement dans Ω^* et définir les formes déployées et restreintes avec les pseudovariabiles de $A(1, \Omega)$. Ainsi, si l'on pose

$$(9f10) \quad [f^*] = I + \sum_{\omega \neq \emptyset} (\Delta_\omega f^*) Z^\omega \quad (\omega \text{ multiindice})$$

et si on définit de même $[{}^*f], [f_*], [f^\omega]$, on aura encore les factorisations (9e45), (9e46), (9e47), (9e48), à condition de remplacer ℓ par $\tilde{\ell}^\alpha$, de poser :

$$(9f11) \quad \langle f^* \rangle = I - \sum_{\omega \neq \emptyset} A_\omega \Gamma_\omega Z^\omega = I + \sum_{\omega \neq \emptyset} v(e^{-\|\omega\|\alpha\rho} \Delta_\omega f^*) Z^\omega$$

et de définir de même $\langle {}^*f \rangle, \langle f_* \rangle, \langle f^\omega \rangle$.

Traisons maintenant le cas général, où μ, α, ρ sont que quelconques.

Cela revient à considérer des f de la forme

$$(9f12) \quad f(z) = z \left(1 + \sum_{n \geq \mu} a_n z^{-n} \right) \quad \text{avec } a_\mu \neq 0 \text{ si } \mu(f) = \mu$$

Quitte à faire subir à f un automorphisme interne, on peut toujours supposer que

$$(9f12bis) \quad a_\mu = \alpha \neq 0, a_{\mu+1} = a_{\mu+2} = \dots = a_{2\mu-1}, a_{2\mu} = -\alpha^2 \left(\rho + \frac{\mu-1}{2} \right)$$

Effectuons ensuite le changement de variable $z \rightarrow z^{1/\mu}$. Autrement dit, remplaçons f par g avec :

$$(9f13) \quad g(z) = \left(f(z^{1/\mu}) \right)^\mu = z + \mu \alpha - \mu \alpha^2 \rho z^{-1} + o(z^{-1})$$

La transformée de Borel \tilde{g} de g est aux diracs près, une série entière en $z^{1/\mu}$. Son rayon de convergence est infini si et seulement si f appartient à $\mathcal{G}^{(1/\mu)^-}$. Supposons que ce soit le cas et associons à g les quatre équations :

$$(9f14) \quad \tilde{g} \circ g = g \circ \tilde{g} \quad \text{avec} \quad \tilde{g}(z) = z + w + o_1(1)$$

$$(9f15) \quad g^* \circ g = \mu\alpha + g^* \quad \text{avec} \quad g^*(z) = z + \rho\alpha \log z + o_2(1)$$

$$(9f16) \quad g \circ^* g(z) = {}^*g(z + \mu\alpha) \quad \text{avec} \quad {}^*g(z) = z - \rho\alpha \log z + o_3(1)$$

$$(9f17) \quad g_* \circ g = g_* \frac{d}{dz} g \quad \text{avec} \quad g_*(z) = \mu\alpha + o_4(1)$$

On vérifie que chacune de ces équations admet une unique solution formelle de la forme spécifiée. Pour $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4$ on trouve des séries entières en $z^{-1/\mu}$ et pour σ_3 une série entière en $z^{-1/\mu}$ et $\log z$. Comme précédemment, on définit, grâce à (1e3), les transformées de Borel $\tilde{g}, g^*, {}^*g, g_*$ de $\tilde{g}, g^*, {}^*g, g_*$, puis on vérifie successivement que ces quatre germes se prolongent holomorphiquement à la surface $\mathcal{R} = \widetilde{\mathbb{C} \div \Omega}$ avec $\widetilde{\Omega} = \frac{2\pi i}{\mu\alpha} \mathbb{Z}$. Ce sont donc des fonctions résurgentes, éléments de l'algèbre $\overline{\mathcal{A}}(\Omega)$. Toutes, à l'exception de g_* , possèdent des inverses de composition. Les équations de résurgence (9f6), (9f7), (9f8), (9f9) restent en vigueur, ainsi que les formes déployées et restreintes avec leurs factorisations, mais cette fois-ci c'est dans Ω_μ et non plus dans Ω^* qu'il faut faire varier les indices η .

Il se trouve que g_* et \tilde{g}^{-1} possèdent les propriétés suivantes (énoncées ici dans le modèle formel) :

(i) ce sont des séries entières en $z^{-1/\mu}$

(ii) si on leur applique un opérateur $e^{\eta\beta} \Delta_\eta$ (pour $\beta = \rho\alpha$ et η indice simple $\in \Omega_\infty$) ou plus généralement un opérateur $e^{\|\eta\|\beta} \Delta_\eta$ (pour η multiindice), on obtient encore des séries entières en $z^{-1/\kappa}$.

Les fonctions résurgentes qui satisfont à (i) et (ii) forment manifestement une sous-algèbre de $\bar{A}(\Omega)$ que nous noterons $A(\kappa, \Omega, \beta)$. Les dérivations étrangères qui agissent sur $A(\kappa, \Omega, \beta)$ sont des combinaisons linéaires d'opérateurs $e^{\|\eta\|\beta} \Delta_\eta$ (η multiindice sur Ω_κ) et constituent ensemble une bigèbre évidemment isomorphe à $\Delta(\kappa, \Omega)$. Ceci explique que les pseudovariabes de $A(\kappa, \Omega, \beta)$ s'identifient aux pseudovariabes de $A(\kappa, \Omega)$. D'autre part, à cause du crochet

$$[\partial, e^{\eta\beta} \Delta_\eta] = \eta (1 + \beta z^{-1}) e^{\eta\beta} \Delta_\eta \text{ (modèle formel; } \eta \text{ simple)}$$

il est clair que $A(\kappa, \Omega, \beta)$ est stable pour la dérivation naturelle et que $G(\kappa, \Omega, \beta) = I + A(\kappa, \Omega, \beta)$ est un groupe pour la composition. C'est à ce groupe qu'appartiennent les itérées g^w .

Cela suppose toutefois que l'on ait au préalable mis f sous la forme (9e12bis) en le soumettant à un automorphisme interne adéquat. Mais si l'on part de plusieurs éléments f_1, f_2, \dots, f_n appartenant à une même classe formelle $G_{\kappa, \alpha, \rho}$ de G , il n'existe en général pas d'isomorphisme interne de G qui mette simultanément tous les f_i sous la forme (9e12bis). Or il est parfois indispensable (par exemple, pour démontrer les théorèmes d'indépendance du chapitre 11) d'avoir une application $f \rightarrow g$ qui ne dépende pas de f (pour κ, α, ρ constants). On obtient une telle application en effectuant le changement de variable $f(z) \rightarrow g(z) = (f(z^{1/\kappa}))^\kappa$ directement sur la fonction f telle quelle. Ceci se répercute sur g, g^w, g_x par l'apparition de $(\kappa-1)$ termes en $z^{-1/\kappa}, z^{-2/\kappa}, \dots, z^{-(\kappa-1)/\kappa}$ et sur $g^*, *g$ par l'apparition de $(\kappa-1)$ termes en $z^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}, z^{\frac{\kappa-2}{\kappa}}, \dots, z^{\frac{1}{\kappa}}$. Les quatre équations de résurgence restent inchangées mais, en plus du facteur

$z^{-w\rho\alpha}$, il apparaît maintenant $(k-1)$ nouveaux facteurs de la forme

$$\exp(\omega\gamma_{k-1} z^{\frac{k-1}{k}}), \exp(\omega\gamma_{k-2} z^{\frac{k-2}{k}}), \dots, \exp(\omega\gamma_1 z^{1/k})$$

avec des γ_j scalaires. Finalement, g_{α} (resp. \bar{g}) appartient non plus à $A(\rho, \Omega, \beta)$ (resp. $G(\rho, \Omega, \beta)$) mais à l'algèbre élargie $\bar{A}(\rho, \Omega, \beta)$ (resp. au groupe élargi $\bar{G}(\rho, \Omega, \beta)$) qu'on obtient en admettant, aux conditions (i) et (ii), des séries en $z^{-1/k}$ et en $z^{1/k}$ (**)

On tire de ce qui précède un résultat inattendu sur le mode de divergence des itérées étrangères. Énonçons ce résultat dans le cas du groupe minimal G^0 .

Proposition 9f1 (Lemme de discrétude).

Soit f une transformation formelle et f^w son itérée d'ordre w :

$$\left. \begin{aligned} z \rightarrow f(z) &= z \left(1 + \alpha z^{-k} + \sum_{n>k} a_n z^{-n} \right) \\ z \rightarrow f^w(z) &= z \left(1 + w\alpha z^{-k} + \sum_{n>k} a_n(w) z^{-n} \right) \end{aligned} \right\} (\rho \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{C}^*, w \in \mathbb{C}^*)$$

Alors, si f est convergente à l'infini et si f^w ne l'est pas, il existe un entier positif d tel que :

$$(9f18) \quad \limsup_n \frac{|a_n(w)|^{1/n}}{n} = \frac{\alpha}{2\pi e} \cdot \frac{1}{d}$$

(*) mais pas g^* ni *g .

(**) c'est-à-dire des éléments de $\bar{A}(\rho)$ (voir section 1d).

Autrement dit, lorsqu'un germe de transformation holomorphe f n'admet pas d'itérée holomorphe d'ordre w , son itérée formelle f^w appartient au groupe $G^{1/\mu}$ et possède un ultrarayon d'ordre $1/\mu$ qui n'est susceptible de prendre qu'un ensemble dénombrable de valeurs.

Preuve. Si f est convergente à l'infini et si $\rho(f) = \mu$, alors $f \in G^0 \subset G^{(1/\mu)^-}$. On peut donc appliquer ce qui précède et, grâce à (9f13) et (9f14), associer à f des séries g et g^w . g^w est de la forme :

$$g^w(z) = z + w + \sum_{n \geq 1} b_n(w) z^{-n/\mu}$$

et sa transformée de Borel $\overset{w}{g}(z)$ est de la forme :

$$\overset{w}{g}(z) = \delta'(z) + w \delta(z) + \sum_{n \geq 1} b_n(w) \frac{z^{\frac{n}{\mu}-1}}{\Gamma(\frac{n}{\mu})}$$

Le germe $\overset{w}{g}$ se prolonge holomorphiquement le long de tout chemin qui évite l'ensemble $\Omega = \frac{2\pi i}{\mu} \cdot \mathbb{Z}$. Si f n'est pas convergente à l'infini, $\overset{w}{g}$ ne saurait se prolonger holomorphiquement à toute la surface G_μ (surface de Riemann de $z^{1/\mu}$). C'est donc que $\overset{w}{g}$ est ramifiée en certains points de Ω^* . Soit $|\omega_0|$ le plus petit module de ces points de ramifications. On a alors :

$$\limsup_n \left| \frac{b_n(w)}{\Gamma(\frac{n}{\mu})} \right|^{\frac{1}{\frac{n}{\mu}-1}} = \limsup_n \frac{|b_n(w)|^{\frac{\mu}{n}}}{(n/\mu e)} = \frac{1}{|\omega_0|}$$

Or d'une part $|\omega_0|$ est de la forme $\frac{2\pi i}{\mu} \cdot d$ avec d entier ≥ 1 et d'autre part on vérifie que $|a_n(w)|^{\mu/n}$ et $|b_n(w)|^{\mu/n}$ ont même limite supérieure quand $n \rightarrow \infty$. D'où le résultat (9f18).

Section 9g : Résumé du chapitre 9.

Ce chapitre applique les algèbres de résurgence à l'étude de l'itération continue dans les groupes pleins et plus particulièrement dans les groupes de l'intervalle critique $[G^0, G^1]$. Pour un order d'itération w non entier, les éléments f d'un tel groupe G ne possèdent généralement que des itérées $f^{(w)}$ étrangères, c'est-à-dire n'apportant pas à G . Les $f^{(w)}$ sont donc encore plus divergentes que les f elles-mêmes. Toutefois, elles appartiennent toujours à G^1 et, si on leur applique la transformation de Borel, on obtient des séries $\hat{f}^{(w)}$ (caractères gras) qui cette fois convergent. De plus :

- α) Le germe analytique que chaque $f^{(w)}$ définit à l'origine se prolonge holomorphiquement le long de tout chemin du plan complexe pourvu qu'on évite un certain ensemble Ω qui ne dépend que de l'entier $\nu(f)$ et du complexe $\alpha(f)$.
- β) La fonction $\hat{f}^{(w)}$ ainsi prolongée appartient à l'algèbre de résurgence $\overline{A}(\Omega)$ et vérifie des équations de résurgence du type $\Delta_{\nu} \hat{f}^{(w)} = \Phi_{\nu}(\hat{f}^{(w)})$. Comme les dérivations étrangères Δ_{ν} mesurent les singularités aux points de Ω , cela veut dire que le germe initial $\hat{f}^{(w)}$ "résurgit", quelque peu modifié, aux points de Ω .
- γ) Quelle que soit la direction dans laquelle on prolonge $\hat{f}^{(w)}$ et même si c'est une direction où s'accumulent les singularités, on constate que $\hat{f}^{(w)}$ reste sujette en modules à une certaine restriction de croissance \mathbb{K} , héritée de la restriction de croissance \mathbb{K} initialement imposée aux coefficients des éléments de G .

Les équations de résurgence revêtent une forme particulièrement simple lorsque $\nu(f) = 1$, $\alpha(f) = 1$, $\rho(f) = 0$ c'est-à-dire lorsque $f(z) = z + 1 + O(z^{-2})$. Dans ce cas en effet, f et ses itérées $f^{(w)}$ sont formellement conjuguées aux translations e et e^w :

$$f = {}^*f \circ l \circ f^* ; \overset{w}{f} = {}^*f \circ \overset{w}{l} \circ f^* \quad (\text{avec } {}^*f \circ f^* = I, \overset{w}{l}(z) = z + w)$$

Les séries f^* , *f , $\overset{w}{f}$ sont toujours dans G^1 , mais presque jamais dans G . Leurs transformées de Borel f^* , *f , $\overset{w}{f}$ appartiennent au groupe de résurgence $G(1, \Omega) = I + A(1, \Omega)$ avec $\Omega = 2\pi i \mathbb{Z}$

L'itérateur f^* vérifie des équations de résurgence pures (i.e. sans ∂):

$$\Delta_\omega f^* = -A_\omega e^{-\omega(f^*-I)} \quad (A_\omega \text{ scalaire ; } I(z) = z)$$

L'itérateur inverse *f vérifie des équations de résurgence linéaires:

$$\Delta_\omega {}^*f = A_\omega \partial {}^*f \quad (\partial = \frac{d}{dz})$$

Enfin, l'itérée $\overset{w}{f}$ vérifie des équations de résurgence ni pures ni linéaires :

$$\Delta_\omega \overset{w}{f} = A_\omega (e^{-\omega w} - 1) e^{-\omega(f^*-I)} f^* \partial \overset{w}{f}$$

Chapitre 10 : Les algèbres de résurgence réduites.

Section 10a : L'algèbre réduite $A(1, \mathcal{Q})$.

Les équations (9e7) montrent que, à un facteur scalaire près qui est fonction de la suite $A^{\mathcal{Q}} = \{ A_{\omega} \}$, l'application à f^* d'un opérateur $\Delta_{\omega} = \Delta_{\omega_n} \dots \Delta_{\omega_1}$ donne un résultat qui ne dépend que de la somme $\|\omega\| = \omega_1 + \dots + \omega_n$. On doit donc s'attendre à ce que f^* et les trois fonctions résurgentes associées ${}^*f, f_*, f^{\omega}$, appartiennent à des sous-algèbres assez petites. C'est à ces sous-algèbres "réduites" des algèbres de résurgence qu'est consacré le présent chapitre. Les résultats obtenus seront plus tard appliqués aux théorèmes d'indépendance (chapitre 11) et à la synthèse harmonique constructive (chapitre 13).

Pour y voir plus clair, regardons comment agissent sur f^* les dérivations de degré 1. A partir de (9e7) on montre de proche en proche :

$$[\Delta_{\omega_2}, \Delta_{\omega_1}] f^* = -A_{\omega_1} A_{\omega_2} (\omega_1 - \omega_2) e^{-(\omega_1 + \omega_2)} (f^* - I)$$

$$[\Delta_{\omega_3} [\Delta_{\omega_2}, \Delta_{\omega_1}]] f^* = -A_{\omega_1} A_{\omega_2} A_{\omega_3} (\omega_1 - \omega_2) (\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) e^{-(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)} (f^* - I)$$

.....

et, d'une façon générale :

$$(10a1) \quad \Delta_{[\omega]} \cdot f^* = -A_{\omega} \Gamma_{[\omega]} e^{-\|\omega\|} (f^* - I)$$

avec les abréviations usuelles :

$$(10a2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \\ \Delta_{[\omega]} = [\Delta_{\omega_n} [\Delta_{\omega_{n-1}} \dots [\Delta_{\omega_2}, \Delta_{\omega_1}] \dots]] \\ A_{\omega} = A_{\omega_1} \dots A_{\omega_n} \\ \Gamma_{[\omega]} = (\omega_1 - \omega_2) (\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) \dots (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n-1} - \omega_n) \end{array} \right.$$

On ne confondra pas (10a1) avec la relation (9e) qui, elle, fait intervenir les Δ_{ω} et les Γ_{ω} .

Avant de poursuivre, donnons quelques définitions qui nous serviront constamment.

Définition 10a1 : (multiindices sans ordre et signatures)

Deux multiindices ω et ω' sont dits équivalents ($\omega \sim \omega'$) s'ils ne diffèrent que par l'ordre de leurs termes. La classe d'équivalence, notée $\underline{\omega}$, est dite multiindice sans ordre.

Si dans $\underline{\omega}$ on regroupe les termes identiques et si les différents paquets ainsi obtenus contiennent respectivement n_1, n_2, \dots, n_m éléments, alors l'entier $n_1! n_2! \dots n_m!$ est noté $\underline{\omega}!$ et appelé signature de $\underline{\omega}$.

Définition 10a2 : (terme prépondérant)

Si un multiindice sans ordre est de la forme

$$(10a3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\omega} = \left(\overset{\leftarrow n \text{ fois}}{x, x, \dots, x}, -n_1 x, -n_2 x, \dots, -n_s x \right) \\ \text{avec } n_1, n_2, \dots, n_s \text{ entiers positifs et } d(\underline{\omega}) = n - n_1 - n_2 - \dots - n_s > 1 \end{array} \right.$$

on dit que $\underline{\omega}$ admet x pour terme prépondérant et on écrit $x = x(\underline{\omega})$.

Si $\underline{\omega}$ n'est pas de la forme (10a3), on dit qu'il n'a pas de terme prépondérant et on pose $d(\underline{\omega}) = 0$

Définition 10a3 : (multiindice dégénéré)

Un multiindice ω est dit dégénéré si $\Gamma_{[\omega']} = 0$ pour tous les multiindices ω' équivalents à ω . On dit aussi, dans ce cas, que la classe $\underline{\omega}$ est dégénérée.

Lemme 10a1 : (critère de dégénérescence)

Un multiindice sans ordre $\underline{\omega}$ est dégénéré si et seulement si il est de la forme (10a3) avec $d(\underline{\omega}) \geq 2$. L'entier $d(\underline{\omega})$ est dit degré de dégénérescence de $\underline{\omega}$.

La vérification du lemme est laissée au lecteur. Comme nous le verrons, les $\underline{\omega}$ ont des propriétés très différentes selon que $d(\underline{\omega}) = 0$, $d(\underline{\omega}) = 1$ ou $d(\underline{\omega}) \geq 2$.

Reprenons maintenant la construction des algèbres réduites. Soit comme d'habitude $\Delta_1(1, \mathcal{R})$ l'algèbre de Lie constituée par les dérivations de degré 1 appartenant à $\Delta(1, \mathcal{R})$. Soit \mathcal{f} un élément de \mathcal{G}^1 de la forme (9a5) et soit $A^{\mathcal{f}} = \{A_{\omega}\}$ la famille scalaire associée à \mathcal{f} par (9e5) pour ω simple. Pour ω multiple, définissons A_{ω} comme en (10a2) et désignons par $\mathcal{D}^{\mathcal{f}}$ l'ensemble des combinaisons linéaires de dérivations de la forme

$$(10a4) \quad \Delta_{\omega', \omega^2}^{\mathcal{f}} = A_{\omega^2} \Gamma_{[\omega^2]} \Delta_{[\omega']} - A_{\omega'} \Gamma_{[\omega']} \Delta_{[\omega^2]} \quad \text{avec } \|\omega'\| = \|\omega^2\|$$

ou de la forme

$$(10a4bis) \quad \Delta_{[\omega]} \quad \text{avec} \quad A_{\omega} = 0 \quad \text{ou} \quad \Gamma_{[\omega]} = 0.$$

De même, désignons par \mathcal{D} l'ensemble des combinaisons linéaires de dérivations de la forme

$$(10a5) \quad \Delta_{\omega', \omega^2} = \Gamma_{[\omega^2]} \Delta_{[\omega']} - \Gamma_{[\omega']} \Delta_{[\omega^2]} \quad \text{avec } \omega' \wedge \omega^2$$

ou de la forme

$$(10a5bis) \quad \Delta_{[\omega]} \quad \text{avec} \quad \Gamma_{[\omega]} = 0.$$

Lemme 10a2 :

\mathcal{D}^{δ} et \mathcal{D} sont des idéaux de l'algèbre de Lie $\Delta_1(1, \mathcal{R})$

Puisque l'algèbre de Lie $\Delta_1(1, \mathcal{R})$ est engendrée par les Δ_{ω_0} (ω_0 simple) il suffit de démontrer les inclusions :

$$(10a6) \quad [\Delta_{\omega_0}, \mathcal{D}^{\delta}] \subset \mathcal{D}^{\delta} \quad \forall \omega_0 \in \mathcal{R}^*$$

$$(10a7) \quad [\Delta_{\omega_0}, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D} \quad \forall \omega_0 \in \mathcal{R}^*$$

Vérifions par exemple (10a7). Il faut pour cela calculer $\Delta' = [\Delta_{\omega_0}, \Delta]$ dans trois cas différents :

Premier cas : $\Delta = \Delta_{\omega^1, \omega^2}$ avec $\|\omega^1\| = \|\omega^2\| = \omega \neq \omega_0$.

Alors $\Delta' = \frac{1}{\omega - \omega_0} \Delta_{\omega^1 \omega_0, \omega^2 \omega_0} \in \mathcal{D}$.

Deuxième cas : $\Delta = \Delta_{\omega^1, \omega^2}$ avec $\|\omega^1\| = \|\omega^2\| = \omega_0$.

Alors $\Gamma_{[\omega^1 \omega_0]} = \Gamma_{[\omega^2 \omega_0]} = 0$ et $\Delta' = \Gamma_{[\omega^2]} \Delta_{[\omega^1 \omega_0]} - \Gamma_{[\omega^1]} \Delta_{[\omega^2 \omega_0]} \in \mathcal{D}$.

Troisième cas : $\Delta = \Delta_{[\omega]}$ avec $\Gamma_{[\omega]} = 0$.

Alors $\Gamma_{[\omega \omega_0]} = 0$ et $\Delta' = \Delta_{[\omega \omega_0]} \in \mathcal{D}$.

Puisque \mathcal{D}^{δ} et \mathcal{D} sont des idéaux, les parties de $A(1, \mathcal{R})$ formées par les φ qu'annulent respectivement \mathcal{D}^{δ} ou \mathcal{D} , sont des sous-algèbres stables pour l'action des dérivations étrangères.

D'autre part, puisque $[\partial, \Delta_{[\omega]}] = \|\omega\| \Delta_{[\omega]}$ pour tout multiindice ω , il est clair que

$$(10a8) \quad [\partial, \mathcal{D}^{\mathfrak{f}}] \subset \mathcal{D}^{\mathfrak{f}}$$

$$(10a9) \quad [\partial, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D}$$

Comme la composition \circ s'exprime entièrement au moyen de la dérivation naturelle ∂ et d'opérations dans l'algèbre $\mathcal{A}(1, \mathcal{R})$, (10a8) et (10a9) montrent que les parties de $\mathcal{G}(1, \mathcal{R})$ annihilées par $\mathcal{D}^{\mathfrak{f}}$ ou \mathcal{D} sont des sous-groupes.

Enfin, lorsque $\omega^1 \sim \omega^2$, on a bien sûr $A_{\omega^1} = A_{\omega^2}$ et $\Delta_{\omega^1, \omega^2}^{\mathfrak{f}} = A_{\omega^1} \Delta_{\omega^1, \omega^2}$. D'où l'inclusion $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^{\mathfrak{f}}$ et les inclusions inverses pour les sous-algèbres et les sous-groupes correspondants. En résumé :

Proposition 10a1 : (algèbre de résurgence réduite)

Les parties $\mathcal{A}_{\mathfrak{f}}(1, \mathcal{R})$ et $\underline{\mathcal{A}}(1, \mathcal{R})$ de l'algèbre de résurgence $\mathcal{A}(1, \mathcal{R})$ qui sont annihilées respectivement par l'idéal $\mathcal{D}^{\mathfrak{f}}$ ou l'idéal \mathcal{D} , sont des algèbres à composition, stables pour l'action des dérivations (naturelle ou étrangères). Les groupes correspondants sont notés $\mathcal{G}_{\mathfrak{f}}(1, \mathcal{R})$ et $\underline{\mathcal{G}}(1, \mathcal{R})$. $\underline{\mathcal{A}}(1, \mathcal{R})$ contient toutes les $\mathcal{A}_{\mathfrak{f}}(1, \mathcal{R})$. Elle est dite algèbre de résurgence réduite.

Revenons aux solutions des quatre équations fondamentales. D'après (10a1), $\mathcal{D}^{\mathfrak{f}}$ et \mathcal{D} annulent \mathfrak{f}^* . Par suite, ils annulent aussi $\overset{\omega}{\mathfrak{f}}$, $\overset{\omega}{\mathfrak{f}}$ (stabilité par composition) et \mathfrak{f}_* (stabilité par dérivation et inversion). Ceci pourrait d'ailleurs se vérifier directement en calculant, à partir des formules (9e38), (9e39), (9e40), l'effet de $\Delta_{[\omega]}$ sur $\overset{\omega}{\mathfrak{f}}$, $\overset{\omega}{\mathfrak{f}}$, \mathfrak{f}_* .

En résumé :

Proposition 10a2 :

Soit $\mathfrak{f} \in \mathcal{G}^r$ et de la forme (9a5) et soit $\mathcal{A}^{\mathfrak{f}} = \{A_{\omega}\}$ la famille de scalaires que (9e5) associe à \mathfrak{f} . Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}^*, * \mathcal{F}, \mathcal{F}^{\varepsilon} \in \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(1, \mathcal{R}) \subset \underline{\mathcal{G}}(1, \mathcal{R}) \\ \mathcal{F}_* \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(1, \mathcal{R}) \subset \underline{\mathcal{A}}(1, \mathcal{R}) \end{array} \right.$$

Réciproquement, l'algèbre de résurgence $\underline{\mathcal{A}}(1, \mathcal{R})$ est la plus petite sous-algèbre fermée de $\mathcal{A}(1, \mathcal{R})$ qui contienne tous les \mathcal{F}_* quand \mathcal{F} varie. De même, $\underline{\mathcal{G}}(1, \mathcal{R})$ est le plus petit sous-groupe fermé de $\mathcal{G}(1, \mathcal{R})$ qui contienne tous les \mathcal{F}_* (ou tous les \mathcal{F}^* , ou tous les $* \mathcal{F}$).

Le dernier point tient à ce que $\mathcal{A}^{\mathcal{F}}$ parcourt l'ensemble de toutes les familles scalaires lorsque \mathcal{F} varie. Ceci entraîne, comme on le vérifie aisément, que $\mathcal{D} = \bigcap_{\mathcal{F}} \mathcal{D}^{\mathcal{F}}$.

C'est l'algèbre réduite $\underline{\mathcal{A}}(1, \mathcal{R})$ qui va nous retenir dans toute la suite du chapitre.

Section 10b : Calculs dans l'algèbre réduite.

Désignons par $\underline{\Delta}(1, \mathcal{R})$ le quotient de l'algèbre $\Delta(1, \mathcal{R})$ par l'idéal \mathcal{D} . Comme les éléments de $\underline{\Delta}(1, \mathcal{R})$ opèrent sur l'algèbre réduite $\underline{\mathcal{A}}(1, \mathcal{R})$, on les appelle dérivations étrangères réduites. Cherchons leur forme générale.

Pour tout multiindice $\underline{\omega}$ sans ordre et non dégénéré, on peut trouver $\underline{\omega}'$ tel que $\underline{\omega}' = \underline{\omega}$ et $\Gamma_{[\underline{\omega}']} \neq 0$. De plus, il est clair que la classe modulo \mathcal{D} du quotient $\Delta_{[\underline{\omega}']} / \Gamma_{[\underline{\omega}]}$ ne dépend pas du choix de $\underline{\omega}'$. Nous la noterons donc $\Delta_{\underline{\omega}}$.

Comme toute dérivation étrangère (de degré 1) est une combinaison linéaire de $\Delta_{[\underline{\omega}]}$, toute dérivation étrangère réduite (de degré 1) est une combinaison linéaire de $\Delta_{\underline{\omega}}$ avec $d(\underline{\omega}) \leq 1$. De plus, $\Delta_{\underline{\omega}^1} \neq \Delta_{\underline{\omega}^2}$ si $\underline{\omega}^1 \neq \underline{\omega}^2$.

Il reste à calculer les crochets des $\Delta_{\underline{\omega}}$. Pour toute paire de multiindices $\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2$ non dégénérés et tels que $\Gamma_{[\underline{\omega}^1]} \neq 0, \Gamma_{[\underline{\omega}^2]} \neq 0, \Gamma_{[\underline{\omega}^1 \underline{\omega}^2]} \neq 0$, formons l'expression :

$$D_{\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2} = \left[\frac{\Delta_{[\underline{\omega}^2]}}{\Gamma_{[\underline{\omega}^2]}}, \frac{\Delta_{[\underline{\omega}^1]}}{\Gamma_{[\underline{\omega}^1]}} \right] - (\|\underline{\omega}^1\| - \|\underline{\omega}^2\|) \frac{\Delta_{[\underline{\omega}^1 \underline{\omega}^2]}}{\Gamma_{[\underline{\omega}^1 \underline{\omega}^2]}}$$

Il se trouve que $D_{\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2} \in \mathcal{D}$. Cela peut se voir soit directement, par un argument combinatoire assez laborieux, soit en observant, à partir de la formule (10a1), que $D_{\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2} \cdot f^* = 0$ pour tout f dans \mathcal{G}^1 et de la forme (9a5) : d'après la partie réciproque de la proposition 10a1, cela signifie que $D_{\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2}$ annule $\underline{A}(1, \mathcal{R})$ et donc appartient à l'idéal \mathcal{D} .

Par suite, pour tous $\underline{\omega}^1$ et $\underline{\omega}^2$ non dégénérés

$$(10b1) \quad [\Delta_{\underline{\omega}^2}, \Delta_{\underline{\omega}^1}] = (\|\underline{\omega}^1\| - \|\underline{\omega}^2\|) \Delta_{\underline{\omega}^1 \underline{\omega}^2}$$

à condition que le produit $\underline{\omega}^1 \underline{\omega}^2$ soit lui-même non dégénéré. Lorsque $\underline{\omega}^1 \underline{\omega}^2$ est dégénéré, $\Delta_{\underline{\omega}^1 \underline{\omega}^2}$ n'est pas défini, mais alors on a nécessairement :

$$x(\underline{\omega}^1) = x(\underline{\omega}^2) = x \quad \text{et} \quad d(\underline{\omega}^1) = d(\underline{\omega}^2) = 1$$

Par suite $\|\underline{\omega}^1\| = \|\underline{\omega}^2\| = x$ et la formule (10b1) donne :

$$(10b1bis) \quad [\Delta_{\underline{\omega}^2}, \Delta_{\underline{\omega}^1}] = 0 \quad (\text{pour } d(\underline{\omega}^1 \underline{\omega}^2) \geq 2)$$

ce qui est bien le résultat correct, ainsi qu'on s'en assure en appliquant l'opérateur $[\Delta_{[\underline{\omega}^2]}, \Delta_{[\underline{\omega}^1]}]$ à f^* , pour un f quelconque.

En résumé :

Proposition 10b1 : (dérivation étrangères réduites)

L'algèbre $\underline{\Delta}(1, \mathcal{R}) = \Delta(1, \mathcal{R})/\mathcal{D}$ des dérivations étrangères réduites est engendrée par les dérivations (de degré 1) :

$$(10b2) \quad \underline{\Delta}_{\underline{\omega}} = \frac{\Delta_{[\underline{\omega}']}}{\Gamma_{[\underline{\omega}']}} \pmod{\mathcal{D}} \quad (\text{avec } \underline{\omega}' = \underline{\omega}, \Gamma_{[\underline{\omega}']} \neq 0)$$

lorsque $\underline{\omega}$ parcourt l'ensemble des multiindices non dégénérés sur \mathcal{R}^* .

Les dérivations $\underline{\Delta}_{\underline{\omega}}$ sont linéairement indépendantes et ont pour crochet :

$$(10b3) \quad [\underline{\Delta}_{\underline{\omega}^1}, \underline{\Delta}_{\underline{\omega}^2}] = (\|\underline{\omega}^1\| - \|\underline{\omega}^2\|) \underline{\Delta}_{\underline{\omega}^1 \underline{\omega}^2}$$

$$(10b4) \quad [\partial, \underline{\Delta}_{\underline{\omega}}] = \|\underline{\omega}\| \underline{\Delta}_{\underline{\omega}}$$

le second membre de (10b3) devant être pris nul en cas de dégénérescence du produit $\underline{\omega}^1 \underline{\omega}^2$

Etudions maintenant les pseudovariables réduites, c'est-à-dire les pseudovariables qu'annule l'idéal \mathcal{D} . Soit $\underline{\omega}$ un multiindice sans ordre et soit $\underline{\omega}! = r_1! \dots r_m!$ sa signature (cf. définition 10a1). Posons alors :

$$(10b5) \quad \sum_{\underline{\omega}_1, \dots, \underline{\omega}_n} = \frac{1}{r_1! \dots r_m!} \sum_{\tau \in \mathcal{G}_n} \omega_{\tau(1)} (\omega_{\tau(1)} + \omega_{\tau(2)}) \dots (\omega_{\tau(1)} + \dots + \omega_{\tau(n-1)}) \sum_{\omega_{\tau(1)}, \dots, \omega_{\tau(n)}}$$

$$(10b6) \quad \sum_{\underline{\omega}_1, \dots, \underline{\omega}_n} \approx = \frac{(-1)^n}{r_1! \dots r_m!} \sum_{\tau \in \mathcal{G}_n} \omega_{\tau(1)} (\omega_{\tau(1)} + \omega_{\tau(2)}) \dots (\omega_{\tau(1)} + \dots + \omega_{\tau(n-1)}) \sum_{\omega_{\tau(1)}, \dots, \omega_{\tau(n)}}$$

Soit en abrégé :

$$(10b5bis) \quad Z^{\underline{\omega}} = \frac{1}{\underline{\omega}!} \sum_{\omega' \sim \omega} \Gamma_{\omega'} Z^{\omega'}$$

$$(10b6bis) \quad \tilde{Z}^{\underline{\omega}} = \frac{(-1)^{n(\underline{\omega})}}{\underline{\omega}!} \sum_{\omega' \sim \omega} \Gamma_{\omega'} Z^{\tilde{\omega}'}$$

Pour un indice simple ω_0 , appliquons la dérivation Δ_{ω_0} aux pseudovariabes $Z^{\underline{\omega}}$ et $\tilde{Z}^{\underline{\omega}}$. Par des arguments combinatoires laissés au lecteur, on trouve :

$$(10b7) \quad \Delta_{\omega_0} Z^{\underline{\omega}} = \begin{cases} \sum_{\omega_0 \omega' \dots \omega^{\Delta} = \underline{\omega}} \frac{(\omega_0)^{\Delta}}{\Delta!} Z^{\omega'} \dots Z^{\omega^{\Delta}} & \text{si } \underline{\omega}_0 \text{ divise } \underline{\omega} \text{ strictement} \\ 1 & \text{si } \underline{\omega}_0 = \underline{\omega} \\ 0 & \text{si } \underline{\omega}_0 \text{ ne divise pas } \underline{\omega} \end{cases}$$

$$(10b8) \quad \Delta_{\omega_0} \tilde{Z}^{\underline{\omega}} = \begin{cases} (\omega_0 - \|\omega\|) \tilde{Z}^{\underline{\omega}/\omega_0} & \text{si } \underline{\omega}_0 \text{ divise } \underline{\omega} \text{ strictement} \\ -1 & \text{si } \underline{\omega}_0 = \underline{\omega} \\ 0 & \text{si } \underline{\omega}_0 \text{ ne divise pas } \underline{\omega} \end{cases}$$

En itérant ceci, il vient, pour tout multiindice ω° :

$$(10b9) \quad \Delta_{[\omega^{\circ}]} Z^{\underline{\omega}} = \begin{cases} \Gamma_{[\omega^{\circ}]} \sum_{\omega^{\circ} \omega' \dots \omega^{\Delta} = \underline{\omega}} \frac{\|\omega^{\circ}\|^{\Delta}}{\Delta!} Z^{\omega'} \dots Z^{\omega^{\Delta}} & \text{si } \underline{\omega}^{\circ} \text{ divise } \underline{\omega} \text{ strictement} \\ \Gamma_{[\omega^{\circ}]} & \text{si } \underline{\omega}^{\circ} = \underline{\omega} \\ 0 & \text{si } \underline{\omega}^{\circ} \text{ ne divise pas } \underline{\omega} \end{cases}$$

$$(10b10) \quad \Delta_{[\omega^{\circ}]} \tilde{Z}^{\underline{\omega}} = \begin{cases} \Gamma_{[\omega^{\circ}]} (\|\omega^{\circ}\| - \|\omega\|) \tilde{Z}^{\underline{\omega}/\omega^{\circ}} & \text{si } \underline{\omega}^{\circ} \text{ divise } \underline{\omega} \text{ strictement} \\ -\Gamma_{[\omega^{\circ}]} & \text{si } \underline{\omega}^{\circ} = \underline{\omega} \\ 0 & \text{si } \underline{\omega}^{\circ} \text{ ne divise pas } \underline{\omega} \end{cases}$$

La présence du facteur $\Gamma_{[\omega^0]}$ aux membres de droite dans (10b9) et (10b10) montre que les pseudovariables Z^ω et \tilde{Z}^ω sont annulées par l'idéal \mathcal{D} . Ce sont donc des pseudovariables réduites. Leur comportement sous l'action des dérivations étrangères réduites $\Delta_{\underline{\omega}^0}$ se lit immédiatement sur (10b9) et (10b10). En particulier, pour tout $\underline{\omega}$ non dégénéré :

$$(10b11) \quad \Delta_{\underline{\omega}} Z^\omega = 1 \quad , \quad \Delta_{\underline{\omega}} \tilde{Z}^\omega = -1$$

Compte tenu des propriétés des $\Delta_{\underline{\omega}}$, il résulte de (10b11) que les familles $\{Z^\omega; d(\underline{\omega}) \leq 1\}$ et $\{\tilde{Z}^\omega; d(\underline{\omega}) \leq 1\}$ engendrent chacune l'algèbre $\underline{\Delta}'(1, \mathcal{R})$ des pseudovariables réduites.

Réciproquement, toute pseudovariable réduite s'exprime d'une manière unique par rapport aux Z^ω ou aux \tilde{Z}^ω , avec $\underline{\omega}$ non dégénéré. Pour le voir, il suffit de montrer que chaque identité polynomiale :

$$\sum \alpha_{\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2, \dots, \underline{\omega}^d} Z^{\omega^1} Z^{\omega^2} \dots Z^{\omega^d} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum \beta_{\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2, \dots, \underline{\omega}^d} \tilde{Z}^{\omega^1} \tilde{Z}^{\omega^2} \dots \tilde{Z}^{\omega^d}$$

avec $d(\underline{\omega}^d) \leq 1$, entraîne la nullité de tous les coefficients $\alpha_{(\dots)}$ et $\beta_{(\dots)}$. On commence par les termes pour lesquels $n(\underline{\omega}^1 \underline{\omega}^2 \dots \underline{\omega}^d)$ est maximal et on applique l'opérateur $\Delta_{\underline{\omega}^1} \Delta_{\underline{\omega}^2} \dots \Delta_{\underline{\omega}^d}$ à l'identité en question. Il vient alors :

$$\alpha_{\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2, \dots, \underline{\omega}^d} = 0 \quad \text{et} \quad (-1)^d \beta_{\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2, \dots, \underline{\omega}^d} = 0$$

Puis on montre de proche en proche la nullité des autres coefficients.

Rappelons enfin qu'on avait dans $\Delta(1, \mathcal{R})$ et $\Delta'(1, \mathcal{R})$ deux involutions duales, à savoir :

$$\Delta_{\underline{\omega}} \rightarrow (-1)^{n(\underline{\omega})} \Delta_{\tilde{\omega}} \quad \text{et} \quad Z^\omega \rightarrow (-1)^{n(\underline{\omega})} Z^{\tilde{\omega}}$$

D'après (10b2) et (10b5) - (10b6), il leur correspond les involutions

réduites suivantes :

$$\Delta_{\underline{\omega}^1} \dots \Delta_{\underline{\omega}^d} \rightarrow (-1)^d \Delta_{\underline{\omega}^d} \dots \Delta_{\underline{\omega}^1} \quad \text{et} \quad Z^{\underline{\omega}} \rightarrow \tilde{Z}^{\underline{\omega}}$$

Les pseudo-variables $Z^{\underline{\omega}}$ et $\tilde{Z}^{\underline{\omega}}$ se déduisent les unes des autres au moyen des formules involutives :

$$(10b12) \quad \underline{\omega}! \tilde{Z}^{\underline{\omega}} = \sum_{\substack{\underline{\omega}' \dots \underline{\omega}^d = \underline{\omega}}} (-1)^d \|\underline{\omega}\|^{d-1} \underline{\omega}'! \dots \underline{\omega}^d! Z^{\underline{\omega}'} \dots Z^{\underline{\omega}^d}$$

$$(10b13) \quad \underline{\omega}! Z^{\underline{\omega}} = \sum_{\substack{\underline{\omega}' \dots \underline{\omega}^d = \underline{\omega}}} (-1)^d \|\underline{\omega}\|^{d-1} \underline{\omega}'! \dots \underline{\omega}^d! \tilde{Z}^{\underline{\omega}'} \dots \tilde{Z}^{\underline{\omega}^d}$$

où les sommes doivent être étendues à toutes les factorisations possibles de $\underline{\omega}$, y compris celles qui comportent des facteurs $\underline{\omega}^i$ dégénérés. Par exemple, si $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont distincts deux à deux, on aura :

$$\tilde{Z}^{\omega_1} = -Z^{\omega_1}$$

$$\tilde{Z}^{\omega_1, \omega_2} = -Z^{\omega_1, \omega_2} + (\omega_1 + \omega_2) Z^{\omega_1} Z^{\omega_2}$$

$$\tilde{Z}^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} = \begin{cases} -Z^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} + (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) (Z^{\omega_1} Z^{\omega_2, \omega_3} + Z^{\omega_2} Z^{\omega_3, \omega_1} + Z^{\omega_3} Z^{\omega_1, \omega_2}) \\ -(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2 Z^{\omega_1} Z^{\omega_2} Z^{\omega_3} \end{cases}$$

Les formules (10b12) et (10b13), laissées en exercice, peuvent être établies à partir de (10b9) et (10b10).

En résumé, on peut énoncer :

Proposition 10b2 : (pseudovariabes réduites)

Pour tout $\underline{\omega}$, dégénéré ou non, les pseudovariabes $Z^{\underline{\omega}}$ et $\tilde{Z}^{\underline{\omega}}$ définies par (10b5) et (10b6) sont réduites, c'est-à-dire annulées par l'idéal \mathcal{D} .

Réciproquement, les familles $\{Z^{\underline{\omega}}\}$ et $\{\tilde{Z}^{\underline{\omega}}\}$ engendrent chacune l'algèbre $\underline{\Delta}'(1, \mathcal{Q})$ des pseudovariabes réduites. Cette génération

est même libre si on se limite aux $\underline{\omega}$ non dégénérés.

Les $Z^{\underline{\omega}}$ et les $\tilde{Z}^{\underline{\omega}}$ se correspondent dans l'involution fondamentale des pseudovariables. On passe des unes aux autres au moyen des formules involutives (10b12) et (10b13).

Enfin, le comportement des pseudovariables réduites sous l'action des dérivations étrangères réduites ou de la dérivation naturelle est résumé par les formules suivantes, où $\underline{\omega}^{\circ}$ est non dégénéré et $\underline{\omega}$ quelconque :

$$(10b14) \quad \Delta_{\underline{\omega}^{\circ}} Z^{\underline{\omega}} = \begin{cases} \sum_{\substack{\underline{\omega}^{\circ} \underline{\omega}^1 \dots \underline{\omega}^d = \underline{\omega} \\ d!}} \frac{\|\underline{\omega}^{\circ}\|^d}{d!} Z^{\underline{\omega}^1} \dots Z^{\underline{\omega}^d} & \text{si } \underline{\omega}^{\circ} \text{ divise } \underline{\omega} \text{ strictement} \\ 1 & \text{si } \underline{\omega}^{\circ} = \underline{\omega} \\ 0 & \text{si } \underline{\omega}^{\circ} \text{ ne divise pas } \underline{\omega} \end{cases}$$

$$(10b15) \quad \Delta_{\underline{\omega}^{\circ}} \tilde{Z}^{\underline{\omega}} = \begin{cases} (\|\underline{\omega}^{\circ}\| - \|\underline{\omega}\|) \tilde{Z}^{\underline{\omega}/\underline{\omega}^{\circ}} & \text{si } \underline{\omega}^{\circ} \text{ divise } \underline{\omega} \text{ strictement} \\ -1 & \text{si } \underline{\omega}^{\circ} = \underline{\omega} \\ 0 & \text{si } \underline{\omega}^{\circ} \text{ ne divise pas } \underline{\omega} \end{cases}$$

$$(10b16) \quad \partial Z^{\underline{\omega}} = -\|\underline{\omega}\| Z^{\underline{\omega}}$$

$$(10b17) \quad \partial \tilde{Z}^{\underline{\omega}} = -\|\underline{\omega}\| \tilde{Z}^{\underline{\omega}}$$

Remarque : Les pseudovariables réduites $Z^{\underline{\omega}}$ et $\tilde{Z}^{\underline{\omega}}$ ont l'inconvénient d'être "discontinues" par rapport aux indices, du fait de la signature $\underline{\omega}!$ en dénominateur dans (10b5 bis) et (10b6 bis). On pourrait certes supprimer $\underline{\omega}!$ dans les définitions (10b5 bis) et (10b6 bis) et, par voie de conséquence, dans les formules (10b12) et (10b13), mais cela compliquerait considérablement la plupart des autres formules, en particulier toutes celles qui font intervenir les dérivations étrangères. On n'éviterait pas davantage ces complications en modifiant la définition des $\Delta_{\underline{\omega}}$. En fait, on ne peut pas se débarrasser des signatures.

Concluons cette section par de brèves indications sur les représentations des pseudovariabiles réduites.

Groupe des représentations réduites.

Toute représentation $\mathcal{M} : Z^\omega \rightarrow \mathcal{M}^\omega$ des pseudovariabiles dans l'algèbre $A(1, \mathcal{R})$ induit une représentation $\underline{\mathcal{M}} : Z^\omega \rightarrow \mathcal{M}^\omega$ ($\underline{Z}^\omega \rightarrow \underline{\mathcal{M}}^\omega$) des pseudovariabiles réduites dans l'algèbre $A(1, \mathcal{R})$

La représentation réduite $\underline{\mathcal{M}}$ peut être caractérisée, au choix, par l'un ou l'autre des deux moules suivants :

$$(10b18) \quad \mathcal{M}^\omega = \sum_{\omega'=\omega} \Gamma_{\omega'} \mathcal{M}^{\omega'} \quad , \quad \tilde{\mathcal{M}}^\omega = \sum_{\omega'=\omega} \Gamma_{\omega'} \mathcal{M}^{\omega'}$$

Mais, alors que le moule initial \mathcal{M}^ω était astreint à la condition de symétrie (4b16) le moule réduit \mathcal{M}^ω (resp. $\tilde{\mathcal{M}}^\omega$) n'est plus astreint à aucune condition pour les multiindices ω non dégénérés. Pour les ω dégénérés, il est astreint aux relations (10c9) (resp. (10c10)) ci-après.

Le produit des représentations $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_3$ induit un produit $\underline{\mathcal{M}}_1 \times \underline{\mathcal{M}}_2 = \underline{\mathcal{M}}_3$ des représentations réduites. En termes de moules, cela donne des relations très différentes de la relation non réduite :

$$(10b19) \quad \mathcal{M}_3^\omega = \sum_{\omega^1 \omega^2 = \omega} \mathcal{M}^{\omega^1} \mathcal{M}^{\omega^2} \quad (*)$$

On trouve en effet, cette fois-ci :

$$(10b20) \quad \mathcal{M}_3^\omega = \mathcal{M}_2^\omega + \sum_{\omega^0 \omega^1 \dots \omega^d = \omega} \|\omega^0\|^d \mathcal{M}_1^{\omega^0} \mathcal{M}_2^{\omega^1} \dots \mathcal{M}_2^{\omega^d} \quad (*)$$

(*) Voir la première note à la page suivante.

$$(10b21) \quad \tilde{M}_3^\omega = \tilde{M}_1^\omega + \sum_{\substack{\omega^0 \omega^1 \dots \omega^d = \omega}} \|\omega^0\|^\Delta \tilde{M}_2^{\omega^0} \tilde{M}_1^{\omega^1} \dots \tilde{M}_1^{\omega^d} \quad (*)$$

où les \sum sont étendus à toutes les factorisations distinctes de ω , y compris à celles qui comportent des facteurs ω^i dégénérés. On prouve (10b20) et (10b21) à partir de (10b19) et en utilisant la symétrie des moules M_1^ω et M_2^ω

Réduction des représentations canoniques.

La représentation canonique ∂ -stable \mathcal{U} et la représentation canonique Δ -stable \mathcal{V} , qui se correspondent selon les relations (6d2) et (6d3), induisent deux représentations canoniques réduites, $\underline{\mathcal{U}}$ et $\underline{\mathcal{V}}$, qui se correspondent selon les relations :

$$(10b22) \quad \underline{\mathcal{U}}^\omega = \sum_{\substack{\omega^1 \dots \omega^d = \omega}} \mathcal{V}^{\|\omega^1\|, \dots, \|\omega^d\|} \underline{\mathcal{U}}^{\omega^1} \dots \underline{\mathcal{U}}^{\omega^d}$$

$$(10b23) \quad \underline{\mathcal{V}}^\omega = \sum_{\substack{\omega^1 \dots \omega^d = \omega}} \mathcal{U}^{\|\omega^1\|, \dots, \|\omega^d\|} \underline{\mathcal{V}}^{\omega^1} \dots \underline{\mathcal{V}}^{\omega^d}$$

avec les mêmes conventions de sommation qu'en (10b20) et (10b21). Toutefois du fait du caractère alterné des moules scalaires $\underline{\mathcal{U}}^\omega, \underline{\mathcal{V}}^\omega$, on vérifie (**)

que :

(*) Cette formule est relative au modèle formel $\underline{A}(1, \mathcal{R}) \subset A(1, \mathcal{R})$. Dans le modèle additif $\underline{A}(1, \mathcal{R}) \subset A(1, \mathcal{R})$, il faudrait remplacer les produits par des convolutions. Bien sûr, pour $\omega^0 = \omega$ et $\Delta = 0$, on obtient le terme M_1^ω dans (10b20) et le terme \tilde{M}_2^ω dans (10b21)

(**) En utilisant le fait que, si $L(x_1, \dots, x_n)$ est une algèbre de Lie libre et $E(x_1, \dots, x_n)$ son algèbre enveloppante, l'application $\sum \alpha x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_q} \rightarrow \sum \alpha [x_{i_1} [x_{i_2} \dots [x_{i_q}]]$ de $E(x_1, \dots, x_n)$ dans $L(x_1, \dots, x_n)$ se réduit, pour les éléments de $L(x_1, \dots, x_n)$ qui sont homogènes de degré q , à une homothétée de rapport q .

$$(10b24) \quad U^{\underline{\omega}} = \sum_{\underline{\omega}' = \underline{\omega}} \Gamma_{\underline{\omega}'} U^{\omega'} = \frac{1}{n(\underline{\omega})} \sum_{\underline{\omega}' = \underline{\omega}} \Gamma_{[\underline{\omega}']} U^{\omega'}$$

$$(10b25) \quad V^{\underline{\omega}} = \sum_{\underline{\omega}' = \underline{\omega}} \Gamma_{\underline{\omega}'} V^{\omega'} = \frac{1}{n(\underline{\omega})} \sum_{\underline{\omega}' = \underline{\omega}} \Gamma_{[\underline{\omega}']} V^{\omega'}$$

si bien que $U^{\underline{\omega}} = V^{\underline{\omega}} = 0$ pour tout $\underline{\omega}$ dégénéré. On peut par conséquent se limiter dans (10b22) et (10b23) aux décompositions de $\underline{\omega}$ en produits de facteurs $\underline{\omega}^j$ non dégénérés.

