Université Paris-Sud

École doctorale de mathématiques Hadamard (ED 574)
Laboratoire de mathématique d'Orsay (UMR 8628 CNRS)

Mémoire présenté pour l'obtention du

Diplôme d'habilitation à diriger les recherches

Discipline : Mathématiques

par

Jean LÉCUREUX

Bords et rigidité en courbure négative ou nulle

Rapporteurs :
Marc Burger
Anders Karlsson
Frédéric Paulin

Date de soutenance : 16 juillet 2020

Composition du jury :

Marc Burger	(Rapporteur)
Anders Karlsson	(Rapporteur)
Frédéric Paulin	(Rapporteur)
Yves Benoist	(Examinateur)
Emmanuel Breuillard	(Examinateur)
Indira Chatterji	(Examinatrice)
Yves Cornulier	(Examinateur)

Liste des travaux

U. Bader, P.-E. Caprace et J. Lécureux, “On the linearity of lattices in affine buildings and ergodicity of the singular Cartan flow”, J. Amer. Math. Soc. 32.**2** (2019), p. 491-562

B. Duchesne, J. Lécureux et M. B. Pozzetti, “Boundary maps and maximal representations on infinite dimensional Hermitian symmetric spaces”, Prépublication (2018), arXiv : `1810.10208`

T. Fernós, J. Lécureux et F. Mathéus, “Random walks and boundaries of CAT(0) cubical complexes”, Comment. Math. Helv. 93.**2** (2018), p. 291-333

U. Bader, B. Duchesne et J. Lécureux, “Almost algebraic actions of algebraic groups and applications to algebraic representations”, Groups Geom. Dyn. 11.**2** (2017), p. 705-738

———, “Amenable invariant random subgroups”, Israel J. Math. 213.**1** (2016), With an appendix by Phillip Wesolek, p. 399-422

———, “Furstenberg maps for CAT(0) targets of finite telescopic dimension”, Ergodic Theory Dynam. Systems 36.**6** (2016), p. 1723-1742

B. Duchesne, Y. Glasner, N. Lazarovich et J. Lécureux, “Geometric density for invariant random subgroups of groups acting on CAT(0) spaces”, Geom. Dedicata 175 (2015), p. 249-256

Travaux non présentés ici

M. de la Salle, J. Lécureux et S. Witzel, *Strong Property (T) and $\widetilde{A}_2$-buildings*, En préparation

T. Fernós, J. Lécureux et F. Mathéus, *Central Limit Theorem for CAT(0) Cubical Complexes*, En préparation

V. Guirardel, C. Horbez et J. Lécureux, *Cocycle superrigidity from higher rank lattices to* $\mathrm{Out}(F_N)$, En préparation

I. Chatterji, F. Dahmani, T. Haettel et J. Lécureux, “Tangent bundles of hyperbolic spaces and proper affine actions on L^p spaces”, Prépublication (2019), arXiv : `1901.07462`

P.-E. Caprace et J. Lécureux, “Combinatorial and group-theoretic compactifications of buildings”, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 61.**2** (2011), p. 619-672

J. Lécureux, “Amenability of actions on the boundary of a building”, Int. Math. Res. Not. IMRN **17** (2010), p. 3265-3302

J. Lécureux, “Hyperbolic configurations of roots and Hecke algebras”, J. Algebra 323.**5** (2010), p. 1454-1467

Table des matières

Introduction

Ce mémoire présente l'essentiel de mes travaux depuis mon arrivée à Orsay en septembre 2010.

La grande majorité de ces travaux consiste à étudier et utiliser des *applications bords* pour démontrer des théorèmes de *rigidité* dans un contexte géométrique *CAT(0)*. Commençons donc par expliquer et mettre en contexte ces trois termes.

Géométries CAT(0). Pour un espace métrique, Gromov a popularisé une notion de *courbure négative ou nulle*, appelée CAT(0) (d'après Cartan-Alexandrov-Toponogov) et définie comme suit. Rappelons qu'un espace métrique X est *géodésique* si pour tous les points $x, y \in X$ il existe une isométrie $\gamma : [0, d(x,y)] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(d(x,y)) = y$. Soit X un espace métrique géodésique. Si $x, y, z \in X$, un *triangle de comparaison* associé est un triangle de sommets $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ dans $\mathbb{R}^2$ dont les longueurs des côtés sont $d(\overline{x}, \overline{y}) = d(x,y)$, $d(\overline{x}, \overline{z}) = d(x,z)$ et $d(\overline{y}, \overline{z}) = d(y,z)$. Si p est un point sur une géodésique entre x et y, notons $\overline{p}$ le point de $[\overline{x}, \overline{y}]$ à distance $d(x,p)$ de $\overline{x}$. On dit que X est CAT(0) si pour tous les points x, y, z et p comme ci-dessus, on a $d(z,p) \leqslant d(\overline{z}, \overline{p})$.

