Резургентные функции и сингулярные ОДУ.

Жан Робертович ЭКАЛЬ
(Jean Ecalle, R.D. emeritus at CNRS & Paris 11 Univ., Orsay, France)

Тезис: *Здесь предлагается краткое введение в теорию резургентности и приводится несколько применений к изучению сингулярных ОДУ.*
Abstract: *We present here a short introduction to resurgence theory with select applications to local singular analytic ODEs.*
MSC code: 34M37 , 34E05 , 34E13 , 34F15 , 34M25 , 34M40 , 40G10.

1 Расходимость и резургентность.

Введение: сингулярные ОДУ.
Тема настоящей статьи – *естественная расходимость* (то есть расходимость степенных рядов, возникающих при решении чисто аналитических задач) и пути ее преодоления: *резургентные функции и инородное дифференцирование.*
Поясним о чем идет речь по примеру *локальных* аналитических ОДУ (обыкновенных дифф. уравнений), то есть по примеру *ростков* таких ОДУ близ специальной точки z_0. В качестве специальной точки удобно брать не 0 а ∞. Все зависит от природы *полного* (т.е. насыщенного параметрами u) *формального решеня* $\widetilde{Y}(z,u)$ нашего ОДУ.

• Тот случай, когда полное формальное решение содержит одни степенные ряды – *тривиален* (с локальной точки зрения), так как эти ряды сходятся.

• Противоположный случай, когда нету полного (или вообще нету никакого) формального решения – *безнадежен* (опять-таки с локальной точки зрения) ибо там просуммировать нечего.

• Интересен и доступен промежуточный, так наз. *сингулярный*, случай, когда формальное решение является смесью экспоненциалов и степенных рядов: последние обычно расходятся, но поддаются просуммированию.

Просуммирование по Борелю.
Итак, рассмотрим некое сингулярное аналитическое ОДУ $E(z, Y) = 0$ близ ∞ и ограничимся пока *монокритическим случаем*, то есть тем

случаем, когда имеется полное формальное решение с разложением

$$\widetilde{Y}(z,u) = \widetilde{Y}_0(z) + \sum_{n\in\mathbb{N}^d} u^n e^{\lambda_n z}\, \widetilde{Y}_n(z) \quad \big(u = (u_1, ..., u_d)\big) \tag{1}$$

с расходящимися степенными рядами $\widetilde{Y}_n(z) = \sum a_{n,k}\, z^{-k}$ но с простыми экспоненциалами $e^{\lambda_n z}$ (*'монокритичность'*). Вся задача в том, чтоб это формальное решение превратить в настоящее. Для этого надо просуммировать каждый компонент $\widetilde{Y}_n(z)$, то есть обратить его в аналитический росток $Y_{n,\theta}(z)$, определенный в какой-то секторной окружности ∞ с бисектрисой $\arg z^{-1} = \theta$ и допускающий там $\widetilde{Y}_n(z)$ в качестве асимптотического ряда. Однако, 'сбрасывание тильды', т. е. просуммирование, возможно лишь посредственно, через промежуточный шаг $\widehat{Y}_n$:

$$\widetilde{Y}_n(z) \;\overset{\mathcal{B}=Borel}{\longrightarrow}\; \widehat{Y}_n(\zeta) \;\overset{\mathcal{L}=Laplace}{\longrightarrow}\; Y_{n,\theta}(z) \;\overset{asympt^{ly}}{\sim}\; \widetilde{Y}_n(z) \tag{2}$$

Преобразование Бореля ($\mathcal{B}$) действует 'по-членно':

$$\mathcal{B}:\ z^{-\sigma} \mapsto \zeta^{\sigma-1}/\Gamma(\sigma)\ \ (\sigma \notin -\mathbb{N}) \quad ; \quad z^n \mapsto \delta^{(n)}\ \ (n \in \mathbb{N}\,,\, \delta = Dirac) \tag{3}$$

и превращает любой ряд $\widetilde{\varphi}(z)$ с коэффициентами типа Жеврэ 1 в ряд $\widehat{\varphi}(\zeta)$ с ненулевым радиусом сходимости

$$\mathcal{B}:\ \widetilde{\varphi}(z) = \sum a_n\, z^{-n} \quad \mapsto \quad \widehat{\varphi}(\zeta) = \sum a_n\, \zeta^{n-1}/(n-1)! \tag{4}$$

Более того, если ряд $\widetilde{\varphi}$ – 'естественного происхожения', то $\widehat{\varphi}$ обычно обладает аналитическим продолжением по почти всем осям от 0 до ∞, без аналитических барьеров, с дискретной конфигурацией особых точек ω_i, и с не более чем экспоненциальном ростом близ ∞, что и позволяет подвергать $\widehat{\varphi}$ преобразобанию Лапласа ($\mathcal{L}$), формально обратному к $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{L}:\ \widehat{\varphi} \mapsto \varphi_\theta \quad with \quad \varphi_\theta(z) := \int_0^{\infty . e^{i\theta}} \widehat{\varphi}(\zeta)\, e^{-\zeta\, z}\, d\zeta \tag{5}$$

Борель превращает обыкновенное произведение в так называемую свертку $*$, а дифференцирование по z он превращает в умножение на $-\zeta$. Лаплас же осуществляет обратные превращениа.

$$\mathcal{B}\ :\ \ \widetilde{\varphi}_1.\widetilde{\varphi}_2 \mapsto \widehat{\varphi}_1 * \widehat{\varphi}_2\ \ with\ \ (\widehat{\varphi}_1 * \widehat{\varphi}_2)(\zeta) := \int_0^\zeta \widehat{\varphi}_1(\zeta_1) * \widehat{\varphi}_2(\zeta - \zeta_1)\, d\zeta_1 \tag{6}$$

$$\mathcal{B}\ :\ \ \partial_z\, \widetilde{\varphi}(z) \mapsto -\zeta\, \widehat{\varphi}(\zeta) \tag{7}$$

$$\mathcal{B}\ :\ \ \psi(z) = (\omega + \partial_z)\, \varphi(z) \Longrightarrow \widehat{\varphi}(\zeta) = (\omega - \zeta)^{-1}\, \widehat{\psi}(\zeta) \tag{8}$$

$$\mathcal{B}\ :\ \ \psi(z) = \varphi(z) - \varphi(z+1) \Longrightarrow \widehat{\varphi}(\zeta) = (1 - \exp(-\zeta))^{-1}\, \widehat{\psi}(\zeta) \tag{9}$$

По (8) и (9) видно, что решение дифференциальных или разностных уравнений может создавать в функциях $\widehat{\varphi}$ не только простые полюсы но еще, под повторным действием свертки, более сложные особенности.

Общая схема просуммирования ‘по Борелю’ выглядит так:

$$
\textit{Fig.1} \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc}
\widetilde{\varphi}(z) & & \ldots\ldots & & \varphi_\theta(z) & & z\text{-}plane\ (multiplication) \\
\mathcal{B} & \searrow & & \nearrow & \mathcal{L} & & \\
 & & \widehat{\varphi}(\zeta) & & & & \zeta\text{-}plane\ \ (convolution)
\end{array} \right.
$$

Любая ось интегрирования $\arg\zeta = \theta$ может двигаться ровно столько, сколько особые точки ω_i разрешают, а каждому регулярному сектору раствора $\delta\theta$ в ζ-плоскости соотвествует в z-плоскости регулярный сектор раствора $\delta\theta{+}\pi$.