Enfin, les moules $\tilde{U}^{\underline{\omega}}, \tilde{V}^{\underline{\omega}}$ donnent lieu à des formules identiques, moyennant deux moules scalaires $\tilde{U}^{\underline{\omega}}, \tilde{V}^{\underline{\omega}}$ qui vérifient $\tilde{U}^{\underline{\omega}} = -U^{\underline{\omega}}, \tilde{V}^{\underline{\omega}} = -V^{\underline{\omega}}$, toujours à cause du caractère alterné de $U^{\underline{\omega}}, V^{\underline{\omega}}$.

Section 10c : Formules de Taylor et décompositions canoniques.

Soit à résoudre un système différentiel étranger pur, c'est-à-dire un système d'équations à inconnue dans l'algèbre de résurgence $\underline{A}(1, \Omega)$ et ne faisant intervenir que les dérivation étrangères $\Delta_{\underline{\omega}}$, mais pas la dérivation naturelle. On étudiera un tel système à la section 13b. La méthode générale consiste à résoudre le système différentiel d'abord dans l'algèbre $\underline{\Delta}'(1, \Omega)$ des pseudovariabes réduites. On obtient habituellement la solution, par identification successive des coefficients, sous forme d'une série entière $S = S(Z^{\underline{\omega}})$ de toutes les $Z^{\underline{\omega}}$, d'indices $\underline{\omega}$ dégénérés ou non. Si on choisit ensuite une représentation Δ -stable $W : Z^{\underline{\omega}} \rightarrow W^{\underline{\omega}}$ des pseudovariabes réduites, la substitution $S(Z^{\underline{\omega}}) \rightarrow S(W^{\underline{\omega}})$ donne, sous réserve de convergence, une solution du système différentiel dans $\underline{A}(1, \Omega)$. Mais, pour discuter commodément la convergence de $S(W^{\underline{\omega}})$ en fonction de W , il est nécessaire d'exprimer $S(W^{\underline{\omega}})$ sous forme d'une série $\bar{S}(W^{\underline{\omega}})$ fonction des seuls $W^{\underline{\omega}}$ à indices non dégénérés, car ces $W^{\underline{\omega}}$ là sont indépendants. Or ceci équivaut à calculer la décomposition canonique de $S = S(Z^{\underline{\omega}})$ dans l'algèbre $\underline{\Delta}'(1, \Omega)$.

Cherchons donc à exprimer toute pseudovariabes réduite Z en fonction des seuls $Z^{\underline{\omega}}$ ou des seuls $\tilde{Z}^{\underline{\omega}}$ pour lesquels $\underline{\omega}$ n'est pas dégénéré (i.e. $d(\underline{\omega}) \leq 1$). Théoriquement, la solution est fournie par les "formules de Taylor" :

$$(10c1) \quad Z = \sum_{d(\underline{\omega}^i) \leq 1} Z^{\underline{\omega}^1} \dots Z^{\underline{\omega}^d} (D_{\langle \underline{\omega}^1, \dots, \underline{\omega}^d \rangle}, Z)$$

$$(10c2) \quad Z = \sum_{d(\underline{\omega}^i) \leq 1} \tilde{Z}^{\underline{\omega}^1} \dots \tilde{Z}^{\underline{\omega}^d} (\tilde{D}_{\langle \underline{\omega}^1, \dots, \underline{\omega}^d \rangle}, Z)$$

où le crochet (\dots, \dots) dénote la contraction de $\underline{\Delta}(1, \Omega)$ avec son dual $\underline{\Delta}'(1, \Omega)$ et où $\{D_{\langle \underline{\omega}^1, \dots, \underline{\omega}^d \rangle}\}$ et $\{\tilde{D}_{\langle \underline{\omega}^1, \dots, \underline{\omega}^d \rangle}\}$

désignent les bases de $\underline{\Delta}(1, \Omega)$ respectivement orthogonales aux familles $\{Z^{\omega^1} \dots Z^{\omega^d}\}$ et $\{\tilde{Z}^{\omega^1} \dots \tilde{Z}^{\omega^d}\}$ de $\underline{\Delta}'(1, \Omega)$. Tout revient donc à calculer les $D_{\langle \cdot \rangle}$ et les $\tilde{D}_{\langle \cdot \rangle}$.

Décomposons pour cela l'espace $\underline{\Delta}(1, \Omega)$ en somme directe $\underline{\Delta}_1 \oplus \underline{\Delta}_2$, où $\underline{\Delta}_1$ désigne le sous-espace des dérivations de degré 1 et $\underline{\Delta}_2$ le sous-espace engendré par les produits symétrisés d'au moins deux dérivations de degré 1. Le dual $\underline{\Delta}'(1, \Omega)$ se décompose alors en somme directe $\underline{\Delta}'_1 \oplus \underline{\Delta}'_2$. $\underline{\Delta}'_1$ est le sous-espace engendré par les produits d'au moins deux pseudovariables. Quant au sous-espace $\underline{\Delta}'_2$, il n'a pas de caractérisation plus simple que sa définition, qui le stipule orthogonal à $\underline{\Delta}_2$.

Cela étant, désignons par ∇ la projection de $\underline{\Delta}'(1, \Omega)$ sur $\underline{\Delta}'_2$ parallèlement à $\underline{\Delta}'_1$. ∇ s'identifie à un élément de $\underline{\Delta}'(1, \Omega) \otimes \underline{\Delta}_1 \subset \underline{\Delta}'(1, \Omega) \otimes \underline{\Delta}(1, \Omega)$ et cet élément est nécessairement de la forme :

$$(10c3) \quad \nabla = \sum \varphi^{\omega^1, \dots, \omega^d} Z^{\omega^1} \dots Z^{\omega^d} \otimes \Delta_{\underline{\omega}^1 \dots \underline{\omega}^d}$$

$$\begin{cases} d(\omega^i) \leq 1 \\ d(\omega^1 \dots \omega^d) \leq 1 \end{cases}$$

pour des scalaires φ° appropriés.

Désignons par e^∇ l'exponentielle de ∇ calculée sans effectuer aucune contraction, c'est-à-dire en prenant pour produit dans

$\underline{\Delta}'(1, \Omega) \otimes \underline{\Delta}(1, \Omega)$ la loi interne :

$$(\sum \alpha_i Z_i \otimes \Delta^i) \cdot (\sum \beta_j Z_j \otimes \Delta^j) = \sum \alpha_i \beta_j (Z_i Z_j) \otimes (\Delta^i \Delta^j)$$

A partir de la définition de ∇ on vérifie que l'application $Z \rightarrow (e^\nabla, Z)$ n'est autre que l'identité de $\underline{\Delta}'(1, \Omega)$. Autrement

dit, e^∇ s'identifie au tenseur unitaire de $\underline{\Delta}'(1, \Omega) \otimes \underline{\Delta}(1, \Omega)$ et l'on a :

$$e^\nabla = \sum_{d(\underline{\omega}^i) \leq 1} z^{\underline{\omega}^1} \dots z^{\underline{\omega}^d} \otimes D_{\langle \underline{\omega}^1, \dots, \underline{\omega}^d \rangle} = \sum_{d(\underline{\omega}^i) \leq 1} \tilde{z}^{\underline{\omega}^1} \dots \tilde{z}^{\underline{\omega}^d} \otimes \tilde{D}_{\langle \underline{\omega}^1, \dots, \underline{\omega}^d \rangle}$$

Il en résulte après coup, pour ∇ , une expression alternative à (10c3), à savoir :

$$(10c4) \quad \nabla = - \sum_{\begin{cases} d(\underline{\omega}^i) \leq 1 \\ d(\underline{\omega}^1 \dots \underline{\omega}^d) \leq 1 \end{cases}} (-1)^d \varphi^{\underline{\omega}^1, \dots, \underline{\omega}^d} \tilde{z}^{\underline{\omega}^1} \dots \tilde{z}^{\underline{\omega}^d} \otimes \Delta_{\underline{\omega}^1 \dots \underline{\omega}^d}$$

Il s'agit donc de calculer ∇ , c'est-à-dire en fin de compte les coefficients φ° . Pour se faire, introduisons une base commode de $\underline{\Delta}(1, \Omega)$. A toute suite $\underline{\omega} = (\underline{\omega}^1, \dots, \underline{\omega}^d)$ de multiindices $\underline{\omega}^i$ non dégénérés et susceptibles d'être regroupés en paquets de n_1, n_2, \dots, n_m multi-indices identiques, associons un produit (symétrisé et pondéré) de dérivations de degré 1 :

$$(10c5) \quad \Delta_{\langle \underline{\omega} \rangle} = \Delta_{\langle \underline{\omega}^1, \dots, \underline{\omega}^d \rangle} = \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_m!} \sum_{\tau \in \mathcal{G}_d} \Delta_{\underline{\omega}^{\tau(1)}} \dots \Delta_{\underline{\omega}^{\tau(d)}}$$

Cette définition est la bonne, car c'est celle qui donne lieu aux relations de Leibniz les plus simples :

$$\Delta_{\langle \underline{\omega} \rangle} \rightarrow \sigma(\Delta_{\langle \underline{\omega} \rangle}) = \sum_{\underline{\omega}' \underline{\omega}'' = \underline{\omega}} \Delta_{\langle \underline{\omega}' \rangle} \otimes \Delta_{\langle \underline{\omega}'' \rangle}$$

La famille $\{\Delta_{\langle \underline{\omega}^1, \dots, \underline{\omega}^d \rangle}\}$ est une base de l'espace $\underline{\Delta}(1, \Omega)$. Elle n'est orthogonale ni à la famille $\{z^{\underline{\omega}^1} \dots z^{\underline{\omega}^d}\}$ ni à la famille $\{\tilde{z}^{\underline{\omega}^1} \dots \tilde{z}^{\underline{\omega}^d}\}$. Toutefois, les crochets de dualité sont faciles à calculer. En effet, à partir de (10b14) et (10b15) on vérifie que :

$$(10c6) \left(\Delta_{\underline{\omega}', \dots, \underline{\omega}^d}, Z^{\underline{\omega}} \right) = (-1)^d \left(\Delta_{\underline{\omega}', \dots, \underline{\omega}^d}, \tilde{Z}^{\underline{\omega}} \right) = \begin{cases} \mathcal{C}^{\underline{\omega}', \dots, \underline{\omega}^d} & \text{si } \underline{\omega} = \underline{\omega}' \dots \underline{\omega}^d \\ 0 & \text{si } \underline{\omega} \neq \underline{\omega}' \dots \underline{\omega}^d \end{cases}$$

avec des scalaires $\mathcal{C}^{\underline{\omega}}$ donnés par :

$$(10c7) \mathcal{C}^{\underline{\omega}} = \mathcal{C}^{\underline{\omega}', \dots, \underline{\omega}^d} = \frac{1}{n_1! \dots n_m!} \sum_{\tau \in \mathcal{G}_d} \frac{1}{d!} (\|\underline{\omega}^{\tau(1)}\|) (\|\underline{\omega}^{\tau(2)}\| + \|\underline{\omega}^{\tau(3)}\|) \dots (\|\underline{\omega}^{\tau(d)}\| + \dots + \|\underline{\omega}^{\tau(d-1)}\|)$$

Quant aux crochets généraux $\left(\Delta_{\underline{\omega}', \dots, \underline{\omega}^d}, Z^{\underline{\omega}'} \dots Z^{\underline{\omega}^d} \right)$, ou ils sont nuls, ou ils se factorisent aisément en produits de coefficients $\mathcal{C}^{\underline{\omega}}$. De tout ceci, on déduit facilement l'expression des $\mathcal{Y}^{\underline{\omega}}$ en fonction des $\mathcal{C}^{\underline{\omega}}$.

Il vient :

$$(10c8) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Y}^{\underline{\omega}'} = \mathcal{C}^{\underline{\omega}'} = 1; \\ \mathcal{Y}^{\underline{\omega}', \underline{\omega}^2} + \mathcal{C}^{\underline{\omega}', \underline{\omega}^2} = 0; \\ \mathcal{Y}^{\underline{\omega}', \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3} \mathcal{C}^{\underline{\omega}', \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3} + \sum' \mathcal{Y}^{\underline{\omega}', \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3} \mathcal{C}^{\underline{\omega}', \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3} + \mathcal{Y}^{\underline{\omega}', \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3} \mathcal{C}^{\underline{\omega}', \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3} = 0; \\ \mathcal{Y}^{\underline{\omega}', \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3, \underline{\omega}^4} \mathcal{C}^{\underline{\omega}', \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3, \underline{\omega}^4} + \sum' \mathcal{Y}^{\underline{\omega}', \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3, \underline{\omega}^4} \mathcal{C}^{\underline{\omega}', \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3, \underline{\omega}^4} + \sum' \mathcal{Y}^{\underline{\omega}', \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3, \underline{\omega}^4} \mathcal{C}^{\underline{\omega}', \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3, \underline{\omega}^4} \\ + \sum' \mathcal{Y}^{\underline{\omega}', \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3, \underline{\omega}^4} \mathcal{C}^{\underline{\omega}', \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3, \underline{\omega}^4} + \mathcal{Y}^{\underline{\omega}', \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3, \underline{\omega}^4} \mathcal{C}^{\underline{\omega}', \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3, \underline{\omega}^4} = 0; \text{ etc ...} \end{array} \right.$$

Dans les \sum' , il faut bien sûr omettre tous les termes qui comportent en indices des produits partiels $\underline{\omega}^{i_1} \dots \underline{\omega}^{i_m}$ dégénérés.

Calculons les premiers coefficients $\mathcal{C}^{\underline{\omega}}$ et $\mathcal{Y}^{\underline{\omega}}$ dans le cas le plus simple, c'est-à-dire pour des $\underline{\omega}^i$ différents deux à deux et de produits partiels non dégénérés. Les $\mathcal{C}^{\underline{\omega}}$ et $\mathcal{Y}^{\underline{\omega}}$ sont alors des fonctions symétriques des $\|\underline{\omega}^i\| = x_i$. Explicitement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{\underline{\omega}^1} = 1 ; \quad \varphi_{\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2} = \frac{1}{2} (x_1 + x_2) ; \quad \varphi_{\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3} = \frac{1}{3} \sum x_i^2 + \frac{1}{3} \sum x_i x_2 ; \\ \varphi_{\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3, \underline{\omega}^4} = \frac{1}{4} \sum x_i^3 + \frac{1}{3} \sum x_i^2 x_2 + \frac{1}{4} \sum x_i x_2 x_3 ; \quad \text{etc...} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{\underline{\omega}^1} = 1 ; \quad \varphi_{\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2} = -\frac{1}{2} (x_1 + x_2) ; \quad \varphi_{\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3} = \frac{1}{6} \sum x_i^2 + \frac{2}{3} \sum x_i x_2 ; \\ \varphi_{\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3, \underline{\omega}^4} = -\frac{1}{3} \sum x_i^2 x_2 - \frac{3}{2} \sum x_i x_2 x_3 ; \quad \text{etc...} \end{array} \right.$$

Résumons-nous :

Proposition 10c1 : (décompositions canoniques des pseudovariables réduites)

Toute pseudovariable réduite Z admet deux décompositions canoniques à savoir (10c1) et (10c2). Ces décompositions font intervenir des opérateurs

$D_{\langle \underline{\omega}^1, \dots, \underline{\omega}^d \rangle}$ et $\tilde{D}_{\langle \underline{\omega}^1, \dots, \underline{\omega}^d \rangle}$ qui se correspondent dans l'involution fondamentale de $\Delta(1, \mathbb{R})$. Il suffit donc de connaître les premiers.

Ceux-ci s'expriment par les formules :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{\langle \underline{\omega}^1 \rangle} = \varphi_{\underline{\omega}^1} \Delta_{\langle \underline{\omega}^1 \rangle} ; \\ D_{\langle \underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2 \rangle} = \varphi_{\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2} \Delta_{\langle \underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2 \rangle} + \varphi_{\underline{\omega}^1} \varphi_{\underline{\omega}^2} \Delta_{\langle \underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2 \rangle} ; \\ D_{\langle \underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3 \rangle} = \varphi_{\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3} \Delta_{\langle \underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3 \rangle} + \sum \varphi_{\underline{\omega}^1} \varphi_{\underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3} \Delta_{\langle \underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3 \rangle} + \varphi_{\underline{\omega}^1} \varphi_{\underline{\omega}^2} \varphi_{\underline{\omega}^3} \Delta_{\langle \underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3 \rangle} ; \\ \text{etc...} \end{array} \right.$$

où apparaissent les produits symétrisés $\Delta_{\langle \underline{\omega}^1, \dots, \underline{\omega}^d \rangle}$ définis en (10c6) et les scalaires $\varphi_{\underline{\omega}^1, \dots, \underline{\omega}^d}$ définis par (10c7) et (10c8) quand le produit $\underline{\omega}^1 \dots \underline{\omega}^d$ n'est pas dégénéré et par $\varphi_{\underline{\omega}^1, \dots, \underline{\omega}^d} = 0$ quand il est dégénéré.

Contrairement aux dérivations $\Delta_{\underline{\omega}}$, les pseudovariables $Z^{\underline{\omega}}$ et $\tilde{Z}^{\underline{\omega}}$ restent définies même pour $\underline{\omega}$ dégénéré. Simplement, dans ce cas,

elles sont décomposables. Or, comme nous l'avons signalé, ces pseudovariabiles à indice dégénéré interviennent, au même titre que les autres, dans la plupart des questions de calcul différentiel étranger et il est essentiel de savoir les décomposer.

Proposition 10c2 : (décomposition canonique des Z^ω et \tilde{Z}^ω pour ω dégénéré)

Soit ω un multiindice dégénéré, de degré de dégénérescence $d = d(\omega)$ et de terme prépondérant $x = x(\omega)$. Alors la pseudovariabiles réduite Z^ω (resp \tilde{Z}^ω) s'exprime comme combinaison linéaire finie de produits de d facteurs Z^{ω^i} avec ω^i non dégénéré. D'une façon explicite :

$$(10c9) \quad Z^\omega = x^{d-1} (d-1)! \sum \frac{(Z^{\omega^1})^{d_1}}{(d_1)!} \dots \frac{(Z^{\omega^s})^{d_s}}{(d_s)!}$$

$$(10c10) \quad \tilde{Z}^\omega = x^{d-1} (d-1)! \sum \frac{(\tilde{Z}^{\omega^1})^{d_1}}{(d_1)!} \dots \frac{(\tilde{Z}^{\omega^s})^{d_s}}{(d_s)!}$$

les \sum devant s'étendre à toutes les factorisations de ω de la forme $(\omega^1)^{d_1} \dots (\omega^s)^{d_s} = \omega$ avec $\omega^i \neq \omega^j$, $x(\omega^i) = x$, $d(\omega^i) = 1$ et par suite $d_1 + \dots + d_s = d$.

(10c9) et (10c10) résultent des "formules de Taylor" (10c1) et (10c2). Raisonons par exemple sur Z^ω , avec $d(\omega) = d \geq 2$. On commence par montrer que la décomposition canonique de Z^ω ne peut faire intervenir que des produits de d facteurs Z^{ω^i} . On montre ensuite que pour toute factorisation $\omega = \omega^1 \dots \omega^d$ on a nécessairement :

$$(10c11) \quad x(\omega^i) = x(\omega) = x ; \quad d(\omega^i) = 1 ; \quad \|\omega^i\| = x$$

Il ne reste plus qu'à contracter les $D_{\langle \underline{\omega}', \dots, \underline{\omega}^d \rangle}$ correspondants avec $Z^{\underline{\omega}}$. C'est très facile, car dans le cas particulier où l'on se trouve, $D_{\langle \underline{\omega}', \dots, \underline{\omega}^d \rangle}$ se réduit au seul terme $\Delta_{\langle \underline{\omega}', \dots, \underline{\omega}^d \rangle}$ puisque, du fait de (10c11), tous les produits partiels des facteurs $\underline{\omega}', \dots, \underline{\omega}^d$ sont dégénérés.

Finalement, dans la décomposition de $Z^{\underline{\omega}}$, le coefficient de $Z^{\underline{\omega}'} \dots Z^{\underline{\omega}^d}$ vaut :

$$(\Delta_{\langle \underline{\omega}', \dots, \underline{\omega}^d \rangle}, Z^{\underline{\omega}}) = \mathcal{C}^{\underline{\omega}', \dots, \underline{\omega}^d} = \frac{d!}{d_1! \dots d_s!} \cdot \frac{x^{d-1}}{d}$$

où d_1, \dots, d_s désignent les nombres de termes identiques dans la suite $\underline{\omega}', \dots, \underline{\omega}^d$.

Illustrons ceci sur un exemple. Prenons $\Omega = Z$ et

$\underline{\omega} = (1, 1, 1, 1, -1, -1)$. Le multiindice $\underline{\omega}$ admet exactement 9 décompositions distinctes en produits $\underline{\omega}' \dots \underline{\omega}^d$ de facteurs non dégénérés. Sur ce nombre, il n'y a que deux décompositions binaires ($\Delta = 2$), à savoir :

$$\underline{\omega} = (\underline{1, 1, 1, -1, -1}) \quad (1) \quad \text{et} \quad \underline{\omega} = (\underline{1, 1, -1}) (\underline{1, 1, -1})$$

On a donc, en vertu de (10c9), la décomposition canonique :

$$(10c12) \quad Z^{\underline{1, 1, 1, 1, -1, -1}} = Z^{\underline{1, 1, 1, -1, -1}} Z^1 + \frac{1}{2} Z^{\underline{1, 1, -1}} Z^{\underline{1, 1, -1}}$$

Vérifions ceci. D'après (10b5) :

$$Z^{\underline{1, 1, 1, 1, -1, -1}} = 72 Z^{\underline{1, 1, 1, 1, -1, -1}} + 36 Z^{\underline{1, 1, 1, -1, -1, -1}} + 12 Z^{\underline{1, 1, -1, 1, 1, -1}} + 12 Z^{\underline{1, 1, 1, -1, -1, 1}} + 4 Z^{\underline{1, 1, -1, 1, -1, 1}}$$

$$Z^{\underline{1, 1, 1, -1, -1}} = 12 Z^{\underline{1, 1, 1, -1, -1}} + 4 Z^{\underline{1, 1, -1, 1, -1}}$$

$$Z^{\underline{1, 1, -1}} = 2 Z^{\underline{1, 1, -1}}$$

$$Z^1 = Z^1$$

A partir de là, en appliquant la loi de multiplication (4a2), on trouve :

$$Z^{\underline{1,1,1,-1,-1}} Z^{\underline{1}} = 48 Z^{\underline{1,1,1,1,-1,-1}} + 24 Z^{\underline{1,1,1,-1,1,-1}} + 8 Z^{\underline{1,1,-1,1,1,-1}} \\ + 12 Z^{\underline{1,1,1,-1,-1,1}} + 4 Z^{\underline{1,1,-1,1,1,-1}}$$

$$\frac{1}{2} Z^{\underline{1,1,-1}} Z^{\underline{1,1,-1}} = 24 Z^{\underline{1,1,1,1,-1,-1}} + 12 Z^{\underline{1,1,1,-1,1,-1}} + 4 Z^{\underline{1,1,-1,1,1,-1}}$$

Ces résultats confirment bien (12c12). On peut aussi contrôler directement

qu'aucun des produits écartés (par exemple $Z^{\underline{1}} Z^{\underline{1}} Z^{\underline{1,1,1,-1,-1}}$ ou

$Z^{\underline{1}} Z^{\underline{1}} Z^{\underline{1,-1}} Z^{\underline{1,-1}}$ n'entre dans la décomposition canonique de

$Z^{\underline{1,1,1,1,-1,-1}}$. Il suffit pour cela de vérifier que

$$\left(D_{\langle \underline{1}, \underline{1}, \underline{1,1,-1,-1} \rangle}, Z^{\underline{1,1,1,1,-1,-1}} \right) = \left(D_{\langle \underline{1}, \underline{1}, \underline{1,-1}, \underline{1,-1} \rangle}, Z^{\underline{1,1,1,1,-1,-1}} \right) = 0$$

ce qui est aisé à partir de (10c6) et (10c7).

Section 10d : Décomposition canonique de $\langle \mathcal{J}^* \rangle$ et $\langle {}^* \mathcal{J} \rangle$.

Revenons au point de départ de ce chapitre, c'est-à-dire aux solutions des quatre équations fondamentales. Les formes restreintes de ces solutions ont été calculées à la proposition 9e2. Moyennant l'introduction des pseudovariables réduites, elles revêtent une forme encore plus simple.

Par exemple, les formes restreintes de \mathcal{J}^* et ${}^* \mathcal{J}$ s'écrivent :

$$(10d1) \quad \langle \mathcal{J}^* \rangle = I - \sum_{\underline{\omega}} A_{\underline{\omega}} Z^{\underline{\omega}}$$

$$(10d2) \quad \langle {}^* \mathcal{J} \rangle = I - \sum_{\underline{\omega}} A_{\underline{\omega}} \tilde{Z}^{\underline{\omega}}$$

avec bien sûr la convention : $A_{\underline{\omega}_1, \dots, \omega_n} = A_{\omega_1} \dots A_{\omega_n}$

Toutefois, ces expressions font intervenir indifféremment les $\underline{\omega}$ dégénérés ou non dégénérés. Elles ont donc l'inconvénient de comporter des pseudovariabes qui ne sont pas indépendantes. Pour obtenir les décompositions canoniques de $\langle f^* \rangle$ et $\langle {}^* f \rangle$, il faut appliquer les formules (10c9) et (10c10). On aboutit alors aux expressions suivantes :

$$(10d3) \quad \langle f^* \rangle = I - \sum_{d(\underline{\omega})=0} A_{\underline{\omega}} Z^{\underline{\omega}} + \sum_{x \in \Omega^*} \frac{1}{x} \log \left(1 - x \sum_{\substack{x(\underline{\omega})=x \\ d(\underline{\omega})=1}} A_{\underline{\omega}} Z^{\underline{\omega}} \right)$$

$$(10d4) \quad \langle {}^* f \rangle = I - \sum_{d(\underline{\omega})=0} A_{\underline{\omega}} \tilde{Z}^{\underline{\omega}} + \sum_{x \in \Omega^*} \frac{1}{x} \log \left(1 - x \sum_{\substack{x(\underline{\omega})=x \\ d(\underline{\omega})=1}} A_{\underline{\omega}} \tilde{Z}^{\underline{\omega}} \right)$$

Ces formules assez inattendues appellent plusieurs remarques.

D'abord, elles montrent que $\langle f^* \rangle$ et $\langle {}^* f \rangle$ sont conjugués dans l'involution fondamentale des pseudovariabes — ce qui d'ailleurs était déjà apparent sur les formules (10d1) et (10d2). Or il se trouve que $\langle f^* \rangle$ et $\langle {}^* f \rangle$ sont en même temps deux éléments inverses du groupe réduit $\underline{G}(1, \Omega)$. Bien entendu, pour l'élément générique de $\underline{G}(1, \Omega)$, l'inverse et le conjugué sont habituellement distincts.

Ensuite, on note le rôle très différent que jouent les $Z^{\underline{\omega}}$ et les $\tilde{Z}^{\underline{\omega}}$ selon que $d(\underline{\omega})$ vaut 0 ou 1. Dans le premier cas, les pseudovariabes interviennent linéairement, groupées dans le bloc $X_0 = \sum A_{\underline{\omega}} Z^{\underline{\omega}}$ (avec $d(\underline{\omega}) = 0$) ou dans le bloc conjugué \tilde{X}_0 . Dans le second cas, elles interviennent par le biais des logarithmes des blocs $X_x = \sum A_{\underline{\omega}} Z^{\underline{\omega}}$ (avec $x(\underline{\omega}) = x, d(\underline{\omega}) = 1$) ou des blocs conjugués \tilde{X}_x , qui regroupent tous les multiindices de même terme prépondérant.

Enfin, $\langle f^* \rangle$ et $\langle {}^* f \rangle$, considérés comme séries formelles de pseudovariabes indépendantes, ont des rayons de convergence finis — en ce sens que, si l'on annule toutes les pseudovariabes sauf un nombre fini,

la série obtenue a un multirayon de convergence fini par rapport aux variables qui restent. Ce fait nous servira pour la synthèse harmonique dans les groupes G^t .

On trouvera en exercice (cf. exercice (10d1)) des indications sur la réduction de $\langle \mathcal{P}_* \rangle$ de $\langle \mathcal{P}^w \rangle$ ainsi que sur les propriétés des blocs X_0 et X_z .

Section 10e : Les algèbres réduites $\underline{A}(\mu, \Omega)$.

Examinons brièvement ce qui se passe dans le cas général, c'est-à-dire lorsqu'on itère une \mathcal{P} de paramètres μ, α, ρ quelconques. On a vu à la section 9f que, pour des valeurs données de μ et α , les algèbres de pseudovariabiles à considérer étaient toutes isomorphes entre elles. Il suffit donc d'étudier la structure réduite dans le cas $\rho = 0$, c'est-à-dire sur les algèbres $\underline{A}(\mu, \Omega)$.

Soit une telle algèbre $\underline{A}(\mu, \Omega)$ pour $\mu \geq 2$. Notons comme d'habitude $\underline{\Delta}(\mu, \Omega)$ sa bigèbre de dérivations étrangères et $\underline{\Delta}'(\mu, \Omega)$ son algèbre de pseudovariabiles. Tout multiindice $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, avec $\eta_i \in \Omega_n$, possède une projection notée $\dot{\eta} = (\dot{\eta}_1, \dots, \dot{\eta}_n)$, avec $\dot{\eta}_i \in \Omega^*$. Si deux multiindices η^1 et η^2 ne diffèrent que par l'ordre de leur termes, on écrit $\eta^1 \sim \eta^2$ et on note $\underline{\eta}^1$ ou $\underline{\eta}^2$ le multiindice sans ordre qui leur correspond.

En itérant l'équation

$$(10e1) \quad \Delta_{\eta} \mathcal{P}^* = -A_{\eta} e^{-\dot{\eta}(\mathcal{P}^* - I)} \quad (\eta \text{ indice simple})$$

on trouve :

$$(10e2) \quad \Delta_{[\eta]} \mathcal{P}^* = -A_{\eta} \Gamma_{[\dot{\eta}]} e^{-\|\dot{\eta}\|(\mathcal{P}^* - I)} \quad (\eta \text{ multiindice})$$

ce qui montre que f^* est annihilée par les opérateurs du type

$$(10e3) \quad \Delta_{\eta', \eta^2} = \Gamma_{[\dot{\eta}^2]} \Delta_{[\dot{\eta}']} - \Gamma_{[\dot{\eta}']} \Delta_{[\dot{\eta}^2]} \quad \text{avec } \eta' \sim \eta^2$$

et par les opérateurs du type

$$(10e3 \text{ bis}) \quad \Delta_{\eta} \quad \text{avec} \quad \Gamma_{[\dot{\eta}]} = 0.$$

On vérifie que les combinaisons linéaires de ces opérateurs constituent un idéal \mathcal{D}_ρ de l'algèbre $\Delta(\rho, \Omega)$ et que $[\partial, \mathcal{D}_\rho] \subset \mathcal{D}_\rho$. La partie $\underline{A}(\rho, \Omega)$ de $A(\rho, \Omega)$ annihilée par \mathcal{D}_ρ est donc une sous-algèbre, dite algèbre réduite (à laquelle appartient f_*) et la partie $\underline{G}(\rho, \Omega)$ de $G(\rho, \Omega)$ annihilée par \mathcal{D}_ρ est un sous-groupe, dit groupe réduit (auquel appartiennent $f^*, *f, \tilde{f}$).

La bigèbre $\underline{\Delta}(\rho, \Omega) = \Delta(\rho, \Omega) / \mathcal{D}_\rho$ des dérivations étrangères réduites est engendrée par les dérivations $\Delta_{\underline{\eta}} = \Delta_{[\dot{\eta}]} / \Gamma_{[\dot{\eta}]}$, lesquelles sont définies pour tout multiindice $\underline{\eta}$ sans ordre et non dégénéré (c'est-à-dire de projection $\dot{\eta}$ non dégénérée). On a les crochets de Lie :

$$\begin{cases} [\Delta_{\underline{\eta}^2}, \Delta_{\underline{\eta}'}] = (\|\dot{\eta}'\| - \|\dot{\eta}^2\|) \Delta_{\underline{\eta}'\eta^2} \\ [\partial, \Delta_{\underline{\eta}}] = \|\dot{\eta}\| \Delta_{\underline{\eta}} \end{cases}$$

L'algèbre $\underline{\Delta}'(\rho, \Omega)$ des pseudovariables réduites, qui s'identifie à la partie de $\Delta'(\rho, \Omega)$ annihilée par \mathcal{D}_ρ , est engendrée par les pseudovariables

$$Z^{\underline{\eta}} = \frac{1}{\dot{\eta}!} \sum_{\underline{\eta}' = \underline{\eta}} \Gamma_{\dot{\eta}'} Z^{\underline{\eta}'}$$

ou par les pseudovariables conjuguées

$$\tilde{Z}^{\underline{\eta}} = \frac{(-1)^{n(\dot{\eta})}}{\dot{\eta}!} \sum_{\underline{\eta}' = \underline{\eta}} \Gamma_{\dot{\eta}'} Z^{\tilde{\eta}'}$$

Les $Z^{\underline{\eta}}$ (resp. $\tilde{Z}^{\underline{\eta}}$) affectées de multiindices $\underline{\eta}$ non dégénérés sont indépendantes. Celles qui sont affectées de $\underline{\eta}$ dégénérés admettent des décompositions canoniques analogues à (10c9) et (10c10), mais il faut prendre garde de distinguer les différents multiindices de projection identique. Ainsi, alors qu'on avait dans $\underline{\Delta}(1, \Omega)$:

$$Z^{\omega_1, \omega_1, \omega_1, \omega_1, \omega_2, \omega_2} = \frac{x}{2} Z^{\omega_1, \omega_1, \omega_2} Z^{\omega_1, \omega_1, \omega_2} + x Z^{\omega_1, \omega_1, \omega_1, \omega_2} Z^{\omega_1, \omega_2}$$

lorsque $\omega_1 = -\omega_2 = x$, on aura dans $\underline{\Delta}(n, \Omega)$:

$$Z^{\eta_1, \eta_1, \eta_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3} = x Z^{\eta_1, \eta_1, \eta_2} Z^{\eta_1, \eta_1, \eta_3} + x Z^{\eta_1, \eta_1, \eta_1, \eta_2} Z^{\eta_1, \eta_3} + x Z^{\eta_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3} Z^{\eta_1, \eta_2}$$

lorsque $\eta_1 = -\eta_2 = -\eta_3 = x$ et $\eta_2 \neq \eta_3$. Les formules (10b14) - (10b15) elles aussi restent valables à condition de remplacer les $\|\underline{\omega}\|$ par des $\|\underline{\eta}\|$.

Arrivés à ce point, nous pouvons facilement décomposer les formes restreintes de f^* et *f dans le cas général. On part de l'expression

$$(10e4) \quad \langle f^* \rangle = I - \sum A_{\underline{\eta}} Z^{\underline{\eta}}$$

étendue à tous les multiindices $\underline{\eta}$ et on aboutit à la forme canonique :

$$(10e5) \quad \langle f^* \rangle = I - \sum_{d(\underline{\eta})=0} A_{\underline{\eta}} Z^{\underline{\eta}} + \sum_{x \in \Omega^*} \frac{1}{x} \log \left(1 - x \sum_{\substack{\alpha(\underline{\eta})=x \\ d(\underline{\eta})=1}} A_{\underline{\eta}} Z^{\underline{\eta}} \right)$$

La décomposition canonique de $\langle {}^*f \rangle$ s'en déduit par l'involution $Z^{\underline{\eta}} \rightarrow \tilde{Z}^{\underline{\eta}}$.

Section 10f : Résumé du chapitre 10.

Ce chapitre étudie les algèbres de résurgence réduites $\underline{A}(r, \Omega)$, c'est-à-dire les plus petites sous-algèbres des $A(r, \Omega)$ qui soient fermées et qui contiennent tous les éléments étrangers intervenant en théorie de l'itération fractionnaire.

La bigèbre $\underline{\Delta}(r, \Omega)$ des dérivations étrangères réduites est engendrée par des dérivations Δ_{η} définies pour chaque multiindice η sans ordre et non dégénéré. Les Δ_{η} sont linéairement indépendantes mais satisfont aux relations $[\Delta_{\eta^1}, \Delta_{\eta^2}] = (\|\eta^1\| - \|\eta^2\|) \Delta_{\eta^1 \eta^2}$

L'algèbre $\underline{\Delta}'(r, \Omega)$ des pseudovariabiles réduites est engendrée par des pseudovariabiles Z^{η} (resp. \tilde{Z}^{η}) définies pour η quelconque. L'action des Δ_{η} sur les Z^{η} (resp. \tilde{Z}^{η}) ne ressemble pas à l'action des Δ_{η} sur les Z^{η} . Autre différence importante : contrairement aux pseudovariabiles ordinaires Z^{η} , les pseudovariabiles réduites Z^{η} (resp. \tilde{Z}^{η}) qui sont affectées de multiindices non dégénérés, sont algébriquement indépendantes. Ceci permet de décomposer canoniquement toute pseudovariabiele réduite.

A titre d'exemple et en vue de la synthèse harmonique sur les groupes G^t , on calcule les décompositions canoniques de $\langle f^* \rangle$ et $\langle *f \rangle$. On constate que les pseudovariabiles Z^{η} et \tilde{Z}^{η} se rangent en une infinité de blocs, regroupant chacun tous les multiindices de même "terme prépondérant".

Chapitre 11 : Le phénomène de l'enrichissement algébrique et les théorèmes d'indépendance.

Section 11a : Enrichissement algébrique des extensions.

Tout au long de ce chapitre, G désignera un groupe plein (*) inclus dans G^r et A désignera l'algèbre associée à G . Rappelons que $G = I + A$, que G agit dans A et que G, A sont tous deux constitués par des séries formelles aux coefficients vérifiant une condition de croissance à l'infini.

Grâce aux quatre opérations (addition, multiplication, dérivation naturelle, composition) dont nous disposons sur les séries formelles, nous pouvons envisager sur G ou A toutes sortes d'équations, qui souvent n'admettent que des solutions étrangères, c'est-à-dire non \mathbb{K} -croissantes.

Il est donc naturel d'envisager les extensions des groupes ou algèbres pleins (*) obtenues par adjonction de ces éléments étrangers. Si par exemple E désigne une collection (finie ou infinie) d'équations E_j à données dans G , mais à solutions f_j étrangères à G , on notera $E G$ le plus petit sous-groupe de G^∞ qui contient G et les f_j . En mettant à contribution l'addition, la multiplication (éventuellement la dérivation) on obtient de même des extensions $E A$ de l'algèbre A . Enfin, en jouant simultanément des quatre opérations, on obtient des extensions $E(A, G)$ de l'algèbre à composition (A, G) .

Nous n'envisagerons pour simplifier que trois types d'équations E_j :

(E^1) : les équations d'itération, c'est-à-dire les équations (9a6) qui aux f de G associent les itérées $f^{(n)}$ d'ordre quelconque.

(E^2) : les équations de conjugaison, qui aux couples f, g de G tels que $\iota(f) = \iota(g)$, $\alpha(f) = \alpha(g)$, $p(f) = p(g)$ associent les h tels que

(*) voir définitions 8a1 et 8a2.

$f \circ h = h \circ g$. Par exemple, f^* et *g sont solutions des équations de conjugaison (9a7) et (9a8) et $h = {}^*f \circ g^*$ est solution de l'équation $f \circ h = h \circ g$.

(E³) : les équations aux générateurs, c'est-à-dire les équations (9a9) qui aux éléments f de G associent les générateurs infinitésimaux f_* (aussi appelés : logarithmes itératifs).

Il s'avère que, lorsque les données f, g etc... des équations E_j de E appartiennent à plusieurs classes formelles $G_{r,\alpha,\rho}$ de G , les problèmes relatifs aux extensions EG ou EA se "séparent" en autant de problèmes relatifs à chaque classe formelle (*). Nous ne perdons donc rien à faire une seconde hypothèse simplificatrice et à supposer toutes les données f, g etc... dans la classe $G_{1,1,0}$, c'est-à-dire de la forme (9a5). Moyennant quoi, les solutions étrangères $\tilde{f}, h, f^*, {}^*g$ (resp. f_*)... ont pour transformées de Borel des fonctions résurgentes appartenant au groupe $G(1, \Omega)$ (resp. à l'algèbre $A(1, \Omega)$) avec $\Omega = 2\pi i \mathbb{Z}$. D'où un plongement $EG \subset G(1, \Omega)$ et $EA \subset A(1, \Omega)$. D'où aussi une topologie naturelle (**) sur les extensions EG et EA et la possibilité d'envisager les extensions complétées \overline{EG} et \overline{EA} .

Enrichissement algébrique.

Soit $E^1 G$ le groupe G enrichi des itérées; soit $E^2 G$ ce même groupe enrichi des "conjugantes"; soit $E^3 A$ l'algèbre A enrichie des logarithmes itératifs; soient enfin $\overline{E^1 G}, \overline{E^2 G}, \overline{E^3 A}$ les complétés

(*) Voir exercice 11a1.

(**) Cf. sections 8c et 8e. C'est la plus faible des topologies qui assurent la convergence sur tout compact de $\mathcal{R} = \mathbb{C} \div \Omega$ et qui préservent le type de croissance hérité de la condition \mathbb{K} .

de ces extensions.

Si $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{\text{r}}$, on vérifie facilement, à partir des chapitres 9 et 10, que :

$$(11a1) \quad E^1 \mathcal{G} \subset E^2 \mathcal{G} \subset \overline{E^1 \mathcal{G}} = \overline{E^2 \mathcal{G}} = \underline{\mathcal{G}}(1, \mathcal{N}) \subset \mathcal{G}(1, \mathcal{N})$$

$$(11a2) \quad E^3 \mathcal{A} \subset \overline{E^3 \mathcal{A}} = \underline{\mathcal{A}}(1, \mathcal{N}) \subset \mathcal{A}(1, \mathcal{N})$$

où toutes les inclusions sont strictes.

Pour \mathcal{G} plus petit que \mathcal{G}^{r} et relatif à une condition de croissance \mathcal{K} , on a encore la même chose, à condition de remplacer $\underline{\mathcal{A}}(1, \mathcal{N})$ et $\underline{\mathcal{G}}(1, \mathcal{N})$ par les sous-algèbres et les sous-groupes de résurgence correspondant à la croissance héritée de \mathcal{K} .

On observe ici un phénomène fort analogue à l'enrichissement de structure qui accompagne le passage du corps \mathbb{Q} ou de l'anneau $\mathbb{C}[x]$ à leurs extensions algébriques. Dans ces deux cas classiques, en effet, chaque extension introduit des automorphismes d'un type nouveau.

De même ici, le passage de l'algèbre \mathcal{A} à l'algèbre $E^3 \mathcal{A}$ introduit une infinité de dérivations continues et linéairement indépendantes, à savoir toutes les dérivations étrangères réduites $\Delta_{\underline{\omega}}$ (avec $\underline{\omega}$ non dégénéré), qui s'ajoutent à ∂ , dérivation naturelle de \mathcal{A} .

Pareillement, le passage du groupe \mathcal{G} au groupe $E^2 \mathcal{G}$ introduit une infinité d'automorphismes continus du type $e^{t \Delta_{\underline{\omega}}}$ (avec $t \in \mathbb{C}$, $\underline{\omega}$ non dégénéré, $\|\underline{\omega}\| = 0$). Ces automorphismes étrangers s'ajoutent aux seuls automorphismes continus que possède \mathcal{G} et qui sont les automorphismes internes (*).

(*) Plus évidemment les automorphismes $f(z) \rightarrow a f(z/a)$ et la conjugaison $f \rightarrow \bar{f}$.

Précisons un peu. D'abord, d'après (10b4), la condition $\|\underline{\omega}\| = 0$ est nécessaire et suffisante pour que $\Delta_{\underline{\omega}}$ commute avec la dérivation naturelle ∂ ou encore, ce qui revient au même, pour que l'opérateur exponentiel $e^{t\Delta_{\underline{\omega}}}$ commute avec la composition des fonctions résurgentes.

Ensuite, pour tout $f \in \mathbb{E}^2\mathbb{G}$, les séries

$$(11a3) \quad f + \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} (\Delta_{\underline{\omega}})^n \cdot f$$

convergent et leur somme est bien dans $\mathbb{E}^2\mathbb{G}$ (sans qu'on ait besoin de passer au complété $\overline{\mathbb{E}^2\mathbb{G}}$). Montrons-le. Puisque tout élément de $\mathbb{E}^2\mathbb{G}$ peut s'écrire comme produit fini d'éléments de \mathbb{G} et de termes de la forme g^* ou $*g$, avec $g \in \mathbb{G}$, il suffit de calculer (11a3) pour $f = g^*$. D'après (10a1) il vient :

$$\Delta_{\underline{\omega}} \cdot g^* = A_{\underline{\omega}} e^{-\|\underline{\omega}\|} (g^* - I) = A_{\underline{\omega}} \quad \text{et} \quad (\Delta_{\underline{\omega}})^2 \cdot g^* = 0$$

et par suite :

$$(10a4) \quad \begin{cases} e^{t\Delta_{\underline{\omega}}} \cdot g^* = \overset{x}{\ell} \circ g^* & ; \quad e^{t\Delta_{\underline{\omega}}} \cdot *g = *g \circ \overset{-x}{\ell} & ; \quad e^{t\Delta_{\underline{\omega}}} \cdot w = w \\ \text{avec } \overset{\pm x}{\ell}(z) = z \pm x & \text{et } x = t A_{\omega_1} \dots A_{\omega_n} \end{cases}$$

Les opérateurs $e^{t\Delta_{\underline{\omega}}}$ définissent donc bien des automorphismes continus de $\mathbb{E}^2\mathbb{G}$.

Remarquons qu'on peut, à partir des théorèmes d'indépendance de la section suivante, démontrer l'existence sur le groupe $\mathbb{E}^2\mathbb{G}$ d'automorphismes non engendrables à partir des $e^{t\Delta_{\underline{\omega}}}$ et des automorphismes internes. C'est le cas, par exemple, des "automorphismes d'échange", auxquels est consacré l'exercice 11a2. Toutefois, ces automorphismes ne sont pas continus pour la topologie naturelle de $\mathbb{E}^2\mathbb{G}$, ni pour aucune autre topologie

raisonnable. Pareillement, on peut construire sur l'algèbre $E^3 A$ des dérivations non engendrables à partir des Δ_ω et de ∂ , mais ces dérivations ne sont pas continues. - On est donc fondé à dire que la structure réduite est la structure naturelle des extensions envisagées.

Remarquons aussi que, d'après (11a4), les automorphismes $e^{t\Delta_\omega}$ laissent $E'G$ ponctuellement invariant. Aussi faut-il, pour mettre en évidence l'enrichissement algébrique de cette extension, passer à l'algèbre associée.

Annihilateurs.

Appelons annihilateur d'une extension tout endomorphisme continu qui envoie cette extension dans l'ensemble original et qui en même temps annule cet ensemble original. Autrement dit, Ann est un annihilateur sur le groupe EG ou sur l'algèbre EA si on a les suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} I & \rightarrow & G & \hookrightarrow & EG & \xrightarrow{\text{Ann}} & G \rightarrow I \\ 0 & \rightarrow & A & \hookrightarrow & EA & \xrightarrow{\text{Ann}} & A \rightarrow 0 \end{array}$$

Les extensions des groupes ou algèbres de croissance se trouvent posséder des annihilateurs. Construisons-les.

Fixons ω dans Ω^* et envisageons les sous-espaces D de $\underline{\Delta}(1, \Omega)$ qui admettent une base (nécessairement unique) de la forme

$$\{1, D_{(1)}, D_{(2)}, D_{(3)}, \dots\}$$

avec, pour tout n :

(11a5) $\text{Supp } D_{(n)} = n\omega$ (i.e. $D_{(n)}$ a son support au dessus de $n\omega$)

(11a6) $\sigma(D_{(n)}) = D_{(n)} \otimes 1 + D_{(n-1)} \otimes D_{(1)} + \dots + D_{(1)} \otimes D_{(n-1)} + 1 \otimes D_{(n)}$

Notons que (11a6) revêt la forme compacte :

$$(11a6 \text{ bis}) \quad \sigma(\mathbb{D}(t)) = \mathbb{D}(t) \otimes \mathbb{D}(t)$$

moyennant l'introduction de la fonction génératrice

$$(11a7) \quad \mathbb{D}(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} e^{-n\omega t} D_{(n)}$$

On construit facilement tous les sous-espaces \mathbb{D} de ce type : en effet, leur fonctions génératrices $\mathbb{D}(t)$ sont de la forme $\exp \Delta(t)$ avec

$$(11a8) \quad \Delta(t) = \sum_{n \geq 1} e^{-n\omega t} \Delta_{(n)}$$

où les $\Delta_{(n)}$ peuvent être n'importe quelle dérivation étrangère réduite, de degré 1 et de support sur ω^n , c'est-à-dire n'importe quelle somme finie de la forme :

$$(11a8 \text{ bis}) \quad \Delta_{(n)} = \sum_i \gamma_{n,i} \Delta_{\underline{\omega}^{n,i}} \quad (\gamma_{n,i} \in \mathbb{C} ; \|\underline{\omega}^{n,i}\| = n\omega)$$

A cause de (11a6), \mathbb{D} est une coalgèbre et son dual \mathbb{D}' est une algèbre engendrée par les puissances entières d'une unique pseudovariable, que nous noterons Z . De plus, à cause de (11a5), nous avons les deux relations duales :

$$(11a9) \quad [\partial, D_{(n)}] = n\omega D_{(n)}$$

$$(11a9 \text{ bis}) \quad \partial Z^n = -n\omega Z^n$$

qui engagent à identifier la pseudovariable Z à la fonction $e^{-\omega z}$ (avec son comportement habituel par rapport à la dérivation et à la composition).

Il résulte de tout ceci que les applications

$$(11a10) \quad f \rightarrow \langle f \rangle_{\mathbb{D}} = z + \sum_{n \geq 1} e^{-n\omega z} v(D_{(n)} f) \quad (*)$$

sont des homomorphismes des groupes

$$E'G \subset E^2G \subset \underline{G}(1, \Omega)$$

dans le groupe (par rapport à la composition) des séries formelles du type

$$g(z) = z + \sum_{n \geq 1} a_n e^{-n\omega z} \quad (a_n \in \mathbb{C})$$

Ce dernier groupe est bien sur isomorphe à G^∞ , comme on le voit en considérant l'application

$$(11a11) \quad g(z) \rightarrow \exp(\omega g(\frac{1}{\omega} \log z))$$

En composant les applications (11a10) et (11a11) on obtient des endomorphismes, que nous noterons $\text{Ann}^{\mathbb{D}}$, des groupes $E'G$ et E^2G dans le groupe G .

Les noyaux de $\text{Ann}^{\mathbb{D}}$ contiennent évidemment G . Pour que $\text{Ann}^{\mathbb{D}}$ soit un annihilateur, il faut aussi que ses images soient incluses dans G . Ceci exige manifestement que les $D_{(n)}$ de \mathbb{D} ne "croissent" pas trop vite.

Dans le cas du groupe minimal G° ou pour des G proches de G° , il existe de nombreux \mathbb{D} qui donnent des annihilateurs $\text{Ann}^{\mathbb{D}}$. Voir à ce sujet la section 12c. On peut par exemple prendre $\mathbb{D}(t)$ de la forme $D_1^{\alpha_1} \dots D_k^{\alpha_k}$ (**)

(*) Rappelons que V est l'unique endomorphisme continu des algèbres de résurgence dans G . Dans le modèle formel, $v(D_{(n)} f)$ est le terme constant de $D_{(n)} f$. Dans le modèle additif, c'est une somme pondérée de résidus de f en points situés au dessus de $n\omega$.

(**) avec $D^\alpha(t) = (1 - e^{-\omega(t+\alpha)} T^{-1}) (1 - e^{-\omega(t+\alpha)} S)^{-1}$ pour ω, S, T définis comme à la section 2a. Voir aussi page 64.