De manière équivalente, on peut définir un espace CAT(0) en comparant la longueur d'une médiane d'un triangle de X à celle dans l'espace euclidien. Autrement dit, l'espace métrique géodésique X est CAT(0) si pour tous les $x, y, z \in X$, si m est un point vérifiant $d(y,m) = d(z,m) = \frac{d(y,z)}{2}$ alors

$$d(x,m)^2 \leqslant \frac{1}{2}(d(x,y)^2 + d(x,z)^2) - \frac{1}{4}d(y,z)^2 \ .$$

C'est une notion globale : elle entraîne notamment l'unicité des géodésiques entre deux points, ainsi que la simple connexité de l'espace.

On voit apparaître des espaces CAT(0) dans des contextes assez différents. Voici les exemples les plus importants, sans prétention à l'exhaustivité.

Exemples 1.
- Les variétés hyperboliques simplement connexes sont des espaces CAT(0).
- Plus généralement, les variétés riemanniennes complètes qui sont simplement connexes et à courbure sectionnelle partout négative ou nulle sont des espaces CAT(0). Un exemple particulièrement intéressant de telle variété est donné par les espaces symétriques de type non compact.

  Par exemple, soit $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $K = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Alors la variété G/K est un exemple d'espace symétrique (pointé) ; il est CAT(0) pour une métrique riemannienne sur G/K qui se définit naturellement en terme de l'algèbre de Lie de G. On peut donner une définition élémentaire de la distance riemannienne de la manière suivante. Soient $g \in G$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (> 0) de la matrice $\sqrt{gg^t}$; elles ne dépendent que de la classe de g modulo K. Alors on définit $d(1.K, g.K)$ comme la norme ℓ^2 du vecteur $(\ln(\lambda_1), \dots, \ln(\lambda_n))$, et pour $g, h \in G$ on pose $d(gK, hK) = d(1.K, g^{-1}hK)$.

- Les *immeubles* sont des objets combinatoires qui admettent une réalisation géométrique CAT(0) (voir le livre [AbB08] par exemple). Certains peuvent être vus comme des analogues non-archimédiens des espaces symétriques. Par exemple si $G = \mathrm{PGL}_n(\mathbb{Q}_p)$ et $K = \mathrm{PGL}_n(\mathbb{Z}_p)$ alors G/K est l'ensemble des sommets d'un immeuble. Pour $n = 2$, cet immeuble est simplement un arbre de valence $p + 1$.
- Les *complexes cubiques CAT(0)* forment une autre classe d'exemples importants. Ils s'obtiennent simplement en recollant isométriquement des cubes (de toutes dimensions) le long de leurs faces. La condition CAT(0) se vérifie alors facilement sur les links. Lorsqu'elle est vérifiée, le complexe est muni d'une structure combinatoire très riche : les plans médiateurs des faces des cubes se recollent pour former des *hyperplans*, qui divisent l'espace en exactement deux *demi-espaces.*

Je parlerai plus d'immeubles dans le chapitre 4, et de complexes cubiques CAT(0) dans le chapitre 2. Dans de nombreux cas, l'exemple des espaces symétriques a fourni un analogue qui a guidé les questions que je me suis posées.

Le *bord visuel* $\partial_\infty X$ d'un espace CAT(0) X est obtenu en regardant l'ensemble des rayons géodésiques et en quotientant par la relation d'équivalence « être à distance de Hausdorff finie ».

Exemples 2.

- Si X est un espace CAT(0) qui est également hyperbolique au sens de Gromov, alors son bord visuel et son bord de Gromov coïncident.
- Si $X = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, alors $\partial_\infty X$ a une structure naturelle de complexe simplicial. Les sommets de ce complexe sont les sous-espaces vectoriels propres de $\mathbb{R}^n$. Les simplexes de dimension k sont formés par des sommets correspondant à des sous-espaces vectoriels propres $V_1, \dots, V_{k+1}$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_{k+1}$. En particulier, les simplexes maximaux sont de dimension $n - 1$ et correspondent aux drapeaux complets de $\mathbb{R}^n$.
- Si X est l'immeuble associé à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p)$, le bord visuel s'obtient exactement par la même construction. En général, le bord visuel d'un espace symétrique de type non compact ou d'un immeuble affine a une structure combinatoire (qui est cependant non triviale seulement en rang supérieur) : c'est ce qu'on appelle un *immeuble sphérique*.

- Le bord visuel d'un complexe cubique CAT(0) n'a pas de structure évidente ; j'expliquerai cependant dans le chapitre 2 son lien avec un autre bord, le *bord de Roller*, qui a lui une structure combinatoire riche.