Отсюда видны главние задачи и трудности, стоящие перед нами:

Задача 1: Чтобы проинтегрировать по Лапласу, надо удостовериться что функция $\widehat{\varphi}(\zeta)$ *не* имеет аналитических барьеров и *не* растет сверх-экспоненциально когда $\zeta \to \infty$ по прямым осям.

Задача 2: А чтобы контролировать этот рост, надо уметь ограничить интеграли свертки, скрыто входящие в определение функции $\widehat{\varphi}(\zeta)$.

Задача 3: Надо найти все особые точки ω функции $\widehat{\varphi}$ и выяснить поведение $\widehat{\varphi}$ в каждой такой ω, ибо особенности эти отвественны за расходимость изначальново ряда $\widetilde{\varphi}$ и носят важную информацию (константы Стокса).

Затруднение 1: Возможное присуствие особых точек ω над $\mathbb{R}^+$.

Затруднение 2: Высокая разветвленность Римановых поверхностей.

Затруднение 3: Сложность и запутанность путей интегрирования, по которым приходится вычислять простую и n-краткую свертку.

2 Мультипликативное усреднение.

Физики склонны считать, что при наличии особых точек ω_i над $\mathbb{R}^+$, ряд $\widetilde{\varphi}$ просуммировать нельзя. Это однако неверно. Надо просто прибегать к подходящему усреднению μ отдельных ветвей многозначной функции:

$$\widetilde{\varphi}(z) \ \xrightarrow{\mathcal{B}}\ \widehat{\varphi}(\zeta) \ \xrightarrow{\mu}\ \mu\widehat{\varphi}(\zeta) \ \xrightarrow{\mathcal{L}}\ \varphi(z) \tag{10}$$

Усреднение $\mu : \widehat{\varphi} \mapsto \mu\,\widehat{\varphi}$ определяется весами $\mu^{\left(\epsilon \atop \omega\right)}$:

$$\mu\,\widehat{\varphi}(\zeta) := \sum_{\epsilon_i \in \{+,-\}} \mu^{\left({\epsilon_1\ ,\ldots,\ \epsilon_r} \atop {\omega_1\ ,\ldots,\ \omega_r}\right)} \widehat{\varphi}^{\left({\epsilon_1\ ,\ldots,\ \epsilon_r} \atop {\omega_1\ ,\ldots,\ \omega_r}\right)}(\zeta) \quad if \quad \omega_r < \zeta < \omega_{r+1} \tag{11}$$

Здесь $\omega_1, \omega_2 ...$ означают особые точки, лежащие над $\mathbb{R}^+$, а $\widehat{\varphi}^{\left({\epsilon_1 \atop \omega_1} {, \ldots, \atop , \ldots,} {\epsilon_r \atop \omega_r} \right)}$ означает ту детерминацию функции $\widehat{\varphi}$ над интервалом $]\omega_i, \omega_{i+1}[$, которая соотвествует обхождению очередной точки ω_i справа если $\epsilon_i = +$ или слева если $\epsilon_i = -$. Более того, μ должно выполнить два главных условия:
(i) μ должно *сохранять действительность* для применения к тем задачам, где только действительные решения приемлимы. Значит, если многозначная $\widehat{\varphi}(\zeta)$ – действительна для *малых* $\zeta > 0$, тогда однозначная $\mu\,\widehat{\varphi}(\zeta)$ должна оставаться действительной для *всех* $\zeta > 0$.
(ii) μ должно *коммутировать со сверткой*:

$$\mu\,(\widehat{\varphi}_1 * \widehat{\varphi}_1) \equiv (\mu\,\widehat{\varphi}_1) * (\mu\,\widehat{\varphi}_2) \tag{12}$$

для применения к нелинейным задачам. То есть, в схеме (10) средняя стрелка, подобно левой и правой, должна быть не только линейным, но и мультипликативным гомоморфизмом.
Оба эти условия трудно совместимы. Ясно например что ‘полусумма’:

$$\mu^{\left({\epsilon_1 \atop \omega_1} {, \ldots, \atop , \ldots,} {\epsilon_r \atop \omega_r} \right)} = \frac{1}{2} \;\; \textit{if} \;\; \epsilon_1 = \epsilon_2 = ... \epsilon_r \;\; (\textit{resp.} \; = \mathit{0} \;\; \textit{otherwise}) \tag{13}$$

выполняет (i) но нарушает (ii). К счастию, подходящие усреднения, выполняющие все требования, все таки есть. Вот два главных примера:

• **Стандартное усреднение**. Его весы даются прямой формулой:

$$\mu^{\left({\epsilon_1 \atop \omega_1} {, \ldots, \atop , \ldots,} {\epsilon_r \atop \omega_r} \right)} := \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\,\Gamma(q+\frac{1}{2})}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{(2\,p)!\;(2\,q)!}{4^{p+q}\,p!\,q!\,(p+q)!} \tag{14}$$

$$\textit{with} \qquad p := \sum_{\epsilon_i = +} 1 \;\; , \;\; q := \sum_{\epsilon_i = -} 1 \qquad (p + q = r) \tag{15}$$

• **‘Органическое’ усреднение**. Его весы даются рекурсивной формулой:

$$\mu^{\left({\epsilon_1 \atop \omega_1} {, \ldots, \atop , \ldots,} {\epsilon_r \atop \omega_r} \right)} := \mu^{\left({\epsilon_1 \atop \omega_1} {, \ldots, \atop , \ldots,} {\epsilon_{r-1} \atop \omega_{r-1}} \right)} \; \frac{1}{2} \left(1 + \epsilon_{r-1}\,\epsilon_r \, \frac{\omega_{r-1}}{\omega_r}\right) \quad \textit{with} \quad \mu^{\left({\pm \atop \omega_1} \right)} := \frac{1}{2} \tag{16}$$

3 Инородное дифференцирование.

Вычисление свертки по ССС-путям.
Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$ – дискретное подмножество $\mathbb{C}$ и пусть $\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2$ - – две аналитических функции на $\mathcal{R} := \widetilde{\mathbb{C} - \Omega}$. Для малых ζ, интеграл

свертки (6) вычисляется по прямому интервалу $[0,\zeta]$, а для отдаленных ζ, его надо вычислять по так наз. *самосимметрично сократимым (CCC) путям*, то есть по таким путям $\Gamma_* \subset \mathbb{C}-\Omega$ которые не только *симметричны* относительно их середины $\zeta/2$ но еще *непрерывно сократимы* к нулю *при постоянном сохранении самосимметричности.* За исключением счетного подмножества, кажуй $\zeta \in \mathcal{R}$ является концом такого CCC-пути, но беда в том, что даже для простых поверхностей $\mathcal{R}$, CCC-пути настолько крутятся и усложняются по мере удаления их конца ζ, что они фактически неприменимы.