Réciproquement, on montre que tous les annihilateurs sur E^1G ou E^2G sont de la forme $H \circ \text{Ann}^D \circ K$ avec H (resp. K) endomorphisme continu de E^1G ou E^2G (resp. G).

Notons enfin qu'il y a sur les coalgèbres D de la forme (11a5) + (11a6) un produit naturel, non commutatif

$$D^1, D^2 \rightarrow D^1 \times D^2$$

provenant de la multiplication des fonctions génératrices

$$D^1(t), D^2(t) \rightarrow D^1(t) D^2(t)$$

Il n'y a pas de relations simples entre les annihilateurs Ann^{D^1} , Ann^{D^2} et $\text{Ann}^{D^1 \times D^2}$. Toutefois, lorsqu'on les applique à des éléments de la forme f^* ou $*f$, on a les identités :

$$(11a12) \quad \text{Ann}^{D^1 \times D^2} f^* = (\text{Ann}^{D^2} f^*) \circ (\text{Ann}^{D^1} f^*)$$

$$(11a13) \quad \text{Ann}^{D^1 \times D^2} *f = (\text{Ann}^{D^1} *f) \circ (\text{Ann}^{D^2} *f)$$

que l'on démontre à partir des équations de résurgence vérifiées par f^* et $*f$.

On construirait de la même manière les annihilateurs sur l'algèbre E^3/A .

Section 11b : Théorèmes d'indépendance faible.

Les théorèmes en question font intervenir un nombre fini d'éléments étrangers et disent que ces éléments sont indépendants, c'est-à-dire qu'il n'existe entre eux aucune relation autre que les relations de définition et toutes celles qui en découlent par des manipulations élémentaires. Commençons

par deux exemples (*) :

Proposition 11b1 : (Indépendance des itérées fractionnaires)

Toutes les relations vérifiées par les itérées étrangères s'obtiennent en combinant des relations élémentaires de la forme :

$$(11b1) \quad f^{\alpha_1} \circ f^{\alpha_2} \circ \dots \circ f^{\alpha_n} = I \quad \text{avec } f \in \mathbb{G} ; \alpha_i \in \mathbb{C} ; \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$$

$$(11b2) \quad f^{\alpha} \circ h \circ g^{-\alpha} \circ h^{-1} = I \quad \text{avec } f, g, h \in \mathbb{G} ; f \circ h \circ g^{-1} \circ h^{-1} = I$$

Proposition 11b2 : (Indépendance des conjuguantes)

Toutes les relations vérifiées par les conjuguantes étrangères s'obtiennent en combinant des relations élémentaires de la forme :

$$(11b3) \quad f^* \circ {}^*f = I \quad \text{avec } f \in \mathbb{G}$$

$$(11b4) \quad f^* \circ {}^*g = h \quad \text{avec } f, g, h \in \mathbb{G} ; f \circ h \circ g^{-1} \circ h^{-1} = I$$

Corollaire des propositions 11b1 et 11b2 (Unicité des factorisations)

Dans les extensions $\mathbb{E}^1\mathbb{G}$ et $\mathbb{E}^2\mathbb{G}$, la factorisation minimale
 (**) de chaque élément est essentiellement unique (**).

(*) comme à la section précédente, on n'introduit ici que des éléments étrangers issus de $f \in \mathbb{G}$ de la forme (9a), i.e. tels que $\tau(f) = 1, \alpha(f) = 1, \rho(f) = 0$

(**) c'est-à-dire celle qui fait intervenir le plus petit nombre possible de facteurs étrangers $f^{\alpha}, f^*, {}^*f$.

(***) c'est-à-dire unique à un nombre fini de substitutions élémentaires près.

Le corollaire de la proposition 11b1 signifie que, si f est un élément de $E'G$ et si $n = n(f)$ désigne le plus petit entier tel que :

$$(11b5) \quad f = g_0 \circ f_1^{\alpha_1} \circ g_1 \circ f_2^{\alpha_2} \circ g_2 \circ \dots \circ f_n^{\alpha_n} \circ g_n \quad \text{avec} \quad g_i, f_i \in G$$

alors ni les scalaires α_i ni les classes de conjugaison des f_i ne dépendent de la factorisation (*)

Quant à la proposition 11b1 elle-même, elle signifie par exemple que si :

$$f_1, f_2, f_3, g_0, g_1, g_2, g_3 \in G ; f_1^{\alpha_1}, f_2^{\alpha_2}, f_3^{\alpha_3} \notin G ; \alpha(f_1) = \alpha(f_2) = \alpha(f_3) = 1$$

alors l'identité

$$(11b6) \quad g_0 \circ f_1^{\alpha_1} \circ g_1 \circ f_2^{\alpha_2} \circ g_2 \circ f_3^{\alpha_3} \circ g_3 = I$$

n'est possible que dans le cas élémentaire où

$$(11b7) \quad g_1 \circ g_2 = I ; f_1 = g_1 \circ f_2 \circ g_2 = f_3 ; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \in \mathbb{Z}.$$

En particulierisant encore, la proposition 11b1 dit qu'un produit de trois racines cubiques d'itération $f_1^{1/3} \circ f_2^{1/3} \circ f_3^{1/3}$ ne peut appartenir à G

que si chaque racine appartient elle-même à G ou encore si $f_1 = f_2 = f_3$ (sans l'hypothèse $\alpha(f_i) = 1$, il y aurait quelques autres cas d'appartenance à G , mais tous élémentaires).

Montrons par exemple que (11b6) est impossible sauf si f_1, f_2, f_3 sont deux à deux conjuguées dans G (cas élémentaire). Pour cela, prenons la forme

(*) ceci, parce que nous supposons $\alpha(f_i) = 1$. Sinon, α_i ne serait évidemment déterminé qu'à un facteur rationnel près et la classe de f_i dépendrait de ce facteur.

déployée (*) des deux membres de (11b6). Puisque $[\]$ est un homomorphisme, il vient :

$$[g_0] \circ [p_1^{\alpha_1}] \circ [g_1] \circ [p_2^{\alpha_2}] \circ [g_2] \circ [p_3^{\alpha_3}] \circ [g_3] = I$$

soit, compte tenu de (9e48) :

$$(11b8) \quad h_0 \circ \langle p_1^{\alpha_1} \rangle \circ h_1 \circ \langle p_2^{\alpha_2} \rangle \circ h_2 \circ \langle p_3^{\alpha_3} \rangle \circ h_3 = I$$

avec

$$(11b8 \text{ bis}) \quad h_0 = g_0 \circ {}^*p_1; \quad h_1 = p_1^* \circ g_1 \circ {}^*p_2; \quad h_2 = p_2^* \circ g_2 \circ {}^*p_3; \quad h_3 = p_3^* \circ g_3$$

Montrons que les h_i ne sont pas des translations. Pour h_0 et h_3 c'est évident. Quant à h_1 , si c'était une translation $\tilde{e}(z) = z + \alpha$, on aurait, en prenant la forme restreinte (**)

$$(11b9) \quad \langle h_1 \rangle = \langle p_1^* \rangle \circ \langle g_1 \rangle \circ \langle {}^*p_2 \rangle$$

c'est-à-dire

$$(11b10) \quad \tilde{e} = \langle p_1^* \rangle \circ \tilde{e} \circ \langle {}^*p_2 \rangle$$

car, g_1 étant un élément de \mathbb{G} , sa forme restreinte se réduit à une translation de pas $\beta = \alpha(g_1)$ si $\mu(g_1) = 1$ et de pas nul sinon. Mais (11b10) ne serait possible que si p_1 et p_2 étaient conjuguées. Comme nous avons supposé le contraire, h_1 n'est pas une translation, et h_2 non plus, pour la même raison.

(*) Voir définition à la section 4a.

(**) Voir définition à la section 4a.

Ainsi, les facteurs du premier membre de (11b8) sont, alternativement, des séries entières en z^{-1} ou des séries de pseudovariables. Puisque ces dernières se comportent, relativement à la dérivation et à la composition, comme des exponentielles, on perçoit intuitivement l'impossibilité de (11b8). Pour la prouver vraiment, nous allons nous servir du lemme suivant, dont la démonstration est reléguée à l'exercice (1061).

Lemme 11b1 (non miscibilité des puissances et des exponentielles)

Soit $\omega \neq 0$. Dans le groupe (pour la composition) des séries formelles du type :

$$(11b11) \quad z + \sum_{m,n \geq 0} a(m,n) z^{-m} e^{-\omega n z} \quad (*)$$

on ne peut avoir aucune identité de la forme :

$$(11b12) \quad k_0 \circ k_1 \circ k_2 \circ k_3 \circ \dots \circ k_n(z) \equiv z$$

avec

$$(11b13) \quad k_i(z) = z + \sum_{m \geq 0} a_i(m) z^{-m} \quad \text{pour } i \text{ pair}$$

$$(11b14) \quad k_i(z) = z + \sum_{m \geq 0} a_i(m) e^{-\omega m z} \quad \text{pour } i \text{ impair}$$

à moins que les $k_i(z)$ ne soient réduits à des translations $k_i(z) = a_i + z$ pour chaque i pair (ou pour chaque i impair).

(*) La composition de deux séries f, g de la forme (11b11) ne présente aucune difficulté d'interprétation, car dans $f \circ g$ chaque $z^{-m} e^{-\omega n z}$ à un coefficient polynomial par rapport aux coefficients de f et g .

Reprenons maintenant (11b8) en nous limitant à une seule pseudovaria-
ble bien choisie. Cela revient à remplacer la forme restreinte générale $\langle \rangle$
définie à la section 4a, par la forme restreinte particulière $\langle \rangle_{\mathbb{D}}$,
définie en (11a10). Il vient alors :

$$(11b15) \quad h_0 \circ \langle f_1 \rangle_{\mathbb{D}}^{\alpha_1} \circ h_1 \circ \langle f_2 \rangle_{\mathbb{D}}^{\alpha_2} \circ h_2 \circ \langle f_3 \rangle_{\mathbb{D}}^{\alpha_3} \circ h_3 = I$$

Puisque f_1, f_2, f_3 ont été supposées non itérables et non conjuguées
deux à deux, on peut choisir \mathbb{D} de la forme (11a5) + (11a6) et tel que les
 $\langle f_i \rangle_{\mathbb{D}}^{\alpha_i}$ ne soient pas tous réduits à des translations. En appliquant alors
le lemme 11b1, on voit que (11b15) est impossible. C'est donc que, sous nos
hypothèses, (11b6) était impossible. c.q.f.d.

Par l'emploi judicieux des mêmes méthodes (introduction d'une ou
plusieurs pseudovariables bien choisies + recours au lemme 11b1 ou aux versions
de ce lemme qui font intervenir addition, multiplication et dérivation) on
démontre non seulement les propositions 11b1 et 11b2 dans toute leur généralité,
mais aussi les divers théorèmes d'indépendance faible qui font intervenir la
structure d'algèbre, d'algèbre à dérivation, d'algèbre de Lie, d'algèbre à
composition, etc...

Bornons-nous à un dernier exemple :

Proposition 11b3 (Indépendance des générateurs infinitésimaux)

Toutes les relations vérifiées par les générateurs infinitésimaux
étrangers s'obtiennent en combinant des relations élémentaires de la forme

$$(11b16) \quad f_* = n g_* \quad \text{avec } f, g \in \mathbb{G}, \quad f = g^n$$

$$(11b17) \quad f_* \circ h = h' g_* \quad \text{avec } f, g, h \in \mathbb{G}, \quad f \circ h \circ g^{-1} \circ h^{-1} = I$$

Cet énoncé montre que, bien qu'on puisse associer des générateurs infinitésimaux formels aux éléments des groupes $G \subset G'$, ces groupes sont, en un sens précis, ce qu'il y a de plus éloigné d'un groupe de Lie :

Corollaire de la proposition 11b3 (G non de Lie)

Tout groupe de croissance G inclus dans G' est l'exact contraire d'un groupe de Lie en ce sens que, mis à part les cas triviaux, aucune somme $\alpha f_x + \beta g_x$, aucun crochet $[f_x, g_x] = f_x g'_x - f'_x g_x$ ni aucune combinaison finie somme-crochet, aussi compliquée soit-elle, ne peut jamais être de la forme h_x avec $h \in G$.

Section 11c : Théorèmes d'indépendance forte.

Contrairement aux théorèmes d'indépendance faible, les théorèmes d'indépendance forte font intervenir des passages à la limite (relativement à la topologie naturelle des extensions). Ils disent en gros qu'un élément étranger ne peut pas, sauf cas triviaux, être approché indéfiniment au moyen de combinaisons d'éléments étrangers donnés.

Pour simplifier, supposons toujours que les éléments étrangers en question (itérées, conjuguantes, générateurs infinitésimaux) proviennent de f appartenant toutes à la classe formelle $G_{1,1,0}$, c'est-à-dire de f de la forme (9a). Nous aboutirons donc toujours dans le groupe réduit

$\underline{G}(1, \Omega)$ ou dans l'algèbre réduite $\underline{A}(1, \Omega)$. Plus précisément :

$$\left. \begin{array}{l} f, f^*, {}^*f \in G_p(1, \Omega) \subset \underline{G}(1, \Omega) \subset G(1, \Omega) \\ f_x \in A_p(1, \Omega) \subset \underline{A}(1, \Omega) \subset A(1, \Omega) \end{array} \right\} \text{ avec } \Omega = 2\pi i \mathbb{Z}$$

Comme parties de $G(1, \Omega)$ ou $A(1, \Omega)$, le groupe $G_p(1, \Omega)$ et l'algèbre $A_p(1, \Omega)$ ont été définis (voir section 10a) par la condition d'orthogonalité à l'idéal \mathcal{D}^\dagger de l'algèbre de Lie $\Delta_1(1, \Omega)$. Comme

parties de $\underline{G}(1, \mathcal{N})$ et $\underline{A}(1, \mathcal{N})$, ils seront donc caractérisés par la condition d'orthogonalité à l'idéal $\underline{\mathcal{D}}^{\mathfrak{f}} = \mathcal{D}^{\mathfrak{f}} / \mathcal{D}$ de $\underline{\Delta}_1(1, \mathcal{N})$.

A partir de (10a5), (10a5bis) et de la définition des dérivations $\Delta_{\underline{\omega}}$, on voit que l'idéal $\underline{\mathcal{D}}^{\mathfrak{f}}$ est constitué par les combinaisons linéaires de deux sortes d'éléments :

- les générateurs principaux, qui s'écrivent :

$$(11c1) \quad \det \begin{vmatrix} \Delta_{\underline{\omega}^1} & \Delta_{\underline{\omega}^2} \\ A_{\underline{\omega}^1} & A_{\underline{\omega}^2} \end{vmatrix}$$

et qui sont définis pour toute paire $\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2$ de multiindices non dégénérés et de même somme $\|\underline{\omega}^1\| = \|\underline{\omega}^2\|$.

- et les générateurs subsidiaires (*), qui s'écrivent

$$(11c1 \text{ bis}) \quad \Delta_{\underline{\omega}}$$

et qui sont définis pour tout multiindice $\underline{\omega}$ non dégénéré et tel que $A_{\underline{\omega}} = 0$. Bien entendu, $A_{\underline{\omega}} = A_{\omega_1, \dots, \omega_n} = A_{\omega_1} A_{\omega_2} \dots A_{\omega_n}$, les A_{ω_i} désignant les scalaires que (9e) associe à \mathfrak{f} .

Bien que $\bigcap_{\mathfrak{f}} \mathcal{D}^{\mathfrak{f}} = \mathcal{D}$ et par conséquent $\bigcap_{\mathfrak{f}} \underline{\mathcal{D}}^{\mathfrak{f}} = \{0\}$, nous allons voir que les intersections finies d'idéaux $\underline{\mathcal{D}}^{\mathfrak{f}}$ sont quand même assez vastes pour que, prises deux à deux, elles engendrent toute l'algèbre des dérivations réduites.

Lemme 11c1.

Si $f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_n \in \mathcal{G}$ et si aucun des f_i n'est conjugué dans \mathcal{G} à aucun des g_j , alors :

(*) voir la note au bas de la page suivante.

$$(11c2) \quad (\underline{\mathcal{D}}^{\rho_1} \wedge \underline{\mathcal{D}}^{\rho_2} \wedge \dots \wedge \underline{\mathcal{D}}^{\rho_m}) \oplus (\underline{\mathcal{D}}^{\rho_1} \wedge \underline{\mathcal{D}}^{\rho_2} \wedge \dots \wedge \underline{\mathcal{D}}^{\rho_n}) = \underline{\Delta}_1(1, \Omega)$$

Démonstration : A partir de (11c1) et (11c1 bis) on peut décrire l'idéal

$\prod_{i=1}^m \underline{\mathcal{D}}^{\rho_i}$ et voir qu'il est constitué par les combinaisons linéaires de deux sortes d'éléments :

- d'une part, les générateurs principaux, qui s'écrivent

$$(11c3) \quad \det \begin{vmatrix} \Delta_{\underline{\omega}^1} & \Delta_{\underline{\omega}^2} & \dots & \Delta_{\underline{\omega}^{m+1}} \\ A'_{\underline{\omega}^1} & A'_{\underline{\omega}^2} & \dots & A'_{\underline{\omega}^{m+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^m_{\underline{\omega}^1} & A^m_{\underline{\omega}^2} & \dots & A^m_{\underline{\omega}^{m+1}} \end{vmatrix}$$

et qui sont définis pour tout choix de $(n+1)$ multiindices non dégénérés et

de même somme $\|\underline{\omega}^1\| = \|\underline{\omega}^2\| = \dots = \|\underline{\omega}^{m+1}\|$

- d'autre part, les générateurs subsidiaires (*) qui s'écrivent

$$(11c3 \text{ bis}) \quad \det \begin{vmatrix} \Delta_{\underline{\omega}^1} & \Delta_{\underline{\omega}^2} & \dots & \Delta_{\underline{\omega}^{\delta+1}} \\ A^{m_1}_{\underline{\omega}^1} & A^{m_1}_{\underline{\omega}^2} & \dots & A^{m_1}_{\underline{\omega}^{\delta+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{m_\delta}_{\underline{\omega}^1} & A^{m_\delta}_{\underline{\omega}^2} & \dots & A^{m_\delta}_{\underline{\omega}^{\delta+1}} \end{vmatrix}$$

et qui sont définis pour toute sous-suite $\{m_1, m_2, \dots, m_\delta\}$ de

$(1, 2, \dots, m)$ et pour tout choix de multiindices non-dégénérés, de même

somme, et tels que la matrice $\{A^i_{\underline{\omega}^j}\}$, où $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq \delta+1$, et la

matrice $\{A^{m_i}_{\underline{\omega}^j}\}$, où $1 \leq i \leq \delta$, $1 \leq j \leq \delta+1$, soient toutes deux

(*) ainsi nommés parce que, sauf dans le cas où les familles $A^{\rho_i} = \{A^i_{\underline{\omega}}\}$ sont très lacunaires (voir ci-après), on les obtient tous au nombre des générateurs principaux et on peut donc se dispenser de les introduire séparément.

de rang s .

A un facteur scalaire près, les générateurs subsidiaires $\det|\cdot|$ sont bien sûr indépendants du choix de la sous-suite $\{m_i\}$. De plus, il ne faut pas oublier les générateurs subsidiaires qui correspondent à $\lambda = 0$, c'est-à-dire tous les Δ_{ω} tels que $d(\omega) \leq 1$ et $A_{\omega}^1 = A_{\omega}^2 = \dots = A_{\omega}^m = 0$.

On décrit de même l'idéal $\prod_{j=1}^n \underline{\mathcal{D}}^{g_j}$ à partir des scalaires B_{ω}^j associés aux g_j .

Cela étant, puisque $\underline{\Delta}, (1, \Omega)$, comme algèbre de Lie, est engendrée par les Δ_{ω} quand l'indice simple ω parcourt Ω^* , il suffit, pour établir le lemme 11c1, de montrer que chaque Δ_{ω} (ω simple) s'exprime comme combinaison linéaire de générateurs (réguliers ou exceptionnels) de $\prod \underline{\mathcal{D}}^{g_i}$ ou de $\prod \underline{\mathcal{D}}^{g_j}$. Pour cela il faut utiliser la factorisation des A_{ω}^i et des B_{ω}^j en produits $A_{\omega_1}^i \dots A_{\omega_n}^i$ ou $B_{\omega_1}^j \dots B_{\omega_n}^j$ et traiter à part les cas où certaines des familles $A_{\omega}^i = \{A_{\omega}^i\}$ et $B_{\omega}^j = \{B_{\omega}^j\}$ sont lacunaires, c'est-à-dire où A_{ω}^i (resp. B_{ω}^j) est nul sauf pour un nombre fini d'indices $\omega \in \Omega^*$. La discussion des différents cas est assez fastidieuse, mais sans difficulté (Voir l'exercice 11c2)

Proposition 11c1 :

Si $f, g_1, \dots, g_m \in \mathcal{G}$ et si f n'est conjugué à aucun g_j , alors aucune des itérées étrangères de f n'est approximable au moyen d'itérées étrangères des g_j .

Plus généralement :

Proposition 11c2 :

Si $f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_n \in \mathcal{G}$ et si aucun f_i n'est conjugué à aucun g_j , alors aucun élément étranger à \mathcal{G} ne peut être simultanément

approché au moyen des itérées des seuls ρ_i et au moyen des itérées des seuls

g_j .

Plus généralement encore :

Proposition 11c3 :

si EG et $E'G$ désignent deux extensions du groupe G par un nombre fini d'éléments étrangers, alors, pour la topologie naturelle des extensions :

$$\overline{EG} \cap \overline{E'G} = \overline{EG \cap E'G}$$

La même chose vaut pour les extensions de l'algèbre A .

Notons qu'à cause des théorèmes d'indépendance faible (cf. section précédente) $EG \cap E'G$ est l'extension de G par un nombre fini d'éléments étrangers qu'on repère d'une façon élémentaire.

Les trois propositions ci-dessus découlent du lemme 1 vu que, si une suite convergente de fonctions résurgentes est orthogonale à un idéal $\underline{D}^{\rho_1} \cap \underline{D}^{\rho_2} \cap \dots \cap \underline{D}^{\rho_n}$, alors la limite de cette suite lui est aussi orthogonale.

Bien entendu, aucun théorème d'indépendance forte ne découle des théorèmes d'indépendance faible. Mais inversement, les théorèmes forts ne recouvrent qu'une petite partie des théorèmes faibles. Par exemple, l'impossibilité (sauf dans les cas élémentaires) d'une identité du type

$$g_1 \circ \rho_1^{\alpha_1} \circ g_2 \circ \rho_2^{\alpha_2} \circ g_3 \circ \rho_1^{\alpha_1} \circ g_4 \circ \rho_2^{\alpha_2} \circ g_5 = I \quad (\rho_i, g_j \in G)$$

où $\rho_1^{\alpha_1}$ et $\rho_2^{\alpha_2}$ sont imbriqués, résulte des théorèmes faibles, non des forts.

Section 11d : Résumé du chapitre 11.

Ce chapitre étudie les extensions des groupes ou algèbres pleins qu'on obtient par adjonction d'éléments étrangers (itérées, conjuguantes, générateurs infinitésimaux) et, éventuellement, par complétion relativement à la topologie naturelle des extensions. Le fait essentiel à noter est l'enrichissement algébrique qui accompagne toute extension et qui se traduit par l'apparition de dérivations étrangères sur les algèbres ou d'automorphismes étrangers sur les groupes.

La structure algébrique qui coiffe toutes les extensions est la structure réduite, étudiée au chapitre 10. Grâce à elle, on démontre ici les théorèmes d'indépendance faible, qui portent sur des éléments étrangers en nombre fini et qui nient l'existence, entre ces éléments, de relations autres que celles qui découlent élémentairement des relations de définition, ainsi que les théorèmes d'indépendance forte, qui disent la même chose relativement aux suites ou séries infinies.

L'indépendance faible s'étudie essentiellement au moyen de formes déployées bien choisies (on garde la vraie variable et on introduit une pseudo-variable idoine) tandis que l'indépendance forte s'étudie au moyen des formes restreintes (on oublie la vraie variable, mais on introduit la totalité des pseudovariables).

Chapitre 12 : Analyse harmonique sur G° et les groupes apparentés.

Section 12a : Introduction. Fonctions centrales et invariants.

Ce chapitre étudie les fonctions centrales sur les groupes de croissance, c'est-à-dire les applications A de G° dans \mathbb{C} telles que :

$$(12a1) \quad A(\bar{h} \circ f \circ h) = A(f) \quad \forall f, h \in G$$

En fait, on est obligé de considérer aussi des fonctions "presque centrales", c'est-à-dire des A qui vérifient (12a1) lorsque $\mu(h) > \mu(f)$. Pour faire bref, on qualifiera ces fonctions-là d'invariants sur G . Les invariants sont en un sens plus fondamentaux que les fonctions centrales. On passe d'ailleurs facilement des premiers aux seconds.

On cherchera à construire des systèmes d'invariants (ou de fonctions centrales) complets, c'est-à-dire permettant d'énoncer des conditions nécessaires et suffisantes de conjugaison. Si en outre ces systèmes cessent d'être complets dès qu'on supprime un de leurs termes, on les dira libres.

Enfin, puisque G° et chacun des groupes G apparentés possède d'une part une topologie naturelle et d'autre part une structure d'espace analytique de dimension infinie (par le biais de coefficients de Taylor), on se limitera aux invariants (fonctions centrales) qui sont continus ou holomorphes. Plus précisément, on imposera la continuité ou l'holomorphie sur chacune des classes formelles $G_{\mu, \alpha, \rho}$ paramétrées par les trois fonctions centrales élémentaires $\mu(f)$, $\alpha(f)$, $\rho(f)$ définies en (8c1), (8c2), (8c3). Or, il se trouve que $\mu(f)$ est discret mais que, à $\mu(f)$ constant, $\alpha(f)$ et $\rho(f)$ sont holomorphes. Ceci explique qu'on puisse sans peine raccorder holomorphiquement les invariants (fonctions centrales) des $G_{\mu, \alpha, \rho}$ répondant à un même μ , mais pas à des μ différents.

Comme d'habitude, nous étudierons en détail le cas de la classe-type

$G_{1,1,0}$ et nous verrons ensuite ce qui change quand on passe aux autres classes.

Section 12b. Analyse harmonique sur le groupe G^{1-} .

Soit f un élément de G^{1-} de la forme (9a5). On a vu que l'équation (9a8) admettait une solution unique f^* et que celle-ci appartenait à l'algèbre $A(1, \Omega)$. Cela signifie en particulier que la transformée de Borel $f^* = B f^*$ se prolonge à toute la surface $R = \widetilde{\mathbb{C} - \Omega}$ et admet en chaque point de ramification $Q \in \partial^0 R$ une décomposition de la forme :

$$(12b1) \quad f^*(P) = \Psi_Q(P) + \frac{1}{2\pi i} \frac{A_Q}{z-\omega} + \frac{1}{2\pi i} \Psi_Q(P) \log(z-\omega)$$

avec

$$z = P; \omega = Q; \Psi_Q \text{ et } \Psi_Q \text{ régulières en } Q; A_Q = A_Q(f) = \text{scalaire.}$$

Introduisons une conjuguée de f , soit $g = \tilde{h} \circ f \circ h$ avec $h \in G^{1-}$. Ecrivons h sous la forme

$$h = z + c + O(z^{-1}) = \tilde{\ell} \circ h \quad (c \in \mathbb{C}, \tilde{\ell} \text{ et } h \in G^{1-}, \mu(h) \geq 2)$$

Il est clair que l'équation (9a8) relative à g admet pour solution

$$(12b2) \quad g^* = -c + f^* \circ h = \tilde{\ell}^{-c} \circ f^* \circ \tilde{\ell} \circ h$$

Or, vu les propriétés de la transformation de Borel :

$$B(\Psi \circ \tilde{\ell}) = e^{-cz} \cdot B\Psi$$

D'autre part, grâce à la formule (2e3) sur la composition des fonctions résurgentes, on montre que $B(f^* \circ \tilde{e})$ et $B(f^* \circ \tilde{e} \circ h)$ ont mêmes résidus aux points Q . En effet, comme $\mu(h) \geq 2$, on vérifie que chaque opérateur $(R-I)^{*n} * \frac{\partial^n}{n!}$ détruit les pôles simples. Par suite :

$$A_Q(\tilde{h}^{-1} \circ f \circ h) = e^{-c\omega} A_Q(f) \quad \text{avec } \omega = \dot{Q}.$$

Si $\mu(h) \geq 2$ on a $h = \tilde{h}$ et $c=0$ et dans ce cas :

$$A_Q(\tilde{h}^{-1} \circ f \circ h) = A_Q(f)$$

$A_Q(f)$ est donc un invariant, au sens que nous avons donné à ce mot. De plus, lorsque Q est situé au dessus de l'origine de \mathbb{C} , on a $\omega=0$, $e^{-c\omega} = 1$ et alors $A_Q(f)$ est une fonction centrale.

Montrons maintenant que les A_Q constituent un système complet d'invariants quand Q parcourt $\partial^0 \mathbb{R}$. Prenons $f, g \in G^+$ et supposons que $A_Q(g) = e^{-c\omega} A_Q(f)$ pour une certaine constante c . Il s'agit de montrer que f et g sont conjuguées dans G^+ . Posons $h = f^* \circ \tilde{e} \circ g^*$ et calculons $\Delta_\omega h$ pour $\omega \in \Omega^*$. En appliquant deux fois la règle (2e3) on trouve :

$$(12b3) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_\omega h &= ((\partial^* f) \circ (\tilde{e}) \circ (g^*)) \cdot ((\partial \tilde{e}) \circ (g^*)) \cdot (\Delta_\omega g^*) \\ &+ ((\partial^* f) \circ (\tilde{e}) \circ (g^*)) \cdot ((\Delta_\omega \tilde{e}) \circ (g^*)) \cdot e^{-\omega(g^*-I)} \\ &+ ((\Delta_\omega f^*) \circ (\tilde{e}) \circ (g^*)) \cdot e^{-\omega(\tilde{e} \circ g^*-I)} \end{aligned} \right.$$

Comme $\partial \tilde{e} = 1$ et $\Delta_\omega \tilde{e} = 0$, il vient :

$$(12b4) \quad \begin{cases} \Delta_\omega h = ((\partial^* f) \circ (\dot{\ell}) \circ (g^*)) \cdot (\Delta_\omega f^*) \\ + ((\Delta_\omega^* f) \circ (\dot{\ell}) \circ (g^*)) \cdot e^{-\omega(\dot{\ell} \circ g^* - I)} \end{cases}$$

Mais d'après (9e5) et (9e13) il existe des coefficients A_ω et B_ω tels que

$$\Delta_\omega^* f = A_\omega \partial^* f \quad \text{et} \quad \Delta_\omega g^* = -B_\omega e^{-\omega(g^* - I)}$$

et, comme l'opérateur Δ_ω a son support en des points Q tous situés au dessus de ω , l'hypothèse $A_Q(g) = e^{-c\omega} A_Q(f)$ entraîne

$B_\omega = e^{-\omega c} A_\omega$. En portant dans (12b4) il vient finalement :

$$\begin{aligned} \Delta_\omega h &= -((\partial^* f) \circ (\dot{\ell}) \circ (g^*)) \cdot e^{-\omega c} \cdot A_\omega \cdot e^{-\omega(g^* - I)} \\ &+ A_\omega \cdot ((\partial^* f) \circ (\dot{\ell}) \circ (g^*)) \cdot e^{-\omega(\dot{\ell} \circ g^* - I)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puisque toutes les dérivations étrangères Δ_ω annulent h , c'est que h est une pseudo-constante, autrement dit un élément de G^r . Comme d'autre part $f = {}^*f \circ \ell \circ f^*$ et $g = {}^*g \circ \ell \circ g^*$, il est clair que $g = h \circ f \circ h$. L'hypothèse $A_Q(g) = e^{-c\omega} A_Q(f)$, pour tout Q , entraîne donc bien la conjugalité de g et f . En résumé :

Proposition 12b1 (Système complet d'invariants).

Si, pour $f \in G^r$ et de la forme (9a5), on désigne par $A_Q(f)$ le résidu de la fonction $2\pi i f^*$ au point de ramification Q , alors A_Q est un invariant, en ce sens que pour tout $h \in G^r$:

$$(12b5) \quad A_Q(\bar{h} \circ f \circ h) = e^{-\omega c} A_Q(f) \quad (\text{avec } \omega = \dot{Q} \text{ et } h(z) = z + c + D(z^{-1}))$$

Si en outre $\dot{Q} = 0$ (i.e. Q au dessus de 0), alors $A_Q(f)$ est une fonction centrale.

Enfin, l'ensemble de tous les A_Q constitue un système complet d'invariants, en ce sens que f et g sont conjuguées dans G' si et seulement si il existe une constante c telle que :

$$A_Q(g) = e^{-\omega c} A_Q(f) \quad (\forall Q \in \partial^0 R ; \omega = \dot{Q})$$

Notons que le système d'invariants $\{A_Q\}$ n'est pas libre. Par exemple, si on considère les six points de ramification Q_i définis par :

$$Q_1 = TQ_0 ; Q_2 = T^2Q_0 ; Q_3 = S^{-2}Q_0 ; Q_4 = SRSQ_0 ; Q_5 = SR^2SQ_0 ; Q_6 = SR^4SQ_0$$

on a les identités suivantes (vérifiables à partir des équations de résurgence) :

$$\begin{cases} A_{Q_2}(f) + 2\pi i A_{Q_1}(f) A_{Q_3}(f) = A_{Q_3}(f) \\ 2A_{Q_4}(f) + A_{Q_6}(f) = 3A_{Q_5}(f) \end{cases}$$

Cette remarque incite à remplacer $\{A_Q\}$ par un système plus restreint et plus maniable. Pour tout $\omega \in \Omega^*$, le support de Δ_ω est tout entier situé au-dessus du point ω et le scalaire $A_\omega = A_\omega(f)$ défini par (9e5) est une combinaison linéaire de résidus $A_Q = A_Q(f)$ en des points Q variant dans le support de Δ_ω . D'où l'invariance de A_ω :

$$(12b6) \quad A_\omega(\tilde{h} \circ f \circ h) = e^{-\omega c} A_\omega(f) \quad (\text{avec } h \text{ et } c \text{ comme en (12b5)})$$

Inversement, en comparant (12b1) et (9e9) on voit que $A_Q = A_\Gamma$ si $Q = \Gamma^{-1}Q_0$. Or tout $Q \in \partial^0 R$ est de la forme $\Gamma^{-1}Q_0$, pour un élément Γ de Γ' déterminé à un facteur \mathbb{R}^n près à droite. De plus, comme élément de $\Delta(1, \Omega)$, l'opérateur $(1-R)\Gamma$ ne dépend pas du choix de Γ et s'écrit sous la forme d'une somme finie $\sum \gamma_\omega \Delta_\omega$ avec des ω multiindices de somme $\|\omega\| = \dot{Q}$, des γ_ω scalaires et des Δ_ω définis comme en (9e8bis). Par suite, d'après (9e8) :

$$(12b7) \quad A_Q(\mathcal{F}) = A_\Gamma(\mathcal{F}) = \sum \gamma_\omega \Gamma_\omega A_\omega(\mathcal{F})$$

avec

$$(12b8) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_\omega(\mathcal{F}) = A_{\omega_1}(\mathcal{F}) \dots A_{\omega_n}(\mathcal{F}) \\ \Gamma_\omega = \omega_1 (\omega_1 + \omega_2) \dots (\omega_1 + \dots + \omega_{n-1}) \\ (1-R)\Gamma = \sum \gamma_\omega \Delta_\omega \quad ; \quad \Gamma Q = Q_0 \end{array} \right.$$

On voit ainsi que chaque A_Q s'exprime comme polynôme par rapport aux coefficients A_ω (ω simple). Comme le système $\{A_Q; Q \in \mathcal{P}(\mathcal{R})\}$ est complet, le système $\{A_\omega; \omega \in \mathcal{Q}^*\}$ l'est lui aussi. On ne peut pas le réduire davantage, car nous verrons au chapitre 13 qu'il est libre.: à la section 13e nous construirons même, pour chaque $\omega_0 \in \mathcal{Q}^*$, une fonction \mathcal{F} telle que $A_\omega(\mathcal{F}) = 1$ ou 0 selon que $\omega = \omega_0$ ou $\neq \omega_0$.

On obtiendrait d'autres systèmes complets et libres $\{A_\omega; \omega \in \mathcal{Q}^*\}$ en définissant l'invariant $\mathcal{A}_\omega(\mathcal{F})$ par

$$(12b9) \quad \mathcal{D}_\omega \mathcal{F}^* = -\mathcal{A}_\omega(\mathcal{F}) \cdot e^{-\omega(\mathcal{F}^* - I)}$$

pour n'importe quelle famille $\{\mathcal{D}_\omega; \omega \in \mathcal{Q}^*\}$ d'opérateurs de support ω , linéairement indépendant et engendrant, à eux tous, l'algèbre $\Delta(1, \mathcal{Q})$.

En fait, il n'y a guère que trois choix utiles. Ils consistent à prendre pour \mathcal{D}_ω les opérateurs $\Delta_\omega, \Delta_\omega^+, \Delta_\omega^-$ définis à la proposition 2b4.

Les invariants correspondants sont notés $A_\omega, A_\omega^+, A_\omega^-$. Il est commode de les rassembler dans les fonctions génératrices suivantes :

$$(12b10) \quad \pi_{*\mathcal{F}}^\varepsilon(z) = -\sum_{\omega \in \mathcal{Q}^*} e^{-\omega z} A_\omega(\mathcal{F}) \quad (\varepsilon = \pm)$$

$$(12b11) \quad \pi_f^\varepsilon(z) = z - \sum_{\omega \in \mathcal{R}^\varepsilon} e^{-\omega z} A_\omega^+(f) \quad (\varepsilon = \pm)$$

$$(12b12) \quad {}^z\pi_f^\varepsilon(z) = z - \sum_{\omega \in \mathcal{R}^\varepsilon} e^{-\omega z} A_\omega^-(f) \quad (\varepsilon = \pm)$$

qui nous serviront constamment dans la suite (*). Moyennant ces notations, on a les relations d'invariance :

$$(12b13) \quad \pi_{*f}^\varepsilon(z) = \pi_{*f}^\varepsilon(z+c)$$

$$(12b14) \quad \pi_{h \circ f \circ h}^\varepsilon(z) = \pi_f^\varepsilon(z+c)$$

$$(12b15) \quad {}^z\pi_{h \circ f \circ h}^\varepsilon(z) = {}^z\pi_f^\varepsilon(z+c)$$

avec h et c comme en (12b5). D'autre part, si l'on pose :

$$(12b16) \quad \Delta^\varepsilon(t) = \sum_{\omega \in \mathcal{R}^\varepsilon} e^{-\omega t} \Delta_\omega \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

$$(12b17) \quad D^{\varepsilon, \eta}(t) = 1 + \sum_{\omega \in \mathcal{R}^\varepsilon} e^{-\omega t} \Delta_\omega^\eta \quad (\varepsilon, \eta = \pm 1)$$

on aura les identités :

(*) Rappelons qu'ici $\mathcal{R}^\pm = \pm 2\pi i \mathbb{N}^*$. Bien que les séries de Fourier $\pi_{*f}^\varepsilon, \pi_f^\varepsilon, {}^z\pi_f^\varepsilon$ soient généralement divergentes, on peut sans difficulté composer formellement celles qui sont relatives à une même valeur de ε .

$$(12b18) \quad \begin{cases} \mathbb{D}^{\varepsilon, \eta}(t) = \exp(\eta \Delta^\varepsilon(t)) & (\varepsilon, \eta = \pm 1) \\ \mathbb{D}^{\varepsilon, +}(t) \cdot \mathbb{D}^{\varepsilon, -}(t) = 1 & (\varepsilon = \pm 1) \end{cases}$$

ainsi que les relations de Leibniz .

$$(12b19) \quad \begin{cases} \sigma(\Delta^\varepsilon(t)) = \Delta^\varepsilon(t) \otimes 1 + 1 \otimes \Delta^\varepsilon(t) \\ \sigma(\mathbb{D}^{\varepsilon, \eta}(t)) = \mathbb{D}^{\varepsilon, \eta}(t) \otimes \mathbb{D}^{\varepsilon, \eta}(t) \end{cases}$$

A partir de là et compte tenu des équations de résurgence satisfaites par f^* , on obtient les identités suivantes entre les séries de Fourier invariantes attachées à un même f :

$$(12b20) \quad {}^\varepsilon \pi \circ \pi^\varepsilon(z) \equiv z \quad (\varepsilon = \pm)$$

$$(12b21) \quad \pi_*^\varepsilon \circ \pi^\varepsilon(z) \equiv \pi_*^\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \pi^\varepsilon(z) \quad (\varepsilon = \pm)$$

qui expriment sous forme compacte les relations liant les A_ω aux A_ω^+ et aux A_ω^- . En résumé :

Proposition 12b2 (Les invariants $A_\omega, A_\omega^+, A_\omega^-$)

Les relations

$$(12b22) \quad \Delta_\omega f^* = -A_\omega(f) \cdot e^{-\omega(f^* - I)} \quad (\omega \in \mathbb{Q}^*)$$

$$(12b23) \quad \Delta_\omega^\pm f^* = -A_\omega^\pm(f) \cdot e^{-\omega(f^* - I)} \quad (\omega \in \mathbb{Q}^*)$$

définissent trois systèmes d'invariants $\{A_\omega\}, \{A_\omega^+\}, \{A_\omega^-\}$ qui sont
chacun complets.

Les A_Q s'expriment polynomialement en fonction des A_w selon (12b7) et (12b8) et les A_w s'expriment polynomialement en fonction des A_w^+ ou des A_w^- selon (12b21).

Etudions maintenant les invariants $A_Q(f)$ comme fonctions de f . Pour cela, commençons par étudier l'application $P \rightarrow f^*(P)$ pour un point P fixe sur \mathcal{R} .

Prenons d'abord le paramétrage naturel de f (par les coefficients de Taylor). Par hypothèse, f est de la forme :

$$f(z) = z + 1 + a_3 z^{-2} + a_4 z^{-3} + \dots$$

Soit γ_+ et δ_+ comme à la section 9b :

$$\gamma_+(z) = f(z) - z - 1 = a_3 z^{-2} + a_4 z^{-3} + a_5 z^{-4} + \dots$$

$$\delta_+(z) = \beta \gamma_+(z) = a_3 z + a_4 \frac{z^2}{2!} + a_5 \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Fixons $n \gg 3$ et posons :

$$(12b24) \quad a = \sup_{3 \leq i \leq n} |a_i|^{1/i-1}$$

On a alors :

$$(12b25) \quad |\delta_+(z)| \leq a \left(\sum_{m=1}^{n-2} \frac{|a_m| |z|^m}{m!} \right) + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|a_m| |z|^{m-2}}{(m-2)!}$$

Soient $\mathcal{D}, \mathcal{R}, s(z), C_3, C_4$ comme à la section 9b. Lorsque a_3, a_4, \dots, a_n varient et que $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3} \dots$ restent fixes, (12b25) montre qu'on peut trouver une constante positive b telle que :

$$(12b26) \quad |\delta_+(z)| \leq a b e^{a|z|}$$

uniformément sur $|z| < R$. On peut donc appliquer les majorations de la

section 9b en prenant $C_1 = ab$ et $C_2 = a$. On obtient ainsi :

$$(12b27) \quad |f^*(P)| < C_5 e^{\Delta(z) C_6}$$

avec $C_5 = \frac{ab C_3}{1 + C_3}$, $C_6 = a \Delta(z) (1 + b C_4 + b C_3 C_4)$

D'autre part, puisqu'au voisinage des points de ramification $Q \neq Q_0$, $f^*(P)$ est de la forme (12b1) avec Ψ_Q, Ψ_Q régulières au point Q , il est clair que :

$$(12b28) \quad \Psi_Q(P) = f^*(P') - f^*(P)$$

où P désigne un point de \mathcal{R} voisin de Q et P' le point déduit de P par rotation d'angle $+2\pi$ autour de Q . Par suite :

$$(12b29) \quad \Psi_Q(P) + \frac{1}{2\pi i} \frac{A_Q}{z-\omega} = f^*(P) - \frac{1}{2\pi i} (f^*(P') - f^*(P)) \log(z-\omega)$$

avec $\omega = \dot{Q}$, $z = \dot{P} = \dot{P}'$. Comme Ψ_Q est régulière au point Q , il vient, pour tout P_0 :

$$(12b30) \quad A_Q = A_Q(f) = \int_{P_0}^{P'_0} f^*(P) dP - \frac{1}{2\pi i} \int_{P_0}^{P'_0} [f^*(P') - f^*(P)] \log(z-\omega) dP$$

On peut alors appliquer la majoration (12b26) avec des constantes C_1, C_3, C_4 relatives à un chemin \mathcal{J} qui joint Q_0 à P_0 , puis P_0 à P'_0 et enfin P'_0 à P''_0 . On trouve finalement, en portant (12b27) dans (12b30) :

$$(12b31) \quad |A_Q(f)| < Cste \cdot \exp(C_Q \cdot a) = Cste \cdot \exp(C_Q \cdot \sup_{3 \leq i \leq n} |a_i|^{1/i-1})$$

avec une constante C_Q qui ne dépend que de Q .

L'invariant $A_Q(f)$ est donc une fonction entière, de croissance

exponentielle par rapport à chaque variable $(a_i)^{1/i-1}$. Ce résultat ne peut pas être amélioré : on montre en effet que C_Q ne peut pas être prise arbitrairement petite (cf. exercice 12b2). En particulier $C_Q \geq |Q|$.

Proposition 12b3. (Analyticité et exponentialité des invariants)

Chacun des invariants $A_Q(\mathcal{f})$ est holomorphe en \mathcal{f} . Rapporté aux coefficients de Taylor de \mathcal{f} , c'est une fonction entière, de croissance exponentielle par rapport à chaque variable $(a_i)^{1/i-1}$ (*). Ceci vaut aussi pour les invariants $A_\omega(\mathcal{f})$, $A_\omega^+(\mathcal{f})$, $A_\omega^-(\mathcal{f})$.

Réciproquement, tout invariant $A(\mathcal{f})$ qui est holomorphe en \mathcal{f} (resp. holomorphe et de croissance exponentielle) s'exprime d'une manière unique comme fonction entière (resp. comme polynôme) d'un nombre fini d'invariants $A_{\omega_1}(\mathcal{f}), A_{\omega_2}(\mathcal{f}), \dots, A_{\omega_n}(\mathcal{f})$ avec $\omega_j \in \mathbb{Z}^*$.

La partie directe vient d'être prouvée. Pour la partie réciproque, voir les indications de l'exercice 12b3.

Notons une conséquence curieuse de la proposition 12b3. Celle-ci indique en effet que toute fonction centrale $A(\mathcal{f})$ qui est "exponentielle" (c'est-à-dire holomorphe en \mathcal{f} et de croissance exponentielle par rapport à chaque $(a_i)^{1/i-1}$) s'écrit sous la forme d'une somme finie :

$$A(\mathcal{f}) = \sum_{\omega_1, \dots, \omega_n} \gamma_{\omega_1, \dots, \omega_n} A_{\omega_1}(\mathcal{f}) \dots A_{\omega_n}(\mathcal{f})$$

avec des γ_ω scalaires et des multiindices ω de sommes $\|\omega\|$ toutes nulles. Or, de tels multiindices ne sont jamais dégénérés (en effet, pour ω dégénéré, $\|\omega\| = d(\omega) \chi(\omega) \neq 0$). Par suite, toute fonction centrale "exponentielle" s'écrit d'une manière unique sous la forme

(*) sauf la première variable a_1 .

$$(12b32) \quad A(f) = v(\Delta f^*)$$

où v est l'unique endomorphisme des algèbres de fonctions réurgentes dans \mathbb{C} et où Δ est la dérivation étrangère réduite déterminée par :

$$(12b33) \quad \Delta = \sum \gamma_{\omega} \Delta_{\omega}$$

Si la fonction "exponentielle" $A(f)$ est simplement invariante, on peut encore la représenter sous la forme (12b32) mais il faut en général recourir à des opérateurs Δ qui ne sont plus des dérivations d'ordre 1 (i.e. $\Delta \in \underline{\Delta}_1(1, \Omega)$) mais d'ordre quelconque (i.e. $\Delta \in \underline{\Delta}(1, \Omega)$) et l'on y perd l'unicité de la représentation (12b33).

Notons dans ce même ordre d'idées que les formes restreintes $\langle f^* \rangle, \langle f^* p \rangle, \langle f_* \rangle, \langle f^w \rangle$, vu leur définition (cf sections 9e et 10d), apparaissent comme autant de fonctions génératrices qui regroupent, chacune à sa manière, tous les invariants attachés à f .

Pour finir, supposons qu'un invariant $f \rightarrow A(f)$ nous soit donné autrement qu'en fonction des invariants fondamentaux.

$A_Q(f), A_{\omega}(f), A_{\omega}^{\pm}(f)$. Par exemple, supposons $A(f)$ défini au moyen d'un extrémum (en h) portant sur une certaine "moyenne" infinie des coefficients de Taylor des conjuguées $\overset{-1}{h} \circ f \circ h$ de f (cf. exercice 12b4). Comment exprimer un tel $A(f)$ en fonction, disons, des $A_{\omega}(f)$?

Voici un procédé : pour tout n -uple d'éléments $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ de Ω^* différents deux à deux et pour tout n -uple de scalaire $\{A_{\omega_1}, \dots, A_{\omega_n}\}$ on construira à la section 12 ("synthèse bilatérale") un élément

$f = f_{A_{\omega_1}, \dots, A_{\omega_n}}$ de \mathbb{G}^0 tel que $\mu(f) = 1, \alpha(f) = 1, p(f) = 0$ et tel que $A_{\omega_i}(f) = A_{\omega_i}$ ($i=1, \dots, n$) et $A_{\omega}(f) = 0$ si $\omega \notin \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

Il est clair alors que le développement (unique) de $A(f)$ en série

$$A(\mathcal{F}) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ \omega_i \in \mathcal{R}^*}} \gamma_{(\omega_1)^{n_1} \dots (\omega_n)^{n_n}} (A_{\omega_1}(\mathcal{F}))^{n_1} \dots (A_{\omega_n}(\mathcal{F}))^{n_n}$$

a ses coefficients $\gamma_{\underline{\omega}}$ donnés par la formule :

$$\gamma_{\underline{\omega}} = \frac{1}{n_1!} \dots \frac{1}{n_n!} \frac{\partial^{n_1 + \dots + n_n}}{\partial \omega_1^{n_1} \dots \partial \omega_n^{n_n}} A(\mathcal{F}_{A_{\omega_1}, \dots, A_{\omega_n}})$$

Section 12c : Analyse harmonique dans G° .

Proposition 12c1 (Systèmes complets d'invariants sur G°)

α) Pour \mathcal{F} dans G° et de la forme (9a5), les invariants $A_\omega^\pm(\mathcal{F})$ et $A_\omega(\mathcal{F})$ introduits à la proposition 12b2 vérifient :

$$(12c1) \quad \limsup_{\omega \rightarrow \infty} |A_\omega^+|^{1/|\omega|} < \infty ; \quad \limsup_{\omega \rightarrow \infty} |A_\omega^-|^{1/|\omega|} < \infty$$

$$(12c2) \quad \limsup_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{|\omega|^n} |A_\omega|^{1/|\omega|} < \infty \quad (n = \lfloor \frac{\omega}{2\pi i} \rfloor \in \mathbb{N})$$

et ces majorations ne peuvent pas être améliorées.

β) Il y a davantage d'invariants holomorphes sur G° que sur G^{I^-} mais les trois systèmes d'invariants $\{A_\omega\}$, $\{A_\omega^+\}$, $\{A_\omega^-\}$, qui étaient complets sur G^{I^-} , le sont encore sur G° .

Démonstration : Puisque les A_ω^\pm sont, au facteur $2\pi i$ près, les résidus de \mathcal{F}^* en des points frontières contigus aux demi-feuillets $\mathcal{R}(Q_\pm)$, les majorations (12c1) résultent des majorations du (type (9c10)) associées à chaque droite de \mathcal{R} ou, plus directement, de la majoration

$$(12c1bis) \quad |e^z - 1| |\mathcal{F}^*(z) - \mathcal{F}'(z)| \leq C e^{C^*|z|}$$

valable sur tout \mathcal{R} pour C, C^* bien choisis.

Quant à la majoration (12c2), elle résulte de (12c1) compte tenu de (12b10) compte tenu de la formule (12b21) qui exprime que Π_*^\pm est le "logarithme itératif" de Π^\pm et compte tenu aussi de l'équivalence du groupe (pour la composition) des séries de Fourier convergentes avec le groupe G^0 . (Voir aussi à ce sujet la section 13g).