Rigidités. La plupart de mes travaux s'articulent autour de questions de rigidité. Le problème général est le suivant : si G est un groupe, et Γ un sous-groupe de G, quelles sont les propriétés de G que l'on peut retrouver à partir de Γ ? Une variante peut également être : si Γ est un groupe agissant sur un espace métrique X, quelles propriétés de X peut-on retrouver à partir de la structure algébrique de Γ ?

Les exemples les plus importants et les plus frappants de tels phénomènes de rigidité sont donnés par les groupes de Lie réels simples de rang supérieur, et leurs réseaux. L'exemple typique de tel groupe de Lie est $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 3$. Un *réseau* d'un groupe localement compact G est un sous-groupe Γ de G qui est discret et tel que G/Γ possède une mesure de probabilité G-invariante ; l'exemple typique de réseau est $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. En particulier si G/Γ est compact on dit que Γ est un réseau cocompact, ou uniforme.

Soient G et H des groupes localement compacts, et Γ un réseau de G. Disons qu'une représentation $\rho : \Gamma \to H$ est *rigide* si elle est en fait la restriction d'une représentation (continue) $\hat{\rho} : G \to H$. Le premier exemple frappant de résultat de rigidité est le théorème de rigidité de Mostow : celui-ci affirme que si G et H sont des groupes de Lie réels simples connexes non compacts, et G non localement isomorphe à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et si $\rho : \Gamma \to H$ vérifie que $\rho(\Gamma)$ est un réseau, alors ρ est rigide. Ce théorème a été démontré par Mostow [Mos73] dans le cas où Γ et $\rho(\Gamma)$ sont cocompacts et étendu au cas général par Prasad [Pra79] et Margulis au cas général. On peut également le démontrer pour des groupes algébriques sur des corps locaux non-archimédiens. Margulis obtiendra en fait quelques temps après un théorème beaucoup plus fort, le théorème de superrigidité (voir [Mar91] ou le plus accessible livre [Zim84]) :

Théorème 3. *Soit G un groupe algébrique connexe semi-simple sur $\mathbb{R}$ de rang réel au moins deux (par exemple $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geqslant 3$), et soit Γ un réseau irréductible de G. Soit H un groupe algébrique connexe simple sur $\mathbb{R}$, non compact, et soit $\pi : \Gamma \to H$ un morphisme tel que $\pi(\Gamma)$ est Zariski-dense dans H. Alors π s'étend en un morphisme $G \to H$.*

Encore une fois, ce théorème s'étend à des corps locaux non-archimédiens. Cette extension permet d'ailleurs de démontrer un théorème de structure important sur les réseaux dans les groupes de Lie réels simples de rang supérieur : ils sont tous *arithmétiques*, c'est-à-dire *grosso modo* qu'ils s'obtiennent comme groupes de matrices à coefficients entiers dans un groupe algébrique. Notons que des généralisations de ce théorème ont été obtenues récemment par Bader et Furman (voir par exemple [BaF14]) ; celles-ci ont été une source d'inspiration de nombreux travaux présentés ici.

Plusieurs résultats de ce mémoire peuvent être compris comme des résultas de rigidité. C'est le cas d'une partie du chapitre 1, notamment le paragraphe 1.4, dans lequel nous démontrons que certaines représentations de réseaux hyperboliques complexes dans des groupes de Lie de dimension infinie sont rigides (c'est l'article [DuLP18]). Le quatrième (et dernier) chapitre présente des résultats sur les groupes agissant proprement et cocompactement sur un immeuble $\widetilde{A}_2$. Ceux-ci satisfont une dichotomie étonnante : ce sont ou bien des groupes arithmétiques, ou bien ils n'admettent aucune représentation linéaire d'image infinie. On peut interpréter comme un résultat de superrigidité (les représentations devraient s'étendre, mais il n'y a rien à quoi les étendre, donc elles n'existent pas).

Applications bords. Les preuves des théorèmes de rigidité de Mostow et de Margulis se font toutes deux en deux étapes. L'outil principal est une bonne notion de *bord* B pour le réseau Γ. Si $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, ce bord sera simplement l'espace des drapeaux complets de $\mathbb{R}^n$ (vu comme espace topologique pour le théorème de Mostow et comme espace mesuré pour le théorème de Margulis 3). C'est un espace G-homogène. L'idée principale est que cet espace peut être attaché au réseau Γ sans aucune référence au groupe G. Suivant le cas, on utilisera différentes constructions. Par exemple, si Γ est un réseau cocompact et G est de rang 1, on peut simplement regarder le bord visuel ; il est alors muni d'une structure quasiconforme : c'est ce qui est utile pour démontrer le théorème de Mostow dans ce cadre. Si G ou Γ agit proprement et cocompactement sur un espace symétrique X de type non compact et de rang supérieur, on peut considérer le bord visuel de X, vu comme espace topologique, avec de plus sa structure combinatoire d'immeuble sphérique.