$\boldsymbol{\Delta}$-операторы : определение .
Вместо никуда не годных CCC-путей нам нужны линейные операторы $\widehat{\Delta}_\omega$, носящие индексы $\omega \in \widetilde{\mathbb{C}-\{0\}}$, подробно описывающие поведение $\widehat{\varphi}(\zeta)$ близ особой точки ω (вернее: *над* ей), и действующие 'по Лейбницу':

$$\widehat{\Delta}_\omega\,(\widehat{\varphi}_1 * \widehat{\varphi}_2) \equiv (\widehat{\Delta}_\omega\,\widehat{\varphi}_1) * \widehat{\varphi}_2 + \widehat{\varphi}_1 * (\widehat{\Delta}_\omega\,\widehat{\varphi}_2) \tag{17}$$

Их действие определяется формулой, подобной (11):

$$\widehat{\Delta}_\omega\,\widehat{\varphi}\,(\zeta) := \sum_{\epsilon_i=\pm} \frac{\epsilon_r}{2\pi i}\,\delta^{\binom{\epsilon_1\ ,\dots,\ \epsilon_r}{\omega_1\ ,\dots,\ \omega_r}}\,\widehat{\varphi}^{\binom{\epsilon_1\ ,\dots,\ \epsilon_r}{\omega_1\ ,\dots,\ \omega_r}}(\zeta+\omega) \qquad (\omega_r := \omega) \tag{18}$$

с начала для малых $\zeta \in [0,\omega]$, а потом аналитически продолжается. Здесь, $\omega_1,\omega_2...$ – особые точки, лежащие между 0 и $\omega_r := \omega$, а чтоб обеспечивать (17), весы δ должны выполнять строгие алгебраические условия. Для *'стандартных'* Δ-операторов весы зависят только от $\boldsymbol{\epsilon}$:

$$\delta^{\binom{\epsilon_1\ ,\dots,\ \epsilon_r}{\omega_1\ ,\dots,\ \omega_r}} := \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!} \quad \textit{with} \quad p := \sum_{\epsilon_i=+}^{1\le i\le r-1} 1 \ ;\ \ p := \sum_{\epsilon_i=-}^{1\le i\le r-1} 1 \tag{19}$$

а для *'органических'* Δ-операторов они зависят еще от $\boldsymbol{\omega}$:

$$\delta^{\binom{\epsilon_1\ ,\dots,\ \epsilon_r}{\omega_1\ ,\dots,\ \omega_r}} := \left\{ \begin{array}{ll} (\omega_{p+1}-\omega_p)/(2\,\omega_r) & \textit{if}\ \ (\epsilon_1,...,\epsilon_r) = ((+)^p,(-)^q,\epsilon_r) \\ (\omega_{q+1}-\omega_q)/(2\,\omega_r) & \textit{if}\ \ (\epsilon_1,...,\epsilon_r) = ((-)^q,(+)^p,\epsilon_r) \\ 0 & \textit{otherwise} \end{array} \right.$$

Ввиду (17), операторы $\widehat{\Delta}_\omega$ зовут *инородными дифференцированиями*, а функцию $\widehat{\Delta}_\omega\,\widehat{\varphi}$ зовут *инородной производной* от $\widehat{\varphi}$.

$\boldsymbol{\Delta}$-операторы : *свойства.*
Помимо $\widehat{\Delta}_\omega$, удобно рассматривать и операторы Δ_ω и $\boldsymbol{\Delta}_\omega$, которые действуют прямо в z-плоскости, одинаково на ряды $\widetilde{\varphi}$ и на ростки φ_θ :

$$\widehat{\Delta}_\omega \quad \overset{\textit{pull back}}{\Longrightarrow} \quad \Delta_\omega = \mathcal{B}^{-1}\,\widehat{\Delta}_\omega\,\mathcal{B} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\Delta}_\omega := e^{-\omega\,z}\Delta_\omega \tag{20}$$

Для разных этих вариантов правило Лейбница принимает вид:

$$\widehat{\Delta}_\omega (\widehat{\varphi}_1 * \widehat{\varphi}_2) \equiv (\widehat{\Delta}_\omega \widehat{\varphi}_1) * \widehat{\varphi}_2 + \widehat{\varphi}_1 * (\widehat{\Delta}_\omega \widehat{\varphi}_2) \qquad (\zeta\text{-}plane) \tag{21}$$

$$\Delta_\omega (\varphi_1 . \varphi_2) \equiv (\Delta_\omega \varphi_1).\varphi_2 + \varphi_1.(\Delta_\omega \varphi_2) \qquad (z\text{-}plane) \tag{22}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_\omega (\varphi_1 . \varphi_2) \equiv (\boldsymbol{\Delta}_\omega \varphi_1).\varphi_2 + \varphi_1.(\boldsymbol{\Delta}_\omega \varphi_2) \qquad (z\text{-}plane) \tag{23}$$

Благодаря экспоненциальному фактору, 'жирные' или 'инвариантные' операторы $\boldsymbol{\Delta}_\omega$ коммутируют с простым дифференцированием $\partial := \partial_z$:

$$[\widehat{\Delta}_\omega, \widehat{\partial}] = -\omega\, \widehat{\Delta}_\omega \implies [\Delta_\omega, \partial] = -\omega\, \Delta_\omega \implies [\boldsymbol{\Delta}_\omega, \partial] = 0 \tag{24}$$

Δ-операторы определенного типа, 'стандартного' или 'органического', свободно порождают одну и ту же алгебру Ли $\mathbb{\Delta}$. То есть, для любого $\boldsymbol{\Delta} := \sum \gamma^{\omega_1,\ldots,\omega_r} [\boldsymbol{\Delta}_{\omega_r} \ldots [\boldsymbol{\Delta}_{\omega_2}, \boldsymbol{\Delta}_{\omega_1}]]$ всегда найдется такое φ чтоб $\boldsymbol{\Delta}\, \varphi \neq 0$. Добавим, что во многих применениах действие операторов Δ_ω зависит не от ω как элемента $\mathbb{C}_\bullet := \widetilde{\mathbb{C} - \{0\}}$, а только от его проекции $\dot{\omega}$ на $\mathbb{C}$.

Алгебра $\mathbb{RES}$ резургентных функций.

Не входя в подробности, условимся называть *резургентными 'функциями'* безразлично те ряды $\widetilde{\varphi}(z)$, те функции $\widehat{\varphi}(\zeta)$, и те ростки $\varphi_\theta(z)$ которые поддаются обшей схеме фигуры 1 в §1. Для большей простоты, эти 'функции' мы обычно означаем через $\varphi(z)$, без тильды и без θ, не забывая при этом, что все высказывания о них должны интерпретироваться параллельно в трех 'моделях'. Пространство $\mathbb{RES}$ резургентных функций замкнуто не только мультипликативно (по простому произведению в z-моделях и по свертке в ζ-модели) но еще и по инородному дифференцированию.

Первое приложение: уравнения резургентности.