Une autre conséquence de (12c1) est que, pour tout choix de scalaires

$\gamma_{\underline{\omega}} = \gamma_{\omega_1, \dots, \omega_n}$ vérifiant

$$(12c3) \quad \left| \gamma_{\omega_1, \dots, \omega_n} \right|^{\frac{1}{|\omega_1| + \dots + |\omega_n|}} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad |\omega_1| + \dots + |\omega_n| \rightarrow \infty$$

les deux séries (pour + ou -)

$$(12c4) \quad \sum_{\underline{\omega}} \gamma_{\underline{\omega}} A_{\underline{\omega}}^\pm \quad (\underline{\omega} \text{ multiindice sans ordre; } A_{\underline{\omega}}^\pm = A_{\omega_1}^\pm \dots A_{\omega_n}^\pm)$$

définissent chacune un invariant holomorphe sur G^0 . Inversement, les A_{ω}^+ (resp. A_{ω}^-) n'étant astreints, comme on le montrera à la section 13c, à aucune autre condition que (12c1), on voit que tout invariant holomorphe sur G^0 peut s'exprimer sous la forme (12c4) et que, une fois choisi le signe + ou -, cette expression est unique.

Or nous avons vu à la section 12b que tout invariant holomorphe sur G^1 pouvait s'exprimer comme fonction entière d'un nombre fini de variables A_{ω}^\pm (ω indice simple). Il y a donc beaucoup plus d'invariants holomorphes sur G^0 que sur G^1 .

On pourrait dans ces conditions craindre que les trois systèmes fondamentaux d'invariant qui sont complets sur G^1 , ne perdent leur complétude lorsqu'on les restreint à G^0 . Tel n'est pourtant pas le cas. Soit en effet f, g dans G^0 et tels que, pour un certain scalaire c ,

on ait :

$$A_{\omega}(g) = e^{-c\omega} A_{\omega}(f) \quad (\forall \omega \text{ simple})$$

ou, ce qui est équivalent :

$$A_{\omega}^{+}(g) = e^{-c\omega} A_{\omega}^{+}(f) \quad (\text{resp. } A_{\omega}^{-}(g) = e^{-c\omega} A_{\omega}^{-}(f))$$

En se reportant à la démonstration de la proposition 12b1, on voit que la fonction $h = {}^*f \circ \tilde{L} \circ g^*$ a pour transformée de Borel (aux diracs près) une fonction h entière. Comme d'autre part *f et g^* croissent exponentiellement sur \mathcal{R} , h croit exponentiellement sur \mathbb{C} (*). En revenant au modèle formel, on voit que h appartient à \mathcal{G}° et, puisque $f \circ h = h \circ g$ d'après la construction de h , cela montre bien que f et g sont conjuguées dans \mathcal{G}° . D'où la complétude sur \mathcal{G}° de chacun des trois systèmes $\{A_{\omega}\}$, $\{A_{\omega}^{+}\}$, $\{A_{\omega}^{-}\}$. Ceci établit la proposition 12c3.

Convenons maintenant de quelques abréviations commodes : dans toute la suite, les expressions "à droite" (resp. "à gauche", "en haut", "en bas") signifieront : "dans un demi-plan $\operatorname{Re} z \gg c$ pour un certain c assez grand" (resp. "dans un demi-plan $\operatorname{Re} z \leq -c$ ", " $\operatorname{Im} z \gg c$ ", " $\operatorname{Im} z \leq -c$ ").

Proposition 12c2 (Lien avec les invariants classiques)

Pour f dans \mathcal{G}° et de la forme (9a5), les séries de Fourier invariants π^{\pm} et ${}^{\pm}\pi$ attachées à f par les formules (12b11) et (12b12) coïncident avec les fonctions périodiques invariants "classiques", introduites à la section 8d. On a en effet :

(*) cf. exercice 12c1.

$$(12c5) \quad \pi^+ = f_+^* \circ f_-^* , \quad +\pi = f_-^* \circ f_+^* \quad (\text{"en bas"})$$

$$(12c6) \quad \pi^- = f_-^* \circ f_+^* , \quad -\pi = f_+^* \circ f_-^* \quad (\text{"en haut"})$$

Ici f_+^* et f_+^* (resp. f_-^* et f_-^*) désignent, comme à la section 9c, les itérateurs sectoriels (directs et inverses) relatifs à la direction $\text{Arg } z = 0$ (resp. $\text{Arg } z = \pi$) et susceptibles en fait d'être prolongés à tout un domaine \mathcal{Y}_+ (resp. \mathcal{Y}_-), c'est-à-dire "partout sauf à gauche" (resp. "à droite") (cf. proposition 9c1). D'autre part, puisqu'ici $\mu(f) = 1$, les secondes membres de (12c5) et (12c6) coïncident bien avec les fonctions invariantes π_f^0 et π_f^1 de la proposition 8d5 (ou leurs inverses de composition).

Ceci noté, les identités (12c5) et (12c6) sont faciles à établir.

En effet, on a d'une part :

$$(12c7) \quad f_+^* \circ f_-^* = \lim_{n \rightarrow \infty} l^n \circ f_+^* \circ l^{-n} \quad \text{"en haut"}$$

$$(12c8) \quad f_-^* \circ f_+^* = \lim_{n \rightarrow \infty} l^{-n} \circ f_-^* \circ l^n \quad \text{"en bas"}$$

D'autre part, d'après la proposition 9c1 γ :

$$(12c9) \quad f_+^*(z) = \int_{Q_0}^{Q_+} f^*(M) e^{-z\zeta} dM \quad (\zeta = \dot{M}, z \in \mathcal{Y}_+)$$

$$(12c10) \quad f_-^*(z) = \int_{Q_0}^{Q_-} f^*(M) e^{-z\zeta} dM \quad (\zeta = \dot{M}, z \in \mathcal{Y}_-)$$

Or les résidus de f^* aux points frontières $S^{-n}Q_0$ (resp. $T^{-n}Q_0$) pour $n \in \mathbb{N}$ sont égaux aux $\frac{1}{2\pi i} A_\omega^+$ pour $\omega \in \mathcal{R}^+$ (resp. \mathcal{R}^-).

Il suffit donc de faire tourner de $-\frac{\pi}{2}$ les axes d'intégration dans (12c9)

et (12c10) pour voir, compte tenu des propriétés de la transformation de Laplace, que :

$$(12c11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} l^n \circ f^* \circ l^{-n}(z) = z - \sum_{\omega \in \Omega^+} A_\omega^+ e^{-\omega z} = \pi^+(z) \quad \text{"en haut"}$$

$$(12c12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} l^{-n} \circ f^* \circ l^n(z) = z - \sum_{\omega \in \Omega^-} A_\omega^+ e^{-\omega z} = \pi^-(z) \quad \text{"en bas"}$$

Il ne reste plus qu'à rapprocher (12c7) - (12c18) de (12c11) - (12c12) pour obtenir (12c5) - (12c6). Notons en passant les relations :

$$(12c13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} l^{-n} \circ f^* \circ l^n(z) = z - \sum_{\omega \in \Omega^+} A_\omega^- e^{-\omega z} = {}^+\pi(z) \quad \text{"en haut"}$$

$$(12c14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} l^n \circ f^* \circ l^{-n}(z) = z - \sum_{\omega \in \Omega^-} A_\omega^- e^{-\omega z} = -\pi(z) \quad \text{"en bas"}$$

parallèles à (12c11) - (12c12) et obtenues de la même manière, mais en faisant pivoter l'axe d'intégration de $+\frac{\pi}{2}$ dans (12c7) - (12c8).

La proposition 12c2 permet de préciser les constantes C et C^* dans la majoration (12clbis) ou, ce qui revient au même, d'évaluer

$$\limsup_{|\omega| \rightarrow \infty} |A_\omega(f)|^{1/|\omega|} \quad \text{en fonction de } f. \text{ Voir à ce sujet l'exercice}$$

12c2. La proposition 12c2 conduit également à une expression analytique des germes π^\pm en fonction de f . Partons comme toujours d'une f de la forme (9a5) et écrivons-là :

$$(12c15) \quad f = l \circ g \quad \text{avec } l(z) = z+1, \quad g(z) = z + a_3 z^{-2} + a_4 z^{-3} + \dots$$

puis définissons les opérateurs F, F^*, G, L, \bar{L} comme à la section 9b. Dans le modèle formel, l'itérateur f^* peut se calculer en appliquant indifféremment la formule (19b6+) ou la formule (9b6-). Celles-ci font intervenir les opérateurs $(L^\pm - 1)^{-1}$ qui transforment les séries

formelles en séries formelles. Pour passer au modèle sectoriel, il est naturel de chercher à développer $(L-1)^{-1}$ et $(L^{-1}-1)^{-1}$ en puissances de L . Si on admet simultanément les puissances positives et négatives de L , ce développement peut se faire d'une infinité de manières (dépendant d'un paramètre complexe) mais il devient unique quand on se restreint aux seules puissances positives (resp. négatives). Posons donc :

$$(12c16) \quad (L-1)_+^{-1} = -\sum_{n \geq 0} L^n$$

$$(12c18) \quad (L^{-1}-1)_+^{-1} = \sum_{n \geq 0} L^n$$

$$(12c17) \quad (L-1)_-^{-1} = \sum_{n < 0} L^n$$

$$(12c19) \quad (L^{-1}-1)_-^{-1} = -\sum_{n \leq 0} L^n$$

On aura par exemple :

$$\varphi(z) \rightarrow (L-1)_+^{-1} \varphi(z) = -\sum_{n \geq 0} \varphi(z+n)$$

Ainsi, à tout germe holomorphe φ , défini "à droite" (resp. "à gauche") et possédant un développement asymptotique $\sum_{n \geq 2} \delta_n z^{-n}$ à l'infini, les opérateurs $(L^{\pm 1}-1)_+^{-1}$ (resp. $(L^{\pm 1}-1)_-^{-1}$) associent un germe de même type, avec toutefois un comportement asymptotique en $\mathcal{O}(z^{-n+1})$ si φ a un comportement asymptotique en $\mathcal{O}(z^{-n})$.

Si donc nous substituons $(L^{\pm 1}-1)_+^{-1}$ à $(L^{\pm 1}-1)^{-1}$ dans les formules (9b6+) et (9b6-), nous obtenons pour seconds membres deux séries dont le terme général, soit

$$(L^{\mp 1}-1)_+^{-1} (G^{\mp 1}-1)^n \cdot z$$

est un germe holomorphe "à droite", du type $\mathcal{O}(z^{-n})$, et possédant un développement asymptotique à l'infini. Sous réserve de convergence, ces deux séries ont donc pour sommes des germes holomorphes "à droite", avec développement asymptotique à l'infini. Comme en outre ces germes vérifient

nécessairement l'équation $f^* \circ f = 1 + f^*$, c'est qu'ils coïncident avec le germe sectoriel f_+ .

Il ne reste plus qu'à établir la convergence des deux séries envisagées. Pour cela, il suffit de se reporter aux majorations (9b23) obtenues précédemment pour $((G^{-1}-1) \cdot (L^{-1}-1))^n \cdot \gamma_{\pm}$ dans le modèle additif, puis de repasser au modèle sectoriel par la transformation de Laplace $\mathcal{L}_{Q_{\pm}}$, tout en observant que $\mathcal{L}_{Q_{\pm}} (L^{-1}-1)^{-1} \varphi = (L^{-1}-1)^{-1}_+ \cdot \varphi$. En fait, on n'a pas seulement convergence "à droite", mais aussi "en haut" et "en bas", c'est-à-dire sur \mathcal{J}_{\pm} . Comme on a évidemment des résultats symétriques pour f_-^* , on peut énoncer :

Lemme 9c1 :

Les itérateurs sectoriels f_+^* et f_-^* peuvent se calculer au moyen des séries :

$$(12c20) \quad f_+^*(z) = z + \sum_{n \geq 1} ((L^{-1}-1)_+^{-1} \cdot (G-1))^n \cdot z$$

$$(12c21) \quad = z + \sum_{n \geq 1} ((L-1)_+^{-1} \cdot (G^{-1}-1))^n \cdot z$$

$$(12c22) \quad f_-^*(z) = z + \sum_{n \geq 1} ((L^{-1}-1)_-^{-1} \cdot (G-1))^n \cdot z$$

$$(12c23) \quad = z + \sum_{n \geq 1} ((L-1)_-^{-1} \cdot (G^{-1}-1))^n \cdot z$$

dont les seconds membres convergent uniformément sur les secteurs \mathcal{J}_{\pm} et \mathcal{J}_{\mp} respectivement.

Plus généralement, les opérateurs F_{\pm}^* , qui substituent le germe $f_{\pm}^*(z)$ à la variable z , peuvent s'exprimer au moyen des formules :

$$(12c24) \quad F_+^* = \left\{ 1 + ((\bar{L})^{-1})_+^{-1} (G-1) \right\}^{-1} \cdot 1 = \left\{ 1 + ((L-1)_+^{-1} (G^{-1})) \right\}^{-1} \cdot 1$$

$$(12c25) \quad F_-^* = \left\{ 1 + ((\bar{L})^{-1})_-^{-1} (G-1) \right\}^{-1} \cdot 1 = \left\{ 1 + ((L-1)_-^{-1} (G^{-1})) \right\}^{-1} \cdot 1$$

dans lesquelles on peut supprimer les "1" (opérateur unité) de droite et remplacer les \bar{L} (opérant sur des opérateurs) par des L (opérant sur des fonctions) chaque fois qu'il s'agit d'appliquer F_{\pm}^* à une fonction d'épreuve affine en z ou périodique de période 1.

Pour les itérateurs inverses ${}^*f_{\pm}$, il n'existe pas de formules simples analogues à (12c20)-23). Nous devons donc utiliser, pour le calcul de π^{\pm} , non pas (12c3) - (12c6) mais (12c7) - (12c8). Ces deux formules, jointes à (12c20-23) conduisent à la :

Proposition 12 3 : (les invariants π^{\pm} comme fonctions de f)

Pour f dans G^0 et de la forme (9a5), les invariants π^{\pm} sont donnés en fonction de $g = \bar{L} \circ f$ par les formules suivantes :

$$(12c26) \quad \pi^+(z) = z + \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} L^n \right) (G-1) \sum_{m \geq 0} ((\bar{L}^{-1})_+^{-1} (G-1))^m \cdot z$$

$$(12c27) \quad = z + \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} L^n \right) (G^{-1}) \sum_{m \geq 0} ((L-1)_+^{-1} (G^{-1}))^m \cdot z$$

$$(12c28) \quad \pi^-(z) = z + \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} L^n \right) (G-1) \sum_{m \geq 0} ((\bar{L}^{-1})_-^{-1} (G-1))^m \cdot z$$

$$(12c29) \quad = z + \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} L^n \right) (G^{-1}) \sum_{m \geq 0} ((L-1)_-^{-1} (G^{-1}))^m \cdot z$$

Plus généralement, les opérateurs π^{\pm} correspondants (*) s'écrivent

$$(*) \quad \pi^{\pm} \cdot \varphi = \varphi \circ \pi^{\pm}$$

$$(12c30) \quad \Pi^+ = 1 + \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} L^n \right) (G-1) \sum_0^{\infty} \left((L-1)_+^{-1} (G-1) \right)^m = 1 + \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} L^n \right) (G-1) \sum_0^{\infty} \left((L-1)_+^{-1} (G^{-1}) \right)^m$$

$$(12c31) \quad \Pi^- = 1 + \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} L^n \right) (G-1) \sum_0^{\infty} \left((L-1)_-^{-1} (G-1) \right)^m = 1 + \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} L^n \right) (G-1) \sum_0^{\infty} \left((L-1)_-^{-1} (G^{-1}) \right)^m$$

à condition de se limiter à des fonctions d'épreuve affines en z ou périodiques de période 1 (*).

Section 12d : Analyse harmonique sur les groupes apparentés à G^0 .

Proposition 12d1 (Analyse harmonique sur les groupes de l'intervalle de Lie)

Les groupes de l'intervalle de Lie $[G', G^0]$ ne possèdent pas d'autres fonctions centrales que μ, α, ρ et leurs combinaisons.

Soit en effet G un groupe plein contenant G' et défini par une condition de croissance K . Soit dans G deux éléments f et g tels que

$$\mu(f) = \mu(g) = 1 \quad ; \quad \alpha(f) = \alpha(g) = 1 \quad ; \quad \rho(f) = \rho(g) = 0.$$

Alors f et g sont formellement conjuguées par $h = {}^*f \circ g^*$. Or, la K -croissance de f_* et g_* s'établit de la même manière que celle de f et g (par exemple, si G est radial, partir de (8c9) au lieu de (8c10) et raisonner comme dans la démonstration de la proposition 8e2 en utilisant les lemmes 8e1 et 8e3). De là on tire la K -croissance des f^* et g^* compte tenu de déf. 8a2 puis celle des inverses *f et *g et finalement celle de la conjugante $h = {}^*f \circ g^*$. C'est donc que, dans G , la classe formelle $G_{1,1,0}$ est une classe conjugaison. On traiterait de même les

(*) faute de quoi on doit remplacer L par \bar{L} .

classes générales $G_{p, \alpha, \rho}$

Proposition 12d2 (Analyse harmonique sur les groupes de l'intervalle critique)

$\alpha)$ Soit $\{K_n\}$ une suite surlinéaire vérifiant (8f13) et soit $K(r)$ défini comme en (8f7). Alors, si f de la forme (9a5) appartient au groupe à bord $G^{(K_n)}$, les invariants scalaires $A_\omega^+(f)$ et $A_\omega^-(f)$ qui lui sont associés vérifient :

$$(12d1) \quad \limsup |A_\omega^\pm / K(|\omega|)|^{1/|\omega|} < \infty$$

et si f appartient au groupe radial $G^{((K_n))}$, ils vérifient :

$$(12d2) \quad \limsup \frac{\log |A_\omega^\pm|}{\log K(|\omega|)} < \infty$$

$\beta)$ Plus généralement, si f appartient à un groupe régulier (*) G de l'intervalle critique, défini par une condition de croissance K , les invariants $A_\omega^\pm(f)$ ont une croissance directement caractérisable au moyen de la condition \mathbb{K} héritée de K (**). De plus, bien que l'algèbre des invariants holomorphes sur G croisse quand G décroit, les trois systèmes d'invariants $\{A_\omega\}$, $\{A_\omega^+\}$, $\{A_\omega^-\}$ restent complets sur chaque groupe.

Démonstration : D'après la proposition 8f1, tout élément f de $G^{(K_n)}$ ou $G^{((K_n))}$ a une transformée de Borel vérifiant (8f8) ou (8f10) respectivement. D'après la proposition 9d1 ces majorations s'étendent à f^* sur toute droite portée par \mathcal{R} et se répercutent sur les A_ω^\pm , qui sont les résidus de f^* aux points-frontière $S^n Q_0$ et $T^n Q_0$ contigus à $\mathcal{R}(Q_+)$

(*) cf. proposition 8f1.

(**) Via la transformation de Borel.

ou $R(Q_-)$. On le voit soit par des intégrales curvilignes "autour" des points $S^n Q_0$ et $T^n Q_0$, soit directement à partir de la majoration

$$|e^z - 1| |f^*(z) - \delta'(z)| \leq C e^{C^* |z|} K(|z|)$$

valable uniformément sur la surface R toute entière pour C, C^* bien choisis. Ceci règle le point α de la proposition. Quand G décroît, les conditions K et \mathbb{K} se font plus restrictives et l'algèbre des invariants holomorphes s'agrandit : cela apparaît clairement en considérant, par exemple, les invariants qui s'expriment linéairement par rapport aux A_ω^+ (ω simple) et en se souvenant que cette expression est unique.

Enfin, pour montrer que les trois systèmes $\{A_\omega\}, \{A_\omega^+\}, \{A_\omega^-\}$ sont toujours complets, il suffit d'observer que si on a $f, g \in G$ avec par exemple $A_\omega^+(g) = e^{-\omega c} A_\omega^+(f)$ ($c = \text{cste}$) alors la fonction entière $h = {}^*f \circ \hat{L} \circ g^*$, qui conjugue f et g dans le modèle additif, est \mathbb{K} -croissante (comme composée convolutive de *f et g^* , qui sont aussi \mathbb{K} -croissantes) et appartient donc à $G = B G$ (à cause de la régularité de \mathbb{K}). Ceci règle le point β .

Notons qu'à cause des propriétés de croissance angulaire des fonctions entières (cf. exercice 12c1) il aurait en fait suffit de s'assurer de la \mathbb{K} -croissance de ${}^*g, g^*, h$ sur les directions non verticales. On peut donc prouver la complétude des trois systèmes fondamentaux d'invariants en faisant l'économie des majorations compliquées dont on a besoin, à la section 9d, pour établir la \mathbb{K} -croissance sur les verticales. Toutefois, ces majorations sont indispensables pour établir (12d1) et (12d2).

Proposition 12d3 (Phénomène de la prolongation analytique)

Si G est un groupe régulier de l'intervalle critique $[G^0, G^1[$

tout invariant holomorphe sur G prolonge analytiquement un invariant holomorphe sur le groupe minimal

C'est là un simple corollaire de la proposition 12d1. En effet $G^\circ \subset G$, d'où l'inclusion inverse pour les algèbres d'invariants. Ce résultat, très utile pour le calcul pratique des invariants, s'étend d'ailleurs essentiellement à tous les groupes de l'intervalle $[G^\circ, G']$, réguliers ou non (cf. exercice 12d1).

On peut donc dire en résumé que, pour l'intervalle de Lie, l'analyse harmonique est élémentaire et que, pour l'intervalle critique, tout se ramène au groupe minimal G° (*).

Section 12e : Calcul pratique des invariants fondamentaux.

Partons comme d'habitude d'une f de la forme (9a5) et posons

$$g(z) = \bar{\ell} \circ f(z) = z + \sum_{n \geq 3} a_n z^{-n}$$

Les invariants scalaires comme limites dans les modèles additifs ou de Poincaré.

Dans le modèle additif, les invariants $A_\omega^\pm(f)$ apparaissent comme des résidus, aux points $Q \in \partial^\circ R$, de la fonctions résurgente f^* . Plus exactement, pour z voisin de Q , on a :

$$(12e1) \quad f^*(z) = \Psi_Q(z) - \frac{1}{2\pi i} \frac{A_\omega^\pm}{z-\omega} + \frac{1}{2\pi i} \Psi_Q(z) \log(z-\omega)$$

avec $\omega = \dot{Q}$ et φ_Q, Ψ_Q régulières au point Q . Comme $\omega \in \Omega = 2\pi i \mathbb{Z}$, il est clair que la fonction $2\pi i (1-e^z) f^*(z)$ tend vers A_ω^\pm lorsque $z \rightarrow Q$ et, s'aidant de (9e5), on montre facilement que l'élément de Weierstrass de $2\pi i (1-e^z) f^*(z)$ en un point z_0 proche de Q

(*) Quant aux groupes non comparables à G' , voir l'exercice 12d2.

est une série $\sum c_n X^n$ qui reste convergente pour $X = \omega - z_0$ et dont la somme est précisément A_ω^\pm . On peut aussi exprimer A_ω^\pm par des intégrales du type (12b30).

On obtient des résultats analogues dans les autres modèles "gras" (cf. section 3c). Dans le modèle de Poincaré, par exemple, les A_ω^\pm apparaissent comme limites, pour z tendant verticalement vers $Q = S^n Q_0 = -\frac{1}{2n}$ ou vers $Q = T^n Q_0 = 1 - \frac{1}{2n}$, de la fonction $2\pi i \lambda(z) (\lambda(z)-1)^{-1} f^*(z)$ (λ = fonction modulaire classique) et, ici encore, on peut passer à la limite et faire $z = Q$.

Toutefois, ces procédés sont malcommodes d'exécution et, surtout, ils ne permettent pas de calculer le développement de $A_\omega^\pm(f)$ en fonction de l'infinité des coefficients a_n de f (*). Aussi faut-il chercher autre chose.

Expression analytique des invariants scalaires.

Si on pose

$$(12e2) \quad K^+ = G^{-1} = FL^{-1} - 1 \quad ; \quad K^- = G^{-1} - 1 = LF^{-1} - 1$$

et si on introduit les opérateurs :

$$(12e3) \quad \begin{cases} K_n^+ = L^n K^+ L^{-n} \\ K_n^- = L^n K^- L^{-n} \\ K_\emptyset^\pm = 1 \text{ et } K_{n_1, \dots, n_r}^\pm = K_{n_1}^\pm \dots K_{n_r}^\pm \end{cases} \quad (n, n_i \in \mathbb{Z})$$

(*) Cela tient à ce que, dans les limites envisagées, chaque monôme $a_{n_1}^{N_1} \dots a_{n_r}^{N_r}$ apparaît une infinité de fois comme coefficient des différentes puissances z^n (resp. des exponentielles $e^{2\pi i z n}$)

alors les formules (12c30) et (12c31) peuvent s'écrire

$$(12e4) \quad \Pi^+ = 1 + \sum_n \mathbb{H}_1^n K_n^+ = 1 + \sum_n \mathbb{H}_{-1}^{\tilde{n}} K_n^- \quad \text{"en bas"}$$

$$(12e5) \quad \Pi^- = 1 + \sum_n \mathbb{H}_{-1}^n K_n^+ = 1 + \sum_n \mathbb{H}_1^{\tilde{n}} K_n^- \quad \text{"en haut"}$$

où l'on somme par rapport à tous les multiindices $n = (n_1, \dots, n_r)$ sur \mathbb{Z} et où les moules $\mathbb{H}_{\pm 1}^{\circ}$ sont définis par $\mathbb{H}_{\pm 1}^{\emptyset} = 1$ et par :

$$(12e6) \quad \mathbb{H}_1^{m_1, \dots, m_r} = 1 \text{ si } m_1 < m_2 < \dots < m_r \text{ et } 0 \text{ sinon} \quad (*)$$

$$(12e7) \quad \mathbb{H}_{-1}^{m_1, \dots, m_r} = (-1)^r \text{ si } m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r \text{ et } 0 \text{ sinon} \quad (*)$$

$$(12e8) \quad \mathbb{H}_1^{\widetilde{m_1, \dots, m_r}} = \mathbb{H}_1^{m_r, \dots, m_1}$$

$$(12e9) \quad \mathbb{H}_{-1}^{\widetilde{m_1, \dots, m_r}} = \mathbb{H}_{-1}^{m_r, \dots, m_1}$$

On vérifie que $\mathbb{H}_1^{\circ} \times \mathbb{H}_{-1}^{\circ} = 1^{\circ}$. Les formules (12e4-5) s'inversent donc :

$$(12e10) \quad {}^+ \Pi = 1 + \sum_n \mathbb{H}_{-1}^n K_n^+ = 1 + \sum_n \mathbb{H}_1^{\tilde{n}} K_n^- \quad \text{"en bas"}$$

$$(12e11) \quad {}^- \Pi = 1 + \sum_n \mathbb{H}_1^n K_n^+ = 1 + \sum_n \mathbb{H}_{-1}^{\tilde{n}} K_n^- \quad \text{"en haut"}$$

En appliquant maintenant à z les opérateurs figurant aux deux membres des formules (12e8), (12e9), (12e10), (12e11), on obtient, compte tenu de

(12b11) et (12b12), l'expression analytique des invariants A_{ω}^+ et A_{ω}^-

(et par suite aussi des A_{ω}) comme fonctions entières des coefficients

de Taylor a_n de f (coefficients qui sont aussi ceux de g) ou encore

en fonction des coefficients de $\tilde{g}^i = \tilde{g}^i \circ \tilde{e}^i$. En effet, étant donné

(9b8 $^{\pm}$), (12e2) et (12e3), on voit que chaque terme

(*) Sur \mathbb{R} , les moules $\mathbb{H}_{\pm 1}^{\circ}$ sont presque partout égaux aux moules $T_{\pm 1}^{\circ}$ de la section 4c. Les moules $T_{\pm 1}^{\circ}$ sont symétriques mais difficiles à calculer partout. Les moules $\mathbb{H}_{\pm 1}^{\circ}$ ne sont pas symétriques, mais ils sont explicitement définis partout.

$$\begin{aligned} & \textcircled{H}_1^m K_m^\pm \quad \text{ou} \quad \textcircled{H}_1^{\tilde{m}} K_m^\pm \quad (n \text{ multiindice}) \\ \text{respectivement} & \quad \textcircled{H}_{-1}^n K_m^\pm \quad \text{ou} \quad \textcircled{H}_{-1}^{\tilde{n}} K_m^\pm \quad (n \text{ multiindice}) \end{aligned}$$

est une combinaison linéaire, à coefficients rationnels, de termes du type :

$$(12e12) \quad a_1^{q_1} a_2^{q_2} \dots a_s^{q_s} \sum_{n_1 < n_2 < \dots < n_r} (z+n_1)^{-m_1} (z+n_2)^{-m_2} \dots (z+n_r)^{-m_r}$$

respectivement :

$$(12e13) \quad a_1^{q_1} a_2^{q_2} \dots a_s^{q_s} \sum_{n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r} (z+n_1)^{-m_1} (z+n_2)^{-m_2} \dots (z+n_r)^{-m_r}$$

avec $1 + \sum_i m_i = \sum_j j q_j$ et avec les n_i parcourant tout \mathbb{Z} .

De plus, on a toujours $m_1 + \dots + m_r \geq 3r - 1$. Les séries (12e12) et (12e13) sont donc convergentes et elles ont pour sommes des fonctions périodiques faciles à calculer, puisqu'il suffit de réduire chaque fraction

rationnelle $\prod_i (z+n_i)^{-m_i}$ en éléments simples pour tout ramener à des sommes

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (z+n)^{-m} = \begin{cases} -\frac{2\pi i}{(m-1)!} \sum_{n>0} (-2\pi i n)^{m-1} e^{2\pi i n z} & \text{"en haut"} \\ +\frac{2\pi i}{(m-1)!} \sum_{n>0} (2\pi i n)^{m-1} e^{-2\pi i n z} & \text{"en bas"} \end{cases}$$

affectées de coefficients du type

$$(12e14) \quad \sum_{\leq}^{\delta_1, \dots, \delta_r} = \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r} n_1^{-\delta_1} \dots n_r^{-\delta_r}$$

ou du type

$$(12e15) \quad \sum_{<}^{\delta_1, \dots, \delta_r} = \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} n_1^{-\delta_1} \dots n_r^{-\delta_r}$$

pour des valeurs entières des δ_i .

On trouve ainsi :

$$(12e16) \quad A_{\omega}^{\pm}(\mathcal{J}) = \sum_{n_1}^{\pm} H_{\omega}^{n_1} a_{n_1} + \sum_{n_1, n_2}^{\pm} H_{\omega}^{n_1, n_2} a_{n_1} a_{n_2} + \sum_{n_1, n_2, n_3}^{\pm} H_{\omega}^{n_1, n_2, n_3} a_{n_1} a_{n_2} a_{n_3} + \dots$$

avec par exemples, pour $\omega \in \Omega^+ = 2\pi i\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
 {}^+H_{\omega}^{m_1} &= \frac{2\pi i}{(m_1-1)!} \omega^{m_1-2} \\
 {}^+H_{\omega}^{m_1, m_2} &= 2\pi i (m_2-1) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\delta=1}^{m_2} \frac{\omega^{\delta-1}}{(\delta-1)!} (-1)^{m_1} \zeta(m_1+m_2-\delta-1) \\ \sum_{\delta=1}^{m_1-1} \frac{\omega^{\delta-1}}{(\delta-1)!} (-1)^{\delta+m_1} \zeta(m_1+m_2-\delta-1) \end{array} \right. \begin{array}{l} \zeta(m_2-\delta) \\ \zeta(m_1+m_2-\delta-2) \end{array} \\
 \text{etc...} &
 \end{aligned}$$

Remarque 1 : Le développement (12e16) a été établi pour \mathcal{J} dans G° , mais, à cause du théorème 12e3 sur le prolongement analytique des invariants, ce développement conserve sa validité quand on prend \mathcal{J} dans les autres groupes réguliers de l'intervalle critique et notamment dans G^{i-} lui-même.

Remarque 2 : Pour une majoration des coefficients $\pm H_{\omega}^{n_1, \dots, n_r}$, voir l'exercice 12e3.

Remarque 3 : Les moules $\zeta_{<}^{\bullet}$ et ζ_{\leq}^{\bullet} ne sont pas symétriques, mais ils sont liés très simplement au moule ζ^{\bullet} de la section 4c, qui, lui, est symétrique. On a ainsi :

$$\begin{aligned}
 \zeta_{\leq}^{\delta_1, \delta_2} &= \zeta_{<}^{\delta_1, \delta_2} + \zeta_{<}^{\delta_1+\delta_2} = \zeta_{<}^{\delta_1, \delta_2} + \frac{1}{2} \zeta_{<}^{\delta_1+\delta_2} \\
 \zeta_{\leq}^{\delta_1, \delta_2, \delta_3} &= \zeta_{<}^{\delta_1, \delta_2, \delta_3} + \zeta_{<}^{\delta_1, \delta_2+\delta_3} + \zeta_{<}^{\delta_1+\delta_2, \delta_3} + \zeta_{<}^{\delta_1+\delta_2+\delta_3} \\
 &= \zeta_{<}^{\delta_1, \delta_2, \delta_3} + \frac{1}{2} \zeta_{<}^{\delta_1, \delta_2+\delta_3} + \frac{1}{2} \zeta_{<}^{\delta_1+\delta_2, \delta_3} + \frac{1}{6} \zeta_{<}^{\delta_1+\delta_2+\delta_3}
 \end{aligned}$$

Remarque 4 : Pour des expressions intégrales des moules zêta et apparentés, voir l'exercice 12e4.

Remarque 5 : Pour les opérateurs $(\Pi^\pm)^w : \varphi \rightarrow \varphi \circ \Pi^\pm$ avec $w \in \mathbb{C}$, on a les expressions :

$$(12e17) \quad (\Pi^+)^w = 1 + \sum_n \Theta_w^n K_n^+ = 1 + \sum_n \Theta_{-w}^{\tilde{n}} K_n^- \quad \text{"en bas"}$$

$$(12e18) \quad (\Pi^-)^w = 1 + \sum_n \Theta_{-w}^n K_n^+ = 1 + \sum_n \Theta_w^{\tilde{n}} K_n^- \quad \text{"en haut"}$$

avec un moule Θ_w^\bullet défini par :

$$(12e19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_w^{n_1, \dots, n_r} = \frac{(w+\mu_*) (w+\mu_*-1) \dots (w+1) w (w-1) \dots (w-q_*+1) (w-q_*)}{r!} \\ \text{avec } \mu_* = \sum_{n_i < n_{i+1}} 1 ; q_* = \sum_{n_i \geq n_{i+1}} 1 ; \mu_* + q_* = r-1 \end{array} \right.$$

et l'on tire de là, pour les opérateurs de dérivation $\Pi_*^\pm : \varphi \rightarrow \Pi_*^\pm \frac{\partial}{\partial z} \varphi$ les expressions

$$(12e20) \quad \Pi_*^+ = + \sum \Theta^n K_n^+ = - \sum \Theta^{\tilde{n}} K_n^- \quad \text{"en bas"}$$

$$(12e21) \quad \Pi_*^- = - \sum \Theta^n K_n^+ = + \sum \Theta^{\tilde{n}} K_n^- \quad \text{"en haut"}$$

avec un moule Θ^\bullet défini par :

$$(12e22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta^\emptyset = 0 \text{ et } \Theta_*^{n_1, \dots, n_r} = (-1)^{q_*} \frac{\mu_*! q_*!}{r!} \quad (*) \\ \text{avec } \mu_* = \sum_{n_i < n_{i+1}} 1 ; q_* = \sum_{n_i \geq n_{i+1}} 1 ; \mu_* + q_* = r-1 \end{array} \right.$$

On remarque l'analogie formelle des formules (12e20) (12e21) (12e22) avec la formule (2a9) du lemme 2a1. En fait, c'est plus qu'une analogie, et le

(*) Sur \mathbb{R} , le moule Θ^\bullet est presque partout égal au moule fondamental T^\bullet de la section 4c. Le moule T^\bullet est alterné, mais difficile à calculer partout le moule Θ^\bullet n'est pas alterné, mais il est explicitement défini partout.

lemme en question peut servir à établir les formules ci-dessus.

On notera bien, d'autre part, qu'en appliquant à z ou à une fonction $\varphi(z)$ les séries d'opérateurs figurant aux seconds membres de (12e17) - (12e18) - (12e20) - (12e21), on n'a pas, en général convergence vers une fonction périodique : ce sont seulement les coefficients de Fourier qui convergent séparément.

Remarque 6 : Lorsque g est pleinement itérable, de générateur infinitésimal g_* , qu'on pose $G_* = g \frac{d}{dz}$ et qu'on définit les G_{*n} à partir de G_* comme les K_m^\pm à partir de K^\pm , alors les opérateurs Π^\pm et ${}^\pm\Pi$ (resp. Π_*^\pm) s'expriment en fonction de G_* au moyen de formules analogues aux précédentes, mais faisant intervenir les moules symétriques $T_{\pm 1}$ (resp. le moule alterné T^*) introduits à la section 4c.

Remarque 7. (fonctions invariantes et opérateurs invariants).

On peut d'une façon générale rechercher toutes les fonctions (ou séries de Fourier formelles) invariantes de la forme :

$$(12e28) \quad f \rightarrow \varphi^\pm(z) = z + \sum_{\omega \in \mathcal{R}^\pm} A_\omega(f) e^{-\omega z}$$

$$\text{resp (12e28bis)} \quad f \rightarrow \varphi_*^\pm(z) = \sum_{\omega \in \mathcal{R}^\pm} A_\omega(f) e^{-\omega z}$$

qui généralisent les fonctions (séries) Π^\pm et Π_*^\pm des formules (12b11) et (12b10) respectivement. Ici la condition d'invariance s'écrit :

$$(12e29) \quad \left. \begin{aligned} \varphi_{(h \circ f \circ h)}^\pm(z) &= -c + \varphi_{(f)}^\pm(z+c) \end{aligned} \right\} \text{ pour } h(z) =$$

$$\text{resp. (12e29bis)} \quad \left. \begin{aligned} \varphi_{*(h \circ f \circ h)}^\pm(z) &= \varphi_{*(f)}^\pm(z+c) \end{aligned} \right\} z+c + \mathcal{O}(z^{-1})$$

(*) Contrairement aux moules \mathbb{H}^* et \mathbb{H}_w^* , les moules T^* et T_w^* sont délicats à définir partout, mais ici c'est indispensable.

et implique que les invariants scalaires $\mathcal{A}_\omega^+(\mathcal{J})$ et $\mathcal{A}_\omega(\mathcal{J})$, coefficients de φ^\pm et φ_*^\pm , s'expriment d'une façon homogène par rapport aux invariants fondamentaux $A_\omega(\mathcal{J})$. Autrement dit :

$$(12e30) \quad \mathcal{A}_{\omega_0}^+ = \sum_{\omega_1 + \dots + \omega_n = \omega} \alpha_{\omega_1, \dots, \omega_n}^+ A_{\omega_1} \dots A_{\omega_n} = \sum_{\|\omega\| = \omega_0} \alpha_\omega^+ A_\omega$$

$$\text{resp. (12e30bis)} \quad \mathcal{A}_{\omega_0} = \sum_{\omega_1 + \dots + \omega_n = \omega} \alpha_{\omega_1, \dots, \omega_n} A_{\omega_1} \dots A_{\omega_n} = \sum_{\|\omega\| = \omega_0} \alpha_\omega A_\omega$$

} ω multiindice
} sans ordre

On peut aussi rechercher tous les opérateurs invariants de la forme

$$(12e31) \quad \mathcal{J} \rightarrow \Phi^\pm = 1 + \sum_n M_{\pm 1}^n K_n^+(\mathcal{J})$$

$$\text{(resp. (12e31bis))} \quad \mathcal{J} \rightarrow \Phi_*^\pm = \sum_n M^n K_n^+(\mathcal{J})$$

} n multiindice sur \mathbb{N} et
} $K_n^+(\mathcal{J}) = K_n^+$ défini comme en (12e3)

qui généralisent les opérateurs Π^\pm et Π_*^\pm des formules (12e4-5) et (12e20-21). On ajoute bien sûr les conditions :

$$(12e32) \quad \sigma(\Phi^\pm) = \Phi^\pm \otimes \Phi^\pm \quad (\text{isomorphisme})$$

$$\text{resp. (12e32bis)} \quad \sigma(\Phi_*^\pm) = \Phi_*^\pm \otimes 1 + 1 \otimes \Phi_*^\pm \quad (\text{dérivation})$$

Il se trouve cependant (voir exercice 12e6) que les conditions (12e31) + (12e32) déterminent les opérateurs $(\Pi^\pm)^\omega$ à une puissance ω près et que les conditions (12e31bis) + (12e32bis) déterminent l'opérateur Π_*^\pm à un facteur scalaire près. Pour avoir quelque chose de nouveau il faut donc prendre pour $M_{\pm 1}^\bullet$ et M^\bullet des moules-distributions (cf. section 4c) et chercher Φ^\pm (resp. Φ_*^\pm) sous la forme :

$$(12e33) \quad \mathcal{J} \rightarrow \Phi^\pm = 1 + \sum_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}^n} M_{\pm 1}^{t_1, \dots, t_n} K_{t_1, \dots, t_n}^+(\mathcal{J}) dt_1 \dots dt_n$$

resp. (12e33bis) $f \rightarrow \Phi_*^\pm = \sum_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}^n} M^{t_1, \dots, t_n} K_{t_1, \dots, t_n}^+(f) dt_1 \dots dt_n$

avec toujours les conditions (12e32) et (12e32bis). Pour M° bien choisi (cf. exercice 12e7) on obtient effectivement de nouveaux opérateurs invariants.

Or si l'on pose

(12e34) $\varphi^\pm(z) = \Phi^\pm \cdot z$ et $\varphi_*^\pm(z) = \Phi_*^\pm \cdot z$

on établit une correspondance entre les opérateurs invariants (12e31-31bis) et les fonctions (*) invariantes (12e28-28bis), c'est-à-dire en fin de compte entre les moules-distributions $M_{\pm 1}^\circ$ ou M° des formules (12e31-31bis) et les scalaires $\alpha_{\omega_1, \dots, \omega_n}^+$ ou $\alpha_{\omega_1, \dots, \omega_n}$ des formules (12e30-30bis). On trouvera à l'exercice 12e7 des indications sur cette correspondance et en particulier des critères pour que la série $\varphi^\pm = \varphi_{(g)}^\pm$ soit convergente (***) chaque fois que $f \in \mathcal{G}^\circ$, comme c'est le cas pour les fonctions invariante classiques $\pi^\pm = \pi_f^\pm$.

Section 13f : Le cas général (μ, α, ρ quelconques). Analyse harmonique multiple.

Le cas général (μ, α, ρ quelconques).

Nous serons très brefs, car le passage de la classe-type $(1, 1, 0)$ à la classe générale (μ, α, ρ) se fait sans difficulté. On obtient toujours des systèmes complets d'invariants en remplaçant les A_ω par les coefficients A_γ , indexé sur Ω_μ , des équations de résurgence (9F6). Si l'on remplace dans (9F6) la dérivation étrangère Δ_γ par l'opérateur étranger Δ_γ^\pm (cf.

(*) ou séries de Fourier formelles

(**) i.e. $\limsup_{|\omega| \rightarrow \infty} |\mathcal{A}_\omega^+|^{1/|\omega|} < \infty$

section 2b) on obtient des coefficients A_{γ}^{\pm} qui généralisent les A_{ω}^{\pm} et qui, tout comme eux (et à la différence des A_{γ}), possèdent la propriété

$$(13f1) \quad \limsup_{|\gamma| \rightarrow \infty} |A_{\gamma}^{\pm}|^{1/|\gamma|} < \infty$$

lorsque f appartient au groupe minimal G° .

On peut, comme dans le cas-type $(1,1,0)$, regrouper les invariants fondamentaux A_{γ} en séries analogues à π_{*}^{\pm} . La seule différence est qu'on obtient maintenant 2μ séries au lieu de la paire π_{*}^{+}, π_{*}^{-} pour $\mu=1$. Tout comme dans le cas-type, les $A_{\gamma}(f)$ et les $A_{\gamma}^{\pm}(f)$ sont des fonctions entières, à croissance exponentielle, des coefficients de Taylor a_n de f .

Enfin, les méthodes analytiques pour le calcul des invariants fondamentaux s'étendent aussi au cas général, avec comme seule différence que, dans les formules exprimant les A_{γ} et les A_{γ}^{\pm} en fonction des coefficients a_n de f , il faut faire intervenir le moule \mathcal{Z}° sur $\frac{1}{\mu} \mathbb{Z}$ et non plus sur \mathbb{Z} .

Analyse harmonique multiple.

Soit G le groupe G° ou l'un des groupes apparentés. L'analyse harmonique ^{multiple} sur G consiste à étudier les applications multacentrales (resp. multiinvariantes). On entend par là les applications :

$$(13f2) \quad A : f_1, \dots, f_m \rightarrow A(f_1, \dots, f_m)$$

de $G \times G \times \dots \times G$ (n fois) dans \mathbb{C} telles que

$$(13f3) \quad A(\bar{h} \circ f_i \circ h, \dots, \bar{h} \circ f_m \circ h) = A(f_1, \dots, f_m)$$

pour tout $h \in G$ (resp. pour tout $h \in G$ et tel que $\mu(h) \geq \mu(f_i) \forall i$)

La grande différence entre l'analyse harmonique simple et l'analyse harmonique multiple est que dans le premier cas, il n'existe que trois invariants élémentaires (*), à savoir $\mu(\mathcal{f}), \alpha(\mathcal{f}), \rho(\mathcal{f})$, alors que dans le second cas il existe une infinité dénombrable d'invariants élémentaires indépendants. Ceux-ci sont étudiés dans une publication antérieure (**).

L'autre point à noter est qu'en un certain sens tout invariant multiple de n arguments $\mathcal{f}_1, \dots, \mathcal{f}_n$ peut s'exprimer en fonction des invariants élémentaires des n arguments \mathcal{f}_i pris ensemble et des invariants non élémentaires de chaque argument \mathcal{f}_i pris séparément (**).

Remarque : A la section 12d nous avons passé sous silence les groupes G à cheval sur le groupe médian G' , c'est-à-dire tels que $G^\circ \not\subset G'$ et $G^\circ \not\supset G'$. Sur ces groupes, la recherche de systèmes d'invariants qui soient à la fois complets et véritablement explicitables semble très ardue (**). Mais ces groupes sont franchement irréguliers et on peut les oublier.

Section 12g : Représentations de G° et des groupes apparentés dans des Hilberts.

Soit G un groupe de l'intervalle critique $[G^\circ, G']$. On peut construire des représentations de G dans des espaces de Hilbert qui, sans être unitaires, "révèlent" malgré tout les invariants de G . Voici très brièvement comment on peut procéder.

Soit comme d'habitude $\mathcal{R} = 2\pi i \mathbb{Z}$ et $\mathcal{R} = \widetilde{\mathbb{C}} \div \mathcal{R}$. Appelons domaine de convolution sur \mathcal{R} tout domaine de \mathcal{R} qui contient "l'origine" Q_0 et qui possède la propriété suivante :

(*) Théorie des Invariants Holomorphes, J. Ecalle, Publ. Math. d'Orsay (Partie B, chapitre IV).

(**) cf. exercice 12f2.

(***) cf. exercice 12d1.

(12g1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute paire } \varphi_1, \varphi_2 \text{ de germes analytiques réguliers en } Q_0, \\ \text{le germe } \varphi_1 * \varphi_2 \text{ est prolongeable holomorphiquement à } \mathcal{D} \\ \text{tout entier chaque fois que } \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \text{ le sont} \end{array} \right.$

Cette condition n'est pas très sévère. Elle est remplie dès que le point courant P de \mathcal{D} peut-être joint à l'origine Q_0 par un chemin symétriquement contractable dans \mathcal{D} (cf. section 2a).

D'autre part, pour tout $Q \in \partial^{\circ} \mathcal{R}$ (c'est-à-dire pour tout point de ramification Q de \mathcal{R}) disons qu'un domaine \mathcal{D} de \mathcal{R} enlace Q si, après "suppression" du point de ramification Q , le domaine \mathcal{D} en vient à se recouvrir lui-même partiellement.

Celà étant, fixons un point de ramification Q et prenons sur \mathcal{R} un domaine de convolution \mathcal{D} qui enlace Q (il en existe). Désignons par $\dot{\mathcal{D}}$ la projection sur $\mathbb{C} - \mathbb{N}$ du domaine \mathcal{D} . Puis introduisons les espaces de Hardy $H^2(\mathcal{D})$ et $H^2(\dot{\mathcal{D}})$ formés des fonctions holomorphes de carré intégrable sur \mathcal{D} et $\dot{\mathcal{D}}$. $H^2(\dot{\mathcal{D}})$ peut évidemment être considéré comme sous-espace (strict) de $H^2(\mathcal{D})$.

A tout élément f de \mathcal{G} associons un opérateur F sur $H^2(\mathcal{D})$ qui agit de la manière suivante :

$$(12g2) \quad F \cdot \varphi = \varphi \circ f = B(\varphi \circ f) \quad \forall \varphi \in H^2(\mathcal{D})$$

où f (resp. φ) est la transformée de Borel (resp. de Laplace) de f (resp. φ), c'est-à-dire son image dans le modèle additif (resp. formel) et où \circ et \bullet désignent respectivement la composition ordinaire (ou substitution) et la composition convolutive (définie en (2e1)). Puisque

$f = B f$ est (*) holomorphe sur tout \mathcal{R} , il appartient (*) évidemment

(*) aux diracs près.

à $H^2(\mathcal{D})$ et puisque, à la différence de la composition ordinaire, la composition convolutive \circ conserve l'intégrabilité quadratique sur tout domaine de convolution (cf. exercice 12g1), on voit que l'application $f \rightarrow F$ définit une action (continue) de G dans $H^2(\mathcal{D})$. De plus, cette action laisse invariante le sous-espace $H^2(\dot{\mathcal{D}})$ car f est en fait (*) une fonction entière.

Or, l'invariant $A_Q(f)$ est, à un facteur près, le résidu en Q de la fonction résurgente f^* ou encore de f^w pour w irrationnel. Supposons que $A_Q(f) \neq 0$. Alors f^w est encore (*) une fonction holomorphe sur \mathcal{R} et \mathcal{D} , mais plus sur \mathbb{C} ni $\dot{\mathcal{D}}$. En effet, ce n'est plus une fonction entière, mais une fonction résurgente qui vérifie les équations (gf_g) pour toute dérivation étrangère Δ_w et une équation du même type pour l'opérateur $\Delta_Q = (1-R)\Gamma$ avec $\Gamma.Q = Q_0$ (cf. sections 2a et 2f). Par suite, l'opérateur F a des puissances irrationnelles F^w qui agissent encore sur $H^2(\mathcal{D})$ mais qui ne laissent plus invariant le sous-espace $H^2(\dot{\mathcal{D}})$, comme on s'en persuade en faisant agir F^w sur des φ polynomiaux par exemple. En fait F , comme opérateur sur $H^2(\dot{\mathcal{D}})$, n'admet pas de puissances irrationnelles si $A_Q(f) \neq 0$, mais il en admet si $A_Q(f) = 0$ et si \mathcal{D} n'enlace que le point Q .

De même, si $f, g \in G$ et si $A_Q(f) \neq A_Q(g)$, il correspond à f, g des F, G qui ne sont pas conjugués en tant qu'opérateurs sur $H^2(\dot{\mathcal{D}})$.

Comme on peut toujours construire des domaines \mathcal{D} qui n'enlacent que le point Q considéré, on voit qu'il existe des représentations hilbertiennes de G qui "révèlent" l'invariant A_Q et lui seul. A l'opposé, en prenant pour \mathcal{D} la surface \mathcal{R} toute entière et pour Hilbert l'espace de

(*) aux diracs près.

Hardy $H^2(\mathbb{R})$ relatif à un poids qui croît assez vite à l'infini et près de $\partial^{\circ} \mathbb{R}$ (cf. exercice 12g2) on peut construire une représentation hilbertienne de G qui "révèle" simultanément tous les invariants.

Bien entendu, ces représentations ne sont ni fermées (*) ni unitaires, ne peuvent pas l'être, et ne conduisent à rien qui ressemble à des caractères.

Section 12h : Résumé du chapitre 12.

Ce chapitre est tout entier consacré à l'analyse harmonique sur G° et sur les groupes apparentés, c'est-à-dire à la recherche sur ces groupes des fonctions centrales (scalaires ou non). On est aussi conduit à introduire des fonctions "presque centrales" ou invariantes qui, comme les fonctions centrales, vérifient identiquement

$$A(\bar{h} \circ f \circ h) = A(f)$$

mais seulement lorsque $\mu(h) > \mu(f)$. Comme d'habitude, on se limite aux classes-types, caractérisées par les valeurs $(\mu, \alpha, \rho) = (1, 1, 0)$ des trois invariants élémentaires.