Pour n'importe quel groupe Γ, Furstenberg [Fur73] a imaginé d'autres façons d'attacher un espace à Γ, qui vont essentiellement donner les mêmes exemples pour les groupes de Lie semisimples. Ce qu'on appelle *bord de Furstenberg* est construit de manière abstraite avec des caractérisations dynamiques ; ce n'est pas celui qui va m'intéresser ici. Une autre construction présente dans les textes de Furstenberg est le *bord de Poisson-Furstenberg*, défini en généralisant le noyau de Poisson à une marche aléatoire sur Γ. Je décrirai un peu plus précisément ce bord dans le chapitre 1 ; c'est un espace mesuré muni d'une action de Γ qui quasi-préserve la mesure.

Revenons aux théorèmes de rigidité. Le squelette (très vague) des preuves est le suivant : soit B un bord de Γ (et de G), et B' un bord de H. Supposons qu'on ait une représentation $\rho : \Gamma \to H$. Sous des bonnes hypothèses (et avec la bonne notion de bord), on peut espérer obtenir une *application bord*, c'est-à-dire une application $B \to B'$ qui est ρ-équivariante, et avec une régularité adaptée à la notion de bord considérée (par exemple mesurable si on travaille avec le bord de Poisson-Furstenberg). L'obtention d'une telle application bord est donc un point clé dans toutes ces preuves de rigidité.

Le premier chapitre de ce mémoire détaille plusieurs contextes dans lequel j'ai démontré avec mes co-auteurs l'existence d'applications bords, dans plusieurs contextes. Le premier résultat est, pour un groupe agissant sur un espace CAT(0), l'existence d'une application du bord de Poisson du groupe vers le bord visuel de l'espace (c'est l'article [BaDL16b]). Comme expliqué ci-dessus, j'en donne une application à la rigidité des représentations maximales dans des groupes de Lie de dimension infinie. Enfin, la dernière partie de ce chapitre (issu de l'article [BaDL17]) s'intéresse aux cas des groupes algébriques sur des corps valués. Ceux-ci agissent sur des immeubles (non localement compacts), mais nous avons adopté un point de vue plus directement algébrique. Ces résultats ont été utilisés récemment par Bader et Furman pour démontrer des résultats de superrigidité dans ce cadre.

Le bord de Poisson-Furstenberg est défini par le comportement asymptotique d'une marche aléatoire. L'existence d'applications bord est donc liée à des propriétés de cette marche. En fait dans certains cas, si G agit sur un espace X, on peut l'obtenir directement à partir de la convergence de la marche aléatoire vers un point d'un bord de X (voir [KaM99] par exemple). Dans le deuxième chapitre, qui résume l'article [FLM18], j'explique comment, à partir d'une application bord, démontrer la convergence de la marche aléatoire vers un point du bord d'un complexe cubique CAT(0). On en déduit ensuite plusieurs propriétés intéressantes un peu plus fines de cette marche aléatoire.

IRS. Le troisième chapitre est un peu à part, puisqu'il n'a pas de lien direct avec les questions de rigidité. Cependant, les techniques de preuves utilisées sont assez proches de celles dont on a besoin pour comprendre les applications bord. On va y étudier des *IRS*, une abbréviation anglophone pour *sous-groupe aléatoire invariant*. Un IRS est une mesure de probabilité sur l'espace de Chabauty des sous-groupes fermés d'un groupe localement compact G qui est invariante par l'action par conjugaison par G. Ce chapitre (qui résume les articles [BaDL16a] et [Duc+15]) contient deux résultats. Le premier concerne les IRS dans un groupe localement compact G qui agit sur un espace CAT(0) X : on y démontre que certaines hypothèses de densité de l'action (pas de point fixe au bord ni de sous-espace invariant) sont héritées par les IRS (non triviaux) de G. Le deuxième résultat s'intéresse à des groupes G quelconques : nous démontrons que que, si un IRS est supporté sur l'ensemble des sous-groupes moyennables de G, alors presque tout sous-groupe est contenu dans un sous-groupe normal moyennable fixé de G.

Remerciements. Je remercie Marc Burger, Anders Karlsson et Frédéric Paulin d'avoir accepté de rapporter sur ce texte ; les suggestions de Frédéric Paulin ont grandement amélioré ce mémoire. Merci également à Yves Benoist, Emmanuel Breuillard, Indira Chatterji, et Yves Cornulier d'avoir accepté de faire partie de mon jury, malgré des conditions difficiles.