Имеются простые критерии, позволяющие предсказать, будет ли формальное решение φ данного ОДУ резургентным относительно переменной z. Пусть $E = 0$ такое ОДУ. Используя правило Лейбница, легко получить *чисто формальным путем* новые уравнения как и для простой так и для инородных производных от φ:

$$E(z,\varphi) = 0 \implies \begin{cases} E_*(z,\varphi,\partial\varphi) = 0 & (\textit{linear homogeneous in } \partial\varphi) \\ E_\omega(z,\varphi,\Delta_\omega\varphi) = 0 & (\textit{linear homogeneous in } \Delta_\omega\varphi) \end{cases}$$

Общее решение уравнения $E_\omega = 0$ обычно имеет вид $\Delta_\omega\, \varphi = A_\omega\, \varphi_\omega$ $(*)$ или реже $\Delta_\omega\, \varphi = \sum_{j=1}^{j=s} A_{j,\omega}\, \varphi_{j,\omega} (**)$, где A_ω (или $A_{j,\omega}$) – нетривиальная, обычно трансцендентная скалярная величина (констант Стокса), и где φ_ω (или $\varphi_{j,\omega}$) – простой степенной ряд, чисто формально выводимый из $E_\omega = 0$, а значит и из $E = 0$. Замечательно, что здесь без всякого *анализа* устанавливается *аналитический* факт, ибо формулы $(*)$,$(**)$ дают аналитическое продолжение $\widehat{\varphi}$ вплоть до ω в ζ-плоскости. В тесной связи между φ и $\Delta_\omega\,\varphi$ сказывается любопытная, но в то же время универсальная тенденция таких функций к *самовоспроизведению* в своих особых точках – в каждой из них! Оттуда и термин *'резургентность'.*

Избавление от CCC-путей и преодоление 'многозначности'.

Действие 'ломаных' ω-сдвигов $\widehat{T}_\Gamma$ и $\widehat{\Delta}_\Gamma$-операторов дается формулами

$$\widehat{T}_\Gamma\,\widehat{\varphi}(\zeta) := \widehat{\varphi}_\Gamma(\zeta+\omega)\ ,\ \widehat{\Delta}_\Gamma\,\widehat{\varphi}(\zeta) := \widehat{\varphi}_\Gamma^{+}(\zeta+\omega) - \widehat{\varphi}_\Gamma^{-}(\zeta+\omega) \qquad (\omega = \mathit{end\ of}\ \Gamma) \tag{25}$$

сначала для малых ζ, а потом в целом, путем аналитического продолжения вдоль конечной, конечно проколотой, ломаной линии Γ, с предписанием для обхождения каждой проколотой точки. Эти 'ломаные' операторы можно однозначно представить в виде многочлена от конечного числа $\widehat{\Delta}$-операторов и вращения $R := \widehat{\varphi}(\zeta) \mapsto \widehat{\varphi}(e^{2\pi i}\zeta)$ $(\zeta \in \mathbb{C}_\bullet := \widetilde{\mathbb{C} - \{0\}})$:

$$\widehat{T}_\Gamma = id + \sum_r \sum_n \sum_{\omega_i} (2\pi i)^r\, \tau^{\omega_1,\ldots,\omega_r} R^n\, \widehat{\boldsymbol{\Delta}}_{\omega_r} \ldots \widehat{\boldsymbol{\Delta}}_{\omega_1} \qquad (\tau^{\boldsymbol{\omega}} \in \mathbb{Q}\,,\, n \in \mathbb{Z}) \tag{26}$$

$$\widehat{\Delta}_\Gamma = \widehat{\boldsymbol{\Delta}}_\omega + \sum_r \sum_n \sum_{\omega_i} (2\pi i)^r\, \lambda^{\omega_1,\ldots,\omega_r} R^n\, \widehat{\boldsymbol{\Delta}}_{\omega_r} \ldots \widehat{\boldsymbol{\Delta}}_{\omega_1} \qquad (\lambda^{\boldsymbol{\omega}} \in \mathbb{Q}\,, \sum \omega_i = \omega)$$

Представление это крайне удобно, так как оно сводит все операции типа $(\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2) \mapsto \widehat{\varphi}_1 * \widehat{\varphi}_2$ или типа $\widehat{\varphi} \mapsto (\widehat{\varphi})^{*n}$ к операциям на первом листе Римановой поверхности, то есть на общей 'звезде аналитичности'.
Как видно, Δ-операторы нас избавляют
(i) от многозначных функций $\widehat{\varphi}$,
(ii) от сложных многолистных Римановых поверхностей,
(iii) от невозможно извилистых CCC-путей интегрирования.

Благодаря Δ-операторам, достаточно рассматривать функции $\widehat{\varphi}$ и все их инородные производные как *однозначные функции* на их общей звезде аналитичности (с центром в $0_\bullet$) *и тогда все операции сводятся к простым операциям над однозначными функциями.* .

Обзор основных понятий и главных правил:

• **Первичные Δ-операторы** *(alien derivations)* :

$$\widehat{\Delta}_\omega \ \ \mathit{in\ the}\ \zeta\text{-}\mathit{plane} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta_\omega\ \mathit{in\ the}\ z\text{-}\mathit{plane}\ \ (\text{'}\mathit{pull\ back}\text{'}) \tag{27}$$

• **Вторичные $\boldsymbol{\Delta}$-операторы:** $\boldsymbol{\Delta}_\omega := e^{-\omega\, z}\,\Delta_\omega$ в z-плоскости.

$$[\partial_z, \boldsymbol{\Delta}_\omega] \equiv 0 \quad ; \quad \boldsymbol{\Delta}_\omega(f \circ g)(z) \equiv (\boldsymbol{\Delta}_\omega f) \circ g(z) \quad \mathit{if}\ \ g(z) \sim z \tag{28}$$

• **Z-символы** $\mathbf{Z}^{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{Z}^{\omega_1,\dots,\omega_r}$ *(pseudovariables)* : Понятие это – дуально ко $\boldsymbol{\Delta}$-операторам. Произведение $\mathbf{Z}$-символов – по 'перетасовке' индексов:

$$\partial_z \mathbf{Z}^{\boldsymbol{\omega}} \equiv 0 \quad ; \quad \mathbf{Z}^{\boldsymbol{\omega}} \circ g \equiv \mathbf{Z}^{\boldsymbol{\omega}} \quad ; \quad \mathbf{Z}^{\boldsymbol{\omega}'} . \mathbf{Z}^{\boldsymbol{\omega}''} = \sum \mathbf{Z}^{\boldsymbol{\omega}} \ (\textit{shuffle product}) \tag{29}$$

• **Дисплей** *(display)*. Это своего рода 'инородный ряд Тейлора':

$$\operatorname{dpl} \varphi := \varphi + \sum_r \sum_{\omega_j} \mathbf{Z}^{\omega_1,\dots,\omega_r} \boldsymbol{\Delta}_{\omega_r} \dots \boldsymbol{\Delta}_{\omega_1} \varphi \tag{30}$$

Он имеет как и локальный (z-часть) так и глобальный характер ($\mathbf{Z}$-часть). В нем закодировано, в предельно сжатой и удобной форме, вся информация о функции $\widehat{\varphi}(\zeta)$ на всех листях ее Римановой поверхности. А главное свойство дисплея – автоматическое распространение любого соотношения между функцями к соотношению между дисплеями:

$$R(\varphi_1, \dots, \varphi_s) \equiv 0 \implies R(\operatorname{dpl} \varphi_1, \dots, \operatorname{dpl} \varphi_s) \equiv 0 \tag{31}$$

4 Сингулярные ОДУ и мостовое уравнение.