Le problème de l'analyse harmonique se posant surtout pour les groupes de l'intervalle critique $[G^{\circ}, G']$, on commence par examiner le plus grand d'entre eux, qui est G'^{-} . On s'aperçoit que, pour tout point de ramification Q de la surface $\mathbb{R} = \widehat{\mathbb{C}} \div \Omega$ l'application $f \rightarrow A_Q(f)$ qui associe à f le résidu en Q de son itérateur f^* (dans le modèle additif) est invariante. Ainsi, pour :

$$f(z) = z + 1 + O(z^{-2}) \quad ; \quad h(z) = z + c + O(z^{-1}) \quad ; \quad Q = \omega$$

on a identiquement :

$$A_Q(\bar{h} \circ f \circ h) = e^{-c\omega} A_Q(f)$$

(*) autrement dit, l'image de G dans $\text{Aut } H^2(\mathbb{D})$ n'est pas fermée.

L'ensemble $\{A_Q ; Q \in \partial^0 \mathcal{R}\}$ constitue un système complet d'invariants : il suffit à caractériser les classes de conjugaison. Toutefois, ce système n'est pas libre : les A_Q ne sont pas indépendants. On y remédie en introduisant les coefficients $A_\omega, A_\omega^+, A_\omega^-$ des équations de résurgence :

$$\Delta_\omega f^* = -A_\omega e^{-\omega(f^* - I)} ; \Delta_\omega^+ f^* = -A_\omega^+ e^{-\omega(f^{*-I})} ; \Delta_\omega^- f^* = -A_\omega^- e^{-\omega(f^{*-I})}$$

qui définissent trois systèmes complets et libres, dits systèmes fondamentaux, d'invariants sur G^1 :

$$\{A_\omega ; \omega \in \mathcal{Q}^*\} ; \{A_\omega^+ ; \omega \in \mathcal{Q}^*\} ; \{A_\omega^- ; \omega \in \mathcal{Q}^*\}$$

Il se trouve que les invariants A introduits ci-dessus sont tous holomorphes et exponentiels, en ce sens que $A(f)$ est une fonction entière, à croissance exponentielle, de l'infinité des coefficients de Taylor de f .

Sur les autres groupes de l'intervalle critique $[G^0, G^1]$ les trois systèmes fondamentaux d'invariants restent complets. On voit toutefois apparaître des restrictions du type (12d1) ou (12d2) sur la croissance des invariants. Sur le groupe minimal G^0 , les restrictions en question revêtent la forme

$$\limsup_{\omega \rightarrow \infty} |A_\omega^+|^{1/|\omega|} < \infty ; \limsup_{\omega \rightarrow \infty} |A_\omega^-|^{1/|\omega|} < \infty$$

Elles assurent donc la convergence des séries de Fourier formées avec les A_ω^\pm . De fait, ces séries de Fourier s'identifient aux fonctions périodiques invariantes :

$$\pi^+ = \int_-^* \circ f_+^* \quad (\text{en bas}) ; \pi^- = \int_+^* \circ f_-^* \quad (\text{en haut})$$

qu'on peut définir élémentairement sur le groupe G^0 .

Suit une section consacrée au calcul pratique des invariants fondamentaux. Les formules auxquelles on aboutit font un large usage des

divers moules, symétriques ou alternés, qui ont été introduits à la section 4c.

On termine par quelques réflexions sur le cas général (n, α, ρ quelconques), sur les représentations de G^0 et des groupes apparentés dans les espaces de Hilbert, sur l'analyse harmonique "multiple" et quelques autres sujets connexes.

Chapitre 13 : Synthèse harmonique dans G° et les groupes apparentés.

Section 13a : Introduction.

Au chapitre précédent, à chaque élément f de G° ou des groupes apparentés, on a associé des invariants scalaires $A_\omega, A_\omega^+, A_\omega^-$ qui généralisent les fonctions centrales et qui sont définis comme résidus de certaines fonctions résurgentes associées à f . On a ensuite regroupé ces invariants dans des séries de Fourier. Par exemple, dans le cas-type

$\mu(f) = 1, \alpha(f) = 1, \rho(f) = 0$, on a posé :

$$(13a1) \quad \pi^+(z) = z - \sum_{\omega \in \Omega^+} A_\omega^+ e^{-\omega z} \quad ; \quad \pi^-(z) = z - \sum_{\omega \in \Omega^-} A_\omega^- e^{-\omega z}$$

$$(13a2) \quad {}^+\pi(z) = z - \sum_{\omega \in \Omega^+} A_\omega^- e^{-\omega z} \quad ; \quad {}^-\pi(z) = z - \sum_{\omega \in \Omega^-} A_\omega^+ e^{-\omega z}$$

$$(13a3) \quad \pi_*^+(z) = -{}^+\pi_*(z) = -\sum_{\omega \in \Omega^+} A_\omega e^{-\omega z} \quad ; \quad \pi_*^-(z) = -{}^-\pi_*(z) = -\sum_{\omega \in \Omega^-} A_\omega e^{-\omega z}$$

avec $\Omega = 2\pi i \mathbb{Z}$, $\Omega^+ = 2\pi i \mathbb{N}^*$, $\Omega^- = -2\pi i \mathbb{N}^*$.

On a vu d'autre part que, partant d'un groupe plein G^K , on avait des majorations précises, du type (12d1) ou (12d2), pour les coefficients A_ω^\pm des séries π^\pm et ${}^\pm\pi$. En faisant un changement de variable :

$$(13a4) \quad \left\{ \begin{array}{l} z \longrightarrow \pm \frac{1}{2\pi i} \log z \\ \pi^\pm(z) \longrightarrow \pi^\pm(z) = \exp\left(\pm 2\pi i \pi^\pm\left(\pm \frac{1}{2\pi i} \log z\right)\right) = z + \sum_{n \geq 0} \alpha_n^\pm z^{-n} \\ {}^\pm\pi(z) \longrightarrow {}^\pm\pi(z) = \exp\left(\pm 2\pi i {}^\pm\pi\left(\pm \frac{1}{2\pi i} \log z\right)\right) = z + \sum_{n \geq 0} {}^\pm\alpha_n z^{-n} \end{array} \right.$$

on aboutit à des séries π^\pm et ${}^\pm\pi$ qui appartiennent à un certain groupe plein G^{K_0} , apparenté à G° et défini par une condition K_0 facilement déduisible de la croissance des A_ω^\pm , c'est-à-dire en définitive de K elle-même.

Si donc on considère des f de la forme-type $\mu(f)=1, \alpha(f)=1, \rho(f)=0$, autrement dit si on fait varier f dans $G_{1,1,0}^{\mathbb{K}}$ on a l'application :

$$(13a5) \quad f \rightarrow (\pi^+, \pi^-) \quad G_{1,1,0}^{\mathbb{K}} \rightarrow G^{\mathbb{K}_0} \times G^{\mathbb{K}_0}$$

Mais d'après la proposition 12d2, chacun des 3 systèmes fondamentaux d'invariants est complet. C'est vrai en particulier pour le système

$\{A_\omega^+; \omega \in \Omega^*\}$ et ceci signifie que (13a5) applique injectivement les classes de conjugaison de $G_{1,1,0}^{\mathbb{K}}$ dans $G^{\mathbb{K}_0} \times G^{\mathbb{K}_0}$. Cette application est-elle aussi surjective ? En d'autres termes, le système $\{A_\omega^+; \omega \in \Omega^*\}$ est-il libre ?

On verra que la réponse est oui. Ce sera l'objet des théorèmes de synthèse harmonique qui affirment, pour chaque couple (π^+, π^-) aux coefficients \mathbb{K}_0 -croissants, l'existence d'un antécédent f aux coefficients \mathbb{K} -croissants.

Cet antécédent n'est évidemment jamais unique, puisque tous les conjugués $h^{-1} \circ f \circ h$ d'un f donné ont mêmes invariants que f quand $\mu(h) > \mu(f)$. On verra cependant, dans le cas du groupe minimal, qu'il existe, dans chaque classe de conjugaison de G^0 , des représentants f privilégiés qui sont explicitement constructibles (c'est la "synthèse harmonique canonique") et présentent des propriétés remarquables.

Section 13b : Synthèse harmonique dans G^+ .

Rappelons que le groupe G^+ est formé de toutes les séries

$f(z) = z \left(1 + \sum_{n \geq 1} a_n z^{-n} \right)$ pour lesquelles $n^{-1} |a_n|^{1/n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ et que c'est le plus grand groupe radial de l'intervalle critique.

Raisonnons sur des éléments f de G^+ de la forme-type (9a5). Si on passe au modèle additif, f est de la forme $\delta' + \delta + \gamma_+$, où δ, δ' sont des diracs et γ_+ une fonction entière libre de croître aussi vite que l'on

veut. De même, f^* est une fonction résergente dont la croissance n'est a priori soumise à aucune restriction. Si maintenant on se reporte à la formule (9b12+) qui exprime f^* en fonction de γ_+ (par le biais de g) on s'aperçoit que pour tout z_0 non imaginaire pur, les valeurs de f^* en chaque point $n z_0$ (*) :

- sont aisément majorables en fonction des valeurs de γ_+ sur le disque $|z| \leq n|z_0|$ ou même simplement sur le segment $[0, n z_0]$;

- dépendent effectivement de la valeur de γ_+ en $n z_0$.

On peut donc, pour toute fonction entière γ_+ , tout entier n et tout couple scalaire (A_+, A_-) , ajouter à γ_+ un accroissement fini $D\gamma_+$ inférieur en valeur absolue à 2^{-n} sur le disque $|z| < n|z_0|$ et tel que le

$f^* + Df^*$ correspondant garde aux points $\pm z_0, \pm 2z_0, \dots, \pm n z_0$ les mêmes valeurs que f^* , tout en prenant aux points $\pm (n+1) z_0$ les valeurs A_{\pm} . Partant d'une suite scalaire quelconque $\{A_n; n \in \mathbb{Z}^*\}$ on peut donc, de proche en proche, construire une fonction entière

$\gamma_+ = \gamma_0 + D_1 \gamma_+ + D_2 \gamma_+ + D_3 \gamma_+ + \dots$ à laquelle la formule (9b12+) fait correspondre un fonction résergente f^* qui prend exactement les valeurs aux points A_n . Enfin, au prix d'une légère modification dans le raisonnement, on peut remplacer la suite $\{n z_0\}$ par les suites $\{S^n Q_0\}$ ou $\{T^n Q_0\}$ de points de ramification et les valeurs en $n z_0$ par les résidus en ces points de ramification, c'est-à-dire en fin de compte par les A_{ω}^{\pm} .
D'où l'énoncé :

Proposition 13b1 (Synthèse harmonique sur G^{1-} : existence)

Chacun des trois systèmes fondamentaux d'invariants $\{A_{\omega}^+\}, \{A_{\omega}^-\}, \{A_{\omega}\}$

(*) plus exactement, au point de $R(Q_{\pm})$ situé au-dessus de $n z_0$.

sur le groupe G^+ est libre (*). En particulier, l'application :

$$(13b1) \quad f \rightarrow (\mathfrak{m}^+, \mathfrak{m}^-) ; G_{1,1,0}^+ \rightarrow G^\infty \times G^\infty$$

est surjective.

Partons maintenant d'une famille scalaire quelconque

$\{A_\omega, \omega \in \Omega^* = 2\pi i \mathbb{Z}^*\}$ et cherchons à construire explicitement des éléments f de G^+ , de la forme-type $\mu(f)=1, \alpha(f)=1, \rho(f)=0$ et tels que $A_\omega(f) = A_\omega$ pour tout ω .

Il suffit bien sûr de construire l'itérateur f^* ou l'itérateur inverse *f de f puisque

$$(13b2) \quad f = {}^*f \circ l \circ f^* \quad (\text{avec } l(z) = z + 1)$$

Or, d'après la section 9e, si f admet pour invariants les A_ω , son itérateur f^* vérifie les équations de résurgence :

$$(13b3) \quad \Delta_\omega f^* = -A_\omega e^{-\omega(f^*-I)} \quad (\forall \omega \in \Omega^*)$$

tandis que son itérateur inverse *f vérifie les équations :

$$(13b4) \quad \Delta_\omega {}^*f = A_\omega \partial {}^*f \quad (\partial = \frac{\partial}{\partial z} ; \forall \omega \in \Omega^*)$$

Réciproquement, le système (13b3) (resp. (13b4)) caractérise les itérateurs (resp. les itérateurs inverses) des éléments f d'invariants A_ω . Soit en effet une fonction résurgente h de la forme $h(z) = z + O(z^{-1})$ et solution du système (13b3). En raisonnant comme à la section 9e (**), on montre que h admet un inverse de composition \tilde{h} qui vérifie le système (13b4). Puis, en utilisant la règle (2e3) sur la différentiation étrangère

(*) et complet, d'après la proposition 12b2. (**) pour établir (9e13)

des fonctions composées, on montre que

$$(13b5) \quad \Delta_{\omega} (k \circ l \circ h) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega^* \quad (l(z) = z+1)$$

Mais (13b5) exprime que $k \circ l \circ h$ est un élément de G^1 . Nous le noterons f . Vu la forme de h , f est du type $\mu(f)=1, \alpha(f)=1, \rho(f)=0$ et, comme la propriété de factorisation (13b2) détermine f^* sous réserve que $f^*(z) = z + \theta(z^{-1})$, et il est clair que l'itérateur f^* de f coïncide avec h .

Tout revient donc à résoudre, au choix, le système (13b3) ou (13b4).

Bien que le système (13b4) soit linéaire, il vaut mieux considérer le système (13b3), car ce dernier a l'avantage d'être pur, c'est-à-dire de ne faire intervenir que les dérivations étrangères Δ_{ω} et non la dérivation naturelle

$\partial = \frac{\partial}{\partial z}$. Cette circonstance fait qu'en partant de l'expression de la forme restreinte des itérateurs (*) :

$$(13b6) \quad \langle f^* \rangle = I - \sum A_{\omega} \Gamma_{\omega} Z^{\omega} \quad (\omega \text{ multiindice sur } \Omega^*)$$

puis en y effectuant la substitution

$$(13b7) \quad Z^{\omega_1, \dots, \omega_n} \longrightarrow W^{\omega_1, \dots, \omega_n}$$

pour une représentation Δ -stable $Z^{\omega} \rightarrow W^{\omega}$ des pseudovariables (**)

on obtient dans le modèle additif (***) une expression

$$(13b8) \quad f^*(P) = \delta'(P) - \sum_{\omega} A_{\omega} \Gamma_{\omega} W^{\omega}(P)$$

qui, sous réserve de convergence, satisfait au système (13b3) (****)

(*) Cf. section 9e. (**) Cf. section 6d. (***) Cf. section 3a.

(****) Ce fait peut aussi se vérifier directement au prix d'un raisonnement combinatoire.

Discutons maintenant la convergence de (13b8). D'après la proposition (6d15), la représentation Δ -stable générale W se factorise selon $W = \mathcal{U} \times \mathcal{M}$, où \mathcal{U} est la représentation Δ -stable canonique et \mathcal{M} n'importe quelle représentation pseudo-constante. Autrement dit :

$$(13b9) \quad W^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \mathcal{U}^{\omega_1, \dots, \omega_n} + \mathcal{M}^{\omega_1, \dots, \omega_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{U}^{\omega_1, \dots, \omega_j} * \mathcal{M}^{\omega_{j+1}, \dots, \omega_n}$$

En jouant convenablement sur les fonctions entières $\mathcal{M}^{\omega_1, \dots, \omega_n}$, on peut faire en sorte que les fonctions résurgentes $W^{\omega_1, \dots, \omega_n}$ soient assez petites, tout au moins sur des domaines du type

$$\{ P ; d(P, Q_0) < |\omega_1| + \dots + |\omega_n| - \varepsilon \}$$

Mais on ne peut pas les diminuer simultanément d'une manière arbitraire, car elles sont liées par la table de multiplication :

$$W^{\omega^1} * W^{\omega^2} = \sum_{\omega', \omega'' < \omega} W^{\omega} \quad (\omega, \omega', \omega'' \text{ multiindices})$$

Pour y voir clair, il faut donc introduire la représentation réduite (*) :

$$(13b10) \quad Z^{\underline{\omega}} = \sum_{\underline{\omega}' = \underline{\omega}} \Gamma_{\omega'} Z^{\omega'} \rightarrow W^{\underline{\omega}} = \sum_{\underline{\omega}' = \underline{\omega}} \Gamma_{\omega'} W^{\omega'}$$

et écrire

$$(13b11) \quad f^*(P) = \delta(P) - \sum_{\underline{\omega}} A_{\underline{\omega}} W^{\underline{\omega}}(P) \quad (\underline{\omega} \text{ multiindice sans ordre})$$

Mais cette forme n'est pas encore entièrement satisfaisante, car les $W^{\underline{\omega}}$ de multiindice $\underline{\omega}$ dégénéré s'expriment polynomialement en fonction des $W^{\underline{\omega}}$ de multiindice non dégénéré (**). Il faut donc envisager la décomposition canonique du second membre de (13b11). On obtient celle-ci en substituant les $W^{\underline{\omega}}$ aux $Z^{\underline{\omega}}$ dans la formule (10d3). Il vient alors :

(*) Cf. chapitre 10.

(**) Cf. proposition 10c2. On peut substituer les $W^{\underline{\omega}}$ aux $Z^{\underline{\omega}}$ dans la formule (10c9).

$$(13b12) \quad \mathcal{J}^*(P) = \mathcal{S}'(P) - \sum_{d(\underline{\omega})=0} A_{\underline{\omega}} W_{(P)}^{\underline{\omega}} + \sum_{x \in \Omega^*} \frac{1}{x} \log_* \left\{ 1 - x \sum_{\substack{x(\underline{\omega})=x \\ d(\underline{\omega})=1}} A_{\underline{\omega}} W_{(P)}^{\underline{\omega}} \right\}$$

avec bien sur $\log_* (1+\varphi) = \sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n} \varphi^{*n}$. Le second membre de (13b12) ne fait intervenir que des multiindices $\underline{\omega}$ non dégénérés. Les $W^{\underline{\omega}}$ correspondants ne sont liés entre eux que par les relations différentielles

$$(13b13) \quad \Delta_{\underline{\omega}_0} W^{\underline{\omega}} = \begin{cases} \sum_{\substack{\underline{\omega}_0, \underline{\omega}' \dots \underline{\omega}^d = \underline{\omega} \\ d!}} \frac{(\underline{\omega}_0)^d}{d!} W^{\underline{\omega}'} \dots W^{\underline{\omega}^d} & \text{si } \underline{\omega}_0 \text{ divise } \underline{\omega} \text{ strictement} \\ 1 & \text{si } \underline{\omega}_0 = \underline{\omega} \\ 0 & \text{si } \underline{\omega}_0 \text{ ne divise pas } \underline{\omega} \end{cases}$$

obtenus de la même manière que la relation (10b7). D'autre part, la réduction de la relation (13b9) donne

$$(13b14) \quad W^{\underline{\omega}} = M^{\underline{\omega}} + \sum_{\substack{\underline{\omega}^0, \underline{\omega}' \dots \underline{\omega}^d = \underline{\omega}}} \|\underline{\omega}^0\|^d U^{\underline{\omega}^0} * M^{\underline{\omega}'} * \dots * M^{\underline{\omega}^d}$$

comme on le voit en appliquant (12b20).

Soit maintenant, sur la surface $R = \mathbb{C} \div \Omega$, une suite croissante de domaines \mathcal{H}_n tels que :

(i) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_n$

(ii) chaque \mathcal{H}_n contient le point Q_0

(iii) chaque point \mathcal{H}_n peut être relié (sur R) au point Q_0 par un chemin de longueur $\leq 2\pi(n - \frac{1}{2})$.

Pour tout multiindice $\underline{\omega} = (\underline{\omega}_1, \dots, \underline{\omega}_n)$ tel que $|\underline{\omega}_1| + \dots + |\underline{\omega}_n| \leq 2\pi n$, il est clair d'après (iii) et les règles de dérivation (13b13), qu'il n'existe aucun opérateur étranger du type $(I-R)\Gamma$ qui ait son support $\Gamma^{-1}Q_0$ dans \mathcal{H}_n et qui, appliqué à $W^{\underline{\omega}}$, fournisse un dirac. Cela revient à dire que le domaine \mathcal{H}_n n'enlace aucun pôle de $W^{\underline{\omega}}$

(il peut toutefois enlacer des singularités logarithmiques). Il est donc loisible, en jouant sur les termes M^ω et M^{ω^i} de la formule (13b14), de rendre W^ω aussi petit que l'on veut en valeur absolue sur \mathcal{K}_n . Plus généralement, pour toute famille scalaire positive $\{\varepsilon^\omega\}$, on peut, par le procédé de la suite diagonale, construire une représentation Δ -stable $Z^\omega \rightarrow W^\omega$ telle que

$$|W^{\omega_1, \dots, \omega_n}(P)| \leq \varepsilon^{\omega_1, \dots, \omega_n} \quad (\forall P \in \mathcal{K}_n; \forall n \leq \frac{1}{2\pi} (|\omega_1| + \dots + |\omega_n|))$$

Finalement, en choisissant $\{\varepsilon^\omega\}$ telle que $\sum \varepsilon^\omega |A_\omega| < \infty$ puis en construisant $\{W^\omega\}$ comme ci-dessus, on a le moyen de rendre la série (13b12) uniformément convergente sur tout compact de \mathcal{R} , ce qui fournit un itérateur f^* et, par (13b2), un élément f de G^+ qui admet les A_ω pour invariants.

On peut donc énoncer :

Proposition 13b2 : (Synthèse harmonique sur G^+ : construction)

Le problème de la synthèse harmonique sur G^+ se résout dans le cas-type (*) grâce aux formules (13b12) et (13b2) qui font intervenir une représentation Δ -stable $Z^\omega \rightarrow W^\omega$ convenablement choisie en fonction de la famille $\{A_\omega\}$ des invariants. Pour chaque restriction de croissance imposée à $\{A_\omega\}$, on peut choisir une représentation $Z^\omega \rightarrow W^\omega$ valable uniformément dans tous les cas.

Section 13c : Synthèse harmonique dans G^0 . Existence et construction.

D'après la section 12c tout f élément de G^0 et de la forme-type (9a5) a sa classe de conjugaison caractérisée par une paire (π^+, π^-) d'applications périodiques (**). Inversement, on vient de voir à la section

(**) Plus exactement π^+ (resp. π^-) est un germe défini en bas (resp. en haut) et π^+, π^- sont définis modulo une translation (la même pour les deux)

(*) $(\rho, \alpha, \rho) = (1, 1, 0)$

précédente que toute paire (π^+, π^-) de séries de Fourier de la forme

$$(13c1) \quad \pi^+(z) = z - \sum_{\omega \in \Omega^+} A_\omega^+ e^{-\omega z} ; \quad \pi^-(z) = z - \sum_{\omega \in \Omega^-} A_\omega^+ e^{-\omega z}$$

caractérisait une classe de conjugaison de G^+ . Reste à voir si cette classe possède des représentants dans G° lorsque π^+, π^- sont convergents, c'est-à-dire lorsque $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} |A_\omega^+|^{1/|\omega|} < \infty$.

Proposition 13c1 (Synthèse harmonique dans G°).

A toute paire (π^+, π^-) d'applications holomorphes de la forme (13c1), périodiques de période 1, définies en bas et en haut respectivement, correspondent effectivement des éléments f de G° , de la forme (9a5) et qui admettent (π^+, π^-) pour invariants. En d'autres termes, le système fondamental d'invariants $\{A_\omega^+\}$ et par suite aussi le système $\{A_\omega^-\}$ sont chacun libres sur le groupe G° .

Première démonstration : on peut établir ce résultat en faisant le changement de variable $z \rightarrow 1/f(1/z)$ qui transporte le point fixe de ∞ en 0, puis en passant en coordonnées polaires et en faisant un éclatement réel

$S = \{0\} \times T$ de O ($T = \text{tore}$). On introduit ensuite les faisceaux \mathcal{A}_n (resp. \mathcal{A}_∞) de germes tangents à l'identité d'ordre $n+1$ (resp. d'ordre infini) en O . Il faut alors montrer que la flèche naturelle $H^1(S, \mathcal{A}_\infty) \rightarrow H^1(S, \mathcal{A}_1)$ a une image réduite à l'élément trivial de $H^1(S, \mathcal{A}_1)$.

La démonstration, due à M. B. Malgrange, figure en Appendice. Elle se fait en deux temps: résolution en G^∞ , puis passage à l'analytique complexe.

Deuxième démonstration : On peut aussi suivre une autre démarche, qui consiste à étudier l'application tangente à l'application

$$(13c2) \quad f \rightarrow (\pi^+, \pi^-) ; \quad G_{1,1,0}^\circ \rightarrow \{\text{couples de germes périodiques}\}$$

et qui conduit, en un sens, à une construction effective de l'application inverse. Pour montrer l'existence d'éléments f de couple invariant (π^+, π^-) donné, cherchons d'abord à caractériser les itérateurs sectoriels de ces f .

Lemme 13c1 : Pour tout couple (π^+, π^-) de germes périodiques de la forme (13c1), s'il existe dans G^0 des f admettant (π^+, π^-) pour couple invariant, alors ces f ont leurs itérateurs sectoriels (f_+^*, f_-^*) caractérisés par les propriétés suivantes :

(i) f_+^* (resp. f_-^*) est définie holomorphe en haut, en bas et à droite (resp. à gauche)

(ii) f_+^* (resp. f_-^*) admet un développement asymptotique de la forme
 $z + \sum_{n \geq 1} \beta_n z^{-n}$ lorsque $z \rightarrow \infty$ dans n'importe quelle direction,
sauf peut-être dans la direction $\text{Arg } z = -\pi$ (resp. $\text{Arg } z = 0$)

(iii) f_+^* et f_-^* vérifient les relations :

$$(13c3) \quad \pi^+ \circ f_-^* = f_+^* \quad \text{en bas}$$

$$(13c4) \quad \pi^- \circ f_+^* = f_-^* \quad \text{en haut.}$$

En effet, s'il existe des f admettant (π^+, π^-) pour couple invariant, on a (i) et (ii) d'après la section 9c et (iii) d'après la section 12c. Réciproquement, s'il existe des germes (f_+^*, f_-^*) vérifiant (i) + (ii) + (iii), ils possèdent manifestement des inverses de composition $({}^*f_+, {}^*f_-)$ qui vérifient encore (i) + (ii) et, au lieu de (iii), les relations :

$$(13c3bis) \quad {}^*f_- \circ {}^+\pi = {}^*f_+ \quad \text{en bas}$$

$$(13c4bis) \quad {}^*f_+ \circ {}^-\pi = {}^*f_- \quad \text{en haut}$$

où $\pm\pi$ désigne bien sûr l'inverse de composition de π^\pm . Si donc nous posons :

$$\left. \begin{aligned} (13c5) \quad f_1 &= {}^*f_+ \circ l \circ f_+^* \\ (13c6) \quad f_2 &= {}^*f_- \circ l \circ f_-^* \end{aligned} \right\} \text{ avec } l(z) = z+1$$

nous obtenons une fonction f_1 (resp. f_2) qui est définie holomorphe en haut, en bas, et à droite (resp. à gauche) et qui possède un développement asymptotique du type (9a5) :

$$z+1 + \sum_{n \geq 2} a_n z^{-n+1}$$

dans chaque direction, sauf peut-être dans la direction $\text{Arg } z = -\pi$ (resp. $\text{Arg } z = 0$). Mais, du fait de (13c4) - (13c4bis) et à cause de la périodicité de π^- de $-\pi$, il vient :

$$f_2 = {}^*f_- \circ l \circ f_-^* = {}^*f_+ \circ {}^{-\pi} \circ l \circ \pi^- \circ f_+^* = {}^*f_+ \circ l \circ f_+^* = f_1$$

La fonction $f = f_1 = f_2$ est donc définie holomorphe dans un voisinage complet de ∞ , elle est de la forme-type (9a5) et, comme par construction :

$$f_+^* \circ f = 1 + f_+^* \quad ; \quad f_-^* \circ f = 1 + f_-^*$$

cela signifie que f admet f_+^* et f_-^* pour itérateurs sectoriels. Ceci prouve le lemme.

Lemma 13c2 :

α) Soit (π^+, π^-) deux germes périodiques de la forme (13c1), définis en bas et en haut respectivement. Supposons en outre qu'il existe dans G° un f de la forme-type (9a5) qui admette (π^+, π^-) pour couple invariant. Alors, pour un accroissement infinitésimal $(\delta\pi^+, \delta\pi^-)$ donné, il existe toujours des accroissements δf tels que $f + \delta f$ admette $(\pi^+ + \delta\pi^+, \pi^- + \delta\pi^-)$

pour couple invariant.

β) On obtient des solutions $f_+ + \delta f_+$ particulières par l'intermédiaire
de leurs itérateurs sectoriels $f_+^* + \delta f_+^*$, $f_-^* + \delta f_-^*$, eux-mêmes
donnés par les formules suivantes (*)

$$(13c7) \quad \frac{\delta f_+^*(z)}{\partial f_+^*(z)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{t^+}^{-i\infty} \frac{dz}{z-z} \frac{(\frac{\delta \pi^+}{\partial \pi^+}) \circ f_+^*(z)}{\partial f_+^*(z)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{t^-}^{+i\infty} \frac{dz}{z-z} \frac{(\frac{\delta \pi^-}{\partial \pi^-}) \circ f_+^*(z)}{\partial f_+^*(z)}$$

$$(13c8) \quad \frac{\delta f_-^*(z)}{\partial f_-^*(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{t^+}^{-i\infty} \frac{dz}{z-z} \frac{(\frac{\delta \pi^+}{\partial \pi^+}) \circ f_-^*(z)}{\partial f_-^*(z)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{t^-}^{+i\infty} \frac{dz}{z-z} \frac{(\frac{\delta \pi^-}{\partial \pi^-}) \circ f_-^*(z)}{\partial f_-^*(z)}$$

valables pour n'importe quels scalaires t^+, t^- (avec $\mp \operatorname{Im} t^\pm$ assez grand).

Il suffit de montrer le point β, car le point α en découle.
 Notons d'abord qu'on peut toujours choisir t^+ (resp. t^-) suffisamment en bas (en haut) pour que la demi-droite verticale joignant t^+ à $-i\infty$ (resp. t^- à $+i\infty$) soit entièrement située dans le domaine de définition des intégrandes et que la formule (13c7) (resp. (13c8)) ait un sens. Lorsque z est très loin vers la droite ou vers le haut (resp. vers la gauche ou vers le bas), le chemin d'intégration ne risque pas de rencontrer z , et quand z se dirige vers le bas (resp. vers le haut), il suffit de déformer en conséquence le chemin d'intégration. On voit par là que le couple

$(f_+^* + \delta f_+^*, f_-^* + \delta f_-^*)$ satisfait aux critères (i) et (ii) du lemme

13c1. Montrons qu'il satisfait aussi au critère (iii) relativement à

$(\pi^+ + \delta \pi^+, \pi^- + \delta \pi^-)$. En prenant les variations de (13c3) et (13c4),

on voit que (iii) équivaut ici à :

(*) où le symbole δ (resp. ∂) dénote un accroissement infinitésimal (resp. la prise de la dérivation).

$$(13c9) \quad \frac{\delta f_+^*}{\partial f_+^*} - \frac{\delta f_-^*}{\partial f_-^*} = \frac{\frac{\delta \pi^+}{\partial \pi^+} \circ f_-^*}{\partial f_-^*} \quad \text{en bas}$$

$$(13c10) \quad \frac{\delta f_+^*}{\partial f_+^*} - \frac{\delta f_-^*}{\partial f_-^*} = - \frac{\frac{\delta \pi^-}{\partial \pi^-} \circ f_+^*}{\partial f_+^*} \quad \text{en haut}$$

Or, compte tenu des formules (13c7) - (13c8), des conventions d'intégration dans ces formules et des relations entre accroissement infinitésimaux :

$$(13c11) \quad \frac{\delta^+ \pi}{\partial^+ \pi} = - (\delta \pi^+) \circ^+ \pi ; \quad \frac{\frac{\delta^+ \pi}{\partial^+ \pi} \circ f_+^*}{\partial f_+^*} = - \frac{\frac{\delta \pi^+}{\partial \pi^+} \circ f_-^*}{\partial f_-^*}$$

$$(13c12) \quad \frac{\delta^- \pi}{\partial^- \pi} = - (\delta \pi^-) \circ^- \pi ; \quad \frac{\frac{\delta^- \pi}{\partial^- \pi} \circ f_-^*}{\partial f_-^*} = - \frac{\frac{\delta \pi^-}{\partial \pi^-} \circ f_+^*}{\partial f_+^*}$$

on vérifie que, pour z en bas :

$$(13c13) \quad \frac{\delta f_+^*}{\partial f_+^*}(z) - \frac{\delta f_-^*}{\partial f_-^*}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z-z} \frac{\frac{\delta \pi^+}{\partial \pi^+} \circ f_-^*(z)}{\partial f_-^*(z)}$$

et pour z en haut :

$$(13c14) \quad \frac{\delta f_+^*}{\partial f_+^*}(z) - \frac{\delta f_-^*}{\partial f_-^*}(z) = - \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z-z} \frac{\frac{\delta \pi^-}{\partial \pi^-} \circ f_+^*(z)}{\partial f_+^*(z)}$$

Ces formules, où le symbole \oint indique que z contourne z dans le sens positif, équivalent manifestement à (13c9) - (13c10) et ceci établit le lemme 13c2. Il en résulte qu'en chaque point f , l'application (13c2) admet une application tangente :

$$(13c15) \quad \delta f \rightarrow (\delta \pi^+, \delta \pi^-)$$

qui est surjective, puisque tout couple $(\delta \pi^+, \delta \pi^-)$ de germes périodiques

est l'image d'au moins un δf , à savoir :

$$(13c16) \quad \begin{aligned} \delta f &= \delta \left({}^*f_+ \circ l \circ f_+^* \right) = \frac{\delta f_+^*}{\partial f_+^*} \cdot \partial f - \left(\frac{\delta f_+^*}{\partial f_+^*} \right) \delta f \\ &= \delta \left({}^*f_- \circ l \circ f_-^* \right) = \frac{\delta f_-^*}{\partial f_-^*} \cdot \partial f - \left(\frac{\delta f_-^*}{\partial f_-^*} \right) \delta f \end{aligned}$$

pour des accroissements $(\delta f_+^*, \delta f_-^*)$ donnés par les formules (13c7) - (13c8).

Une application continue, d'application tangente partout surjective, peut évidemment n'être pas surjective. Pourtant, les lemmes précédents conduisent quand-même à une démonstration de la proposition 13c1, car on peut obtenir un antécédent f_1 d'un couple π_1^+, π_1^- quelconque en procédant comme suit :

- on part d'un couple (π_0^+, π_0^-) d'antécédent f_0 connu,

- on joint (π_0^+, π_0^-) à (π_1^+, π_1^-) par un chemin holomorphe :

$$\lambda \rightarrow (\pi_\lambda^+, \pi_\lambda^-) \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

- on calcule des antécédents f_λ des $(\pi_\lambda^+, \pi_\lambda^-)$ comme solutions du système d'équations aux dérivées partielles obtenu :

* en joignant les relations (13c7), (13c8), (13c16),

* en y remplaçant f, f_+^*, f_-^* par $f_\lambda, f_{\lambda+}^*, f_{\lambda-}^*$,

* en substituant aux accroissement $\delta(\dots)$ les dérivées $\frac{\partial}{\partial \lambda}(\dots)$

* en prenant pour conditions initiales f_0, f_{0+}^*, f_{0-}^* ,

* et enfin en fixant pour paramètres t^+, t^- des fonctions t_λ^+, t_λ^- de λ

choisies (sur la base d'estimations a priori) de manière à donner un sens aux intégrales.

Nous n'entrons pas dans les détails car, aux sections 13e,f,g,h nous montrerons comment, pour un système un peu différent du précédent, on peut éliminer l'arbitraire implicite dans le choix des t_j^+, t_j^- et aboutir à des solutions canoniques.

Section 13d. Représentants canoniques. Invariants et coinvariants.

Nous avons vu à la section précédente que la synthèse harmonique était toujours possible sur G^0 , autrement dit qu'il y avait correspondance biunivoque entre les classes de conjugaison de G^0 (*) et les couples (π^+, π^-) de germes périodiques définis à une (**) translation près.

Pour construire des représentants canoniques des diverses classes de conjugaison de G^0 , il est naturel de passer, comme à la section 13b, par les itérateurs et de reprendre la formule (13b8) qui avait alors servi à résoudre le problème de la synthèse dans G^1 . Mais cette fois-ci, on utilisera non plus une représentation Δ -stable $Z^\omega \rightarrow W^\omega$ quelconque, mais la représentation canonique $Z^\omega \rightarrow U^\omega$ introduite à la section 6d. Autrement dit, on considérera les séries du type

$$(13d1) \quad f^* = \delta' - \sum_{\omega} A_{\omega} \Gamma_{\omega} U^{\omega} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{modèle additif;} \\ \omega \text{ multiindice;} \\ A_{\omega} = A_{\omega_1} \dots A_{\omega_n} \end{array} \right.$$

relatives à des familles $\{A_{\omega}; \omega \in \mathcal{P}^*\}$ constituées par les coefficients de (π^+, π^-) .

D'autre part, étant donné le rôle très symétrique que jouent la représentation canonique Δ -stable $Z^\omega \rightarrow U^\omega$ et la représentation canonique ∂ -stable $Z^\omega \rightarrow V^\omega$ (***) , il est naturel d'introduire, parallèlement aux séries (13d1), les séries :

(*) plus précisément, de $G_{1,1,0}^0$. Pour les classes générales de G^0 , voir la section 13j. (***) la même pour π^+ et π^- . (***) cf. section 6d.

$$(13d2) \quad f^* = \delta' - \sum_{\omega} B_{\omega} \Gamma_{\omega} \mathcal{V}^{\omega} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{modèle additif;} \\ \omega \text{ multiindice;} \\ B_{\omega} = B_{\omega_1} \dots B_{\omega_n} \end{array} \right.$$

relatives à des familles $\{B_{\omega}; \omega \in \mathcal{R}^*\}$ qu'il reste à préciser.

Sous réserve de convergence, la série (13d1) définit une fonction résurgente f^* qui est l'itérateur d'un élément f de G^- (et même, comme nous le verrons, de G^0) puisque, d'après la section 9b, la somme de (13d1) vérifie les équations de résurgence

$$(13d3) \quad \Delta_{\omega_0} f^* = -A_{\omega_0} e^{-\omega_0(f^*-I)} \quad (\forall \omega_0 \in \mathcal{R}^*; \text{modèle formel})$$

et qu'un tel système caractérise précisément les itérateurs.

En revanche, il n'est pas clair a priori que la série (13d2), même lorsqu'elle converge, fournisse un itérateur. Tel est pourtant le cas. Appliquons en effet à la série (13d2), supposée convergente, une dérivation étrangère Δ_{ω_0} (ω_0 indice simple). D'après la règle (6d10), il vient, dans le modèle formel :

$$\begin{aligned} (13d4) \quad \Delta_{\omega_0} f^* &= - \sum_{\omega} B_{\omega} \Gamma_{\omega} \sum_{\substack{\omega' \omega'' = \omega \\ \|\omega'\| = \omega_0}} V^{\omega'} \mathcal{V}^{\omega''} \quad (\omega, \omega', \omega'' \text{ multiindices}) \\ &= - \sum_{\substack{\omega', \omega'' \\ \|\omega'\| = \omega_0}} B_{\omega'} V^{\omega'} \Gamma_{\omega' \omega''} B_{\omega''} \mathcal{V}^{\omega''} \\ &= - \left(\sum_{\|\omega'\| = \omega_0} B_{\omega'} V^{\omega'} \Gamma_{\omega'} \right) \left(\sum_{\omega''} \Gamma_{\omega_0 \omega''} B_{\omega''} \mathcal{V}^{\omega''} \right) \end{aligned}$$

Or, par un argument combinatoire simple (*) on montre que :

(*) cf. exercice 13d1.

$$(13d5) \quad \sum_{\omega^2} \Gamma_{\omega_0 \omega^2} B_{\omega^2} V^{\omega^2} = e^{-\omega_0} (f^* - I)$$

D'où finalement

$$(13d6) \quad \Delta_{\omega_0} f^* = - \left(\sum_{\|\omega'\|=\omega_0} B_{\omega'} V^{\omega'} \Gamma_{\omega'} \right) e^{-\omega_0} (f^* - I)$$

Comme ceci vaut pour tout $\omega_0 \in \Omega^*$, c'est que f^* est un itérateur. De plus, le rapprochement de (13d3) et (13d6) suggère que si l'on pose :

$$(13d7) \quad A_{\omega_0} = \sum_{\|\omega'\|=\omega_0} B_{\omega'} \Gamma_{\omega'} V^{\omega'} \quad (\omega_0 \text{ simple, } \omega \text{ multiple})$$

et si les séries (13d1) et (13d2) convergent toutes deux, alors elles doivent avoir même somme. On vérifie ceci en exprimant dans (13c2) les V^{ω} en fonction des U^{ω} :

$$(13d8) \quad V^{\omega} = \sum_{\omega' \dots \omega^{\Delta} = \omega} U^{\|\omega'\|, \dots, \|\omega^{\Delta}\|} V^{\omega'} \dots V^{\omega^{\Delta}}$$

conformément à la formule (6d2), puis en utilisant l'alternance du moule V^{\cdot} ainsi que la propriété

$$(13d9) \quad \Gamma_{\omega' \omega^2} = \Gamma_{\omega'} \Gamma_{\|\omega'\|, \omega^2}$$

du comoule Γ_{\cdot} .

Remarquons que, formellement, on passe exactement de la même manière de (13d1) à (13d2), en exprimant dans (13d1) les U^{ω} en fonction des V^{ω} :

$$(13d10) \quad U^{\omega} = \sum_{\omega' \dots \omega^{\Delta} = \omega} V^{\|\omega'\|, \dots, \|\omega^{\Delta}\|} U^{\omega'} \dots U^{\omega^{\Delta}}$$

conformément à la formule (6d1). Ceci suggère que la formule (13d7) de passage des B_{ω} aux A_{ω} , s'inverse en une formule analogue, à savoir :

$$(13d11) \quad B_{\omega_0} = \sum_{\|\omega\|=\omega_0} A_{\omega} \Gamma_{\omega} U^{\omega} \quad (\omega_0 \text{ simple; } \omega \text{ multiple})$$

et on vérifie effectivement l'équivalence formelle de (13d7) et (13d11) à partir des relations (6d4) et (6d5) entre les moules alternés U^{\bullet} et V^{\bullet} (*).

A ce stade, il est utile d'introduire un paramètre t dans les séries (13d1) et (13d2). Pour ce faire, on introduit les représentations t -canoniques $Z^{\omega} \rightarrow \mathcal{U}_t^{\omega}$ et $Z^{\omega} \rightarrow \mathcal{V}_t^{\omega}$ qui sont définies dans le modèle additif par :

$$(13d12) \quad \mathcal{U}_t^{\omega}(P) = e^{(z - \|\omega\|)t} \mathcal{U}^{\omega}(P) \quad (z = \dot{P})$$

$$(13d12\text{bis}) \quad \mathcal{V}_t^{\omega}(P) = e^{(z - \|\omega\|)t} \mathcal{V}^{\omega}(P) \quad (z = \dot{P})$$

et dans les modèles sectoriels par :

$$(13d13) \quad \mathcal{U}_{t\pm}^{\omega}(z) = e^{-\|\omega\|t} \mathcal{U}_{\pm}^{\omega}(z-t)$$

$$(13d13\text{bis}) \quad \mathcal{V}_{t\pm}^{\omega}(z) = e^{-\|\omega\|t} \mathcal{V}_{\pm}^{\omega}(z-t)$$

Bien entendu, les représentations $Z^{\omega} \rightarrow \mathcal{U}_t^{\omega}$ et $Z^{\omega} \rightarrow \mathcal{V}_t^{\omega}$ sont respectivement Δ -stables et ∂ -stables. Pour $t=0$, on retrouve les représentations canoniques usuelles. Enfin, on a :

$$(13d14) \quad \mathcal{U}_t^{\bullet} = \mathcal{V}_t^{\bullet} \circ U^{\bullet} \quad (13d14\text{bis}) \quad \mathcal{V}_t^{\bullet} = \mathcal{U}_t^{\bullet} \circ V^{\bullet}$$

comme dans le cas usuel.

Résumons nous :

(*) cf. exercice 13d1

Proposition 13d1. (Invariants et coinvariants)

Si on peut, par un procédé ou par un autre, dans un modèle ou dans un autre (*) , sommer la série

$$(13d14) \quad f_t^* = I - \sum_{\omega} A_{\omega} \Gamma_{\omega} U_t^{\omega} \quad (\omega \text{ multiindice; } A_{\omega} = A_{\omega_1} \dots A_{\omega_n})$$

ou la série

$$(13d15) \quad f_t^* = I - \sum_{\omega} B_{\omega} \Gamma_{\omega} V_t^{\omega} \quad (\omega \text{ multiindice; } B_{\omega} = B_{\omega_1} \dots B_{\omega_n})$$

alors la somme f_t^* est l'itérateur d'un certain $f_t = f_t^* \circ l \circ f_t^*$ et
l'on dit que f_t est un représentant t-canonique de sa classe de conjugaison.

Lorsque f_t^* est simultanément définissable par les deux procédés,
les coefficients A_{ω} et B_{ω} sont liés par les formules :

$$(13d16) \quad B_{\omega_0} = \sum_{\|\omega\|=\omega_0} A_{\omega} \Gamma_{\omega} U^{\omega} \quad (\omega \text{ multiindice})$$

$$(13d17) \quad A_{\omega_0} = \sum_{\|\omega\|=\omega_0} B_{\omega} \Gamma_{\omega} V^{\omega} \quad (\omega \text{ multiindice})$$

Les A_{ω} coincident nécessairement avec les invariants de f_t . Les B_{ω} , lorsqu'ils sont définis, sont dits coinvariants de f_t .

Les invariants et coinvariants sont donc liés respectivement aux représentations Δ -stables et ∂ -stables des pseudovariations.

Reste à examiner l'essentiel, à savoir les cas de convergence de (13d14) et (13d15). Commençons par (13d15), qui est plus simple. Plaçons-nous dans le modèle additif. Compte tenu de (13d12bis), (13d15) s'écrit :

(*) essentiellement, dans les modèles additif ou sectoriels.

$$(13d18) \quad \mathcal{J}_t^*(P) = \mathcal{S}'(P) - \sum_{\omega} B_{\omega} e^{(z - \|\omega\|)t} \Gamma_{\omega}^{\omega} \mathcal{V}^{\omega}(P) \quad (\omega \text{ multiindice})$$

Or, de l'expression (6d7) des \mathcal{V}^{ω} , on tire facilement les majorations suivantes :

- lorsque P appartient au demi-feuillet $\mathcal{R}(Q_+)$ ou $\mathcal{R}(Q_-)$:

$$(13d19) \quad |\Gamma_{\omega}^{\omega} \mathcal{V}^{\omega}(P)| \leq \left| \frac{1}{z - \omega} \right| \left| \frac{z}{\cos \alpha} \right|^{n(\omega)-1} \frac{1}{(n(\omega)-1)!} \quad (z = \dot{P}; \alpha = \text{Arg } z)$$

- lorsque P appartient à la frontière de $\mathcal{R}(Q_+)$ ou de $\mathcal{R}(Q_-)$:

$$(13d19bis) \quad |\Gamma_{\omega}^{\omega} \mathcal{V}^{\omega}(P)| \leq \left| \frac{1}{z - \omega} \right| \left| C z \log \frac{z}{\delta} \right|^{n(\omega)-1} \frac{1}{(n(\omega)-1)!} \quad (z = \dot{P}; \delta = \text{un } \int d(P, \partial^{\circ} \mathcal{R}))$$

par une certaine constante C .

Si maintenant on suppose que

$$(13d20) \quad \sum_{\omega \in \Omega^*} |e^{-\omega t}| |B_{\omega}| = B(t) < \infty$$

il suffit de porter (13d19) et (13d19bis) dans la série (13d18) pour voir que cette dernière converge uniformément sur tout compact des demi-feuillets $\mathcal{R}(Q_{\pm})$ ou de leurs frontières et que sa somme vérifie les majorations :

$$(13d21) \quad |\mathcal{J}_t^*(P)| \leq |e^{z t}| B(t) \left| \frac{z}{\cos^2 \alpha} \right| \exp \left| B(t) \frac{z}{\cos \alpha} \right|$$

$$(13d21bis) \quad |\mathcal{J}_t^*(P)| \leq |e^{z t}| B(t) \delta^{-1} C \left| z \log \frac{z}{\delta} \right| \exp \left| B(t) C z \log \frac{z}{\delta} \right|$$

valables respectivement pour P sur $\mathcal{R}(Q_{\pm})$ ou sur les frontières de

$\mathcal{R}(Q_{\pm})$. En fait, (13d19bis) et par suite (13d21bis) s'étendent facilement à un voisinage (sur \mathcal{R}) des frontières de $\mathcal{R}(Q_+)$ et $\mathcal{R}(Q_-)$. Ceci permet d'appliquer à \mathcal{J}_t^* les opérateurs étrangers Δ_{ω}^+ et Δ_{ω}^- puis, en utilisant les équations de résurgence et en raisonnant comme pour la démonstration de

la proposition 2d1, d'étendre de proche en proche le domaine de convergence de (13d18) à la surface \mathcal{R} toute entière.

On remarque que la formule (13d17) qui donne les invariants A_ω en fonction des coinvariants B_ω , a bien un sens puisque le second membre converge du fait de (13d20) et des majorations

$$(13d22) \quad |\Gamma_\omega V^\omega| \leq \frac{C^{n-1}}{(n-1)!} \left| \|\omega\| \log \|\omega\| \right|^{n-1}$$

qui elles-mêmes peuvent se déduire de (13d19).

On remarque aussi, d'après (13d21), que f_t^* a une croissance exponentielle sur toute direction (non verticale) des demi-feuillets $\mathcal{R}(Q_+)$ et $\mathcal{R}(Q_-)$. Il en va donc de même pour *f_t et $f_t = {}^*f_t \circ l \circ f_t^*$. Or, comme f_t est une fonction entière, c'est qu'elle est de croissance exponentielle, même sur les verticales, et donc que $f_t \in \mathcal{G}^0$. Mais alors, d'après la proposition 12c1, les invariants A_ω^\pm présentent la croissance (12c1) et les fonctions résurgentes $f_t^*, {}^*f_t$ croissent exponentiellement dans toutes les directions, y compris les verticales. La majoration (13d21bis) était donc améliorable.

f_t appartenant à \mathcal{G}^0 , les itérateurs direct et inverse f_t^* et *f_t sont chacun définissables dans les deux modèles sectoriels (relatifs à Q_+ ou Q_-). En transposant (13d15) à ces modèles, on obtient :

$$(13d23) \quad f_{t\pm}^*(z) = z - \sum_\omega B_\omega \Gamma_\omega V_{t\pm}^\omega(z) \quad (\omega \text{ multiindice})$$

Mais, compte tenu de (13d12bis) et de (6d23) cela s'écrit :

$$(13d24) \quad f_{t\pm}^*(z) = z - \sum_\omega \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n B_\omega \Gamma_\omega \int_{z-t < z_n < \dots < z_2 < z_1 < \pm\infty} e^{\omega_n(z_n-z) + \dots + \omega_1(z_1-z)} \frac{dz_n}{z_n} \dots \frac{dz_1}{z_1}$$

où la somme est étendue à tous les multiindices $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ de longueur $n \geq 1$ et où la notation $z < z_n < \dots < z_2 < z_1 < \pm \infty$ indique la position relative des points z_j sur un chemin d'intégration horizontal partant de $z-t$ et aboutissant en $\pm \infty$. Pour z dans le domaine fondamental de définition de f_{t+}^* (resp. f_{t-}^*) c'est-à-dire en haut, en bas ou à droite (resp. à gauche), ce chemin d'intégration ne risque pas de rencontrer l'origine et (13d24) ne présente aucune ambiguïté.