Merci à tous mes collaborateurs, sans qui tout ce travail n'aurait pas eu lieu : Uri Bader, Pierre-Emmanuel Caprace, Bruno Duchesne, Talia Fernós, Yair Glasner, Nir Lazarovich, Frédéric Mathéus, Beatrice Pozzetti. Je remercie tout particulièrement Uri Bader, qui m'a encadré durant mon post-doctorat et qui m'a toujours soutenu depuis. Merci également à mon directeur de thèse, Bertrand Rémy, qui m'a suivi et soutenu après ma thèse.

La quasi-totalité des travaux présentés ici ont été effectués au Laboratoire de Mathématique d'Orsay, qui constitue un cadre scientifique formidable. Merci en particulier aux membre de l'équipe de Topologie & Dynamique de m'avoir chaleureusement accueilli.

Enfin, merci à Magali de m'avoir supporté pendant la rédaction de ce mémoire.

Chapitre 1

Bords et applications de Furstenberg

1.1. Notions de bords

1.1.1. Diverses notions de bord. Le but de cette section est de définir et de donner des exemples de *bords* d'un groupe (discret, ou plus généralement localement compact) G. Les idées présentées ici suivent l'article [BaF14] de Bader et Furman.

Soit G un groupe localement compact à base dénombrable de voisinages (et en pratique ici le plus souvent dénombrable). Furstenberg a défini une notion de *bord* associée à une marche aléatoire sur G, le bord de Poisson-Furstenberg (dont je rappelle la définition au §1.1.2). L'objet de cette section est de donner diverses généralisations et définitions axiomatiques plus maniables pour manipuler ce bord ou d'autres objets s'y rattachant. Un autre exemple fondamental sera celui d'un groupe de Lie semisimple réel ou p-adique G, ou un de ses réseaux, agissant sur le quotient G/P, où P est un sous-groupe parabolique minimal.

Commençons par introduire la catégorie dans laquelle nous allons travailler dans ce chapitre.

Définition 1.1. Un G-*espace* de Lebesgue est un espace de probabilité standard (X, ν), muni d'une action mesurable (i.e. l'application $G \times X \to X$ est mesurable) de G qui préserve la classe de ν, c'est-à-dire que $g_*\nu$ est absolument continue par rapport à ν, pour tout $g \in G$.

Les G-espaces de Lebesgue seront considérés «à mesure nulle près» : autrement dit, on va identifier deux parties de X si elles diffèrent d'un ensemble de mesure nulle, et on va identifier deux fonctions sur X si elles coïncident sur un ensemble de mesure pleine.

Un G-*morphisme* entre deux G-espaces de Lebesgue (X, ν) et (Y, μ) est une application $\pi : X \to Y$ qui est mesurable, G-équivariante, et telle que $\pi_*\nu = \mu$.

La première des définitions suivantes, bien qu'ayant été utilisée implicitement par Furstenberg ou Margulis, est due à Zimmer, voir [Zim77] ou le livre [Zim84].

La définition suivante est apparemment suffisante pour un groupe discret [Pet] :

Définition 1.2 (Moyennabilité au sens de Zimmer). Soit G un groupe discret dénombrable, et B un G-espace de Lebesgue. L'action de G sur B est dite moyennable au sens de Zimmer si, dès que G agit continûment sur un espace compact K, il existe une application mesurable G-équivariante $B \to \mathrm{Prob}(K)$.

De manière équivalente, si G agit par isométries affines sur un convexe faible-* compact C du dual d'un espace de Banach, il existe une application G-équivariante $B \to C$. La définition pour un groupe quelconque nécessite de définir des champs d'espaces convexes au-dessus de B, voir [Zim84] pour plus de détails.

La deuxième condition que l'on va imposer est une condition d'ergodicité. Il y a en fait plusieurs variantes possibles, que l'on peut utiliser suivant le contexte. Rappelons qu'une action de G sur B est *ergodique* si tout ensemble G-invariant de B est de mesure 0 ou 1. Cela revient à dire que toute application mesurable G-invariante $B \to \mathbb{R}$ est essentiellement constante (et on peut remplacer $\mathbb{R}$ par n'importe quel borélien standard).

Définition 1.3. Soit X un G-espace de Lebesgue. L'action de G sur X est *doublement ergodique* si l'action diagonale de G sur l'espace mesuré produit $X \times X$ est ergodique. Elle est *isométriquement ergodique* si, pour toute action continue de G par isométries sur un espace métrique M, toute application G-équivariante mesurable $f : X \to M$ est essentiellement constante. Elle est *doublement isométriquement ergodique* si l'action de G sur $X \times X$ est isométriquement ergodique.