Мостовое уравнение (*Bridge Equation*) обязано своим названием тому обстоятельству, что оно связывает *инородные* и *простые* производные. Оно имеет огромное поле применений. Мы сначала укажем главные факты о нем, а потом приведем несколько примеров. Вид его таков:

$$\boldsymbol{\Delta}_\omega Y(z,u) = \mathbf{A}_\omega Y(z,u) \qquad (\forall \omega \in \Omega) \tag{32}$$

• $Y(z,u)$ – формальное решение сингулярного ОДУ с максимальным числом параметров $u := (u_1, .., u_d)$. Тильда для простоты пропускается.
• $\boldsymbol{\Delta}_\omega$ – "инородное дифференцирование". Индекс ω пробегает счетное подмножество $\Omega \subset \mathbb{C} - \{0\}$ или же $\Omega \subset \widetilde{\mathbb{C} - \{0\}}$.
• $\mathbf{A}_\omega$ – "оператор Стокса". Это обыкновенный дифференциальный оператор по переменной z и по параметрам $u_1, ..., u_d$. *Вид его – "самый общий из-за всех формально допустимых видов".*
• $\{\mathbf{A}_\omega \, ; \, \omega \in \Omega\}$ является *полной* системой константов Стокса.
• Вся расходимость во $Y(z,u)$ сосредаточена в степенных рядах по z^{-1}.

Мостовое уравнение и дисплей.

Поскольку мостовое уравнение можно итерировать

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Delta}_{\omega_1}\, Y(z,u) &= \mathbf{A}_{\omega_1}\, Y(z,u) \qquad\qquad \Longrightarrow \\
\boldsymbol{\Delta}_{\omega_2}\boldsymbol{\Delta}_{\omega_1}\, Y(z,u) &= \boldsymbol{\Delta}_{\omega_2}\mathbf{A}_{\omega_1}\, Y(z,u) \\
&= \mathbf{A}_{\omega_1}\boldsymbol{\Delta}_{\omega_2}\, Y(z,u) \\
&= \mathbf{A}_{\omega_1}\mathbf{A}_{\omega_2}\, Y(z,u) \quad (\textit{order reversal}\,!)
\end{aligned}
$$

оно сразу дает инородные производные *всех порядков*:

$$
\boldsymbol{\Delta}_{\omega_r}\ldots\boldsymbol{\Delta}_{\omega_1}\, Y(z,u) = \mathbf{A}_{\omega_1}\ldots\mathbf{A}_{\omega_r}\, Y(z,u) \tag{33}
$$

Подключая (33) в определение дисплея (30), мы получаем

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dpl} Y(z,u) &= Y(z,u) + \sum_r \sum_{\omega_i} \mathbf{Z}^{\omega_1,\ldots,\omega_r}\, \boldsymbol{\Delta}_{\omega_r}\ldots\boldsymbol{\Delta}_{\omega_1}\, Y(z,y) \\
&= Y(z,u) + \sum_r \sum_{\omega_i} \mathbf{Z}^{\omega_1,\ldots,\omega_r}\, \mathbf{A}_{\omega_1}\ldots\mathbf{A}_{\omega_r}\, Y(z,y) \qquad (34)
\end{aligned}
$$

Сингулярное уравнение Риккати есть самое простое нелинейное ОДУ:

$$
Y' = Y + H^-(z) + H^+(z)\,Y^2 \qquad (H^\pm(z) \in z^{-1}\,\mathbb{C}\{z^{-1}\}) \tag{35}
$$

Общее решение можно записать в негомогенной или гомогенной форме, с помощью компонентов S_i или T_i. Первые имеют бесконечно много особых точек в ζ-плоскости, последние же – только две.

$$
Y(z,u) = \frac{u\,e^z\,S_0 + S_-}{u\,e^z\,S_0 S_+ + 1} = \frac{u\,e^z\,T_1 + T_2}{u\,e^z\,T_3 + T_4} \qquad \det\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix} = 1 \tag{36}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
\widehat{S}_\pm(\zeta) & \text{sing. over} & \pm\mathbb{N}^* & \| & \widehat{T}_1\,,\,\widehat{T}_3 & \text{sing. over} & \{0,1\} \\
\widehat{S}_0(\zeta) & \text{sing. over} & \mathbb{Z} & \| & \widehat{T}_2\,,\,\widehat{T}_4 & \text{sing. over} & \{0,-1\}
\end{array}
$$

Мостовое уравнение в данном случае имеет довольно простой вид:

$$
\boldsymbol{\Delta}_{\pm1} Y(z,u) = \mathbf{A}_{\pm1} Y(z,u) \quad \textit{with} \quad \mathbf{A}_{\pm1} = \mp\alpha_{\pm1}\, u^{1\pm1}\,\partial_u \tag{37}
$$

то есть

$$
\begin{aligned}
\Delta_{+1}\, Y(z,u) &= -\alpha_1\, e^z\, u^2\, \partial_u\, Y(z,u) \\
\Delta_{-1} Y(z,u) &= \alpha_{-1}\, e^{-z}\; \partial_u\, Y(z,u)
\end{aligned}
$$

Оттуда для отдельных компонентов следующие уравнения резургентности:

$$
\begin{array}{llll}
\Delta_{+1}T_1 = \alpha_1\,T_2 & \Delta_{+1}T_2 = 0 & \Delta_{+1}T_3 = \alpha_1\,T_4 & \Delta_{+1}T_4 = 0 \\
\Delta_{-1}T_2 = \alpha_{-1}\,T_1 & \Delta_{-1}T_1 = 0 & \Delta_{-1}T_4 = \alpha_{-1}\,T_3 & \Delta_{-1}T_3 = 0
\end{array}
$$

$$\begin{array}{lll}\Delta_{+1}\,S_0 = \quad \alpha_1\,S_- & \Delta_{+1}\,S_+ = \alpha_1\,S_0^{-1}(1-S_+S_-) & \Delta_{+1}\,S_- = 0 \\ \Delta_{-1}\,S_0 = -\alpha_{-1}\,S_+\,S_0^2 & \Delta_{-1}\,S_- = \alpha_{-1}\,S_0(1-S_+S_-) & \Delta_{-1}\,S_+ = 0\end{array}$$

Соотвествующие *дисплеи*, с их четким разделением z-переменной и $\mathbf{Z}$-символов, аккуратно *алгебраизуют* сложную геометрию ζ-плоскости:

$$\begin{bmatrix}\mathrm{dpl}\,T_1 & \mathrm{dpl}\,T_2\\ \mathrm{dpl}\,T_3 & \mathrm{dpl}\,T_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}T_1 & T_2\\ T_3 & T_4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2\\ \mathbf{T}_3 & \mathbf{T}_4\end{bmatrix} \tag{38}$$

$$\mathrm{dpl}\,S_0 = \frac{S_0\,\mathbf{S_0} + S_-\,\mathbf{S_0}\,\mathbf{S_+}}{1 + S_0\,S_+\,\mathbf{S_-}} \quad ; \quad \mathrm{dpl}\,S_\pm = \frac{S_\pm + S_0^{\mp 1}\,\mathbf{S}_\pm}{1 + S_0^{\mp 1}\,S_\mp\,\mathbf{S}_\pm} \tag{39}$$

Или более явным образом: $\quad \mathrm{dpl}\,S_+ = \frac{S_+ + S_0^{-1}\,\mathbf{S_+}}{1+S_0^{-1}\,S_-\,\mathbf{S_+}}$; $\mathrm{dpl}\,S_- = \frac{S_- + S_0\,\mathbf{S_-}}{1+S_0\,S_+\,\mathbf{S_-}}$.