En introduisant maintenant la série de Fourier

$$(13d25) \quad U_*(z) = - \sum_{\omega \in \mathcal{R}^*} B_\omega e^{-\omega z}$$

qui d'après l'hypothèse (13d20) converge absolument dans une certaine bande

$$(13d26) \quad t_1 \leq \text{Im } z \leq t_2$$

et en tenant compte de $\Gamma_\omega = \omega_1 (\omega_1 + \omega_2) \dots (\omega_1 + \dots + \omega_{n-1})$, on voit que (13d24) s'écrit :

$$(13d27) \quad f_{t\pm}^*(z) = z + \sum_{\omega} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{z-t < z_n < \dots < z_2 < z_1 < \pm \infty} U_*(z-z_n) \frac{\partial}{\partial z} \dots U_*(z-z_1) \frac{\partial}{\partial z} \cdot z$$

A partir de (13d25), on vérifie facilement que $f_{t\pm}^*(z)$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{t\pm}^*(z) = \mu_t(z) \frac{\partial}{\partial z} f_{t\pm}^*(z) \quad \text{avec} \quad \mu_t(z) = \frac{U_*(t)}{2\pi i(z-t) - U_*(t)}$$

et cette équation à son tour conduit à une variante de (13d27) :

$$(13d28) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{t+}^*(z) = \left\{ 1 + \sum_{n \geq 1} \int_{-\infty < t_1 < \dots < t_n < t} \mu_{t_n}(z) \frac{\partial}{\partial z} \dots \mu_{t_1}(z) \frac{\partial}{\partial z} dt_1 \dots dt_n \right\} \cdot z \\ f_{t-}^*(z) = \left\{ 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \int_{t < t_n < \dots < t_1 < \infty} \mu_{t_n}(z) \frac{\partial}{\partial z} \dots \mu_{t_1}(z) \frac{\partial}{\partial z} dt_1 \dots dt_n \right\} \cdot z \end{array} \right.$$

où l'intégration se fait sur l'horizontale $\text{Im } t_i = \text{Im } t$. Ces formules ont sur (13d27) l'avantage de ne pas faire intervenir les dérivées de μ_* . Ceci permet de voir qu'on a en fait convergence sous des hypothèses plus faibles que (13d20).

Proposition 13d2. (Synthèse harmonique à partir des coinvariants)

Supposons que les B_ω ($\omega \in \mathbb{R}^*$) soient les coefficients de Fourier d'une fonction $-\mu_*$ définie et essentiellement bornée sur une horizontale $\text{Im } t = \text{Im } t_0$:

$$(13d29) \quad \mu_*(t) = - \sum_{\omega \in \mathbb{R}^*} B_\omega e^{-\omega t}$$

et posons :

$$(13d30) \quad \nu_t(z) = \frac{\mu_*(t)}{2\pi i(z-t) - \mu_*(t)}$$

$\alpha)$ Alors les B_ω sont les coinvariants d'une famille d'éléments de G_0 . De plus, f_t et ses itérateurs f_t^* , *f_t vérifient les équations aux dérivées partielles :

$$(13d31) \quad \frac{\partial}{\partial t} f_t = -\nu_t \circ f_t + \nu_t \frac{\partial}{\partial z} f_t$$

$$(13d32) \quad \frac{\partial}{\partial t} f_t^* = \nu_t \frac{\partial}{\partial z} f_t^*$$

$$(13d33) \quad \frac{\partial}{\partial t} {}^*f_t = -\nu_t \circ {}^*f_t$$

$\beta)$ Désignons par $F_t, F_t^*, {}^*F_t$ les opérateurs qui, dans le modèle formel substituent $f_t, f_t^*, {}^*f_t$ à z . On a alors dans les modèles sectoriels :

$$(13d34) \quad F_{t\pm}^* = 1 + \sum_{\Delta \geq 1} \int_{-\infty < t_1 < \dots < t_\Delta < t} \nu_{t_0} \frac{\partial}{\partial z} \dots \nu_{t_\Delta} \frac{\partial}{\partial z} dt_1 \dots dt_\Delta$$

$$(13d35) \quad {}^*F_{t_{\pm}} = 1 + \sum_{\Delta \geq 1} (-1)^{\Delta} \int_{-\infty < t_1 < \dots < t_{\Delta} < t} \mu_{t_1} \frac{\partial}{\partial z} \dots \mu_{t_{\Delta}} \frac{\partial}{\partial z} dt_1 \dots dt_{\Delta}$$

$$(13d36) \quad F_t \cdot L^{-1} = 1 + \sum_{\Delta \geq 1} \int_{t-1 < t_1 < \dots < t_{\Delta} < t} \mu_{t_1} \frac{\partial}{\partial z} \dots \mu_{t_{\Delta}} \frac{\partial}{\partial z} dt_1 \dots dt_{\Delta} \quad (*)$$

et, plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$(13d36bis) \quad F_t^n \cdot L^{-n} = 1 + \sum_{\Delta \geq 1} \int_{t-n < t_1 < \dots < t_{\Delta} < t} \mu_{t_1} \frac{\partial}{\partial z} \dots \mu_{t_{\Delta}} \frac{\partial}{\partial z} dt_1 \dots dt_{\Delta} \quad (*)$$

où L^n désigne comme d'habitude l'opérateur qui substitue $\ell^n(z) = z + n$

δ) Dans le modèle additif, l'itérateur δ_t^* est donné par la formule

$$(13d37) \quad \delta_t^*(P) = \delta'(P) - \sum_{\omega} B_{\omega} e^{(z - \|\omega\|)t} \nu^{\omega}(P) \quad (z = \dot{P}; \omega \text{ multiindice})$$

mais il n'y a pas de formule simple pour δ_t^* ni pour δ_t .

Démonstration succincte :

Commençons par le point β , en réglant d'abord la question de la convergence. Prenons un germe analytique à l'infini $\varphi(z) = \sum a_n z^{-n}$ et appliquons-lui, par exemple, le second membre de (13d36). Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un domaine $\mathcal{D} = \{|z| > R\}$ sur lequel aient lieu les majorations :

$$(13d40) \quad \left| \frac{d^n}{dz^n} \varphi(z) \right| \leq n! \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^n}{\partial z^n} \mu_{t_i}(z) \right| \leq \varepsilon \cdot n! \quad (\forall t_i \in [t-1, t])$$

Mais de ces majorations on tire facilement $(*)$:

(*) Comme ici $F_{t_+} = F_{t_-}$ on écrit simplement F_t .

(*) cf exercice 13d3

$$(13d41) \quad \left| \int \nu_{t_1} \frac{\partial}{\partial z} \dots \nu_{t_n} \frac{\partial}{\partial z} \varphi(z) \right| \leq C^n \varepsilon^n \quad (\forall z \in \mathcal{D})$$

pour une certaine constante C indépendante de ε . D'où la convergence du second membre de (13d36) appliqué à n'importe quel φ . On obtiendrait sans peine des résultats analogues pour $F_{t_{\pm}}^* \varphi$ et ${}^*F_{t_{\pm}} \varphi$ sur des domaines

$$\mathcal{D}_{\pm} = \{ |Im z| > R \} \cup \{ \pm Re z > R \}$$

Montrons maintenant que

$$(13d42) \quad F_{t_{\pm}}^* \varphi = \varphi \circ \mathcal{J}_{t_{\pm}}^*$$

Pour $\varphi(z) = z$, c'est immédiat, d'après les formules (13d28). Mais on vérifie (**) que le second membre de (13d34) définit formellement un automorphisme d'algèbre, autrement dit qu'il donne lieu à la relation de Leibniz :

$$(13d43) \quad \sigma(F_{t_{\pm}}^*) = F_{t_{\pm}}^* \otimes F_{t_{\pm}}^*$$

qui signifie que $F_{t_{\pm}}^*(\varphi\psi) = (F_{t_{\pm}}^*\varphi)(F_{t_{\pm}}^*\psi)$ identiquement en φ et ψ . Par suite (13d42), étant vrai pour $\varphi(z) = z$, l'est pour n'importe quel φ .

Quant aux relations :

$$(13d44) \quad {}^*F_{t_{\pm}} \varphi = \varphi \circ {}^*\mathcal{J}_{t_{\pm}} \quad ; \quad F_t \varphi = \varphi \circ \mathcal{J}_t$$

elles résultent de (13d42) et des factorisations formelles

$$(13d45) \quad {}^*F_{t_{\pm}} \cdot F_{t_{\pm}}^* = 1 \quad ; \quad F_{t_{\pm}}^* \cdot L \cdot {}^*F_{t_{\pm}} = F_t$$

que l'on vérifie en multipliant les seconds membres de (13d34) et (13d35).

Ceci règle le point β . Enfin, les équations aux dérivées partielles du point α résultent immédiatement de (13d34), (13d35), (13d36) appliqués à z et le développement (13d37) du point γ ne fait qu'exprimer (13d15) dans le modèle additif.

(**) cf exercice 13d4.

Parallèlement aux f_t d'invariants A_ω et de coinvariants B_ω , il est souvent utile de considérer les conjugués $f_{\langle t \rangle} = l^{-t} \circ f_t \circ l^t$ par la translation de pas t , car les $f_{\langle t \rangle}$ ainsi obtenus possèdent l'avantage d'être périodique en t et d'avoir des coefficients de Taylor facilement calculables en fonctions des coinvariants D'une façon précise :

Corollaire de la proposition 13d2 (Coinvariants et coefficients de Taylor)

En posant

$$(13d46) \quad f_{\langle t \rangle} = l^{-t} \circ f_t \circ l^t \quad (\text{avec } l^{\pm t}(z) = z \pm t)$$

on obtient des éléments $f_{\langle t \rangle}$ de G° qui admettent pour invariants les $e^{-\omega t} A_\omega$, pour coinvariants les $e^{-\omega t} B_\omega$ et pour itérateurs directs et inverses :

$$(13d47) \quad f_{\langle t \rangle}^* = l^{-t} \circ f_t \circ l^t \quad ; \quad {}^*f_{\langle t \rangle} = l^{-t} \circ f_t \circ l^t$$

De plus, en posant :

$$(13d48) \quad \mu_{\langle t \rangle}(z) = \mu_t(z+t) = \frac{2\pi i z}{2\pi i z - \omega_*(t)}$$

on a les équations aux dérivées partielles :

$$(13d49) \quad \frac{\partial}{\partial t} f_{\langle t \rangle} = -\mu_{\langle t \rangle} \circ f_{\langle t \rangle} + \mu_{\langle t \rangle} \frac{\partial}{\partial z} f_{\langle t \rangle}$$

$$(13d50) \quad 1 + \frac{\partial}{\partial t} f_{\langle t \rangle}^* = \mu_{\langle t \rangle} \frac{\partial}{\partial z} f_{\langle t \rangle}^*$$

$$(13d51) \quad \frac{\partial}{\partial t} {}^*f_{\langle t \rangle} = -\mu_{\langle t \rangle} \circ {}^*f_{\langle t \rangle} + \frac{\partial}{\partial z} {}^*f_{\langle t \rangle}$$

qui montrent que $f_{\langle t \rangle}, f_{\langle t \rangle}^*, {}^*f_{\langle t \rangle}$ et leurs coefficients de Taylor

dépendent périodiquement de t . En particulier, les coefficients α_n de l'itérateur

$$f_{\langle t \rangle}^*(z) = z + \sum \alpha_n(t) z^{-n}$$

se calculent facilement en fonction de U_* grâce aux relations de récurrence

$$\begin{cases} (13d52) & \alpha'_1(t) = \frac{U_*(t)}{2\pi i} \\ (13d52bis) & \alpha'_{n+1}(t) = \frac{U_*(t)}{2\pi i} \alpha'_n(t) - n \alpha_n(t) \quad (\forall n \geq 1) \end{cases}$$

avec comme "conditions initiales" l'absence de terme constant au second membre de (13d52bis), c'est-à-dire :

$$\begin{cases} (13d53) & \int_{t_0}^{t_0+t} \alpha_1(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+t} \left(\frac{U_*(t)}{2\pi i} \right)^2 dt \\ (13d53bis) & \int_{t_0}^{t_0+t} \alpha_n(t) \left\{ n + \frac{U_*(t)}{2\pi i} \right\} dt = 0 \quad (\forall n \geq 2) \end{cases}$$

Abordons maintenant la synthèse harmonique directe, autrement dit celle qui part des invariants A_ω . Prenons pour cela la forme opératorielle associée à (13d14) et qui s'écrit, dans les modèles sectoriels :

$$(13d54) \quad F_{t\pm} = 1 + \sum_{\omega} A_{\omega} \mathcal{U}_{t\pm}^{\omega} \Gamma_{-\partial, \omega} \quad (\omega \text{ multiindice})$$

avec

$$\partial = \frac{\partial}{\partial t} ; \quad \Gamma_{-\partial, \omega} = (-\partial) (-\partial + \omega_1) (-\partial + \omega_1 + \omega_2) \dots (-\partial + \omega_1 + \dots + \omega_{n-1})$$

Introduisons les moules ${}^+ \mathcal{U}_t^{\bullet}$ et ${}^- \mathcal{U}_t^{\bullet}$ au moyen des relations

$$(13d55) \quad {}^{\pm} \mathcal{U}_t^{\bullet} \circ {}^{\pm} E^{\bullet} = {}^{\pm} \mathcal{U}_t^{\bullet} \quad (\text{modèle formel})$$

qui sont analogues à (6d28) et comportent les moules ${}^+E$ et ${}^-E$ définis (6d27).

Remplaçons dans (13d54) les $\mathcal{U}_{t\pm}^\omega$ par leur expression en fonction des ${}^\xi \mathcal{U}_{t\pm}^\omega$ ($\xi = + \text{ ou } -$). Il vient :

$$(13d56) \quad F_{t\pm}^* = 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{\omega^1, \dots, \omega^n} A_{\omega^1, \dots, \omega^n} {}^\xi \mathcal{U}_{t\pm}^{\|\omega^1\|, \dots, \|\omega^n\|} {}^\xi E^{\omega^1} \dots {}^\xi E^{\omega^n} \Gamma_{-\partial, \omega^1, \dots, \omega^n}$$

Mais si l'on pose $\|\omega^i\| = \omega_i$, on a d'une part :

$$(13d57) \quad \Gamma_{-\partial, \omega^1, \dots, \omega^n} = \Gamma_{-\partial, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega^n} \Gamma_{-\partial, \omega_1, \dots, \omega_{n-2}, \omega^{n-1}} \dots \Gamma_{-\partial, \omega_1, \omega^2} \Gamma_{-\partial, \omega^1}$$

ou encore

$$(13d58) \quad e^{-(\omega_1 + \dots + \omega_n)z} \Gamma_{-\partial, \omega^1, \dots, \omega^n} = e^{-\omega_n z} \Gamma_{-\partial, \omega^n} e^{-\omega_{n-1} z} \Gamma_{-\partial, \omega^{n-1}} \dots e^{-\omega_2 z} \Gamma_{-\partial, \omega^2} e^{-\omega_1 z} \Gamma_{-\partial, \omega^1}$$

et d'autre part, d'après (6d37) et (6d38) :

$$(13d59) \quad {}^\xi \mathcal{U}_{t\pm}^{\omega_1, \dots, \omega_n}(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\mathcal{J}_t^\xi} \frac{e^{\omega_n(z_n - z)}}{z_n - z_{n-1}} \dots \frac{e^{\omega_2(z_2 - z)}}{z_2 - z_1} \frac{e^{\omega_1(z_1 - z)}}{z_1} dz_1, \dots, dz_n$$

pour $\xi = + \text{ ou } -$ et pour des chemins d'intégration \mathcal{J}_t^+ et \mathcal{J}_t^- définis comme les \mathcal{J}^+ et \mathcal{J}^- des formules (6d37) et (6d38) à cette différence près qu'ils partent du point $z-t$ et non du point z .

Enfin, compte tenu de la définition des ${}^\xi E^\omega$:

$$(13d60) \quad \sum_{\omega} A_{\omega} {}^\xi E^{\omega} e^{-\|\omega\|z} \Gamma_{-\partial, \omega} = \quad (\omega \text{ multindice})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m \geq 1} \sum_{\omega_i \in \mathcal{Q}^+} A_{\omega_1} \dots A_{\omega_m} e^{-(\omega_1 + \dots + \omega_m)z} \frac{\xi^m}{m!} \Gamma_{-\partial, \omega_1, \dots, \omega_m} \\ + \sum_{m \geq 1} \sum_{\omega_i \in \mathcal{Q}^-} A_{\omega_1} \dots A_{\omega_m} e^{-(\omega_1 + \dots + \omega_m)z} \frac{\xi^m}{m!} \Gamma_{-\partial, \omega_1, \dots, \omega_m} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m \gg 1} \frac{\varepsilon^m}{m!} \prod_{i=1}^m \left(-\sum_{\omega_i \in \mathcal{D}^+} A_{\omega_i} e^{-\omega_i z} \partial \right) + \sum_{m \gg 1} \frac{\varepsilon^m}{m!} \prod_{i=1}^m \left(-\sum_{\omega_i \in \mathcal{D}^-} A_{\omega_i} e^{-\omega_i z} \partial \right) \\
 &= \sum_{m \gg 1} \frac{1}{m!} (\varepsilon \cdot \Pi^+ \partial)^m + \sum_{m \gg 1} \frac{1}{m!} (\varepsilon \cdot \Pi^- \partial)^m
 \end{aligned}$$

Soit, en désignant par Π^\pm et ${}^\pm\Pi$ les opérateurs qui substituent $\Pi^\pm(z)$ ou ${}^\pm\Pi(z)$ à z :

$$(13d62) \begin{cases} \sum_{\omega} A_{\omega} {}^+E^{\omega} e^{-\|\omega\|z} \Gamma_{\partial, \omega} = \Pi^+ - 1 + \Pi^{-1} - 1 \quad (\omega \text{ multiindice}) \\ \sum_{\omega} A_{\omega} {}^-E^{\omega} e^{-\|\omega\|z} \Gamma_{\partial, \omega} = {}^+\Pi - 1 + \Pi - 1 \quad (\omega \text{ multiindice}) \end{cases}$$

Finalement, en portant (13d58), (13d59), (13d60) dans (13d56), puis en remplaçant les variables z_i par les t_i et en introduisant les opérateurs :

$$(13d63) \quad \Pi_{t_i}^\pm = L^{-t_i} \Pi^\pm L^{t_i} ; \quad {}^\pm\Pi_{t_i} = L^{-t_i} {}^\pm\Pi L^{t_i}$$

qui à la variable z substituent respectivement

$$l^{t_i} \circ \Pi^\pm \circ l^{-t_i}(z) = t_i + \Pi^\pm(z - t_i) ; \quad l^{t_i} \circ {}^\pm\Pi \circ l^{-t_i}(z) = t_i + {}^\pm\Pi(z - t_i)$$

on obtient pour les opérateurs $F_{t_\pm}^*$ les développements formels suivants :

$$(13d64) \quad F_{t_\pm}^* = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\xi_1, \dots, \xi_n} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\mathcal{D}_t^+} \frac{(\Pi_{t_n}^{\xi_n} - 1)}{t_n - t_{n-1}} \dots \frac{(\Pi_{t_2}^{\xi_2} - 1)}{t_2 - t_1} \frac{(\Pi_{t_1}^{\xi_1} - 1)}{t_1} dt_n \dots dt_1$$

$$(13d65) \quad F_{t_\pm}^* = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\xi_1, \dots, \xi_n} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\mathcal{D}_t^-} \frac{({}^{\xi_n}\Pi - 1)}{t_n - t_{n-1}} \dots \frac{({}^{\xi_2}\Pi - 1)}{t_2 - t_1} \frac{({}^{\xi_1}\Pi - 1)}{t_1} dt_n \dots dt_1$$

où les sommes sont étendues à tous les ξ_i de valeur + ou - et où le chemin \mathcal{D}_t^+ (resp. \mathcal{D}_t^-) indique qu'on intègre par rapport à chaque variable t_j le long d'une verticale, depuis le point $z - t$ jusqu'au point à l'infini

$i \xi_j \infty$, en contournant éventuellement (*) le point t_{j+1} dans le sens positif (resp. dans le sens négatif).

Malheureusement, contrairement à la série (13d34), dont les cas de convergence ont été indiqués plus haut, les séries (13d64) et (13d61), sont d'une étude nettement plus difficile. Nous verrons plus loin qu'elles ne sont qu'exceptionnellement convergentes, mais qu'on peut quand-même, par un procédé indirect valable sous réserve d'une condition dite de "recouvrement" portant sur le couple (π^+, π^-) , leur attribuer des sommes bien définies (dans le cas général) ou définie avec une certaine indétermination (dans les cas exceptionnels).

La construction en question sera effectuée pas à pas, aux sections 13e, 13f, 13g, 13h. Observons pour l'instant, en conclusion de cette section, que la synthèse canonique sur G^0 conduit à considérer :

- d'une part, les séries (13d19) ou leurs variantes compactes (13d34), qui sont faciles à étudier, mais ne répondent qu'indirectement à la question, puisqu'elles font intervenir les coinvariants B_ω .

- d'autre part, les séries (13d14) ou leurs variantes compactes (13d64) et (13d65), qui font intervenir les invariants A_ω et répondent donc directement à la question, mais ont l'inconvénient d'être difficiles à étudier.

C'est en jouant simultanément sur les deux tableaux, autrement dit en usant tantôt des invariants et tantôt des coinvariants, que nous parviendrons à une solution complète. Nous examinerons successivement quatre cas :

le cas unitaire : A_ω et B_ω sont nuls si $\omega \neq x$ (x fixé dans \mathcal{R}^*)

le cas binaire : A_ω et B_ω sont nuls si $\omega \neq \pm x$ (x fixé dans \mathcal{R}^*)

(*) c'est-à-dire lorsque $\xi_j = \xi_{j+1}$, car si $\xi_j \neq \xi_{j+1}$ la question ne se pose pas.

le cas unilatéral : A_ω et B_ω sont nuls si $\omega \in \Omega^+$ (ou Ω^-)

le cas bilatéral : A_ω et B_ω sont quelconques (*)

Section 13e : Représentants canoniques : le cas unitaire.

Il s'agit du cas le plus simple, celui où tous les invariants A_ω et tous les coinvariants B_ω sont nuls, sauf pour une valeur donnée x de l'indice. En se rapportant aux relations (13d16) - (13d17) et compte tenu du caractère alterné des moules U^\bullet et V^\bullet , on voit que dans le cas unitaire :

$$(13e1) \quad A_x = B_x$$

Supposons pour fixer les idées que $x \in \Omega^+$, c'est-à-dire que $x = 2\pi i n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions périodiques invariantes valent alors :

$$(13e2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \pi_*^+(z) = -A_x e^{-xz} & ; \quad \pi_*^-(z) = 0 \\ \pi^+(z) = z + \frac{1}{x} \log(1 - x A_x e^{-xz}) & ; \quad \pi^-(z) = z \\ {}^+\pi(z) = z + \frac{1}{x} \log(1 + x A_x e^{-xz}) & ; \quad {}^-\pi(z) = z \end{array} \right.$$

et la fonction périodique coinvariante (16d25) vaut

$$(13e2bis) \quad \Pi_*(z) = -B_x e^{-xz} = -A_x e^{-xz}$$

Puisqu'ici $A_\omega = B_\omega$ et $U_t^\omega = V_t^\omega$ pour tout multiindice de composantes ω_i toutes égales à x , les séries (13d14) et (13d15), où il suffit de sommer par rapport à de tels ω , sont manifestement confondues.

D'une façon précise, en utilisant la forme réduite (10d3), où il est loisible de substituer U^ω à Z^ω , et en se plaçant dans les modèles sectoriels, on

(*) sous réserve, bien sûr, de la condition de croissance (12c1).

obtient pour l'itérateur :

$$(13e3) \quad \begin{aligned} f_{\langle t \rangle \pm}^* (z) &= \bar{l}^{-t} \circ f_{\langle t \rangle \pm}^* \circ l^t (z) = z + \frac{1}{\alpha} \log (1 - \alpha A_\alpha e^{-\alpha t} U_\pm^\alpha(z)) \\ &= z + \frac{1}{\alpha} \log (1 - \alpha B_\alpha e^{-\alpha t} V_\pm^\alpha(z)) \end{aligned}$$

avec $A_\alpha = B_\alpha$ et :

$$(13e4) \quad U_\pm^\alpha(z) = V_\pm^\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_z^{\pm\infty} \frac{e^{\alpha(z-\zeta)}}{\zeta} d\zeta \quad (\text{pour } \pm \operatorname{Re} z \text{ grand})$$

Puisque $f_* = \left(\frac{\partial}{\partial z} f^* \right)^{-1}$ et que

$$(13e4bis) \quad \frac{d}{dz} U_\pm^\alpha = -\alpha U_\pm^\alpha - \frac{1}{2\pi i z}$$

on obtient pour les logarithmes itératifs :

$$(13e5) \quad f_{\langle t \rangle \pm}^* (z) = f_{\langle t \rangle \pm}^* (z+t) = \frac{1 - \alpha A_\alpha e^{-\alpha t} U_\pm^\alpha(z)}{1 - \frac{U_\pm^\alpha(t)}{2\pi i z}}$$

Il n'existe pas de formules simples pour les itérateurs inverses $f_{\langle t \rangle}^*$ et $f_{\langle t \rangle} = \bar{l}^{-t} \circ f_{\langle t \rangle} \circ l^t$, mais on peut quand-même étudier les représentants t-canoniques $f_{\langle t \rangle}$ et $f_{\langle t \rangle}^*$ des "classes unitaires" grâce aux relations :

$$(13e6) \quad f_{\langle t \rangle} = \bar{l}^t \circ f_{\langle t \rangle} \circ l^{-t}$$

$$(13e7) \quad f_{\langle t \rangle \pm}^* \circ f_{\langle t \rangle} = 1 + f_{\langle t \rangle \pm}^*$$

En effet, en multipliant les deux membres de (13e7) par α puis en exponentiant, on trouve, pour tout $t \in \mathbb{C}$ et tout $\varepsilon = \pm$:

$$(13e8) \quad \Psi(\varepsilon, t, f_{\langle t \rangle}^*(z)) = \Psi(\varepsilon, t, z) \quad \text{avec } \lim_{z \rightarrow \infty} (f_{\langle t \rangle}^*(z) - z) = 1$$

et plus généralement, pour les itérées générales d'ordre complexe w :

$$(13e9) \quad \Psi(\varepsilon, t, \int_{\langle t, \varepsilon \rangle}^w(z)) = e^w \Psi(\varepsilon, t, z) \text{ avec } \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{\langle t, \varepsilon \rangle}^w(z) - z = w$$

à condition de poser

$$(13e10) \quad \Psi(\varepsilon, t, z) = e^{z\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2\pi i} A_z e^{-z\varepsilon} \int_z^{\varepsilon\infty} \frac{e^{z\zeta}}{\zeta} d\zeta$$

D'après la théorie générale, les relations (13e9) doivent définir un germe unique $\int_{\langle t, \varepsilon \rangle}^w = \int_{\langle t, \varepsilon \rangle +}^w = \int_{\langle t, \varepsilon \rangle -}^w \in G^0$ si et seulement si $w \in \mathbb{Z}$.

On le vérifie élémentairement dans ce cas. De plus, pour tout choix de ε et

t , la fonction $z \rightarrow \Psi(\varepsilon, t, z)$ définie par (13e10) sur le domaine

$\varepsilon \operatorname{Re} z > 0$, se prolonge uniformément à la surface $\mathbb{C} - \{0\}$ et y

prend une infinité de fois toute valeur finie. Enfin, d'après (13e5), la

dérivée $\frac{\partial}{\partial z} \Psi(\varepsilon, t, z)$ ne s'annule que pour des z de $\widetilde{\mathbb{C} - \{0\}}$ situés au-dessus du point $u_x(t)$ de \mathbb{C} .

On tire de là que pour tout entier relatif n , les fonctions

$z \rightarrow \int_{\langle t, \varepsilon \rangle}^n(z)$ (resp. $z \rightarrow \int_{\langle t, \varepsilon \rangle}^n(z)$) sont définies holomorphes sur un

voisinage complet de l'infini et qu'elles se prolongent holomorphiquement le

long de tout chemin qui évite le point 0 (resp. le point t), où elles possèdent

des singularités essentielles, ainsi que le point $\frac{u_x(t)}{2\pi i}$ (resp. le point

$t^* = t + \frac{u_x(t)}{2\pi i}$) , où elles possèdent des points de ramification

quadratiques.

Définition 13e1 : (fonctions algébrico-différentielles)

Appelons algébrico-différentielle toute fonction $y = y(z)$ solution

d'une équation différentielle du type :

$$(13e11) \quad P(z, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

avec P polynomial en chacune de ses $(n+1)$ variables.

Ces fonctions sont intéressantes du point de vue de la théorie itérative car elles sont stables pour l'addition, la multiplication, la composition ainsi que pour les opérations inverses. En particulier, l'ensemble des séries algébrico-différentielles de la forme $f(z) = z \left(1 + \sum_{n \geq 1} a_n z^{-n} \right)$ constitue un sous-groupe de G^∞ et chaque f de ce type a ses coefficients a_n aisément calculables par récurrence.

Il se trouve que, dans les cas unitaire et binaire, la synthèse canonique conduit justement à des fonctions algébrico-différentielles.

Proposition 13e1 :

Dans le cas unitaire, les fonctions $f_{\langle t \rangle}^*$, $f_{\langle t \rangle}^{*w}$, $f_{\langle t \rangle}^w$ liées à
la représentation t -canonique sont algébrico-différentielles, car elles vé-
rifient respectivement les équations différentielles :

$$\begin{array}{l}
 (13e12) \quad \nabla_1(y) + x y' = P_1(z) \\
 (13e13) \quad \nabla_1(y) + y' P_1(y) = x \\
 (13e14) \quad \nabla_1(y) + y' P_1(y) = P_1(z)
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 y = \underline{\text{inconnue}} \\
 z = \underline{\text{variable}} \\
 x = \underline{\text{paramètre}}
 \end{array} \right.$$

avec

$$(13e15) \quad \nabla_1(y) = y''/y'$$

$$(13e16) \quad P_1(z) = x - \frac{B_x \cdot e^{-xt}}{z(2\pi i \cdot z + B_x e^{-xt})}$$

Indications : On vérifie (13e12) à partir de (13e3) et (13e4bis) puis on en tire (13e13) et (13e14) grâce à l'identité :

$$(13e17) \quad \nabla_i (f \circ g) = \nabla_i (f) + g' \nabla_i (f) \circ g \quad (\forall f, g \in \mathbb{C}^\infty)$$

Section 13f : Représentants canoniques : le cas binaire.

Il s'agit du cas où tous les invariants A_ω et tous les coinvariants B_ω sont nuls, sauf pour $\omega = \pm x$, x étant fixé dans \mathcal{R}^* . Mais il faut d'abord montrer que cette définition a un sens, autrement dit qu'on a l'équivalence

$$(13f1) \quad (A_\omega = 0 \text{ si } \omega \neq \pm x) \iff (B_\omega = 0 \text{ si } \omega \neq \pm x)$$

Supposons par exemple que $A_\omega = 0$ si $\omega \neq \pm x$ et calculons les B_ω grâce à la formule (13d16). Vu l'alternance du moule U , cette formule s'écrit (*) :

$$(13f2) \quad B_{\omega_0} = \sum_{\|\omega\| = \omega_0} \frac{1}{r(\omega)} A_\omega \Gamma_{[\omega]} U^\omega \quad (\omega \text{ multiindice})$$

avec comme d'habitude :

$$\Gamma_{[\omega]} = (\omega_1 - \omega_2) (\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) \dots (\omega_1 + \dots + \omega_{n-1} - \omega_n)$$

Mais, d'après notre hypothèse sur les A_ω , il suffit dans (13f2) de sommer par rapport aux multiindices ω dont toutes les composantes ω_i valent tantôt x , tantôt $-x$. Or, parmi les multiindices de cette forme, les seuls pour lesquels $\Gamma_{[\omega]} \neq 0$ peuvent s'écrire :

$$(13f3) \quad \omega = (\varepsilon_1 x, \varepsilon_2 x, \dots, \varepsilon_n x) \text{ avec } \varepsilon_j = \pm 1 \text{ et } \varepsilon_{2j-1} + \varepsilon_{2j} = 0 \quad (\forall j)$$

(*) cf. exercice 4e1

comme on le vérifie immédiatement. De plus, si l'on veut que $V^\omega \neq 0$, on est encore conduit, vu l'alternance du moule V^\bullet , à éliminer les ω de longueur $\ell = \ell(\omega)$ paire, car, d'après (13f3) ceux-ci ont pour somme $\|\omega\| = x \sum_j \xi_j = 0$ et alors $V^\omega = 0$ d'après (6dlbis). Il ne reste donc plus que les ω de la forme (13f3) et de longueur ℓ impaire. Mais comme ces ω ont pour somme $\|\omega\| = \varepsilon_\ell x$, cela montre que le second membre de (13f2) est identiquement nul si $\omega_0 \neq \pm x$.

Ceci établit l'implication directe dans (13g1). L'implication réciproque s'établit de la même manière à partir de la formule (13dl7), laquelle s'écrit, compte tenu de l'alternance du moule V^\bullet :

$$(13f4) \quad A_{\omega_0} = \sum_{\|\omega\|=\omega_0} \frac{1}{\ell(\omega)} B_\omega \Gamma_{[\omega]} V^\omega \quad (\omega \text{ multiindice})$$

Reste à étudier l'application "coinvariants \rightarrow invariants" :

$$(13f5) \quad (B_x, B_{-x}) \longrightarrow (A_x, A_{-x})$$

dans le cas binaire. Cette application est bien définie (autrement dit, le second membre de (13f4) converge) car la série de Fourier coinvariante

$$(13f6) \quad U_*(z) = -B_x e^{-xz} - B_{-x} e^{xz}$$

étant ici réduite à deux termes, a sa somme $U_*(z)$ définie pour tout z ,

ce qui, d'après la proposition 13d2, assure l'existence des représentants

t -canoniques \mathcal{P}_t et, par voie de conséquence, celle de leurs invariants A_ω .

Partons donc d'un couple (B_x, B_{-x}) et calculons (A_x, A_{-x}) au moyen de la formule (13f4). On vient de voir qu'il suffisait de sommer par rapport aux multiindices de la forme (13f3) et de longueur impaire $\ell = 2\delta + 1$. Or pour de tels ω on a :

$$(13f7) \quad B_\omega = (B_x B_{-x})^\Delta B_{\Sigma_{2\Delta+1} x}$$

$$(13f8) \quad \Gamma[\omega] = x^{2\Delta} (-2)^\Delta \Sigma_1 \Sigma_{2\Delta+1}$$

$$(13f9) \quad V^\omega = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2\Delta} \sum_{0 < m_1 < m_2 < \dots < m_\Delta < \infty} \frac{\Sigma_1^{m_1}}{m_1^2} \frac{\Sigma_3^{m_2 - m_1}}{m_2^2} \frac{\Sigma_5^{m_3 - m_2}}{m_3^2} \dots \frac{\Sigma_{2\Delta-1}^{m_\Delta - m_{\Delta-1}}}{m_\Delta^2} \Sigma_{2\Delta+1}^{m_\Delta}$$

(13f7) et (13f8) sont immédiates et (13f9) tient d'abord à ce que :

$$(13f10) \quad V^\omega = V^{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{2\Delta+1}} \quad (\text{par homogénéité})$$

ensuite à ce que (*) :

$$(13f11) \quad V^{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{2\Delta+1}} = \text{valeur de } (1 * U^{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{2\Delta}}) \text{ au point } \Sigma \Sigma_j = \Sigma_{2\Delta+1}$$

et enfin à ce que, dans le modèle additif :

$$(13f12) \quad (1 * U^{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{2\Delta}})(z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^\Delta \sum_{n_i \geq 1} \frac{\Sigma_1^{n_1} \Sigma_3^{n_2} \Sigma_5^{n_3} \dots \Sigma_{2\Delta-1}^{n_\Delta}}{n_1^2 (n_1 + n_2)^2 \dots (n_1 + \dots + n_\Delta)^2} z^{n_1 + \dots + n_\Delta}$$

ainsi qu'on le vérifie à partir des formules (7b1) qui conduisent ici à la formule de récurrence :

$$(13f13) \quad (1 * U^{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{2\Delta}})(z) = \int_0^z \frac{dz_2}{z_2} \int_0^{z_2} \frac{dz_1}{z_1 - \Sigma_{2\Delta-1}} (1 * U^{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{2\Delta-2}})(z_1)$$

On peut alors porter (13f7), (13f8), (13f9) dans (13f4) et il vient :

(*) d'après la formule (7b3) dont le second membre se réduit ici à un seul terme.

$$(13f14) \quad A_x = B_x + B_x \sum_{\delta \geq 1} (B_x B_{-x})^\delta \frac{(-2)^\delta}{2\delta+1} \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2\delta} \sum_{0 < m_1 < \dots < m_\delta < \infty} \frac{\xi_1^{m_1+1} \xi_3^{m_2-m_1} \xi_5^{m_3-m_2} \dots \xi_{2\delta-1}^{m_\delta-m_{\delta-1}}}{m_1^2 m_2^2 m_3^2 \dots m_\delta^2} \xi_{2\delta+1}^{m_{\delta+1}}$$

$$(13f15) \quad A_{-x} = B_{-x} + B_{-x} \sum_{\delta \geq 1} (B_x B_{-x})^\delta \frac{(-2)^\delta}{2\delta+1} \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2\delta} \sum_{0 < m_1 < \dots < m_\delta < \infty} \frac{\xi_1^{m_1+1} \xi_3^{m_2-m_1} \xi_5^{m_3-m_2} \dots \xi_{2\delta-1}^{m_\delta-m_{\delta-1}}}{m_1^2 m_2^2 m_3^2 \dots m_\delta^2} \xi_{2\delta+1}^{m_{\delta+1}}$$

Mais comme $\|\omega\| = (\sum \xi_j) x = \xi_{2\delta+1} x$ on doit sommer dans (13f14) par rapport aux multiindices ξ se terminant par $\xi_{2\delta+1} = 1$ et dans (13f15) par rapport aux multiindices ξ se terminant par $\xi_{2\delta+1} = -1$. D'autre part

$$(13f16) \quad \sum_{\xi_1 = \pm 1, \xi_3 = \pm 1, \dots, \xi_{2\delta-1} = \pm 1} \xi_1^{m_1+1} \xi_3^{m_2-m_1} \xi_5^{m_3-m_2} \dots \xi_{2\delta-1}^{m_\delta-m_{\delta-1}} \xi_{2\delta+1}^{m_{\delta+1}} = 2^\delta$$

lorsque les m_i sont tous impairs (resp. = 0 lorsqu'ils ne sont pas tous impairs) et ceci indépendamment de la valeur de $\xi_{2\delta+1}$ (qui est exclu de la sommation). Par conséquent (13f14) et (13f15) peuvent se résumer en une seule formule :

$$(13f17) \quad \frac{A_x}{B_x} = \frac{A_{-x}}{B_{-x}} = 1 + \sum_{\delta \geq 1} \frac{(-B_x B_{-x})^\delta}{2\delta+1} \left(\frac{x}{\pi}\right)^{2\delta} \sum_{\begin{cases} m_j < m_{j+1} \\ m_j \text{ impair} \end{cases}} \frac{1}{m_1^2 m_2^2 \dots m_\delta^2}$$

Or on sait que :

$$\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) = \prod_{m \text{ impair}} \left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right) = 1 + \sum_{\delta \geq 1} (-1)^\delta z^{2\delta} \sum_{\begin{cases} m_j < m_{j+1} \\ m_j \text{ impair} \end{cases}} \frac{1}{m_1^2 m_2^2 \dots m_\delta^2}$$

Soit, en intégrant puis en divisant par z :

$$(13f18) \quad \frac{2}{\pi z} \sin \frac{\pi z}{2} = 1 + \sum_{\lambda \geq 1} (-1)^\lambda \frac{z^{2\lambda}}{2\lambda+1} \sum_{\substack{m_j < m_{j+1} \\ m_j \text{ impair}}} \frac{1}{m_1^2 m_2^2 \dots m_\lambda^2}$$

D'où en comparant (13f17) et (13f18) :

$$(13f19) \quad \frac{A_x}{B_x} = \frac{A_{-x}}{B_{-x}} = \varphi \left(\frac{x}{\pi} \sqrt{B_x B_{-x}} \right) \quad \text{avec} \quad \varphi(z) = \frac{2}{\pi z} \sin \frac{\pi z}{2}$$

Mais (13f19) implique $\sqrt{A_x A_{-x}} = \sqrt{B_x B_{-x}} \varphi \left(\frac{x}{\pi} \sqrt{B_x B_{-x}} \right)$. On peut donc énoncer :

Proposition 13f1 : (Correspondance entre invariants et coinvariants). Dans le cas binaire, l'application $(B_x, B_{-x}) \rightarrow (A_x, A_{-x})$ est surjective, mais non injective. Plus précisément, elle présente une périodicité en évidence sur les formules :

$$(13f20) \quad \frac{A_x}{A_{-x}} = \frac{B_x}{B_{-x}}$$

$$(13f21) \quad \frac{x}{2} \sqrt{A_x A_{-x}} = \sin \left(\frac{x}{2} \sqrt{B_x B_{-x}} \right)$$

Bien entendu, par imparité de la fonction sinus, la relation (13f21) détermine sans ambiguïté le produit $A_x A_{-x}$ en fonction du produit $B_x B_{-x}$. Comme les rapports sont égaux d'après (13f20), cela détermine (A_x, A_{-x}) en fonction de (B_x, B_{-x}) . On est conduit à discuter par rapport au paramètre :

$$(13f22) \quad \ell = \frac{x}{2\pi} \sqrt{B_x B_{-x}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \text{Arg} \ell \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

Lorsque ℓ est entier non nul, on a $A_x = A_{-x} = 0$ et on retombe dans la classe pleinement itérable. Lorsque ℓ est nul, on a $(A_x, A_{-x}) = (B_x, B_{-x})$ et comme l'un au moins des B_x, B_{-x} est nul, on retombe dans le cas unitaire.

Enfin, lorsque $t \notin \mathbb{Z}$, on est dans le cas binaire proprement dit. Nous supposons donc dans toute la suite que $t \notin \mathbb{Z}$.

Puisqu'ici ce sont les coinvariants qui déterminent univoquement les représentants canoniques f_t et $f_{\langle t \rangle} = \bar{l}^{-t} \circ f_t \circ \bar{l}^t$, nous allons utiliser non la formule (13d14) mais la formule (13d15). En la mettant sous forme réduite, grâce à la formule (10d3), puis en conjuguant par \bar{l}^t pour rétablir la périodicité en t , on obtient une expression simple de l'itérateur, avec séparation des variables z et t .

Proposition 13f2.

α) Dans le cas binaire, l'itérateur t -canonique admet l'expression suivante (dans le modèle formel) :

$$(13f23) \quad f_{\langle t \rangle}^*(z) = \bar{l}^{-t} \circ f_t^* \circ \bar{l}^t(z) = z + B_0(z) + \frac{1}{x} \log(1 - e^{-xt} B_x(z)) - \frac{1}{x} \log(1 - e^{xt} B_{-x}(z))$$

avec des blocs irréductibles B_0, B_x, B_{-x} définis par :

$$(13f24) \quad B_0 = - \sum_{\|\omega\|=0} B_\omega \Gamma_\omega V^\omega = - \sum_{\|\omega\|=0} B_\omega V^\omega$$

$$(13f24bis) \quad B_{\pm x} = \pm x \sum_{\|\omega\|=\pm x} B_\omega \Gamma_\omega V^\omega = \pm x \sum_{\|\omega\|=\pm x} B_\omega V^\omega$$

β) Les blocs irréductibles vérifient les équations de résurgence suivantes (écrites ici dans le modèle formel) :

$$(13f25) \quad \begin{cases} \Delta_x B_0 = A_x e^{-x} B_0 B_{-x} \\ \Delta_{-x} B_0 = A_{-x} e^{-x} B_0 B_x \end{cases}$$

$$(13f26) \quad \begin{cases} \Delta_x B_x = x A_x e^{-x} B_0 (1 - B_x B_{-x}) \\ \Delta_{-x} B_x = 0 \end{cases}$$

$$(13f27) \quad \begin{cases} \Delta_x \beta_{-x} = 0 \\ \Delta_{-x} \beta_{-x} = -x A_{-x} e^{x\beta_0} (1 - \beta_x \beta_{-x}) \end{cases}$$

8) Les blocs irréductibles β_x, β_{-x} vérifient les équations de Riccati :

$$(13f28) \quad \frac{d}{dz} (\beta_x) + x (\beta_x) + \frac{x \beta_x}{2\pi i z} + \frac{x \beta_{-x}}{2\pi i z} (\beta_x)^2 = 0$$

$$(13f29) \quad \frac{d}{dz} (\beta_{-x}) - x (\beta_{-x}) - \frac{x \beta_{-x}}{2\pi i z} - \frac{x \beta_x}{2\pi i z} (\beta_{-x})^2 = 0$$

et le bloc β_0 leur est lié par :

$$(13f30) \quad \frac{d}{dz} (\beta_0) = \frac{\beta_x}{2\pi i z} (\beta_{-x}) + \frac{\beta_{-x}}{2\pi i z} (\beta_x)$$

Indications : Le point α vient d'être justifié. En principe, les sommes (13f24) et (13f24bis) doivent être restreintes aux seuls multiindices $\underline{\omega}$ non dégénérés (*) mais comme ici les $\underline{\omega}$ ne peuvent avoir pour composantes ω_i que x ou $-x$ et pour somme $\|\underline{\omega}\|$ que $0, x$ ou $-x$, ils sont automatiquement non dégénérés (**)

Pour le point β , on peut par exemple porter (13f23) dans les relations :

$$(13f31) \quad \Delta_x e^{-x} f_{\langle t \rangle}^* = x A_x e^{-xt} \quad (\text{modèle formel})$$

$$(13f32) \quad \Delta_{-x} e^{x} f_{\langle t \rangle}^* = -x A_{-x} e^{xt} \quad (\text{modèle formel})$$

puis identifier les coefficients de e^{-xt} et e^{xt} .

(*) cf. définition 10a3

(**) cf. le critère du lemme 10a1.

Pour le point γ , de la règle de dérivation des V^ω :

$$\frac{d}{dz} V^{\omega_1, \dots, \omega_n} = -(\omega_1 + \dots + \omega_n) V^{\omega_1, \dots, \omega_n} - \frac{1}{2\pi i z} V^{\omega_1, \dots, \omega_n} \quad (\text{modèle formel})$$

on déduit la règle de dérivation des $V^\omega = \sum_{\omega' \sim \omega} \Gamma_{\omega'} V^{\omega'}$:

$$(13f33) \quad \frac{d}{dz} V^\omega = -\|\underline{\omega}\| V^\omega - \frac{1}{2\pi i z} \sum_{\substack{\omega' \sim \omega \\ \omega_1 \omega_2 = \omega}} \|\underline{\omega'}\| V^{\omega'}$$

où la somme est étendue à toutes les factorisations de $\underline{\omega}$ en produits d'un multiindice $\underline{\omega}'$ (dégénéré ou non) par un indice simple ω_2 . En appliquant alors (13f33) à la dérivation de B_0 , on ne trouve que des $V^{\omega'}$ de multiindice $\underline{\omega}'$ non dégénéré, avec $d(\underline{\omega}') = 1$, et on aboutit à (13f30). Au contraire, en appliquant (13f33) à la dérivation de $B_{\pm x}$, on trouve des $V^{\omega'}$ de multiindice $\underline{\omega}'$ tantôt dégénéré, avec $d(\underline{\omega}') = 2$, et tantôt non dégénérés, avec $d(\underline{\omega}') = 0$. En factorisant les $V^{\omega'}$ de multiindice dégénéré selon la formule (10c9), on aboutit aux équations (13f28) et (13f29).

Proposition 13f3.

$\alpha)$ Dans la modèle additif, les blocs B_0, B_x, B_{-x} ont toutes leurs singularités situées respectivement au dessus des points $0, x, -x$.

Dans les modèles sectoriels, ils sont réguliers (*) dans les secteurs suivants :

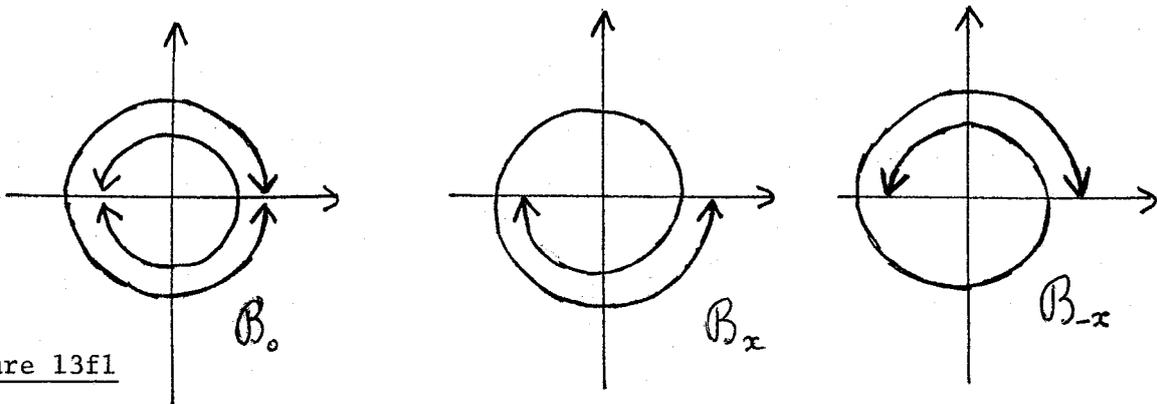


Figure 13f1

(*) c'est-à-dire possèdent à l'infini les développements asymptotiques auxquels on s'attend.

β) Dans les modèles sectoriels, les blocs $B_x(z), B_{-x}(z), e^{x B_0(z)}$ sont des fonctions méromorphes de la variable z sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

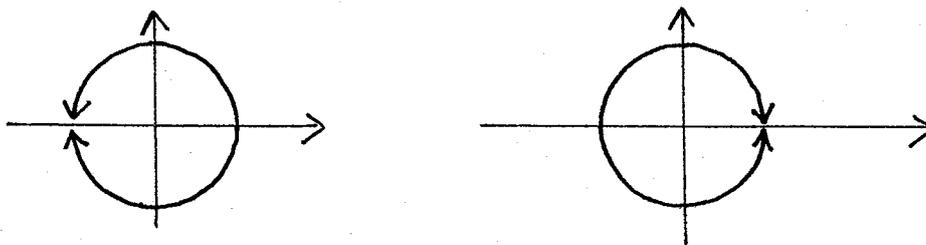
γ) On a dans le modèle formel la factorisation :

$$(13f34) \quad \frac{1}{f_{\langle t \rangle}} = \frac{\partial}{\partial z} f_{\langle t \rangle}^* = \left(1 - \frac{U_*(t)}{2\pi i z}\right) \frac{1 - B_x B_{-x}}{(1 - e^{-xt} B_x)(1 - e^{xt} B_{-x})}$$

Dans aucun des deux modèles sectoriels, le dernier membre ne s'annule en dehors du point

$$(13f35) \quad z = \frac{U_*(t)}{2\pi i} = -\frac{1}{2\pi i} (B_x e^{-xt} + B_{-x} e^{xt})$$

Indications : Le point α tient tout simplement à (13f24) et (13f24bis). Pour obtenir les itérateurs sectoriels $f_{\langle t \rangle}^*$ et $f_{\langle t \rangle}^{*-}$ il faut bien sûr porter dans (13f23) les seules déterminations de B_0, B_x, B_{-x} qui sont régulières dans les secteurs considérés, c'est-à-dire respectivement :



Les blocs B_x et B_{-x} vérifient des équations de Riccati aux coefficients réguliers sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ils sont donc méromorphes sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et ne possèdent que des pôles simples. Il en résulte, moyennant (13f30), que B_0 comporte des singularités logarithmiques du type $C_0 \log(z - z_0)$ aux points z_0 où l'un des blocs B_x, B_{-x} possède un pôle simple. Mais les résidus correspondants sont calculables en fonction de z_0 , grâce à (13f28) ou (13f29), et on s'aperçoit que C_0 est toujours de la forme $\pm \frac{1}{x}$, ce qui assure bien la méromorphie de $e^{x B_0}$.

Enfin, la relation (13f34) s'obtient à partir de (13d50) ou directement

à partir de (13f28) et (13f29). Or le bloc β_x satisfait (13f29) et on vérifie que son inverse $1/\beta_x$ satisfait (13f28). β_x et $1/\beta_x$ sont donc deux solutions différentes d'une même équation de Riccati. Par suite $\beta_x(z) \neq 1/\beta_x(z)$ pour tout $z \neq 0, \infty$. On en déduit facilement que le dernier membre de (13f34) ne s'annule pas en dehors du point $z = \omega_*(k)/2\pi i$ et que, par conséquent, les $\int_{\langle t \rangle}^*$ ne possèdent de ramifications quadratiques qu'au dessus de ce point.

Nous allons étudier d'un peu plus près les itérateurs. A partir de maintenant, nous raisonnerons sur $\int_t^*(k+z)$, car cette expression à l'avantage d'être le logarithme d'une fonction homographique de e^{zt} . De plus, c'est elle qui interviendra à la section 13h.