Remarquons qu'une action doublement ergodique est ergodique : en effet, si $A \subset X$ est G-invariant, alors $A \times A$ est G-invariant, donc $\nu(A)^2 = 0$ ou 1. Une action doublement ergodique est également isométriquement ergodique : en effet, si $f : X \to M$ est mesurable G-équivariante, alors $(x, y) \mapsto d(f(x), f(y))$ est mesurable et G-équivariante, donc essentiellement constante. Enfin, l'ergodicité isométrique implique l'ergodicité : prendre pour M un espace métrique avec une action triviale de G.

Si la mesure sur X est préservée, toutes ces propriétés sont équivalentes, et reviennent à dire que l'action est faiblement mélangeante, mais en général ce n'est pas le cas. On pourra consulter [GlW16] pour une mise au point sur les différentes implications entre ces propriétés. Notons également que des notions légèrement plus faibles que l'ergodicité isométrique (où l'on restreint la classe des espaces métriques considérés) ont été introduites dans [BuM96] et [BuM02].

Définition 1.4. Un *bord* de G est un G-espace de Lebesgue (B, ν) sur laquelle l'action est moyennable au sens de Zimmer, et doublement isométriquement ergodique.

Exemple 1.5. Pour $n \geqslant 2$, soient $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et P son sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. Alors l'espace homogène G/P muni de la mesure de Haar, est un bord de G. En effet, le groupe P est résoluble, donc moyennable, et l'action de G sur G/P est donc moyennable. Pour vérifier la double ergodicité isométrique, commençons par donner une interprétation géométrique de l'espace produit $G/P \times G/P$.

On peut voir G/P comme l'espace des drapeaux complets $V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$. Le double produit $G/P \times G/P$ a une G-orbite ouverte et dense : il s'agit des paires de drapeaux complets (V_i) et (W_j) telles que $V_i \oplus W_{n-i} = \mathbb{R}^n$ pour tout

i. Cette orbite est donc de mesure pleine, et elle s'identifie à G/A, où A est le groupe des matrices diagonales. Vu que l'action de G sur G/A est transitive, elle est évidemment ergodique.

L'ergodicité isométrique s'obtient avec une utilisation d'un lemme de Mautner (voir par exemple [Mar91, p. II.3.2]). Soit M un espace métrique sur lequel G agit continûment par isométries. Supposons que l'on ait une application G-équivariante de $G/P \times G/P$ dans M, autrement dit de G/A dans M. On peut la voir comme une application G-équivariante de G dans M telle que A fixe un point x_0. La bonne version du lemme de Mautner est alors la suivante.

LEMME 1.6. *Si G agit continûment par isométries sur un espace métrique M, alors tout point fixe par A est également fixe par P.*

DÉMONSTRATION. Soit $u \in P$, et soit $x \in M$ un point fixé par A. Alors il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tels que $a_n u a_n^{-1}$ tend vers 1 dans G. On a donc $d(a_n u a_n^{-1}x, x) \to 0$ par continuité de l'action. D'autre part, puisque a_n fixe x, on a $d(ux, x) = d(ua_n^{-1}x, a_n^{-1}x) = d(a_n u a_n^{-1}x, x)$. Donc $d(ux, x) = 0$ et x est bien fixé par P. $\square$

On conclut la preuve de l'ergodicité isométrique en disant que x_0 est fixé par P, mais aussi avec le même argument par le groupe P^- des matrices triangulaires inférieures, et donc par G qui est engendré par P et P^-.

Les deux définitions suivantes sont dues à U. Bader et A. Furman, voir [BaF14]. Rappelons que si X, Y, Z sont des espaces topologiques, et $q : X \to Z$, $q' : Y \to Z$ sont continues alors le *produit fibré* est l'espace

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid q(x) = q'(y)\}$$

muni de la topologie induite par la topologie produit.

DÉFINITION 1.7. Un *fibré métrique* est la donnée de deux espaces boréliens standards M et V, d'une application mesurable $q : M \to V$, et d'une fonction borélienne $d : M \times_V M \to \mathbb{R}_+$ dont la restriction à chaque fibre $(q \times q)^{-1}(v)$ est une distance.

Une *action relativement isométrique* de G sur le fibré métrique $q : M \to V$ est la donnée d'actions mesurables de G sur M, V telles que q est équivariante et que, pour tout $g \in G$ la restriction de g à $(q \times q)^{-1}(v)$ est une isométrie de $(q \times q)^{-1}(v)$ dans $(q \times q)^{-1}(gv)$.

DÉFINITION 1.8. Soit (X, ν_X) et (Y, ν_Y) deux G-espaces de Lebesgue et $\pi : X \to Y$ un G-morphisme.