$$\begin{array}{ll}\mathbf{T_1} = \mathbf{1} + \sum(\alpha_1\alpha_{-1})^n\,\mathbf{Z}^{\{1,-1\}^n} \quad , & \mathbf{T_2} = \sum \alpha_{-1}(\alpha_1\alpha_{-1})^n\,\mathbf{Z}^{-1,\{1,-1\}^n} \\ \mathbf{T_3} = \sum \alpha_1(\alpha_{-1}\alpha_1)^n\,\mathbf{Z}^{1,\{-1,1\}^n} \quad , & \mathbf{T_4} = \mathbf{1} + \sum(\alpha_{-1}\alpha_1)^n\,\mathbf{Z}^{\{-1,+1\}^n}\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\log\mathbf{S_0} & = & \sum_{1\le r}\ \sum_{\epsilon_1+\ldots+\epsilon_r=0}\ \epsilon_1\,\gamma_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{r-1}}\ \alpha_{\epsilon_1}\ldots\alpha_{\epsilon_r}\ \mathbf{Z}^{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_r} \\ \mathbf{S_+} & = & \sum_{1\le r}\ \sum_{\epsilon_1+\ldots+\epsilon_r=+1}^{\epsilon_1=+1}\quad \gamma_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_r}\quad \alpha_{\epsilon_1}\ldots\alpha_{\epsilon_r}\ \mathbf{Z}^{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_r} \\ \mathbf{S_-} & = & \sum_{1\le r}\ \sum_{\epsilon_1+\ldots+\epsilon_r=-1}^{\epsilon_1=-1}\quad \gamma_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_r}\quad \alpha_{\epsilon_1}\ldots\alpha_{\epsilon_r}\ \mathbf{Z}^{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_r}\end{array}$$

причем $\gamma_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_r} := \prod_{j=1}^{j=r}\epsilon_j(\epsilon_1+\cdots+\epsilon_j)$. Исходя из этих формул, интересно прослеживать, как соотношения между компонентами двух сортов:

$$T_1T_4 - T_2T_3 = 1 \ , \quad S_0 = T_1/T_4 \quad , \quad S_+ = T_3/T_1 \ , \quad S_- = T_2/T_4 \tag{40}$$
$$T_1^2 \equiv S_0\,(1-S_+S_-)^{-1} \quad , \quad T_2^2 \equiv S_0^{-1}\,S_-^2\,(1-S_+S_-)^{-1} \tag{41}$$
$$T_3^2 \equiv S_0\,S_+^2\,(1-S_+S_-)^{-1} \quad , \quad T_4^2 \equiv S_0^{-1}\,(1-S_+S_-)^{-1} \tag{42}$$

автоматически переходят в соотношения между дисплеями:

$$R(T_i,S_j) \equiv 0 \implies R(\mathrm{dpl}\,T_i,\mathrm{dpl}\,S_j) \equiv 0 \implies R(\mathbf{T}_i,\mathbf{S}_j) \equiv 0 \tag{43}$$

Для проверки соотношений $R(\mathbf{T}_i,\mathbf{S}_j)\equiv 0$ можно полагать $\alpha_1 = \alpha_{-1} = 1$ и применять правило умножения (29) к рядам $\mathbf{Z}$-символов:

$$\begin{array}{ll}\mathbf{T}_1 = & 1 + \mathbf{Z}^{+-} + \mathbf{Z}^{+-+-} + \mathbf{Z}^{+-+-+-} + \mathbf{Z}^{+-+-+-+-}\ldots \\ \mathbf{T}_2 = & \quad\ \ \mathbf{Z}^{-} \ + \mathbf{Z}^{-+-} \ + \mathbf{Z}^{-+-+-} \ + \mathbf{Z}^{-+-+-+-} \ \ldots \\ \mathbf{T}_3 = & \quad\ \ \mathbf{Z}^{+} \ + \mathbf{Z}^{+-+} \ + \mathbf{Z}^{+-+-+} \ + \mathbf{Z}^{+-+-+-+} \ \ldots \\ \mathbf{T}_4 = & 1 + \mathbf{Z}^{-+} + \mathbf{Z}^{-+-+} + \mathbf{Z}^{-+-+-+} + \mathbf{Z}^{-+-+-+-+}\ldots\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S_+} \;&=\; \mathbf{Z}^{+} - 2\,\mathbf{Z}^{++-} + 12\,\mathbf{Z}^{+++--} + 4\,\mathbf{Z}^{++-+-} - 144\,\mathbf{Z}^{++++---} \\
&\quad -72\,\mathbf{Z}^{+++-+--} - 24\,\mathbf{Z}^{+++--+-} - 24\,\mathbf{Z}^{++-++--} - 8\,\mathbf{Z}^{++-+-+-}\ldots \\
\mathbf{S_-} \;&=\; \mathbf{Z}^{-} - 2\,\mathbf{Z}^{--+} + 12\,\mathbf{Z}^{---++} + 4\,\mathbf{Z}^{--+-+} - 144\,\mathbf{Z}^{----+++} \\
&\quad -72\,\mathbf{Z}^{---+-++} - 24\,\mathbf{Z}^{---++-+} - 24\,\mathbf{Z}^{--+--++} - 8\,\mathbf{Z}^{--+-+-+}\ldots \\
\log \mathbf{S_0} \;&=\; (\mathbf{Z}^{+-} - \mathbf{Z}^{-+}) - 2\,(\mathbf{Z}^{++--} - \mathbf{Z}^{--++}) + 12\,(\mathbf{Z}^{+++---} - \mathbf{Z}^{---+++}) \\
&\quad +4\,(\mathbf{Z}^{++-+--} - \mathbf{Z}^{--+-++})\ldots
\end{aligned}
$$

Сингулярное ОДУ первого порядка. Переидем теперь к общему ОДУ, формально сопряженному с уравнением $Y' = Y$:

$$
Y' = Y + \sum_{0\le n} H_n(z)\, Y^n \qquad \Big(\sum H_n Y^n \in z^{-1}\mathbb{C}\{z^{-1}, Y\} \Big) \tag{44}
$$

В полном решении участвуют экспоненциалы и расходящиеся ряды Y_m :

$$
Y(z,u) = Y_0(z) + \sum_{1\le m} u^m\, e^{m\,z}\, Y_m(z) \qquad (\, Y_m(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]\,) \tag{45}
$$

Каждый компонент $Y_m(z)$ сам по себе – резургентен, а особые точки $\widehat{Y}_m(\zeta)$ лежат над $m-\mathbb{N}$. Здесь мостовое уравнение принимает вид

$$
\boldsymbol{\Delta}_n Y(z,u) = \mathbf{A}_n\, Y(z,u) \quad \textit{with} \quad \mathbf{A}_n = a_n\, u^{n+1}\partial_u \quad (\forall n \in \{-1\}\cup\mathbb{N}^*) \tag{46}
$$

что приводит к отдельным уравнениям резургентности

$$
\Delta_n\, Y_m = (m-n)\; a_n\, Y_{m-n} \qquad (m\in\mathbb{N}\,;\ -1\le n\le m\ ,\ a_n\in\mathbb{C}) \tag{47}
$$

От специальных уравнений

$$
\Delta_{-1}\, Y_0 = a_{-1}\, Y_1 \ \ ,\ \ \Delta_{-1}\, Y_1 = 2\, a_{-1}\, Y_2 \ \ ,\ \ \ldots\ \ ,\ \ \Delta_{-1}\, Y_{m-1} \ = \ m\, a_{-1}\, Y_m
$$

следует что $(\Delta_{-1})^m\, Y_0 = m!\,(a_{-1})^m\, Y_m$. А это значит, что (при условии, если ключевой коэффициент $a_{-1} \neq 0$) можно *конструктивно* вывести всю последовательность $Y_1, Y_2, Y_3\ldots$ из знания единого компонента Y_0, что конечно невозможно в случае регулярных ОДУ. Это показывает что сингулярные ОДУ, в отличии от регулярных, обладают замечательной *связностью.* Они *целостны*: зная хоть маленькую часть их решения, можно восстановить полное решение.