Proposition 13f4 :

Soit b défini comme en (13f22) et supposons que $b \notin \frac{1}{2} \mathbb{Z}$.

$\alpha)$ Il existe une fonction $H(z)$ méromorphe non plus sur $\mathbb{C} - \{0\}$ mais sur tout entier et telle que

$$(13f36) \quad \int_{t \pm}^*(z+t) = \frac{1}{z} \log \frac{\Delta_1 z_1^b H(z) + \Delta_2 z_1^{-b}}{\Delta_3 z_2^b H(z) + \Delta_4 z_2^{-b}}$$

où $z_1^{\pm b}, z_2^{\pm b}$ désignent des déterminations de $z^{\pm b}$ différentes selon que l'on considère l'un ou l'autre des itérateurs sectoriels \int_+^* et \int_-^* .

$\beta)$ On a :

$$(13f37) \quad H(z) = \frac{P(z)Q(z) - Q(z) + 1}{(P(z)-1)R(z)}$$

avec des fonctions P, Q, R entièrement déterminées par les conditions suivantes :

(i) P est l'unique solution de (13f28) qui soit régulière à l'origine et pour laquelle

$$(13f38) \quad P(0) = -i \left(\frac{B_x}{B_{-x}} \right)^{1/2} = -\frac{2\pi i}{x B_{-x}} \theta$$

(ii) $P + \frac{1}{Q}$ est l'unique solution de (13f28) qui soit régulière à l'origine et pour laquelle

$$(13f39) \quad P(0) + \frac{1}{Q(0)} = i \left(\frac{B_x}{B_{-x}} \right)^{1/2} = \frac{2\pi i}{x B_{-x}} \theta$$

(iii) R est l'unique fonction méromorphe (sur tout \mathbb{C}) telle que $R(0) = 1$ et telle que la solution générale de (13f28) s'écrive sous la forme :

$$(13f40) \quad y_{\Delta}(z) = P(z) + \frac{1}{Q(z) + \Delta z^{-2\theta} R(z)}$$

γ) Les scalaires $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ de (13f36) satisfont aux conditions :

$$(13f41) \quad \frac{\Delta_1}{\Delta_3} = \frac{\Delta_2}{\Delta_4} \frac{(1 - e^{-2\pi i \theta})}{(1 - e^{2\pi i \theta})} = -\frac{x A_x}{(1 - e^{2\pi i \theta})} = -\frac{(1 - e^{-2\pi i \theta})}{x A_{-x}}$$

où les deux derniers membres sont bien égaux à cause de (13f21).

Indications : On part de (13f23) compte tenu de $f_t^*(z+t) = t + f_{ct}^*(z)$. Comme on l'a déjà observé, B_x et $1/B_{-x}$ sont toutes deux solution de l'équation (13f28). Or, pour $\theta \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, cette équation de Riccati possède exactement deux solutions méromorphes, que nous avons notées P et $P + \frac{1}{Q}$, et la solution générale (13f40) dépend homographiquement de la constante d'intégration Δ . Par suite, $B_x = y_{\Delta_2}$ et $B_{-x} = 1/y_{\Delta_4}$ pour $\Delta_2, \Delta_4 \in \mathbb{C}$. Reste à calculer B_0 , ce qui est possible grâce à (13f30). On trouve :

$$e^{x\beta_0} = \lambda_0 \frac{z^\beta Q/R + \lambda'_2 z^{-\beta} R}{-z^\beta (1+PQ)/R + \lambda'_4 z^{-\beta} PR} \quad (\lambda_0 \in \mathbb{C})$$

Finalement, compte tenu de (13f23), on aboutit bien à (13f36) et (13f37). Quant aux relations (13f41), elles ne font que traduire les relations

$$\pi^+ \circ f_-^* = f_+^* \quad (\text{en bas}) ; \quad \pi^- \circ f_+^* = f_-^* \quad (\text{en haut})$$

qui ici deviennent :

$$(13f42) \quad \begin{cases} e^{x f_-^*} - x A_x = e^{x f_+^*} \\ e^{-x f_+^*} + x A_{-x} = e^{-x f_-^*} \end{cases} \quad (\text{pour } f_\pm^* = f_{t\pm}^*(z+t))$$

Ces relations sont en fait valables partout, du fait de la méromorphie en z de $\exp(x f_{t\pm}^*(z+t))$. Or, d'après ce que nous avons dit sur les déterminations des blocs $\beta_0, \beta_x, \beta_{-x}$, le passage de f_+^* à f_-^* (en bas) revient à la substitution de $e^{2ni\beta} z_1^\beta$ à z_1^β et le passage de f_+^* à f_-^* (en haut) revient à la substitution de $e^{-2ni\beta} z_2^\beta$ à z_2^β . Compte tenu de (13f42) et (13f36), cela conduit aux relations (13f41).

Proposition 13f5.

On suppose toujours que β n'est ni entier ni demi-entier.

α) Si l'on écrit dans le modèle formel

$$(13f43) \quad f_t^*(k+z) = \frac{1}{x} \log \left(\frac{\varphi_1 + e^{-xt}\varphi_2}{\varphi_3 + e^{-xt}\varphi_4} \right)$$

avec

$$(13f43bis) \quad \varphi_1 \varphi_4 - \varphi_2 \varphi_3 = 1$$

alors les fonctions φ_i s'expriment d'une manière particulièrement simple au moyen des V^ω :

$$(13f44) \quad e^{-\frac{xz}{2}} \varphi_1(z) = e^{\frac{x}{2} B_0(z)} (1 - B_x(z) B_{-x}(z))^{-1/2}$$

$$= 1 - x^2 B_x B_{-x} V_{(z)}^{x,-x} + x^4 B_x^2 B_{-x}^2 V_{(z)}^{x,-x,x,-x} - x^6 B_x^3 B_{-x}^3 V_{(z)}^{x,-x,x,-x,x,-x} + \dots$$

$$(13f45) \quad e^{-\frac{xz}{2}} \varphi_2(z) = -e^{\frac{x}{2} B_0(z)} B_x(z) (1 - B_x(z) B_{-x}(z))^{-1/2}$$

$$= -x B_x V_{(z)}^x + x^3 B_x^2 B_{-x} V_{(z)}^{x,-x,x} - x^5 B_x^3 B_{-x}^2 V_{(z)}^{x,-x,x,-x,x} + \dots$$

$$(13f46) \quad e^{\frac{xz}{2}} \varphi_3(z) = -e^{-\frac{x}{2} B_0(z)} B_{-x}(z) (1 - B_x(z) B_{-x}(z))^{-1/2}$$

$$= x B_{-x} V_{(z)}^{-x} - x^3 B_{-x}^2 B_x V_{(z)}^{-x,x,-x} + x^5 B_{-x}^3 B_x^2 V_{(z)}^{-x,x,-x,x,-x} + \dots$$

$$(13f47) \quad e^{\frac{xz}{2}} \varphi_4(z) = e^{-\frac{x}{2} B_0(z)} (1 - B_x(z) B_{-x}(z))^{-1/2}$$

$$= 1 - x^2 B_{-x} B_x V_{(z)}^{-x,x} + x^4 B_{-x}^2 B_x^2 V_{(z)}^{-x,x,-x,x} - x^6 B_{-x}^3 B_x^3 V_{(z)}^{-x,x,-x,x,-x,x} + \dots$$

$\beta)$ Les φ_i sont liées entre elles par les relations différentielles :

$$(13f48) \quad \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & \varphi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x/2 & \frac{x B_x}{2\pi i z} \\ \frac{-x B_{-x}}{2\pi i z} & -x/2 \end{bmatrix}$$

$\gamma)$ φ_1 et φ_3 vérifient l'équation différentielle linéaire :

$$(13f49) \quad y''(z) + \frac{1}{z} y'(z) - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2z} + \frac{\beta^2}{z^2} \right) y(z) = 0$$

tandis que φ_2 et φ_4 vérifient :

$$(13f50) \quad y''(z) + \frac{1}{z} y'(z) - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2z} + \frac{\beta^2}{z^2} \right) y(z) = 0$$

δ) Si l'on introduit les quatre fonctions hypergéométriques $\varphi_{\pm x, \pm b}$ avec :

$$(13f51) \quad \varphi_{x,b}(z) = z^b + \left\{ \begin{array}{l} + \sum_{n \geq 1} \frac{z^{2n}}{2^{3n} n!} \frac{z^{b+2n}}{(1+2b)(3+2b)(5+2b)\dots(2n-1+2b)} \\ + \sum_{n \geq 1} \frac{z^{2n}}{2^{3n-1} (n-1)!} \frac{z^{b+2n-1}}{(1+2b)(3+2b)(5+2b)\dots(2n-1+2b)} \end{array} \right.$$

on a pour expression des φ_i :

$$(13f52) \quad \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 \\ \Delta_3 & \Delta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{x,b} & \varphi_{-x,b} \\ \varphi_{x,-b} & -\varphi_{-x,-b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{-x b_x}{2\pi i}\right)^{1/2} & 0 \\ 0 & \left(\frac{x b_x}{2\pi i}\right)^{1/2} \end{bmatrix}$$

avec des scalaires Δ_i qui, outre les relations (13f41), vérifient :

$$(13f53) \quad \Delta_1 \Delta_4 - \Delta_2 \Delta_3 = -\frac{1}{2b}$$

Indications : Les développements des φ_i en fonctions des $\mathcal{U}^{\pm x, \mp x, \pm x, \dots}$

(qui appartiennent à l'algèbre réduite) peuvent se déduire des développements correspondants pour $\beta_0, \beta_x, \beta_{-x}$ (cf. (13f24) et (13f24bis)). On peut aussi, grâce à (13f31) et (13f32), calculer les équations de résurgence vérifiées par $e^{-\frac{x^2}{2}} \varphi_1, e^{-\frac{x^2}{2}} \varphi_2, e^{\frac{x^2}{2}} \varphi_3, e^{\frac{x^2}{2}} \varphi_4$, en déduire leur développements formels en fonctions des invariants et des $\mathcal{U}^{\pm x, \mp x, \dots}$, puis passer aux coinvariants et aux $\mathcal{U}^{\pm x, \mp x, \dots}$ moyennant quelques lemmes combinatoires.

Les relations (13f48) s'obtiennent à partir de (13f28), (13f29), (13f30) ou directement à partir de (13d50). En itérant (13f48), on trouve que φ_1, φ_3 et φ_2, φ_4 vérifient respectivement (13f49) et (13f50). Or ces équations linéaires ont pour solutions particulières $\varphi_{x,b}, \varphi_{x,-b}$ et $\varphi_{-x,b}, \varphi_{-x,-b}$ respectivement, où les $\varphi_{\pm x, \pm b}$ sont les fonctions hypergéométriques définies en (13f51). De plus :

$$(13f54) \quad \det \begin{vmatrix} \varphi_{x,b} & \varphi_{-x,b} \\ \varphi_{x,-b} & -\varphi_{-x,-b} \end{vmatrix} \equiv -2$$

$$(13f55) \quad \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \varphi_{x,b} & \varphi_{-x,b} \\ \varphi_{x,-b} & -\varphi_{-x,-b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{x,b} & \varphi_{-x,b} \\ \varphi_{x,-b} & -\varphi_{-x,-b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x/z & b/z \\ b/z & -x/z \end{bmatrix}$$

et la factorisation (13f52) s'en déduit facilement avec la condition (13f53).

Proposition 13f6 :

Tout comme dans le cas unitaire, les fonctions $f_{\langle t \rangle}^*$, ${}^*f_{\langle t \rangle}$, $f_{\langle t \rangle}^w$ liées dans le cas binaire à la représentation t-canonique, sont algébrico-différentielles, car elles vérifient respectivement les équations différentielles :

$$(13f56) \quad \nabla_2(y) + x^2 y'^2 = P_2(z)$$

$$(13f57) \quad \nabla_2(y) + y'^2 P_2(y) = x^2$$

$$(13f58) \quad \nabla_2(y) + y'^2 P_2(y) = P_2(z)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \text{inconnue} \\ z = \text{variable} \\ x = \text{paramètre} \end{array} \right\}$$

avec

$$(13f59) \quad \nabla_2(y) = \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 - 2 \left(\frac{y''}{y'} \right)'$$

$$(13f60) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_2(z) = \frac{(\beta_1 + \beta_2)^2 + 2z(\beta_1 + \beta_2)}{z^2(z + \beta_1 + \beta_2)^2} + \frac{2x(\beta_1 - \beta_2)}{z(z + \beta_1 + \beta_2)} + \frac{z^2 \beta_1 \beta_2}{z^2} + x^2 \\ \text{avec } \beta_1 = \frac{B_x e^{-xt}}{2\pi i}, \quad \beta_2 = \frac{B_{-x} e^{xt}}{2\pi i} \end{array} \right.$$

L'opérateur ∇_2 n'est autre que la dérivée schwarzienne, qui est invariante par rapport aux homographies :

$$(13f61) \quad \nabla_2 (f \circ g) = \nabla_2 (g) \quad (\text{pour toute homographie } f)$$

Plus généralement, pour toute paire $f, g \in G^\infty$, on a identiquement :

$$(13f62) \quad \nabla_2 (f \circ g) = \nabla_2 (g) + g'^2 \nabla_2 (f) \circ g$$

Cette relation, analogue à (13e17) permet, tout comme dans le cas unitaire, de déduire (13f57) et (13f58) de (13f56). Reste à établir (13f56). On peut pour cela partir de l'une des deux identités suivantes (où $f^* = f^*_{\langle t \rangle}(z)$) :

$$(13f63) \quad \left(1 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{z}\right)^{-1} \cdot e^{x f^*} \frac{\partial}{\partial z} f^* = (e^{x t} \varphi_3 + \varphi_4)^{-2}$$

$$(13f64) \quad \left(1 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{z}\right)^{-1} \cdot e^{-x f^*} \frac{\partial}{\partial z} f^* = (\varphi_1 + e^{-x t} \varphi_2)^{-2}$$

et utiliser ensuite les relations différentielles (13f48), mais il est plus simple de partir de l'une des deux identités suivantes :

$$(13f63\text{bis}) \quad \left(1 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{z}\right)^{-1} \cdot e^{x f^*} \frac{\partial}{\partial z} f^* = e^{x z} \left(\beta^{-x} / 1 - e^{x t} \beta_{-x}\right)^2$$

$$(13f64\text{bis}) \quad \left(1 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{z}\right)^{-1} \cdot e^{-x f^*} \frac{\partial}{\partial z} f^* = e^{-x z} \left(\beta^x / 1 - e^{-x t} \beta_x\right)^2$$

avec β_x, β_{-x} solutions des équations de Riccati (13f28), (13f29) et β^x, β^{-x} définis par :

$$(13f65) \quad \left(\frac{d}{dz} \beta^x\right) / \beta^x = \frac{-x \beta_{-x}}{2\pi i} e^{x t} \beta_x; \left(\frac{d}{dz} \beta^{-x}\right) / \beta^{-x} = \frac{x \beta_x}{2\pi i} e^{-x t} \beta_{-x} \quad \text{avec } \beta_x(\infty) = \beta^{-x}(\infty) = 0$$

Les équations algébriko-différentielles des propositions (13e1) et (13f6) n'ont

pas d'équivalents exacts en dehors des cas unitaire et binaire. Elles reposent d'ailleurs largement sur les opérateurs ∇_n ($n=1,2$) et les identités fonctionnelles :

$$(13f66) \quad \nabla_n (f \circ g) = \nabla_n (g) + g'^n (\nabla_n f) \circ g$$

qui ne s'étendent pas aux entiers $n \geq 3$.

Sections 13g : Représentants canoniques : le cas unilatéral.

Eléments semi-itérables.

Dans cette section, nous travaillons toujours sur des éléments de G° de la forme-type $f(z) = z + 1 + O(z^{-2})$, mais nous supposons en outre que les invariants $A_\omega, A_\omega^+, A_\omega^-$ associés à f sont nuls quand la fréquence ω appartient à l'une des deux moitiés de \mathcal{R} , à savoir $\mathcal{R}^+ = 2\pi i \mathbb{N}^*$ ou $\mathcal{R}^- = -2\pi i \mathbb{N}^*$. Nous dirons pour faire bref que ces f sont semi-itérables. Comme cette notion est évidemment stable par conjugaison, on parlera aussi de classes semi-itérables.

Dire qu'un f élément de G° est semi-itérable ne signifie donc pas qu'il possède des itérées f^w pour des ordres d'itération w pris dans \mathbb{R}^+ (ou dans \mathbb{R}^-). D'ailleurs, une telle définition serait absurde, puisque f possède des itérées f^w dans G° pour tout w complexe dès qu'il en possède pour un certain w irrationnel (d'après la proposition 8d1).

Pour fixer les idées, nous considérerons dans cette section des f semi-itérables dont les invariants sont nuls quand les fréquences ω parcourent $\mathcal{R} = -2\pi i \mathbb{N}^*$. Pour ces f , on a donc :

$$\pi_*^-(t) \equiv 0 \quad ; \quad \pi^-(t) \equiv t \quad ; \quad -\pi(t) \equiv t$$

Les seules fonctions invariantes non triviales sont $\pi_*^+, \pi^+, +\pi$ et,

pour simplifier, nous les noterons π_* , π , $\bar{\pi}$:

$$(19g1) \quad \pi_*(t) = \pi_*^+(t) = - \sum_{\omega \in \Omega^+} A_\omega e^{-\omega t}$$

$$(19g2) \quad \pi(t) = \pi^+(t) = t - \sum_{\omega \in \Omega^+} A_\omega^+ e^{-\omega t}$$

$$(19g3) \quad \bar{\pi}(t) = {}^+\pi(t) = t - \sum_{\omega \in \Omega^+} A_\omega^- e^{-\omega t}$$

Ces notations sont légitimes, car $\pi = \pi^+$ a bien pour inverse de composition $\bar{\pi} = {}^+\pi$ et pour logarithme itératif $\pi_* = \pi_*^+$. Les séries π et $\bar{\pi}$ sont convergentes pour t "en bas". La série π_* peut converger ou diverger selon les cas.

Lemme 13g1 :

Les f semi-itérables sont caractérisés par le fait que leurs éléments sectoriels f_\pm^* , ${}^*f_\pm$, f_\pm^ω sont définis et réguliers (i.e. possèdent des développements asymptotiques à l'infini) dans des secteurs d'ouverture 3π (au lieu de 2π dans le cas général).

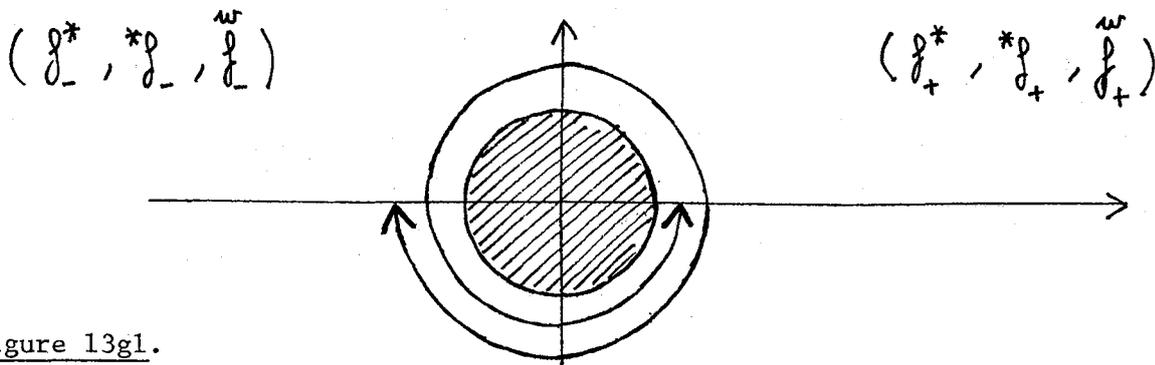


figure 13g1.

En effet, à cause de la relation

$$(13g4) \quad f_-^* = \pi^- \circ f_+^* \quad (\text{en haut})$$

et puisqu'ici $\pi^-(t) \equiv t$, il est clair que f_+^* , pris dans son domaine

principal (à droite) et prolongé analytiquement dans le sens positif selon un arc de cercle $|z| = R$ (R assez grand) se transforme en f_{-}^{*} , pris dans son domaine principal (à gauche). D'où la régularité de f_{\pm}^{*} , et par suite de f_{\pm}^{*} et f_{\pm}^{ω} , sur un secteur $-\pi < \text{Arg } z < +2\pi$.

Lemme 13g2 :

α) Les coinvariants B_{ω} d'une f semi-itérable sont toujours définis.

β) De plus, lorsque la série de Fourier

$$(13g5) \quad u_{*}(t) = - \sum_{\omega \in \Omega^{+}} B_{\omega} e^{-\omega t}$$

formée à l'aide de ces coinvariants, converge (en bas), les séries de Fourier π et π^{-1} , formées à l'aide des invariants, s'en déduisent par les formules intégrales :

$$(13g6) \quad \pi(z) = \pi^{+}(z) = z + \sum_{\lambda \geq 1} \int_{-\infty < t_1 < \dots < t_{\lambda} < +\infty} dt_1 \dots dt_{\lambda} \rho_{t_{\lambda}}(z) \frac{\partial}{\partial z} \dots \rho_{t_1}(z) \frac{\partial}{\partial z} \cdot z$$

$$(13g7) \quad \pi^{-1}(z) = \pi^{-+}(z) = z + \sum_{\lambda \geq 1} (-1)^{\lambda} \int_{-\infty < t_1 < \dots < t_{\lambda} < +\infty} dt_1 \dots dt_{\lambda} \rho_{t_{\lambda}}(z) \frac{\partial}{\partial z} \dots \rho_{t_1}(z) \frac{\partial}{\partial z} \cdot z$$

avec $\rho_t(z) = \frac{u_{*}(t)}{2\pi i(z-t) - u_{*}(t)}$.

Le point α tient à ce que, dans la formule (13d11), le second membre s'annule quand $\omega_0 \in \Omega^{-}$ et se réduit à un nombre fini de termes lorsque $\omega_0 \in \Omega^{+}$.

Quant aux formules (13g6) et (13g7), on les déduit des formules (13d28) en se souvenant que :

$$\pi^{+}(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ f_{+}^{*}(z-n) + n \right\} \quad \text{et} \quad \pi^{-+}(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ f_{-}^{*}(z+n) - n \right\} \quad (\text{en bas})$$

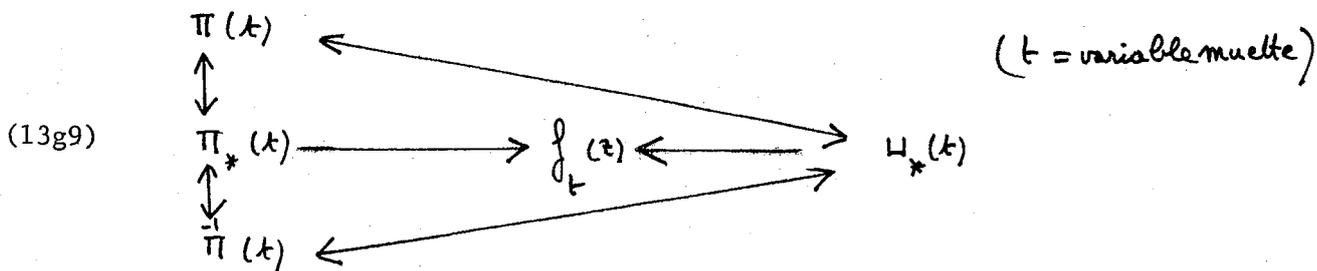
et en observant que $\mu_{t'}(z+n) = \mu_{t-n}(z)$.

Dans (13g6) et (13g7), la convergence est uniforme (en bas). On obtiendrait une formule analogue pour π_* , soit :

$$(13g8) \quad \pi_*(z) = \pi_*^+(z) = \sum_{s \geq 1} \int dt_1 \dots dt_s T^{t_1, \dots, t_s} \mu_{t_s}(z) \frac{\partial}{\partial z} \dots \mu_{t_1}(z) \frac{\partial}{\partial z} \cdot z$$

avec pour T le moule alterné introduit à la section 4c. Mais cette fois, la série de Fourier π_* est généralement divergente et le dernier membre de (13g8) ne saurait converger comme série de fonctions : cependant, pour tout ω , il ne contient qu'un nombre fini de termes de fréquence ω et la formule a donc quand-même un sens.

Abordons maintenant la synthèse harmonique unilatérale, c'est-à-dire la construction de représentants t-canoniques dans les classes semi-itérables. Etant donné la correspondance biunivoque qui existe, dans ce cas particulier, entre invariants et coinvariants, il s'agit, partant d'un quelconque des sommets du diagramme (13g9) ci-dessous, d'aboutir au centre :



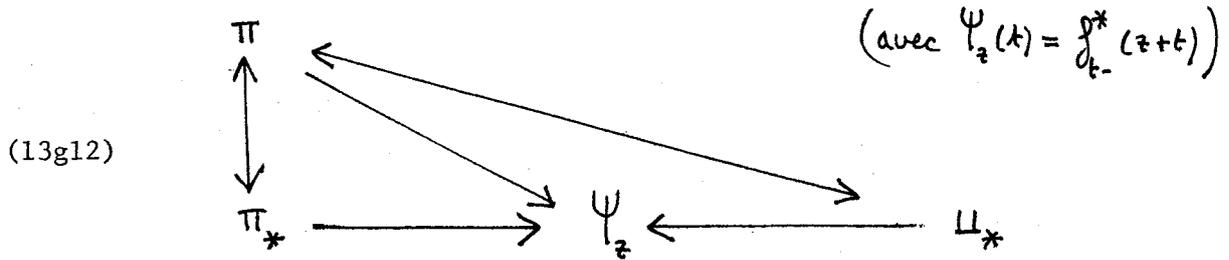
Supprimons $\pi^{-1}(t)$, qui joue un rôle parfaitement symétrique de $\pi(t)$, et remplaçons f_t par son itérateur sectoriel à gauche f_{t-}^* , qui le détermine entièrement, ou mieux encore, par l'application

$$(13g10) \quad t \rightarrow \psi_z(t) = f_{t-}^*(z+t) = t + f_{\langle t \rangle -}^*(z)$$

qui, pour chaque z , a l'avantage d'être périodiques en t :

$$(13g11) \quad \Psi_z(t+1) = 1 + \Psi_z(t) \quad (|z| \text{ assez grand; } -\text{Im}t \text{ assez grand})$$

On aboutit donc au diagramme suivant :



La formule (13d64) explicite la flèche $\pi \rightarrow \Psi_z$ et fournirait une solution idéale à notre problème si la convergence de son second membre était facile à étudier. Mais tel n'est pas le cas. Voir à ce sujet l'exercice 4g3.

La formule (13d14) explicite la flèche $\pi_* \rightarrow \Psi_z$, ou plus exactement la flèche $\{A_\omega\} \rightarrow \Psi_z$, mais les conditions de convergence ne sont pas plus transparentes que pour (13d64).

Reste la formule (13d28), qui explicite la flèche $\mu_* \rightarrow \Psi_z$. Ici, on sait à quoi s'en tenir, car d'après la proposition 13d2, lorsque μ_* est convergent, le second membre de (13d28) converge vers l'itérateur $f_{t\pm}^*$ d'un élément f_t de G° . Malheureusement, nous ne savons pas, pour l'instant, si μ_* est toujours convergente. Nous verrons plus loin que ce n'est pas le cas.

Pour pouvoir débrouiller la question, il va falloir jouer successivement sur toutes les applications figurées au diagramme (13g12). Plus exactement, il va falloir utiliser les applications tangentes, en des points judicieusement choisis. Pour illustrer la méthode, commençons par étudier, sur le diagramme (13g12), les applications tangentes aux "points" les plus simples, c'est-à-dire aux "points unitaires". D'après la section 13e, on a en ces "points" :

$$(13g13) \left\{ \begin{array}{l} A_\omega = B_\omega = 0 \text{ si } \omega \neq x \\ A_x = B_x \neq 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{pour un } x \text{ fixe de la} \\ \text{forme } 2\pi i n \text{ avec } n > 0. \end{array} \right.$$

$$\pi_*(t) = \mu_*(t) = -A_x e^{-xt}$$

$$\pi(t) = t + \frac{1}{x} \log(1 - x A_x e^{-xt})$$

$$\Psi_z(t) = \int_{t-}^*(z+t) = z+t + \frac{1}{x} \log(1 - x A_x e^{-xt} \mathcal{U}_-^x(z))$$

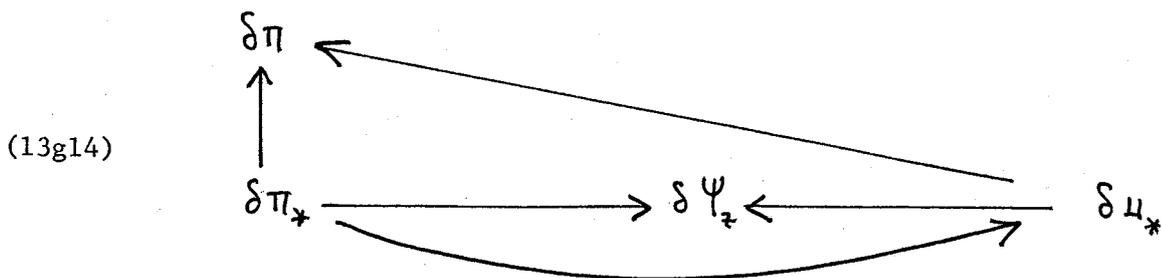
$$= \frac{1}{x} \log \left(e^{x(z+t)} - \frac{x A_x}{2\pi i} \int_z^{-\infty} \frac{e^{z^3}}{z} dz \right)$$

Lemme 13g3.

Au diagramme (13g12), parmi les applications tangentes aux "points unitaires", il n'y en a que cinq qui conservent toujours la convergence des séries de Fourier. Ce sont :

$$\delta\pi_* \rightarrow \delta\pi, \quad \delta\mu_* \rightarrow \delta\pi, \quad \delta\pi_* \rightarrow \delta\mu_*, \quad \delta\mu_* \rightarrow \delta\Psi_z, \quad \delta\pi_* \rightarrow \delta\Psi_z$$

Montrons d'abord que les flèches énumérées, qui sont celles du diagramme



conservent toujours la convergence.

Flèche $\delta\pi_* \rightarrow \delta\pi$

C'est immédiat, puisque $\pi_* + \delta\pi_*$ est le générateur infinitésimal (ou logarithme itératif) de $\pi + \delta\pi$.

Flèche $\delta\mu_* \rightarrow \delta\pi$

Ici aussi, c'est immédiat, car on a déjà vu que la flèche $\mu_* \rightarrow \pi$ elle-même conservait la convergence. Calculons toutefois l'application tangente,

pour voir si elle est inversible.

En donnant des accroissements infinitésimaux aux deux membres de la formule (13g6), on trouve :

$$\delta\pi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\lambda=j}^{\infty} \int_{-\infty < t_1 < \dots < t_j < \dots < t_\lambda < \infty} dt_1 \dots dt_j \dots dt_\lambda \left[\mu_{t_\lambda}(z) \frac{\partial}{\partial z} \dots \mu_{t_j}(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] \left[\delta \mu_{t_j}(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] \left[\mu_{t_{j-1}}(z) \frac{\partial}{\partial z} \dots \mu_{t_1}(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot z$$

Soit, compte tenu de (13d34), (13d35) et en faisant $t_j = t$:

$$\delta\pi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[{}^*F_{t-} \right] \left[\delta \mu_t(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] \left[F_{t+}^* \right] z$$

Mais comme ${}^*p_{t-} = {}^*p_{t+} \circ \pi$ (en bas) et que $\delta \mu_t(z) = \frac{\delta \mu_*(t)}{[2\pi i(z-t) - \mu_*(t)]^2}$ cela donne finalement :

$$(13g15) \quad (\delta\pi) \circ \pi^{-1}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta \mu_*(t)}{[2\pi i({}^*p_{t+}(z) - t) - \mu_*(t)]} \frac{dt}{\left[\frac{\partial}{\partial z} {}^*p_{t+}(z) \right]}$$

Malheureusement, cette formule ne montre pas si la flèche $\delta \mu_* \rightarrow \delta \pi$ est ou non surjective et ne renseigne donc pas sur la flèche inverse.

Flèche $\delta \pi_* \rightarrow \delta \mu_*$

En prenant des accroissements infinitésimaux aux deux membres de (13d16), on trouve :

$$(13g16) \quad \delta B_{\omega_0} = \sum_{\omega^1, \omega^2, \omega^3} A_{\omega^1} (\delta A_{\omega^2}) A_{\omega^3} \Gamma_{\omega^1 \omega^2 \omega^3} U^{\omega^1 \omega^2 \omega^3}$$

la somme étant étendue à tous les multiindices ω^1, ω^2 et à tous les indices simples ω^3 tels que $\|\omega^1\| + \omega^2 + \|\omega^3\| = \omega_0$. Compte tenu de l'alternance du moule U^* , cela s'écrit :

$$(13g17) \quad \delta B_{\omega_0} = \sum_{\omega^1, \omega^2, \omega^3} A_{\omega^1} (\delta A_{\omega^2}) A_{\omega^3} \frac{\Gamma_{[\omega^1 \omega^2 \omega^3]}}{n(\omega^1 \omega^2 \omega^3)} U^{\omega^1 \omega^2 \omega^3}$$

Mais comme $A_\omega = 0$ pour tout ω simple $\neq x$, on peut se limiter aux ω^1, ω^3 de la forme $(x)^{n_1}, (x)^{n_3}$, où $(x)^n$ désigne bien sûr le multiindice formé de n composantes toutes égales à x . D'autre part :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{[(x)^{n_1} \omega_2 (x)^{n_3}]} = 0 \quad \text{si } n_1 \geq 2 \\ \Gamma_{[x \omega_2 (x)^{n-1}]} + \Gamma_{[\omega_2 (x)^n]} = 0 \\ U^{x \omega_2 (x)^{n-1}} + n U^{\omega_2 (x)^n} = 0 \end{array} \right.$$

Les deux premières relations sont immédiates. La troisième s'obtient en explicitant la relation d'alternance :

$$\sum_{x, \omega_2(x)^{n-1} < \omega} U^\omega = 0 \quad (\text{cf (6d6)})$$

Finalement, (13g17) se réduit à une somme finie :

$$(13g18) \quad \delta B_{\omega_0} = \sum (A_x)^n \Gamma_{[\omega_2(x)^n]} U^{\omega_2(x)^n}$$

étendue à tous les ω_2, n tels que $\omega_2 + nx = \omega_0, n \in \mathbb{N}^*, \omega_2 \in 2\pi i \mathbb{N}^*$, et comportant des facteurs $\Gamma_{[\cdot]}$ qui valent explicitement :

$$(13g19) \quad \Gamma_{[\omega_2(x)^n]} = (\omega_2 - x) \omega_2 (\omega_2 + x) \dots (\omega_2 + (n-2)x)$$

Reste à évaluer les $U^{\omega_2(x)^n}$. Dans le cas particulier qui nous occupe, les relations (7b7) se réduisent à :

$$(13g20) \quad 2\pi i \frac{\partial}{\partial y} U^{y(x)^n} = \frac{1}{y + (n-1)x} U^{y(x)^{n-1}}$$

Comme $U^{y(x)^{n-1}} = 0$ pour $y = x$, cela équivaut à :

$$(13g21) \quad U^{y(x)^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_x^y \frac{U^{y_1(x)^{n-1}}}{y_1 + (n-1)x} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{y-x} \frac{U^{y_1+x, (x)^{n-1}}}{y_1 + nx} dy_1$$

Soit, en itérant :

$$(13g22) \quad U^{y(x)^n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_0^{y-x} \frac{dy_1 \dots dy_j \dots dy_n}{(y_1+x) \dots (y_j+jx) \dots (y_n+nx)}$$

ce qui conduit à la majoration :

$$(13g23) \quad |U^{\omega_2(x)^n}| < \left| \frac{\omega_2-x}{2\pi\omega_2} \right|^n \left(\frac{1}{n!} \right)^2$$

Il ne reste plus qu'à porter (13g23) et (13g19) dans (13g18) pour voir que

$$\limsup_n |\delta B_{2\pi i n}|^{1/n} < \infty \quad \text{lorsque} \quad \limsup_n |\delta A_{2\pi i n}|^{1/n} < \infty$$

Flèche $\delta \mu_* \rightarrow \delta \psi_z$

Ici, on sait que la flèche $\mu_* \rightarrow \psi_z$ elle-même conserve la convergence. De plus, de (13d28), on tire la relation :

$$(13g24) \quad \delta \psi_{\pi(z)}(t) = - \int_t^{+\infty} \frac{\delta \mu_*(t)}{[2\pi i (\int_{t+}^*(z) - t) - \mu_*(t)]} \frac{dt}{[\frac{\partial}{\partial z} \int_{t+}^*(z)]}$$

analogue à (13g15).

Flèche $\delta \pi_* \rightarrow \delta \psi_z$

Elle conserve la convergence, comme composée des flèches $\delta \pi_* \rightarrow \delta \mu_*$ et $\delta \mu_* \rightarrow \delta \psi_z$ qui la conservent chacune.

Montrons maintenant que les flèches suivantes :

$$(13g25) \quad \begin{array}{ccc} \delta \pi & \searrow & \\ \downarrow & \searrow & \delta \psi_z \\ \delta \pi_* & \searrow & \delta \mu_* \\ & \swarrow & \end{array}$$

ne conservent pas toujours la convergence.

Flèche $\delta\pi \rightarrow \delta\pi_*$

Elle ne conserve pas toujours la convergence, puisque la prise du logarithme itératif ne la conserve pas toujours (appliquer la proposition 9c1 après le changement de variable $t \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \log t$). Plus précisément, la série de Fourier $\delta\pi_*$ n'est convergente que si $\delta\pi$ est de la forme $\delta S - \frac{(\delta S) \circ \pi}{\pi'}$ pour une série de Fourier δS convergente.

Flèche $\delta\mu_* \rightarrow \delta\pi_*$

En raisonnant comme pour la flèche $\delta\pi_* \rightarrow \delta\mu_*$, mais cette fois à partir de la formule (13d17), on obtient la formule

$$(13g26) \quad \delta A_{\omega_0} = \sum (B_x)^n \Gamma_{[\omega_2(x)^n]} V^{\omega_2(x)^n}$$

symétrique de la formule (13g18). Mais ici, les relations différentielles (7b8) conduisent à la formule :

$$(13g27) \quad V^{y(x)^n} = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\mathcal{D}_n} \frac{dy_1}{y_1} \dots \frac{dy_j}{y_j} \dots \frac{dy_n}{y_n}$$

l'intégrale étant étendue au domaine

$$\mathcal{D}_n = \{ x < y_1 < y_2, \dots, x < y_j < y_{j-1} < x, \dots, x < y_n < y_{n-1} + x \}$$

D'où la minoration

$$(13g28) \quad |V^{\omega_2(x)^n}| > \frac{|\omega_2 - x|}{(2\pi)^n} (\log 2)^{n-1}$$

qui, compte tenu de (13g19) et (13g26), montre que la convergence de $\delta\mu_*$ n'entraîne pas nécessairement celle de $\delta\pi_*$.

Flèche $\delta\pi \rightarrow \delta\Psi_*$

Considérons des accroissement $\delta\pi$ de la forme particulière :

$$\delta\pi(z) = - \sum_{n \geq 1} (\delta A_{nx}^+) e^{-nxz}$$

ainsi que le quotient correspondant :

$$\frac{\delta\pi(z)}{\pi'(z)} = - (1 - x A_x e^{-xz}) \sum_{n \geq 1} (\delta A_{nx}^+) e^{-nxz} = \sum_{n \geq 1} (\delta C_{nx}) e^{-nxz}$$

En prenant les accroissements des deux membres de la formule (13d64) on montre

(*) que, en cas de convergence de $\delta\psi_z$, on doit avoir :

$$(13g29) \quad \delta\psi_z(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_n (\delta C_{nz}) \int_0^{-i\infty} \frac{dz}{z-z} \frac{e^{-nz} e^{-zt}}{\{e^{xt} - x A_x \mathcal{U}_-(z)\}^{n-1}}$$

Or, puisque $\mathcal{U}_+(z) \sim -\frac{\log z}{2\pi i}$ pour $z \rightarrow 0$, il est clair que, quel que soit le choix du chemin d'intégration dans (13g29), le dénominateur $\{\dots\}^{n-1}$ de l'intégrande s'annulera sur ces chemins pour des valeurs de t telles que $-\text{Im} t$ et donc e^{xt} soient arbitrairement grands. Par suite, si on intègre sur l'un de ces chemins, pour des valeurs licites des z et t , on obtiendra, à z fixe, un germe analytique en t qui, prolongé, ne saurait livrer à chaque cas une fonction de t périodique "en bas". C'est en particulier ce qui se passe lorsque $\frac{\delta\pi}{\pi'}$ est un polynôme trigonométrique : les germes $\delta\psi_z$ correspondants ne sont jamais périodiques. C'est donc que la flèche $\delta\pi \rightarrow \delta\psi_z$ ne conserve pas toujours la convergence.

Flèche $\delta\pi \rightarrow \delta\mu_x$

Cette flèche non plus ne conserve pas toujours la convergence, car sinon, par composition avec la flèche $\delta\mu_x \rightarrow \delta\psi_z$, qui la conserve, la flèche $\delta\pi \rightarrow \delta\psi_z$ la conserverait aussi, ce qui n'est pas le cas.

Ceci achève de prouver le lemme 13g3. Nous allons maintenant montrer

(*) cf. exercice 4g4.

que la situation ne change pas quand on considère, dans le diagramme (13g12), les applications tangentes en un "point convergent" quelconque, c'est-à-dire pour des séries de Fourier $\pi, \pi_*, \mu_*, \psi_z$ toutes convergentes. (D'après ce qui précède, il suffit de supposer μ_* convergente).

Pour les flèches $\delta \pi \rightleftharpoons \delta \pi_*$, c'est immédiat. Pour les autres flèches, cela va résulter des lemmes suivants :

Lemme 13g4 :

En tout "point convergent", les flèches $\delta \mu_* \rightarrow \delta \pi$ et $\delta \mu_* \rightarrow \delta \psi_z$ conservent la convergence.

Cela tient à ce que les flèches $\mu_* \rightarrow \pi$ et $\mu_* \rightarrow \psi_z$ elles-mêmes conservent la convergence. D'ailleurs, les formules (13g15) et (13g24) restent en vigueur.

Lemme 13g5 :

Si $\pi_*(t)$ est convergente et si $\pi^*(t)$ désigne la primitive de $1/\pi_*(t)$ qui n'a pas de terme constant, on a pour z voisin de 0 et t en bas :

$$(13g30) \quad \pi^* \circ \psi_z(t) = -\frac{\log z}{2\pi i} + k(z, t)$$

pour une fonction k analytique en z, t et solution de l'équation :

$$(13g31) \quad z \frac{\partial k}{\partial z} = \left(z - \frac{\mu_*(t)}{2\pi i} \right) \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{1}{2\pi i}$$

Pour le schéma de la démonstration, voir l'exercice 4g5.

Lemme 13g6 :

En tout "point convergent" les flèches $\delta \pi \rightarrow \delta \psi_z$ et $\delta \pi \rightarrow \delta \mu_*$

sont données par (*)

$$(13g32) \quad \frac{\delta \Psi_z(t)}{\frac{\partial}{\partial z} \Psi_z(t)} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-i\infty} \frac{\left(\frac{\delta \pi}{\partial z} \pi\right)_0 \Psi_3(t)}{\frac{\partial}{\partial z} \Psi_3(t)} \frac{1 - \frac{u_*(t)}{2\pi i z}}{1 - \frac{u_*(t)}{2\pi i z}} \frac{dz}{z-z}$$

$$(13g33) \quad \delta u_*(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-i\infty} \frac{\left(\frac{\delta \pi}{\partial z} \pi\right)_0 \Psi_3(t)}{\frac{\partial}{\partial z} \Psi_3(t)} \left\{ \frac{d}{dt} u_*(t) - \frac{u_*(t)}{z - \frac{u_*(t)}{2\pi i}} \right\} \frac{dz}{z}$$

et ne conservent pas la convergence.

Comme la formule (13g29), la formule (13g32) se démontre en prenant les accroissements des deux membres de (13d64). La formule (13g34) s'en déduit comme suit. De (13d49) on tire :

$$(13g34) \quad \left(1 - \frac{u_*(t)}{2\pi i z}\right) \frac{\partial}{\partial t} \Psi_z = \frac{\partial}{\partial z} \Psi_z$$

et de là, en passant aux accroissements :

$$(13g35) \quad \delta u_*(t) = \left\{ \left(\frac{d}{dt} u_*(t) - z \frac{\partial}{\partial z} + \left(z - \frac{u_*(t)}{2\pi i} \right) \frac{\partial}{\partial t} \right) \right\} \left\{ \left(1 - \frac{u_*(t)}{2\pi i z} \right) \frac{\delta \Psi_z(t)}{\frac{\partial}{\partial z} \Psi_z(t)} \right\}$$

Puis en portant (13g32) dans (13g35) et en tenant compte à nouveau de (13g34) pour dériver convenablement sous le signe somme, on aboutit à (13g34). Or d'après

(*) Dans (13g32) il faut intégrer sur un chemin passant à gauche de z . Dans (13g33), la position du chemin par rapport au point $\frac{u_*(t)}{2\pi i}$ est indifférente (voir ci-après). Quitte à supposer t suffisamment "en bas", on peut toujours trouver des chemins qui ne sortent pas du domaine de définition des intégrandes.

(13g31), k est de la forme $k(z, t) = u^*(t) + O(z)$, avec u^* primitive de $1/u_*$ (ne pas confondre u^* et π^*). Il est donc clair que, pour tout choix du chemin d'intégration, on peut trouver des t , avec $-\text{Im } t$ arbitrairement grand (et donc $u_*(t)$ arbitrairement petit et $u^*(t)$ arbitrairement grand) pour lesquels le chemin d'intégration rencontre un pôle. D'où en général la non périodicité en t de $\psi_z(t)$.

Remarquons enfin que, malgré les apparences, l'intégrande de (13g33) ne possède pas de pôle en $z = \frac{u_*(t)}{2\pi i}$. D'ailleurs, on calcule que (13g33) équivaut à :

$$(13g36) \quad \delta u_*(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-i\infty} \frac{\left(\frac{\delta \pi}{\frac{d}{dz} \pi}\right) \circ \psi_3(t)}{\frac{d}{dz} \psi_3(t)} \left(1 - \frac{u_*(t)}{2\pi i z}\right) dz$$

où δu_* désigne la primitive de δu_* qui ne comporte pas de terme constant.

Soit maintenant π^* l'itérateur de π , c'est-à-dire la primitive sans terme constant de $1/\pi_*$ et soit ${}^*\pi$ l'inverse d'itération de π^* .

On a alors :

$$(13g37) \quad \pi = {}^*\pi \circ l \circ \pi^* \quad \text{avec} \quad l(z) = z + 1$$

En passant aux accroissements on tire de là :

$$(13g38) \quad \frac{\delta \pi}{\frac{d}{dz} \pi} = \frac{\delta \pi^*}{\frac{d}{dz} \pi^*} - \frac{\left(\frac{\delta \pi^*}{\frac{d}{dz} \pi^*}\right) \circ \pi}{\frac{d}{dz} \pi}$$

avec

$$(13g39) \quad \delta \pi^* = \text{primitive sans terme constant de} \quad - \frac{\delta \pi_*}{\pi_*^2}$$

Ces relations vont nous permettre d'expliciter les flèches $\delta \pi_* \rightarrow \delta \psi_z$ et

$\delta\pi_* \rightarrow \delta\mu_*$. En effet, en portant (13g38) dans (13g32) ou (13g33) et en tenant compte de la relation :

$$f_+^* = \pi \circ f_-^* \quad (\text{en bas})$$

on voit que, dans chaque cas, l'intégrande apparaît comme la différence de deux morceaux, qui ne diffèrent que par les facteurs :

$$\left(\frac{\delta\pi^*}{\frac{d}{dz}\pi^*} \right) \circ \psi_z \cdot \frac{1}{\frac{\partial}{\partial z}\psi_z} = \frac{(\delta\pi^*) \circ f_{t-}^*(t+z)}{\frac{\partial}{\partial z}(\pi^* \circ f_{t-}^*(t+z))}$$

d'un côté et

$$\left(\frac{\delta\pi^*}{\frac{d}{dz}\pi^*} \right) \circ \pi \circ \psi_z \cdot \frac{1}{\left(\frac{d}{dz}\pi^*\right) \circ \psi_z} \cdot \frac{1}{\frac{\partial}{\partial z}\psi_z} = \frac{(\delta\pi^*) \circ \pi \circ f_{t-}^*(t+z)}{\frac{\partial}{\partial z}(\pi^* \circ \pi \circ f_{t-}^*(t+z))} = \frac{(\delta\pi^*) \circ f_{t+}^*(t+z)}{\frac{\partial}{\partial z}(\pi^* \circ f_{t+}^*(t+z))}$$

de l'autre côté. Or, comme on est dans le cas unilatéral et d'après le lemme 13g1, ces facteurs sont deux déterminations différentes de la même fonction. On peut donc, lorsque π_* et par suite π^* sont convergentes, remplacer le chemin d'intégration de (13g32) et (13g33), qui portait d'un point singulier (l'origine) et aboutissait en $-i\infty$, par un chemin d'intégration qui remonte de $-i\infty$, contourne l'origine dans le sens négatif et redescend vers $-i\infty$. En y regardant de plus près, on s'aperçoit que cela lève les raisons qui, au lemme 13g7, empêchait les fonctions $\delta\psi_z(t)$ et $\delta\mu_*(t)$ d'être toujours périodiques en t . On peut donc énoncer :

Lemme 13g7 :

En tout "point convergent", les flèches $\delta\pi^* \rightarrow \delta\psi_z$ et

$\delta\pi^* \rightarrow \delta\mu_*$ sont données par :

$$(13g40) \quad \frac{\delta\psi_z(t)}{\frac{\partial}{\partial z}\psi_z(t)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\left(\frac{\delta\pi^*}{\frac{d}{dz}\pi^*}\right) \circ \psi_3(t)}{\frac{\partial}{\partial z}\psi_3(t)} \frac{1 - \frac{\mu_*(t)}{2\pi i z}}{1 - \frac{\mu_*(t)}{2\pi i z}} \frac{dz}{z-z}$$

$$(13g41) \quad \delta u_*(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\left(\frac{\delta \pi^*}{\partial z^3} \right) \circ \psi_3(t)}{\frac{\partial}{\partial z} \psi_3(t)} \left\{ \frac{d}{dt} u_*(t) - \frac{u_*(t)}{z - \frac{u_*(t)}{2\pi i}} \right\} \frac{dz}{z}$$

où le chemin \int part de $-i\infty$, contourne l'origine dans le sens négatif et aboutit à $-i\infty$.

Ces deux flèches conservent toujours la convergence ainsi que les flèches $\delta \pi_* \rightarrow \delta \psi_2$ et $\delta \pi_* \rightarrow \delta u_*$, car (13g38) montre que $\delta \pi_*$ et $\delta \pi^*$ convergent ou divergent simultanément.

En rassemblant tous les résultats précédents, on voit que le lemme 13g3 vaut non seulement pour les applications tangentes aux "points unitaires", mais plus généralement en tout "point convergent". Il ne reste plus qu'à établir, pour les flèches qui ne conservent pas toujours la convergence, c'est-à-dire pour les quatre flèches du diagramme (13g25), les conditions sous lesquelles elles conservent cette convergence. En fait, en composant avec des flèches du diagramme (13g14), qui conservent toujours la convergence, on peut tout ramener à l'étude des deux flèches $\delta \pi \rightarrow \delta u_*$ et $\delta \pi \rightarrow \delta \pi_*$. Pour cette dernière, on a déjà noté que $\pi_* + \delta \pi_*$ était convergente si $\pi + \delta \pi$ était pleinement itérable, autrement dit si $\delta \pi$ était de la forme $\delta S - \frac{(\delta S) \circ \pi}{\frac{d}{dz} \pi}$ pour une δS convergente.