On dit que π est *relativement isométriquement ergodique* si pour toute action relativement isométrique de G sur n'importe quel fibré métrique $q : M \to V$, s'il existe des applications G-équivariantes $f : X \to M$ et $g : Y \to V$ telles que $q \circ f = g \circ \pi$, alors il existe $f_1 : Y \to M$ telle que $g = \pi \circ f_1$.

Cette définition peut être résumée dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & M \arrow[d, "q"] \\ Y \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dotted, "f_1"] & V. \end{tikzcd}$$

Exemple 1.9. Si G est $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et P est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, alors la première projection $G/P \times G/P \to G/P$ est relativement isométriquement ergodique. Cela se démontre avec les mêmes techniques que pour l'exemple 1.5.

Cette condition est plus forte que l'ergodicité isométrique (et donc que l'ergodicité tout court) : en effet, on retrouve l'ergodicité isométrique dans le cas particulier où V est réduit à un point.

Remarque 1.10. Dans l'article [BaDL16b], écrit avant [BaF14], nous avons écrit des définitions similaires dans le formalisme des champs mesurables. Dans [DuLP18, Lemma 4.12], nous avons esquissé l'équivalence entre ce formalisme et celui décrit plus haut.

Définition 1.11. Un *bord fort* est un G-espace (B, ν) tel que
- l'action de G sur B est moyennable au sens de Zimmer, et
- l'action de G sur $B \times B$ est relativement isométriquement ergodique.

Exemple 1.12. Si G est moyennable, alors l'action de G sur un point est moyennable au sens de Zimmer, et elle vérifie bien sûr toutes les conditions d'ergodicité. Donc $B = \{*\}$ est un bord fort pour G.

Exemple 1.13. Si $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, et si P est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, il découle des exemples 1.5 et 1.9 que G/P est un bord fort de G.

Un des avantages de l'approche axiomatique des bords est qu'elle permet de vérifier facilement des propriétés de stabilité, voir [BaF14, Proposition 2.2].

Proposition 1.14.
- *Soit B un bord fort d'un groupe localement compact G, et Γ un réseau de G. Alors B est également un bord fort pour Γ.*
- *Soient $G_1, \ldots, G_n$ des groupes localement compacts à bases dénombrables de voisinages, et B_i un bord fort de G_i. Alors $B_1 \times \cdots \times B_n$ est un bord fort pour $G_1 \times \cdots \times G_n$.*

Exemple 1.15. Si $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et P est le sous-groupe de G formé par les matrices triangulaires supérieures, alors G/P (muni de la mesure de Haar) est un bord de Γ.

On peut vouloir faire une variante de cette définition un peu moins symétrique.

DÉFINITION 1.16. Soient B_+ et B_- deux G-espaces de Lebesgue. On dit que le couple (B_+, B_-) est un *bord couplé* si

- les actions de G sur B_+ et B_- sont moyennables au sens de Zimmer, et
- les deux projections $B_+ \times B_- \to B_+$ et $B_+ \times B_- \to B_-$ sont relativement isométriquement ergodiques.

1.1.2. Exemple : le bord de Poisson-Furstenberg. Le but de ce paragraphe est de décrire une construction générale, pour n'importe quel groupe G, d'un bord fort. Cette construction provient de l'étude des marches aléatoires sur un groupe, sur laquelle je reviendrais dans le chapitre 2. Outre [BaF14], on pourra également consulter [Fur02], [Kai00] ou [Ers10] pour plus d'informations sur le sujet.

On fixe donc un groupe localement compact à base dénombrable G. Soit μ une mesure de probabilité sur G. Si G agit continûment sur un espace localement compact X, et ν une mesure de Borel sur X, rappelons que le produit de convolution $\mu * \nu$ est défini par $\mu * \nu(f) = \int_{G\times X} f(gx)d\mu(g)d\nu(x)$, pour toute fonction f continue à support compact sur X. On dit que la mesure ν est *stationnaire* si $\mu * \nu = \nu$.

Dans le cas particulier où $X = G$ (muni de la multiplication à gauche), on note $\mu^{*n} = \mu * \mu \cdots * \mu$. On remarque que, si λ_G est une mesure de Haar (à gauche) sur G, alors pour n'importe quelle mesure de probabilité μ on a $\mu * \lambda_G = \lambda_G$, par invariance de λ_G.

DÉFINITION 1.17. La mesure μ est *admissible* si

- tout $g \in G$ s'écrit comme un produit $g_1 \dots g_n$, où les g_i sont dans le support de μ,
- il existe n tel que μ^{*n} est absolument continue par rapport à la mesure de Haar.