Для сравнения: если $P(x)$ – неприводимый (приводимый) многочлен над $\mathbb{Q}$, то из одного корня x_0 можно (нельзя) вывести все остальные!

Сингулярние дифференциальные системы.
Результаты, весьма близкие к выше указанным, имеются в частности

(i) для ОДУ порядка $d \geq 2$ с двугранным полигоном Ньютона.
(ii) для неавтономных дифференциальных систем :

$$Y_j' = \lambda_j\, Y_j + h_j(z, Y_1, ..., Y_n) \qquad (1 \leq j \leq n) \tag{48}$$

(iii) для автономных дифференциальных систем ('векторных полей') :

$$Y_j' = \lambda_j\, Y_j + h_j(Y_1, ..., Y_n) \qquad (1 \leq j \leq n) \tag{49}$$

с однократным резонансом $\sum m_j\, \lambda_j = \lambda_{j_0} \quad (m_j \geq 0)$

5 Трансцендентность. Анализ и синтез.

Теоремы трансцендентности и независимости.

Дисплей облегчает доказательство теорем *независимости* меж решениями $\varphi_i(z) = \sum a_{j,n} z^{-n}$ отдельных ОДУ, то есть оно облегчает доказательство того факта, что такие φ_i, вообще говоря, не связаны никакими *новыми соотношениями.* А причина простая : вложение $\mathbf{Z}$-символов в гипотичное соотношение R накладывает огромное количество *новых, очень трудно выполнимых* условий :

$$R(\varphi_1, ..., \varphi_s) = 0 \Longrightarrow R(\mathrm{dpl}\, \varphi_1, ..., \mathrm{dpl}\, \varphi_s) = \sum^{p\,,q\,,\omega_i} R_{p,\omega_1,...,\omega_q}\, \overbrace{z^{-p}\ \mathbf{Z}^{\omega_1,...,\omega_q}}^{p+q=:N} = 0$$

Действительно, когда $N := p+q \to \infty$, число соотношений $R_{p,\omega_1,...,\omega_q} = 0$ растет как $\mathcal{O}(N^{1+k})$ а число коэффициентов $a_{j,n}$, в них присуствующих, растет лишь как $\mathcal{O}(s.N)$, что и легко приводит к противоречию.

'Анализ', в данном контексте, есть задача об описании константов Стокса A_ω. Тут возможны два подхода : вычислительный и теоретический.

Для *доминантных* константов A_ω (ω на гране круга сходимости), исходя от $\widehat{\Delta}_\omega\, \widehat{\varphi}(\zeta) := A_\omega\ \widehat{\varphi}_\omega(\zeta)$, где $\widehat{\varphi}$ и $\widehat{\varphi}_\omega$ хорошо известны, можно A_ω очень эффективно вычлислить с помощью *асимптотического анализа* коэффициентов $\widehat{\varphi}$. Для *недоминантных* константов Стокса A_ω, надо сначала перенести точку ω на круг сходимости с помощью конформного отображения.

Теперь о теоретическом подходе. Разлагая решение φ в сериях типа :

$$\varphi(z) = \Big(\sum_r \sum_{\omega_i} \boldsymbol{\mathcal{W}}^{\omega_1,...,\omega_r}(z)\, \mathbf{B}_{\omega_r} \ldots \mathbf{B}_{\omega_1} \Big)\ z \tag{50}$$

мы выводим оттуда явное выражение для константов Стокса :

$$\mathbf{A}_{\omega_0} = \Big(\sum_r \sum_{\omega_1 + ... \omega_r = \omega_0} W^{\,\omega_1,...,\omega_r}(z)\, \mathbf{B}_{\omega_r} \ldots \mathbf{B}_{\omega_1} \Big)\ z \tag{51}$$

где $\mathbf{B}_\omega$ – простые дифференциальные операторы, закодирующие коэффициенты Тейлора нашего ОДУ и и где $\boldsymbol{\mathcal{W}}^{\omega_1,\dots,\omega_r}$ – элементарные резургентные функции, с элементарным же поведением при $\boldsymbol{\Delta}$-дифференцировании:

$$\boldsymbol{\Delta}_{\omega_0}\,\boldsymbol{\mathcal{W}}^{\omega_1,\dots,\omega_r}(z)=\sum_{1\le j\le r}\;\sum_{\omega_1+..\omega_j=\omega_0} W^{\omega_1,\dots,\omega_j}\,\boldsymbol{\mathcal{W}}^{\omega_{j+1},\dots,\omega_r}(z) \tag{52}$$

Элементарные функции $\boldsymbol{\mathcal{W}}^{\boldsymbol{\omega}}(z)$ зовут *'резургентными одночленами'* (*resurgence monomials*) а числа $W^{\boldsymbol{\omega}}$ известны как *'резургентные константы'* (*resurgence monics*). Последние, по типу своему, походят на гиперлогарифмы.

'Синтез' есть задача, обратная к 'анализу': *для определенного типа сингулярного ОДУ требуется построить, путем явных формул, наиболее 'естественное' или 'простое' ОДУ данного типа, обладающее заранее заданным набором константов Стокса:* $\{\mathbf{A}_\omega\,,\,\omega\in\Omega\}\Longrightarrow$ ОДУ.