Reste la flèche $\delta \pi \rightarrow \delta u_*$. Pour faciliter l'étude, nous allons effectuer un changement de variable $t \rightarrow h(t) = \frac{1}{2\pi i} \log t$, destiné à remplacer les séries de Fourier par des séries en t^{-1} , ce qui autorisera à prendre leur transformées de Borel. Plus précisément, nous allons supposer que :

$$(13g42) \quad \alpha = 2\pi i ; \quad A_\alpha = -\frac{1}{\alpha} ; \quad A_{\alpha x} = 0$$

et nous allons poser :

$$(13g43) \left\{ \begin{array}{l} \pi(t) = \overset{-1}{h} \circ \pi \circ h(t) = t+1 + O(t^{-2}) \\ \pi_*(t) = \frac{\pi \circ h(t)}{h'(t)} = 1 - x \sum_{n \geq 3} A_{nx} t^{1-n} \\ \pi^*(t) = \pi^* \circ h(t) = t+1 + O(t^{-1}) \\ \omega(t) = \overset{-1}{h} \circ \omega \circ h = t+1 + O(t^{-2}) \\ \omega_*(t) = \frac{\omega \circ h(t)}{h'(t)} = 1 - x \sum_{n \geq 3} B_{nx} t^{1-n} \\ \omega^*(t) = \pi^* \circ h(t) = t+1 + O(t^{-1}) \end{array} \right.$$

Ce changement de variable à l'avantage de nous donner, pour π et ω , des éléments du groupe G^∞ qui, grâce à l'hypothèse simplificatrice (13g42) sont de la forme-type (9a5) :

$$\mu(\pi) = \mu(\omega) = 1, \quad \alpha(\pi) = \alpha(\omega) = 1, \quad \rho(\pi) = \rho(\omega) = 0$$

et qui possèdent π^* et ω^* pour itérateur (resp. π_* et ω_* pour logarithmes itératifs). Notons au passage que (13g42) implique bien :

$$(13g44) \quad B_x = -\frac{1}{x}, \quad B_{2x} = 0$$

vu que $U^{x,x} = 0$.

Lemme 13g8 :

Supposons π_* et ω_* convergentes et considérons un accroissement $\delta\pi$ convergent. Alors :

$\alpha)$ La série $\delta\omega_*$ est généralement divergente (tout comme la série $\delta\pi_*$) mais possède une transformée de Borel $\delta\omega_*$ qui est convergente et analytiquement prolongeable partout "sans coupure" (tout comme, bien sûr, la transformée de Borel $\delta\pi_*$ de $\delta\pi_*$).

$\beta)$ A la différence de $\delta\pi_*$, qui a ses singularités au dessus du réseau

$\Omega = 2\pi i \mathbb{Z}$, $\delta \omega_*$ a toutes ses singularités au dessus du demi-réseau $\Omega^- = -2\pi i \mathbb{N}^*$.

γ) A la différence de $\delta \pi_*$, qui vérifie les équations de résurgence

$$(13g45) \quad \Delta_\omega \delta \pi_*(t) = -\omega (\delta f_\omega) \pi_* e^{-\omega(\pi^*(t)-t)} \quad (\text{modèle formel})$$

$\delta \omega_*$ vérifie les équations de résurgence

$$(13g46) \quad \Delta_\omega \delta \omega_*(t) = -\omega (\delta f_\omega) \varphi_\omega(t) e^{-\omega(\omega^*(t)-t)} \quad (\text{modèle formel})$$

avec les mêmes scalaires δf_ω qu'en (13g45), mais avec des facteurs supplémentaires φ_ω qui s'obtiennent à partir de ω_* par un procédé standard comportant $(n-1)$ quadratures successives si $\omega = 2\pi i n$. En particulier, pour $n=1$, on a $\varphi_{2\pi i}(t) \equiv 1$.

Preuve : En prenant les accroissements de $\pi^* \circ \pi = 1 + \pi^*$ on trouve :

$$(13g47) \quad \frac{\delta \pi}{\frac{d}{dt} \pi} \cdot \frac{d}{dt} \pi^* = \delta \pi^* - (\delta \pi^*) \circ \pi$$

Soit, en composant à gauche par l'itérateur inverse ${}^* \pi$:

$$(13g48) \quad \left(\frac{\delta \pi}{\frac{d}{dt} \pi} \right) {}^* \pi \frac{1}{\frac{d}{dt} {}^* \pi} = [(\delta \pi^*) \circ {}^* \pi] - [(\delta \pi^*) \circ {}^* \pi] \circ \ell$$

avec comme d'habitude $\ell(t) = t+1$. En passant aux transformées de Borel, cela s'écrit :

$$(13g49) \quad \mathcal{B} [(\delta \pi^*) \circ {}^* \pi] = (1 - e^{-t})^{-1} \mathcal{B} \left[\frac{\left(\frac{\delta \pi}{\frac{d}{dt} \pi} \right) {}^* \pi}{\frac{d}{dt} {}^* \pi} \right]$$

Si donc

$$(13g50) \quad \left(\frac{\delta \pi}{\frac{d}{dt} \pi} \right) \circ * \pi \frac{1}{\frac{d}{dt} * \pi} = \delta T = \sum_{m \geq 1} (\delta \mathcal{E}_m) t^{-m}$$

on aura pour tout $\omega \in \Omega^* = 2\pi i \mathbb{Z}^*$:

$$(13g51) \quad \Delta_\omega \{ (\delta \pi^*) \circ * \pi \} = -\delta \mathcal{A}_\omega \quad (\text{modèle formel})$$

avec :

$$(13g52) \quad \delta \mathcal{A}_\omega = - \sum_{m \geq 1} \frac{\omega^{m-1}}{(m-1)!} (\delta \mathcal{E}_m)$$

D'où en appliquant la règle de composition (2e3) :

$$(13g53) \quad \Delta_\omega \delta \pi^*(t) = -(\delta \mathcal{A}_\omega) e^{-\omega(\pi^*(t) - t)}$$

ce qui, après application de l'opérateur $\omega + \frac{\partial}{\partial t}$ aux deux membres, donne bien la formule (13g45).

D'autre part, on vérifie immédiatement que

$$(13g54) \quad \frac{1}{\frac{d}{dt} * \pi} \left(\frac{\delta \pi}{\frac{d}{dt} \pi} \right) \circ * \pi = \frac{1}{\frac{d}{dt} * \pi} \left(\frac{\delta \pi}{\frac{d}{dt} \pi} \right) \circ * \pi$$

Par suite, d'après (13g50), (13g30) et (13g33) on doit avoir :

$$(13g55) \quad \delta \Pi_*(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-i\infty} \frac{dz}{z} \left\{ \Pi'_*(t) - \frac{\Pi_*(t)}{z - \frac{\Pi_*(t)}{2\pi i}} \right\} \sum_{m \geq 1} (\delta \mathcal{E}_m) \frac{\left\{ -\frac{\log z}{2\pi i} + R(t, z) \right\}^{-m}}{\frac{d}{dz} \left\{ -\frac{\log z}{2\pi i} + R(t, z) \right\}}$$

La singularité majeure de l'intégrande est à l'origine et si, au second membre de (13g55) on intègre de 1 à $-i\infty$, cela définit en fonction périodique en t (en bas). D'autre part :

$$(13g56) \quad \left\{ -\frac{\log z}{2\pi i} + R(t, z) \right\}^{-m} = \left\{ -\frac{\log z}{2\pi i} + U^*(t) + K(t, z) \right\}^{-m}$$

$$= \sum_{R \geq 0} \left\{ -\frac{\log z}{2\pi i} + U^*(t) \right\}^{-m-R} C_{m+R-1}^{m-1} (-K(t, z))^R$$

avec

$$(13g57) \quad K(t, z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} K_{\mu}(t) z^{\mu}$$

où les K_{μ} satisfont aux équations différentielles :

$$(13g58) \quad \mu K_{\mu}(t) + \frac{U^*(t)}{2\pi i} K'_{\mu}(t) = K'_{\mu-1}(t)$$

Par suite (13g55) s'écrit

$$(13g59) \quad \delta U_*(t) = \begin{cases} \text{fonction périodique de } t \text{ (en bas)} \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \sum_{\mu \geq 0} \sum_{R \geq 0} \sum_{m \geq 1} (\delta C_m^R) \left\{ -\frac{\log z}{2\pi i} + U^*(t) \right\}^{-m-R} C_{m+R-1}^{m-1} Q_{R,\mu}(t) z^{\mu} dz \end{cases}$$

où les fonctions $Q_{R,\mu}(t)$ se calculent de proche en proche, à partir de la donnée de $U_*(t)$. Cela étant, pour étudier les singularités de la transformée de Borel de

$$(13g60) \quad \delta U_*(t) = \frac{(\delta U_*) \circ R(t)}{R'(t)} = 2\pi i t \quad \delta U_* \left(\frac{1}{2\pi i} \log t \right)$$

il faut commencer par calculer la transformée de Borel de chaque terme du type

$$\Psi_{m,\mu}(t) = \int_0^1 \left\{ -\frac{\log z}{2\pi i} + U^*(t) \right\}^{-m} z^{\mu} dz = \Psi_{m,\mu} \circ U^*(t)$$

avec

$$(13g61) \quad \Psi_{m,\rho}(t) = \int_0^1 \left\{ -\frac{\log z}{2\pi i} + t \right\}^{-m} z^{\rho} dz$$

Mais $\left\{ -\frac{\log z}{2\pi i} + t \right\}^{-m}$, comme fonction de t , admet pour transformée de Borel :

$$\mathcal{B} \left\{ -\frac{\log z}{2\pi i} + t \right\}^{-m} = e^{t \frac{\log z}{2\pi i}} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} = z^{\frac{t}{2\pi i}} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$$

En appliquant la transformation de Borel aux deux membres de (13g61) il vient donc :

$$(13g62) \quad \mathcal{B} \Psi_{m,\rho}(t) = \Psi_{m,\rho}(t) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \int_0^1 z^{\rho + \frac{t}{2\pi i}} dz = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \frac{2\pi i}{t + 2\pi i(\rho+1)}$$

D'où, en revenant au modèle formel :

$$(13g63) \quad \Delta_{\omega} \Psi_{m,\rho}(t) = \begin{cases} (2\pi i)^2 \frac{\omega^{m-1}}{(m-1)!} & \text{si } \omega = -2\pi i(\rho+1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit, puisque $\varphi_{m,\rho} = \Psi_{m,\rho} \circ \mathcal{U}^*$ et en appliquant la règle (2e3) :

$$(13g64) \quad \Delta_{\omega} \varphi_{m,\rho}(t) = \begin{cases} (2\pi i)^2 \frac{\omega^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\omega[\mathcal{U}^*(t)-t]} & \text{si } \omega = -2\pi i(\rho+1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En portant ceci dans (13g59) - (13g60) et en tenant compte de (13g58), on voit que la transformée de Borel $\mathcal{B} \delta \mathcal{U}_* (t) = \delta \mathcal{U}_* (t)$ est une fonction holomorphiquement prolongeable selon tout chemin qui évite le demi-réseau $\Omega^- = -2\pi i \mathbb{N}^*$ et que, en ses éventuelles singularités aux points de Ω^- , elle présente un comportement décrit (dans le modèle formel) par les équations de résurgence suivantes :

$$(13g65) \quad \Delta_{\omega} \delta \omega_{*}(t) = \left[\sum_{m \geq 1} (\delta \psi_m) \frac{\omega^{m-1}}{(m-1)!} \right] \left[\sum_{k \geq 0} \frac{\omega^k}{k!} Q_{k, \mu-1} \circ h(t) \right] e^{-\omega [\omega_{*}(t) - t]}$$

(avec $\omega = -2\pi i \mu$, μ entier positif quelconque). Compte tenu de (13g52), cela donne bien la formule (13g46) avec les mêmes scalaires $\delta \mathcal{A}_{\omega}$ qu'en (13g45) et pour facteurs ψ_{ω} des fonctions calculables à partir de ω_{*} au moyen de $(\mu-1)$ quadrature.

Pour plus de précisions, voir les exercices 4g7 et 4g8.

En mettant bout à bout les lemmes 13g4,5,6,7,8 on voit que le lemme 13g3 s'étend aux applications tangentes en tout "point" $\{\pi, \pi_{*}, \omega_{*}\}$ tel que ω_{*} converge. On peut alors sans difficulté, en partant par exemple des "points unitaires", remonter par intégration aux applications elles-mêmes, et ceci tant en ce qui concerne la convergence que la résurgence. On aboutit ainsi à l'énoncé :

Proposition 13g1 : (convergence et résurgence)

$\alpha)$ Dans le diagramme (13g2), seule $\pi(t)$ est toujours convergente et seules les flèches

$$\pi_{*} \rightarrow \pi, \quad \pi_{*} \rightarrow \omega_{*}, \quad \omega_{*} \rightarrow \pi, \quad \pi_{*} \rightarrow \psi_2, \quad \omega_{*} \rightarrow \psi_2$$

conservent toujours la convergence.

$\beta)$ La flèche $\pi \rightarrow \pi_{*}$ conserve la convergence si et seulement si π est pleinement itérable et la flèche $\pi \rightarrow \omega_{*}$ la conserve, si et seulement si π est semi-itérable (du bon côté).

$\gamma)$ Lorsque ces deux dernières flèches ne conservent pas la convergence, elles la transforment en résurgence (après le changement de variable $t \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \log t$, $\pi_{*} \rightarrow \pi_{*}, \omega_{*} \rightarrow \omega_{*}$) mais tandis que la transformée de Borel $\pi_{*} = \beta \pi_{*}$ a ses singularités au dessus d'un réseau Ω , la transformée

de Borel $\omega_* = \mathcal{B} \omega_*$ a les siennes au dessus d'un demi-réseau Ω^- . Enfin, dans ces deux cas, ce sont les mêmes coefficients scalaires A_ω qui interviennent. Par rapport à f_t , les A_ω sont des invariants de la seconde génération : invariants d'invariants.

On aboutit donc à ce résultat remarquable : le problème de la synthèse harmonique canonique unilatérale, c'est-à-dire la recherche d'une famille canonique $\{f_t\}$ d'éléments de G^0 qui soient semi-itérables et qui possèdent un invariant $\pi^+ = \pi$ donné à l'avance (l'autre invariant π^- étant nul) - ce problème, donc, admet une solution périodique (*) par rapport au paramètre t (qui représente la "principale" singularité en z de $f_t(z)$) lorsque l'invariant π (ou, si l'on préfère, son image $\pi\pi$ dans G^0) est lui-même semi-itérable (du bon côté).

Dans ce cas là, ω_* est convergente et la formule (13d36) permet le calcul direct de f_t et $f_{\langle t \rangle}$ à partir de ω_* . Si, de surcroit, π_* se trouve aussi converger, on peut aussi calculer f_t et $f_{\langle t \rangle}$, par l'intermédiaire de f_t^* , au moyen de la formule (13d14).

Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque π n'est pas semi-itérable, rien n'empêche d'intégrer dans les formules (13g40) et (13g41) relatives aux applications tangentes, puis de passer de là aux applications elles-mêmes. Simplement, cette fois-ci, on aboutit à des $\pi_*(t)$, $\omega_*(t)$, $\psi_z(t)$ et finalement à des $f_{\langle t \rangle}$ qui ne sont plus périodiques en t et qui possèdent exactement $2p = 2p(\pi\pi) = 2 \cdot \frac{\omega_0}{2\pi i}$ déterminations concurrentes (**). Ce sont les déterminations "sectorielles" des fonctions résurgentes. Mais comme ici on a affaire, non à des séries entières en t^{-1} , mais à des séries de Fourier,

(*) Plus exactement, ce n'est pas f_t mais la conjuguée $f_{\langle t \rangle} = \bar{t} \circ f_t \circ t$ qui est périodique en t .

(**) ω_0 désigne le coefficient du premier A_ω non nul (A_ω = invariants de la première génération)

Aussi les secteurs deviennent-ils des bandes. Plus exactement, chaque détermination de $\Pi_*(t)$ (resp. $U_*(t), Y_*(t), \int_{\langle t \rangle}$) est régulière (*) sur la partie inférieure des bandes verticales $t_1 < \operatorname{Re} t < t_2$ de largeur $t_2 - t_1$ au moins égale à $\frac{1}{\mu}$ (resp. $\frac{3}{2\mu}$). Quant au comportement asymptotique des $\Pi_*(t), U_*(t), Y_*(t), \int_{\langle t \rangle}$ prolongés en dehors de leurs bandes de régularité, on l'obtient à partir des équations de résurgence correspondantes (via le changement de variable $t \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \log t$).

On peut donc énoncer :

Proposition 13g2 (Synthèse canonique unilatérale)

- α) Toute classe semi-itérable de \mathbb{C}° admet des représentants t -canoniques \int_t et $\int_{\langle t \rangle}$ pour $-\operatorname{Im} t$ assez grand.
- β) Le représentant t -canonique $\int_{\langle t \rangle}$ est unique et périodique en t si et seulement si le germe Π qui caractérise la classe est lui-même semi-itérable (du bon côté).
- γ) Lorsque ce n'est pas le cas, les représentants t -canoniques $\int_{\langle t \rangle}$ admettent un certain nombre (fini) de déterminations concurrentes. Aucune d'elles n'est périodique en t , mais chacune est régulière (c'est-à-dire possède le comportement asymptotique attendu) dans des bandes $t_1 < \operatorname{Re} t < t_2$ de largeur $t_2 - t_1 = \frac{3}{2\mu}$.

Terminons par une description des représentants canoniques :

(*) par régulière il faut entendre que la fonction en question présente pour $\operatorname{Im} t \rightarrow -\infty$, le comportement asymptotique donné par la série de Fourier (non convergente) qui lui correspond.

Proposition 13g3.

Soit une classe semi-itérable de G° , soit μ_* le germe coinvariant qui lui correspond et soient f_t les représentants t -canoniques de cette classe. Alors :

$\alpha)$ Pour t suffisamment "en bas", $f_t(z)$ se prolonge en z jusqu'aux voisinages des points t et $t^* = t + \frac{\mu_*(t)}{2\pi i}$. En $z=t$ il y a singularité essentielle et en $z=t^*$ il y a ramification quadratique $\sqrt{z-t^*}$.

$\beta)$ Si le germe coinvariant μ_* est prolongeable "partout sans coupure", alors $f_t(z)$ l'est également, tant en z qu'en t .

Remarque 1 : La correspondance $\pi_* \leftrightarrow \mu_*$ qui se traduit analytiquement par (13d7) et (13d11), est un bel exemple de métamorphoses inverses (cf. section 4e et chapitre 18). Ces métamorphoses s'écrivent \underline{U}^* et \underline{V}^* et sont issues des moules hyperlogarithmiques U^* et V^* .

Remarque 2 : Les diverses équations de résurgence vérifiées par $f, f^*, *f, f_*$ sont évidemment solidaires, mais la résurgence de μ_* (ou plus exactement de $\omega \mu_*$) est d'un type entièrement nouveau, puisque $\Delta_\omega \omega \mu_*$ se déduit de au moyen d'un nombre de quadratures qui varie avec ω . Cette réapparition inopinée de la résurgence montre combien le phénomène est central pour la compréhension du groupe G° .

Remarque 3 : Les classes semi-itérables G° sont en correspondance avec les germes invariants π (*) ou encore avec les germes invariants $\pi\pi$ (**). Or ces $\pi\pi$ sont eux-mêmes des éléments de G° . Pour eux, la structure de groupe intervient un peu, vu qu'il faut considérer le logarithme itératif $\pi\pi_*$ et les invariants de la "seconde génération" (cf. propositions 13g1, 13g2) mais elle n'intervient pas pleinement, en ce sens qu'on a guère à composer les germes $\pi\pi$ associés aux diverses classes semi-itérables de G° .

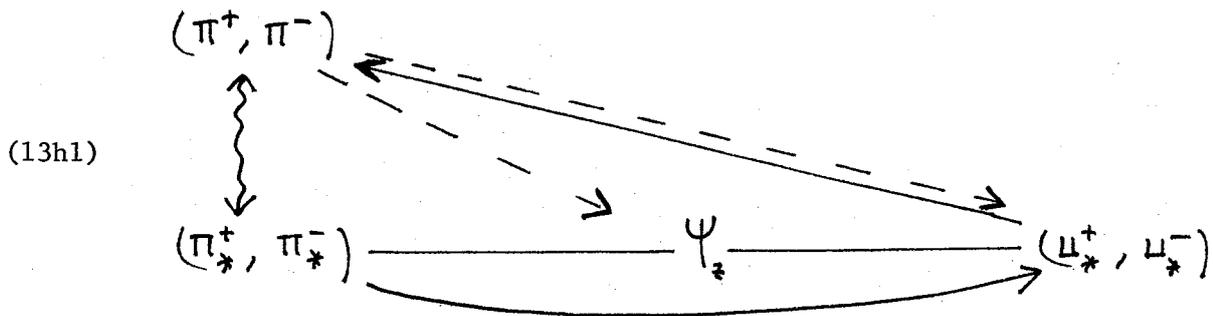
(*) définis à une translation près : $\pi(z) \rightarrow -c + \pi(z+c)$

(**) définis à une similitude près : $\pi\pi(z) \rightarrow c^{-1} \pi\pi(cz)$

Section 13h : Représentants canoniques : le cas bilatéral.

Il s'agit de la situation la plus générale, où l'on n'impose à π^+ et π^- aucune autre condition que de converger, respectivement "en bas" et "en haut". Nous nous bornerons à décrire l'allure générale des résultats, car leur justification détaillée nous entraînerait beaucoup trop loin.

Au lieu du diagramme (13g) de la section précédente, il convient d'envisager ici le diagramme :



On notera que, sauf pour les flèches verticales où π^+ est fonction de π^+_{*} seul et π^- de π^-_{*} seul, les correspondances sont ici de couple à couple : ainsi les deux termes de (μ^+_{*}, μ^-_{*}) sont-ils chacun fonction des deux termes de (π^+_{*}, π^-_{*}) , comme on s'en persuade en se reportant aux formules (13d16).

Bien entendu, la flèche verticale ascendante, représentant la prise de l'exponentielle itérative, conserve toujours la convergence, tandis que la flèche réciproque ne la conserve qu'exceptionnellement, la transformant dans le cas général en résurgence.

Pour étudier les propriétés des autres flèches, il est commode de faire la convention suivante : on dit qu'un couple (ρ_1, ρ_2) de fonctions ou de transformations périodiques (*) de période 1, définies respectivement "en bas" et "en haut" du plan complexe, vérifie une condition de recouvrement

(*) { fonction périodique : $\rho(z+1) = \rho(z)$
 { transformation périodique : $\rho(z+1) = 1 + \rho(z)$

si on peut prolonger holomorphiquement ρ_1 et ρ_2 ou des fonctions qui leurs sont liées simplement (*) à deux domaines \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 du plan complexe (***) dont les adhérences $\overline{\mathcal{D}}_1$ et $\overline{\mathcal{D}}_2$ possèdent au moins en commun une courbe continue \mathcal{C} (***) sur laquelle ρ_1 et ρ_2 sont essentiellement bornées.

Proposition 13h1 (t-synthèse canonique)

α) Moyennant une condition de recouvrement (****) les flèches en trait plein du diagramme (13h1) conservent la convergence.

β) Moyennant une condition de recouvrement (****) les flèches en trait pointillé du diagramme (13h1) conservent la convergence aux points réguliers et la transforment en résurgence aux points irréguliers.

Indications :

Flèches $(\mu_*^+, \mu_*^-) \rightarrow (\pi^+, \pi^-)$ et $(\mu_*^+, \mu_*^-) \rightarrow \Psi_z$.

On utilise les formules

$$(13h2) \quad \left. \begin{array}{l} \pi^+(z) \text{ "en bas"} \\ -\pi^-(z) \text{ "en haut"} \end{array} \right\} = z + \sum_{\Delta \gg 1} \int_{-\infty < t_1 < \dots < t_s < +\infty} dt_1 \dots dt_s \left[\rho_{t_s} \frac{\partial}{\partial z} \dots \rho_1 \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot z$$

ainsi que les formules (13d28) en intégrant sur une courbe \mathcal{C} commune à $\overline{\mathcal{D}}_1$ et $\overline{\mathcal{D}}_2$ et en interprétant la notation $t_j < t_{j+1}$ comme signifiant l'appartenance à \mathcal{C} de t_j et t_{j+1} avec t_{j+1} à droite de t_j .

(*) par exemple les inverses de composition $(\tilde{\rho}_1^{-1}, \tilde{\rho}_2^{-1})$ ou les composés par une fonction fixe $(\rho_1 \circ \rho, \rho_2 \circ \rho)$

(**) \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 contiennent des voisinages de $-i\infty$ et $i\infty$ respectivement

(***) \mathcal{C} va de $-\infty$ à $+\infty$.

(****) qui porte évidemment sur le couple de départ.

En effet l'hypothèse de la proposition 13d1, où \mathcal{C} était supposée une droite horizontale, n'avait rien d'essentiel. D'autre part, partant d'un couple (μ_*^+, μ_*^-) convergent et vérifiant la condition de recouvrement, la représentation t -canonique f_t est directement donné par la formule

$$(13h3) \quad f_t(z) = z + 1 + \sum_{\Delta \gg 1} \int_{t_{-1} < t_1 < \dots < t_n < t} dt_1 \dots dt_n \left[\mu_{t_n} \frac{\partial}{\partial z} \dots \mu_{t_1} \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot z \quad (z \text{ grand})$$

Comme d'habitude, on voit que la synthèse canonique à partir des coinvariants est tout à fait explicite.

Flèches $(\pi_*^+, \pi_*^-) \longrightarrow (\mu_*^+, \mu_*^-)$ et $(\pi_*^+, \pi_*^-) \longrightarrow \Psi_z$

Comme à la section précédente, on raisonne sur les applications tangentes. Généralisant la formule (13g4f) au cas bilatéral, on peut écrire :

$$(13h4) \quad \delta \mu_*^\pm(t) = \delta \mu_*^+(t) + \delta \mu_*^-(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{-i\infty} \frac{\delta(\pi^+)^* \circ \Psi_3(t)}{\partial \Psi_3(t)} \left\{ \frac{d}{dt} \mu_*(t) - \frac{\mu_*(t)}{\zeta - \frac{\mu_*(t)}{2\pi i}} \right\} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{+i\infty}^{+i\infty} \frac{\delta(\pi^-)^* \circ \Psi_3(t)}{\partial \Psi_3(t)} \left\{ \frac{d}{dt} \mu_*(t) - \frac{\mu_*(t)}{\zeta - \frac{\mu_*(t)}{2\pi i}} \right\} \frac{d\zeta}{\zeta} \end{cases}$$

Ici δ désigne un accroissement infinitésimal; ∂ la dérivée par rapport à ζ et $(\pi^\pm)^*$ la primitive sans terme constant de $1/\pi^\pm$. De plus, dans la première (seconde) intégrale, on doit intégrer le long d'un chemin \mathcal{J}_+ (\mathcal{J}_-) qui part de $-i\infty$ ($+i\infty$), contourne l'origine dans le sens positif, puis retourne à $-i\infty$ ($+i\infty$). Tout comme dans le cas unilatéral, on peut choisir un chemin \mathcal{J}_+ (resp. \mathcal{J}_-) et un point t suffisamment "en bas" (resp. "en haut") pour que l'image par l'application $\zeta \rightarrow \Psi_3(t)$ du chemin \mathcal{J}_+ (resp. \mathcal{J}_-) soit entièrement contenue dans le domaine d'holomorphic de la fonction $\delta(\pi^+)^* / \partial(\pi^+)^*$ (resp. $\delta(\pi^-)^* / \partial(\pi^-)^*$).

Cependant, ces deux conditions sont en général impossible à réaliser simultanément.

Pour qu'elles puissent l'être, il faut manifestement postuler une certaine condition de recouvrement sur le couple des accroissements $(\delta(\pi^+)^*, \delta(\pi^-)^*)$ ou, ce qui revient au même, sur le couple $(\delta\pi_*^+, \delta\pi_*^-)$. Par suite, en passant du tangent au global, par exemple à partir des "points binaires" étudiés à la section 13f, on voit que la flèche $(\pi_*^+, \pi_*^-) \rightarrow (\mu_*^+, \mu_*^-)$ conserve la convergence moyennant une condition de recouvrement sur le couple (π_*^+, π_*^-) .

Enfin, en composant avec la flèche $(\mu_*^+, \mu_*^-) \rightarrow \Psi_z$ on étend ce résultat à la flèche $(\pi_*^+, \pi_*^-) \rightarrow \Psi_z$. Ceci règle le point α de la proposition 13h1.

Flèches $(\pi^+, \pi^-) \dashrightarrow (\mu_*^+, \mu_*^-)$ et $(\pi^+, \pi^-) \dashrightarrow \Psi_z$.

Ici encore, on doit passer par les applications tangentes. On commence par étendre la formule (13g 41) au cas bilatéral et par écrire :

$$(13h5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \mu_*(t) = \delta \mu_*^+(t) + \delta \mu_*^-(t) = \\ \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-i\infty} \left(\frac{\delta \pi^+ \circ \Psi_3(t)}{\partial \Psi_3(t)} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \mu_*(t) - \frac{\mu_*(t)}{z - \frac{\mu_*(t)}{2\pi i}} \right) \frac{dz}{z} \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+i\infty} \left(\frac{\delta^{-\pi} \circ \Psi_3(t)}{\partial \Psi_3(t)} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \mu_*(t) - \frac{\mu_*(t)}{z - \frac{\mu_*(t)}{2\pi i}} \right) \frac{dz}{z} \end{array} \right.$$

avec δ = accroissement; $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$; $-\pi$ = inverse de composition de π^- .

Bien entendu, l'intégration n'est possible que pour certains t et moyennant une condition de recouvrement sur $(\delta\pi^+, \delta^{-\pi})$ et donc sur $(\delta\pi^+, \delta\pi^-)$.

Mais lorsque cette condition est remplie, la formule (13h5) définit une application tangente $(\delta\pi^+, \delta\pi^-) \rightarrow (\delta\mu_*^+, \delta\mu_*^-)$ qui, sauf en des points (π^+, π^-) dits exceptionnels, conserve toujours la convergence. C'est là une différence essentielle avec le cas unilatéral. On en comprend la raison lorsqu'on se place en un "point binaire" caractérisé par :

$$(13h6) \begin{cases} \pi^+(t) = t + \frac{1}{2} \log(1 - x A_x e^{-xt}); \pi^-(t) = t - \frac{1}{2} \log(1 + x A_{-x} e^{xt}) \\ \mu_x^+(t) = -B_x e^{-xt} & ; \mu_x^-(t) = -B_{-x} e^{xt} \\ A_x / A_{-x} = B_x / B_{-x} & ; \frac{x}{2} \sqrt{A_x A_{-x}} = \sin \frac{x}{2} \sqrt{B_x B_{-x}} = \sin \pi \theta \end{cases}$$

Pour $\theta = \frac{x}{2\pi} \sqrt{B_x B_{-x}} \notin \frac{1}{2} \mathbb{Z}$, les formules (13f 23) et (13f 34) montrent en effet que $\Psi_3(t)$ et $\frac{\partial}{\partial z} \Psi_3(t)$ tendent vers des limites finies lorsque $z \rightarrow 0$. Par suite, pour de bons t et moyennant la condition de recouvrement, les deux intégrandes de (13h5), contrairement à l'intégrande de (13g 41) ne présentent pas d'irrégularité essentielle à l'origine. Seul le terme $(1 - \beta_x(z) \beta_{-x}(z))$ en dénominateur, qui provient de $\frac{\partial}{\partial z} \Psi_3(t)$ et qui s'annule à l'origine, pourrait faire difficulté, mais on tourne cette difficulté par un nombre fini d'intégrations par parties (nombre qui dépend de la valeur de $\operatorname{Re} \theta$).

Lorsque $\theta = 0$, c'est le cas unilatéral et on a vu que $\delta \mu_x$ était généralement divergente et résurgente. Aux autres "points binaires" irréguliers, c'est-à-dire pour θ entier ou demi-entier, une étude plus poussée montre que la situation est la même : $\delta \mu_x^+$ et $\delta \mu_x^-$ sont en général divergentes et résurgentes.

On voit donc que le cas unilatéral, loin d'être typique, rentre dans la classe des "points bilatéraux" irréguliers. Partout ailleurs, c'est-à-dire aux "points bilatéraux" généraux ou réguliers, qui sont de loin les plus nombreux (*), la convergence est conservée.

Nous ne pouvons ici songer à donner les conditions générales de régularité. Énonçons-les simplement pour ceux des "points bilatéraux" qui sont caractérisés par un nombre fini de coinvariants non nuls :

(*) en termes de mesure ou de tout autre point de vue.

$$(13h7) \quad B_\omega \neq 0 \iff \omega \in \Omega' = \text{partie finie de } \Omega$$

En ces "points", l'expression de l'itérateur fait intervenir des blocs irréductibles B_x ($x \in \Omega'$) qui sont solution des équations différentielles

$$(13h8) \quad \frac{d}{dz} B_x + x B_x = \frac{1}{z} \gamma_x \circ B_x \quad (x \in \Omega')$$

lesquelles généralisent les équations de Riccati (13g28) et (13g29) et font intervenir les polynômes γ_x ainsi définis :

$$(13h9) \quad \gamma_x(z) = -\frac{x}{2\pi i} \left\{ B_x + \sum_{-nx \in \Omega'} B_{-nx} z^{n+1} \right\}$$

Pour ces "points", la condition de régularité est que les polynômes γ_x n'aient pas de dérivée à valeur entière en leurs zéros, autrement dit :

$$(13h10) \quad (x \in \Omega', z \in \mathbb{C}, \gamma_x(z) = 0) \implies (\gamma'_x(z) \notin \mathbb{N})$$

Ceci suppose en particulier la symétrie de Ω' : $\Omega' = -\Omega'$

Les résultats concernant la flèche $(\pi^+, \pi^-) \dashrightarrow \Psi_z$ s'en déduisent par composition des flèches $(\pi^+, \pi^-) \dashrightarrow (\mu_*^+, \mu_*^-)$ et $(\mu_*^+, \mu_*^-) \rightarrow \Psi_z$. On peut aussi écrire directement une formule qui généralise (13g40) de la même manière que (13h5) généralisait (13g41).

Ceci règle la proposition 13h1.

Bien entendu, la proposition 13g3 possède dans le cas bilatéral un analogue que nous laissons au lecteur le soin d'énoncer.

T-synthèse.

La t -synthèse, qui vient d'être esquissée, a le mérite de ne faire

intervenir qu'un seul paramètre scalaire, mais elle a un inconvénient : celui de supposer une condition de recouvrement sur les invariants ou coinvariants. Si l'on veut s'affranchir de cette condition, il faut faire intervenir des représentations des pseudovariabiles plus générales que $Z^\omega \rightarrow \mathcal{U}_t^\omega$.

Lemme 13h1 (Représentations T -canoniques $Z^\omega \rightarrow \mathcal{U}_T^\omega$)

Si T désigne une application quelconque de Ω dans \mathbb{C} et si l'on pose, dans les modèles sectoriels :

$$(13h6) \quad \mathcal{U}_{T^\pm}^{\omega_1, \dots, \omega_n}(z) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}} \lambda(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \int_{\prod_{j=1}^n T_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})}} \frac{e^{\omega_n(z_n - z)} \dots e^{\omega_1(z_1 - z)}}{(z_n - z_{n-1}) \dots (z_2 - z_1) z_1} dz_n \dots dz_1$$

avec les mêmes conventions d'intégration qu'en (6d24) à cette différence

près qu'on intègre en z_j à partir de $z - T(\omega_j)$ et non plus de z ,

alors on définit par là-même une représentation $Z^\omega \rightarrow \mathcal{U}_T^\omega$ des pseudovariabiles de $\mathbb{A}(1, \Omega)$ dans $\mathbb{A}(1, \Omega)$ et cette représentation

est Δ -stable. Autrement dit :

$$(13h7) \quad \mathcal{U}_T^{\omega'} \cdot \mathcal{U}_T^{\omega''} = \sum_{\omega', \omega'' < \omega} \mathcal{U}_T^\omega \quad (\text{modèle formel})$$

$$(13h8) \quad \Delta_{\omega_0} \mathcal{U}_T^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \mathcal{U}_T^{\omega_2, \dots, \omega_n} \quad \text{si } \omega_0 = \omega_1 \text{ (resp } = 0 \text{ si } \omega_0 \neq \omega_1) \text{ (modèle formel)}$$

Les vérifications sont laissées au lecteur. Lorsque T est

l'application constante $\omega \rightarrow T(\omega) = t$, on retrouve la représentation

$Z^\omega \rightarrow \mathcal{U}_t^\omega$. Dans ce cas, il existe une représentation ∂ -stable

$Z^\omega \rightarrow \mathcal{V}_t^\omega$ liée très simplement à \mathcal{U}_t^ω . Voir à ce sujet les formules

(13d14) et (13d14bis). Au contraire, lorsque T n'est pas constante, il

n'existe pas de \mathcal{V}_T^ω qui soit ∂ -stable et liée simplement à \mathcal{U}_T^ω . Cette

circonstance détruit la symétrie invariants-coinvariants.

Proposition 13h2 (T - représentation canonique)

α) Pour tout couple (π^+, π^-) de germes convergents, on peut trouver une application T de Ω dans \mathbb{C} avec

$$T(\Omega) \text{ borné; } T(\Omega^+) \text{ "en bas"; } T(\Omega^-) \text{ "en haut"}$$

et telle que la T -synthèse soit possible (avec une seule détermination aux "points réguliers" et plusieurs aux "points exceptionnels").

β) Inversement, si l'on se donne une application T bornée de Ω dans \mathbb{C} , la T -synthèse est possible pourvu que le couple (π^+, π^-) vérifie une condition de recouvrement, condition d'autant moins sévère que $T(\Omega^+)$ et $T(\Omega^-)$ sont plus éloignés vers le bas et vers le haut respectivement.

γ) Tout ceci vaut lorsqu'on se restreint à des applications T constantes sur Ω^+ et Ω^- :

$$T(\Omega^+) = \{t_1\}, \quad T(\Omega^-) = \{t_2\}$$

et en particulier lorsque $t_1 = -t_2$ ou $t_1 = \bar{t}_2$. On dispose donc d'un procédé de synthèse canonique valable dans tous les cas et ne dépendant que d'un seul paramètre.

Indications succinctes : Le couple (π^+, π^-) détermine sans ambiguïté le couple $(\pi^*_\omega, \pi^-_\omega)$ et par suite les invariants A_ω . Ceci permet de former la série :

$$(13h9) \quad \mathcal{I}_T^*(z) = z + \sum_{\omega} A_\omega \Gamma_\omega \mathcal{U}_T^\omega(z) \quad (\omega \text{ multiindice})$$

qui, sous réserve de convergence, définit l'itérateur d'un élément \mathcal{I}_T de \mathcal{G}° appartenant à la classe voulue. Or, si $T+t$ désigne l'application

$\omega \rightarrow T(\omega) + t$, il est clair que dans chacun des modèles sectoriels, les applications $t \rightarrow \mathcal{U}_{T+t}^\omega(z+t)$ sont périodiques en t et même

proportionnelles à $e^{-\|\omega\|t}$. Par suite, toujours dans les modèles sectoriels, $\int_{T+t}^* (z+t)$ apparaît comme une série de Fourier formelle en t , dont les coefficients sont effectivement calculables quand z est grand et quand $T(\Omega^+)$ et $T(\Omega^-)$ sont suffisamment éloignés vers le bas et vers le haut. Cette série de Fourier se scinde en deux séries, la première regroupant les fréquences qui appartiennent à Ω^+ et la seconde celles qui appartiennent à Ω^- . Chacune de ces deux séries est généralement convergente (aux "points réguliers") et au pis résurgente (aux "points exceptionnels"), mais en tout cas toujours sommable.

Signalons que l'étude se simplifie beaucoup dans les cas à un ou deux paramètres, lorsque T est constant sur Ω^+ ou Ω^- , car alors on a un équivalent simple des formules compactes (13d64) et (13d65), ce qui permet de travailler directement sur les invariants (π^+, π^-) sans passer par les logarithmes itératifs (π_*^+, π_*^-) .

Section 13i : Synthèse harmonique sur les groupes apparentes à G° .

Puisque nous ne savons pas construire explicitement de systèmes complets et libres d'invariants sur les groupes G à cheval sur le groupe médian $G \not\subset G'$ et $G \not\supset G'$ et puisque les groupes de l'intervalle de Lie $[G', G^\circ]$ ne possèdent que les trois invariants élémentaires μ, α, ρ , le problème de la synthèse harmonique ne se pose que pour les groupes de l'intervalle critique $[G^\circ, G']$.

Soit G un tel groupe, défini par une condition \mathbb{K} de croissance sur les coefficients. Les éléments de G ont leurs invariants A_ω^\pm soumis à (et, comme nous allons le voir, caractérisés par) une condition de croissance \mathbb{K} héritée de \mathbb{K} (cf. section 12d). Afin de simplifier, supposons que G soit assez grand (i.e. assez éloigné de G°) pour que les invariants A_ω soient soumis à la même condition de croissance \mathbb{K} que les A_ω^\pm (c'est déjà

vrai pour les groupes G^t introduits au §8b dès que $t > 0$) et recherchons dans G des éléments f d'invariants A_ω donnés.

En s'inspirant des sections 13b et 13c, on peut montrer (cf. exercice 13i1) qu'il existe des représentations Δ -stables $Z^\omega \rightarrow W^\omega$ des pseudovariabes qui assurent la convergence dans la formule (13b8) et qui, dans le modèle additif, fournissent des itérateurs f^* qui sont \mathbb{K} -croissants, donc des $f = {}^*f \circ l \circ f^*$ qui dans le modèle formel sont \mathbb{K} -croissants.

La question de la liberté des systèmes d'invariants fondamentaux $\{A_\omega^+\}, \{A_\omega^-\}, \{A_\omega\}$ s'en trouve réglée sur ces groupes-là.

Pour la construction de $Z^\omega \rightarrow W^\omega$, on peut utiliser avec profit les représentations T -canoniques \mathcal{U}_T° introduites en (13h6), mais cette fois avec $T(\omega)$ tendant vers ∞ quand ω tend vers ∞ , et ceci d'autant plus vite que G est plus grand. On ne peut donc pas prendre une application T d'image $T(\Omega)$ finie, comme on l'avait fait pour G° . D'où la présence obligatoire d'une infinité de paramètres arbitraires, qui empêchent une synthèse véritablement canonique.

Autre fait saillant dans la synthèse harmonique sur les G plus grands que G° : on ne peut plus définir les coinvariants B_ω d'une façon satisfaisante, ce qui détruit la dualité sur laquelle étaient fondées les sections 13ef, g, h.

Section 13j. Le cas général (r, α, p quelconques). Questions connexes.

Limitons-nous à de brèves indications.

Le cas (r, α, p) quelconque.

Tout ce qui a été fait pour la classe-type (1,1,0) s'étend presque

sans modification aux classes générales (r, α, ρ) tant en ce qui concerne les théorèmes d'existence que les procédés constructifs de synthèse. Les difficultés commencent lorsqu'on veut étendre les méthodes de synthèse canonique sur G° . Cela tient à l'absence, pour les algèbres $A(r, \Omega)$ et $A(r, \Omega, \rho)$, de représentations privilégiées des pseudovariabiles dès que $r \geq 2$ (cf. exercice 6c2).

Il est toutefois possible de construire des représentants canoniques, en ce sens qu'ils sont naturels et ne dépendent que d'un nombre fini de paramètres (cf. exercice 13j2) et d'étendre la notion de coinvariants avec tout ce qu'elle implique (cf. exercice 13j3).

Questions connexes :

Signalons, pour clore ce chapitre, toute une série de problèmes relatifs à l'éventuelle conservation (ou échange) de propriétés telles que :

- (i) l'algébricité (*)
- (ii) l'algébricité-différentielle (**)
- (iii) la quasi-analyticité
- (iiii) la prolongeabilité partout sans coupure" (***)

dans les diagrammes (13g25) et (13k1). La question est abordée dans les exercices et reprise en passant, au chapitre 18, comme application des "métamorphoses".

Signalons aussi l'intérêt, en théorie de l'itération, des équations

(*) après le changement de variable $t \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \log t$ quand il s'agit de séries de Fourier

(**) cf. définition (13e1)

(***) cf. début de la section 7a.

algébrico-différentielles du type de (13e14) ou de (13g58) qui sont vérifiées en même temps par toutes les itérées f^w d'une f donnée et qui, ne possédant que des coefficients polynomiaux, permettent une étude poussée de ces itérées, comme dans les cas unitaire et binaire (cf. exercice 13j4)

Section 13k : Résumé du chapitre 13.

Ce chapitre est tout entier consacré à la synthèse harmonique sur G° et les groupes apparentés, c'est-à-dire à la recherche d'éléments appartenant à ces différents groupes et possédant des invariants imposés à l'avance. Pour éviter des complications gratuites, on se limite comme d'habitude aux classes-type, caractérisées par les valeurs $(\mu, \alpha, \rho) = (1, 1, 0)$ des trois invariants élémentaires.

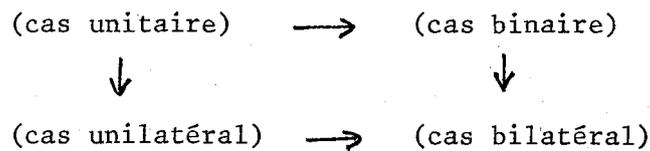
Le problème de la synthèse harmonique ne se posant que pour les groupes de l'intervalle critique $[G^\circ, G^I]$, on commence par examiner le plus grand d'entre eux, c'est-à-dire G^I . Il s'avère qu'à toute famille d'invariants $\{A_\omega, \omega \in \Omega^*\}$ correspond une classe de conjugaison de G^I et qu'on peut, par un procédé uniforme, construire des représentants de cette classe. La construction en question comporte toutefois une grosse part d'arbitraire puisqu'elle dépend du choix d'une représentation Δ -stable $Z^\omega \rightarrow W^\omega$ des pseudovariables de l'algèbre réduite $A(1, \Omega)$.

La situation reste en gros la même pour les autres groupes G de l'intervalle critique, à cette réserve près qu'ici les invariants $\{A_\omega\}$ ne définissent une classe de G qu'à condition de vérifier une certaine propriété de croissance K héritée de la propriété de croissance K qui définit G . Pour les groupes G proches du groupe minimal, la croissance des invariants $\{A_\omega\}$ est malcommode à caractériser directement et on doit faire intervenir les invariants $\{A_\omega^+\}$ ou $\{A_\omega^-\}$. — Ceci règle la question de la liberté des systèmes fondamentaux d'invariants.

Le cas du groupe minimal G° est de loin le plus important et le plus intéressant. Il présente deux particularités notables :

- d'une part, l'existence d'une synthèse canonique, liée aux représentations canoniques des pseudovariabiles et fournissant des représentants f_t , dits t -canoniques, des classes de conjugaison.
- d'autre part, l'existence de coinvariants B_ω , qui sont liés à la représentation ∂ -stable $Z^\omega \rightarrow V^\omega$ et jouent un rôle symétrique à celui des invariants A_ω , lesquels sont liés à la représentation Δ -stable $Z^\omega \rightarrow W^\omega$. Formellement, on passe des invariants aux coinvariants par les relations (13d16) et (13d17) qui font intervenir les moules scalaires U° et V° .

Dans la synthèse canonique sur G° , on est conduit à envisager successivement quatre cas de généralité croissante :



Le cas unitaire est celui où tous les invariants A_ω et tous les coinvariants B_ω sont nuls, sauf pour une valeur donnée α de l'indice ω . On a alors $A_\alpha = B_\alpha$ et on obtient des itérateurs f_t^* parfaitement explicites, qui permettent une description précise des représentants canoniques f_t .

Le cas binaire, est celui où tous les invariants A_ω et tous les coinvariants B_ω sont nuls, sauf pour $\omega = \pm \alpha$ (α donné). La correspondance $(B_\alpha, B_{-\alpha}) \rightarrow (A_\alpha, A_{-\alpha})$ présente alors une périodicité en évidence sur les formules (13f20) - (13f21). Ici encore, on obtient des itérateurs f_t^* parfaitement explicites (avec intervention de fonctions hypergéométriques).

Les cas unitaire et binaire présentent plusieurs particularités communes qui ne s'étendent pas aux cas plus généraux. Ainsi, si l'on introduit les conjugués $f_{\langle t \rangle} = \bar{t} \circ f_t \circ t$ des représentants t -canoniques f_t :

- (i) les variables t et z se séparent dans les itérateurs $f_{\langle t \rangle}^*(z)$.
- (ii) dans les modèles sectoriels, les fonctions $\exp(x f_{\langle t \rangle}^*(z))$ sont méromorphes en z sur toute la surface $\mathbb{C} - \{0\}$.
- (iii) les représentants t -canoniques $f_{\langle t \rangle}$ et leurs itérés $f_{\langle t \rangle}^w$ sont algébrico-différentiels, en ce sens qu'ils vérifient tous l'équation :

$$\nabla_n(y) + y'^n P_n(y) = P_n(z) \quad \begin{cases} n=1 & \text{dans le cas unitaire} \\ n=2 & \text{dans le cas binaire} \end{cases}$$

avec les opérateurs

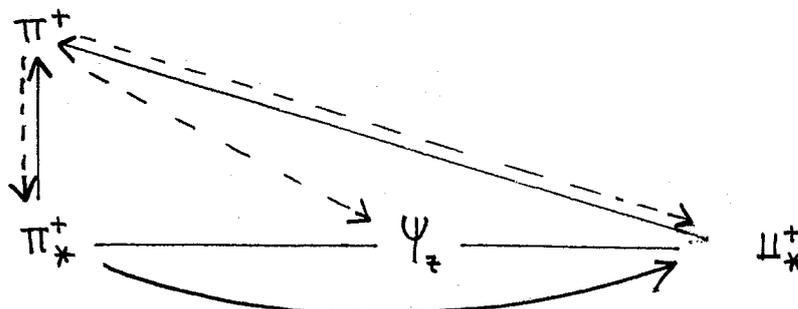
$$\nabla_1(y) = y''/y' \quad \text{et} \quad \nabla_2(y) = (y''/y')^2 - 2(y''/y) = \text{schwarzien de } y$$

et avec des fractions rationnelles P_1, P_2 fonctions des coinvariants $B_{\pm x}$.

Le cas unilatéral est celui où :

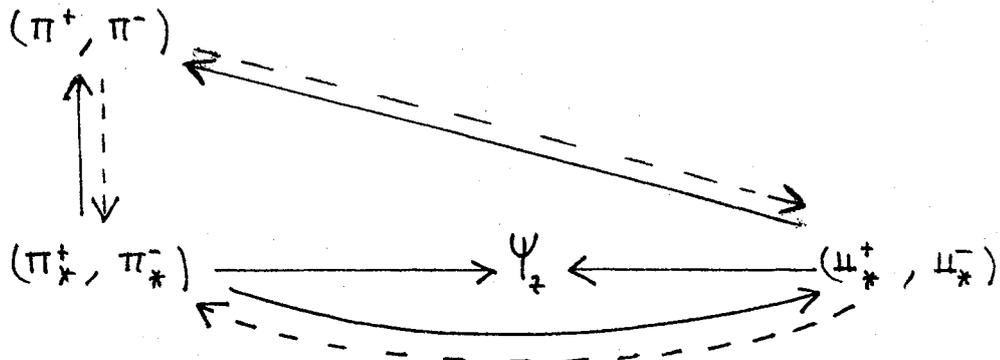
$$A_\omega = B_\omega = 0 \quad \text{pour } \omega \in \Omega^- \quad (\text{par exemple})$$

On a alors correspondance biunivoque entre invariants et coinvariants et l'on peut, au choix, caractériser chaque classe de conjugaison par les séries de Fourier π^+, π_*^+, Π_*^+ de coefficients $A_\omega^+, A_\omega, B_\omega$ (pour $\omega \in \Omega^+$). On montre que dans le diagramme



où Ψ_z désigne l'itérateur $f_t^*(z+t)$ (itérateur dont la connaissance permet aussitôt la construction du représentant t -canonique f_t), les flèches en trait plein conservent toujours la convergence, tandis que les flèches en trait pointillé la transforment en résurgence. Seule la série invariante π^+ est toujours convergente. La série coinvariante μ_*^+ est convergente si et seulement si π^+ est semi-itérable (du bon côté). Dans le cas général, μ_*^+ n'est pas convergente, mais simplement résurgente et les représentants t -canoniques f_t admettent un nombre fini de déterminations concurrentes.

Le cas bilatéral, enfin, est le plus général : en dehors de la condition de croissance (12c1), aucune restriction n'est imposée aux invariants. L'application "coinvariants" \rightarrow "invariants" n'est plus biunivoque, mais présente une certaine périodicité. On aboutit au diagramme suivant :



Les correspondances sont définies de couple à couple et moyennant certaines "conditions de recouvrement" (sauf pour les flèches verticales). Les flèches en trait plein conservent toujours la convergence. Les flèches en trait pointillé la conservent aux "points réguliers" mais la transforment en résurgence aux "points irréguliers".

Enfin, lorsque le couple (π^+, π^-) ne vérifie pas la condition de recouvrement, il faut recourir à un procédé un peu plus général, dit de T -synthèse et qui dépend d'une application T bornée de Ω dans \mathbb{C} . En choisissant T telle que $T(\omega) = \pm t$ si $\omega \in \Omega^\pm$, on peut construire pour chaque classe de \mathcal{G}° des représentants canoniques ne dépendant que d'un seul paramètre.