'Синтез' опирается на *резургентные одночлены* $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{\boldsymbol{\omega}}(z)$, отличные от прежних $\boldsymbol{\mathcal{W}}_c^{\boldsymbol{\omega}}(z)$, использованных при 'анализе'. Вот их определение:

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{\omega_1,..,\omega_r}(z):=SPA\!\int_0^{\infty}\frac{e^{\sum_j\omega_j(z-y_j)+c^2\sum_j\bar{\omega}_j(z^{-1}-y_j^{-1})}dy_1...dy_r}{(y_r-y_{r-1})\,\dots\,(y_2-y_1)\,(y_1-z)} \tag{53}$$

где SPA – *стандартное усреднение путей интегрирования.*

Перечислим главные свойства этих новых 'одночленов':

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{\boldsymbol{\omega}'}\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{\boldsymbol{\omega}''} &= \sum^{\boldsymbol{\omega}\in\mathrm{sha}(\boldsymbol{\omega}',\boldsymbol{\omega}'')}\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{\boldsymbol{\omega}} \qquad (\text{“\textit{shuffle product}”}) && (54)\\
\boldsymbol{\Delta}_{\omega_0}\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{\omega_1,\dots,\omega_r} &= \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{\omega_2,\dots,\omega_r}\ \textit{if}\ \omega_0=\omega_1\ \ (\textit{resp.}=0\ \ \textit{if}\ \ \omega_0\neq\omega_1) && (55)\\
\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{\boldsymbol{\omega}} &= \sum_{\boldsymbol{\omega}'.\boldsymbol{\omega}''=\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{\boldsymbol{\omega}'}\boldsymbol{U}_c^{\boldsymbol{\omega}''}=\textit{earlier monomials}\ \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{\boldsymbol{\omega}'} && (56)
\end{aligned}$$

Еще стоит отметить схожесть поведения $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{\boldsymbol{\omega}}$ в антиподах $z=\infty$ и $z=0$. А теперь к общей схеме 'синтеза': Для каждого $c>0$ легко найти (единственное) *формальное* решение в виде серий константов Стокса $\mathbf{A}_\omega$ с одной стороны и 'одночленов' $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{\boldsymbol{\omega}}$ с другой. Например, для резонантных векторных полей X, решение гласит $X=\Theta\,\partial\,\Theta^{-1}$, причем:

$$\Theta\ \ := 1+\sum(-1)^r\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{\omega_1,\dots,\omega_r}\ \mathbf{A}_{\omega_r}\dots\mathbf{A}_{\omega_1} \tag{57}$$

$$\Theta^{-1}:= 1+\sum\ \ \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{\omega_1,\dots,\omega_r}\ \mathbf{A}_{\omega_1}\dots\mathbf{A}_{\omega_r} \tag{58}$$

А *сходимость* этих серий (что конечно главный пункт) автоматически обеспечена для достаточно больших значений параметра c. Еще следует отметить такое любопытное явление : хотя построенное ОДУ определено близ $z=\infty$, но в силу 'антиподальности' наших $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{\boldsymbol{w}}$, ему соотвествует другое ОДУ, определенное близ $z=0$ (его 'антиподальная тень').

6 Мультикритические ОДУ и ускорение.

Когда полное решение данного ОДУ является серией от z^{-1} и разных элементарных блоков $u_i\, e^{\sigma_{ij}\, z_j}$, причем $z_1 \prec z_2 \prec \cdots \prec z_r$ (например $z_j \equiv z^{\alpha_j}$ и $0 < \alpha_j \uparrow$), схема просуммирования усложняется.[1] Надо проходить поочередно через несколько Борелевых плоскостей – ровно столько, сколько есть *'критичестих времен'* z_j. Переходы $\widehat{\varphi}_j(\zeta_j) \to \widehat{\varphi}_{j+1}(\zeta_{j+1})$ осуществляются путем так называемых *интегралов ускорения* $\mathcal{C}_{j,j+1}$, но зато в каждой ζ_j-плоскости картина остается прежней: на каждую функцию $\widehat{\varphi}_j(\zeta_j)$ действуют *свои* $\mathbf{\Delta}$-операторы, порождая *свои* уравнения резургентности со *своими* константами Стокса $\mathbf{A}_\omega$. Общая схема такая :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\widetilde{\varphi}_1(z_1) & \leftarrow & \widetilde{\varphi}(z) & & & & \varphi(z) & \leftarrow & \varphi_r(z_r) \\
\downarrow \mathcal{B} & & & & & & & & \mathcal{L} \uparrow \\
\widehat{\varphi}_1(\zeta_1) & \underset{\mathcal{C}_{1\,,\,2}}{\rightarrow} & \widehat{\varphi}_2(\zeta_2) & \underset{\mathcal{C}_{2\,,\,3}}{\rightarrow} \cdots \rightarrow & & & \widehat{\varphi}_{r-1}(\zeta_{r-1}) & \underset{\mathcal{C}_{r-1\,,\,r}}{\rightarrow} & \widehat{\varphi}_r(\zeta_r)
\end{array}$$

7 Подытоживание.

В **математике** резургентные функции еще применяются (i) в так наз. разностных уравнениях (ii) в разного рода функциональных уравнениях, например в ОДУ со запаздывающим аргументом (iii) в дискретных динамических системах (iv) в сингулярных возмущениях, то есть в разложениях по сингулярному параметру ϵ , например в ОДУ типа $E(z, \varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(d-1)}) + \epsilon\, \varphi^d = 0$ (v) в уравнениях по частным производным (O. Costin) и во многих других задачах...
В **физике** резургентные функции все больше встречаются в разложениях (i) по константу Планка $\hbar$ в так наз. квазиклассическом подходе к квантовой механике (ii) по константу квалибровочного взаимодействия $\boldsymbol{\alpha}$ (iii) и вообще по чуть ни всем важным 'малым' константам физики, ибо по принципу М. Бэрри (*Michael Berry*): *«Когда ненулевость некоего малого физического константа* $\boldsymbol{\epsilon}$ *означает переход от одной классической теории к ее неклассическому обобщению, тогда разложения в степенных рядах от* $\boldsymbol{\epsilon}$ *как правило расходятся, что и отражает нетривиальность данного перехода.»* См. недавнюю конференцию о *резургентности и теории струн* в Женеве (29-06 по 3-06 2014, CERN).

[1] Это относится в частности к ОДУ с более чем двугранным полигоном Ньютона и к векторным полям с многократным резонансом.

В **заключении** подчеркнем что (i) $\mathbf{\Delta}$-операторы порождают новое *'исчисление'*, своеобразное и многогранное, у которого есть как и своя 'дифференциальная' так и своя 'интегральная' сторона (ii) резургентные функции 'алгебраизуют', и тем самым упрощают, многие аналитические проблемы, особенно при изучении сингулярных ОДУ (iii) они все чаще встречаются в теоретической физике, где частая, чуть не генерическая расходимость отнюдь не 'проклятие' а скорее источник новых прозрений.

Несколько ссылок (*более полный перечень имеется на сайте автора*)

• O.Costin, *On Borel summation and Sotes phenomena of nonlinear differential systems*, Duke Math. J., vol 93, 2, 1998.
• J. Ecalle, *Théorie des fonctions résurgentes*, Vol. I, II, III (1980-85),Orsay.
• J.E. *Six Lectures on Transseries, Analysable Functions and the Constructive Proof of Dulac's Conjecture* in Bifurcations etc, p 75-184, 1993, Kluwer.
• J.E. *Recent Advances in the Analysis of Divergence and Singularities* Proc. of 2002 Montreal Seminar on ODEs & normal forms, p 87-187, 2003, Kluwer.
• J.E. *Twisted Resurgence Monomials and canonical-spherical synthesis of Local Objects*, Proc. 2002 Edinb. Conf. on Asymptotics, World Scient.Publ.
• J.v.d.Hoeven, *Transseries and Real Differential Algebra*, Lect. Notes in Math, no 1888, 2006, Springer.
• A.Voros, *The return of the quartic oscillator. The complex WKB method.* Ann. Inst. H. Poincaré, A, Phys. Théor., 1983.

Jean Ecalle, Research Director emeritus at CNRS and Paris-11 University, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France.
email: <jean.ecalle@math.u-psud.fr>
homepage: http://www.math.u-psud.fr/∼ecalle/