Bien sûr dans le cas où G est discret cette deuxième condition est vide. Pour $\mu \in \mathrm{Prob}(G)$, on pose $\check{\mu} = i_*\mu$, où $i : G \to G$ est défini par $i(g) = g^{-1}$. On dit que μ est *symétrique* si $i_*\mu = \mu$.

Lorsqu'on a une mesure admissible sur G, on peut former le processus stochastique suivant, appelé *marche aléatoire* sur G. On choisit, pour tout n, un élément g_n de G suivant la loi μ, de manière indépendante. On forme alors le produit $Z_n = g_1 g_2 \dots g_n$, qui est donc une variable aléatoire à valeur dans G. Notons que Z_n suit la loi μ^{*n}. Par hypothèse, cette marche aléatoire peut visiter n'importe quel point de G.

D'un point de vue plus formel, considérons l'espace $\Omega = G \times G^{\mathbb{N}^*}$, que j'appelerai *espace des incréments*, muni de l'actionde G par multiplication à gauche sur le premier facteur. On va être amené à faire varier le point de départ de la marche aléatoire. On va donc considérer, pour une mesure $\theta \in \mathrm{Prob}(G)$, la mesure produit

$\mathbb{P}_\theta = \theta \times \mu^{\mathbb{N}^*}$ sur Ω. Lorsque $\theta = \delta_1$, on note $\mathbb{P}_\theta = \mathbb{P}$. Notons que si θ est une mesure équivalente à θ' alors $\mathbb{P}_\theta$ est équivalente à $\mathbb{P}_{\theta'}$.

Soit $\Omega' = G^{\mathbb{N}}$, vu comme *l'espace des trajectoires*, également muni de l'action diagonale de G. On considère l'application $Z : \Omega \to \Omega'$ définie par

$$Z((\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots)) = (\omega_0, \omega_0\omega_1, \omega_0\omega_1\omega_2, \dots)$$

Elle est G-équivariante. Pour retrouver les notations ci-dessus, on peut définir, pour $\omega \in \Omega$, $g_n(\omega)$ qui est la n-ième coordonnée de ω et $Z_n(\omega)$ qui est la n-ième coordonnée de $Z(\omega)$.

Le *décalage* est l'application $S : \Omega' \to \Omega'$ définie par

$$S : (\omega'_0, \omega'_1, \dots) \mapsto (\omega'_1, \omega'_2, \dots).$$

Il est conjugué par Z à l'application $T : \Omega \to \Omega$ qui à $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots)$ associe $(\omega_0\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots)$.

On s'intéresse plus particulièrement au cas où $\theta = \delta_1$, dans lequel on a noté ci-dessus $\mathbb{P}_{\delta_1} = \mathbb{P}$. On voudrait former le quotient de l'espace $(\Omega, \mathbb{P})$ par T. Cela pose problème, pour deux raisons : la première est qu'il n'y a pas de structure mesurable sur l'ensemble quotient. La deuxième est que l'on veut une action de G sur cet espace, mais G ne quasi-préserve pas la mesure $\mathbb{P}$. C'est pourquoi on est amené à faire la définition suivante.

Définition 1.18. Soit $\theta \in \mathrm{Prob}(G)$ une mesure de probabilité sur G équivalente à la mesure de Haar. Le *bord de Poisson-Furstenberg* de G (relativement à μ) est l'espace $B = B_\theta = \Omega \,/\!\!/\, T$ des composantes ergodiques de T sur $(\Omega, \mathbb{P}_\theta)$. Soit $\pi : \Omega \to \Omega \,/\!\!/\, T$ l'application quotient. On munit B de la mesure $\nu = \nu_1 = \pi_*\mathbb{P}$.

Une façon pratique de comprendre cette définition est de dire que l'espace $\mathrm{L}^\infty(B)$ est égal à l'espace $\mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathbb{P}_\theta)^T$ des fonctions T-invariantes sur Ω. En particulier l'espace B ne dépend pas du choix de la mesure θ dans la classe de la mesure de Haar. Comme $\mathbb{P}_\theta$ est quasi-invariante par G, et que l'action de G commute avec T, on obtient une action de G sur B, qui préserve la classe de ν.

Le théorème suivant est dû à Bader et Furman [BaF14], qui s'inspirent d'une preuve antérieure de Kaimanovich donnant un résultat légèrement plus faible [Kai03].

Théorème 1.19. *Soient $\mu \in \mathrm{Prob}(G)$ admissible et symétrique, et B le bord de Poisson associé. Alors (B, ν) est un G-bord fort.*

Plus généralement, supposons μ seulement admissible. Soit B_+ le bord de Poisson de G relativement à μ et B_- le bord de Poisson de G relativement à $\check{\mu}$. Alors (B_+, B_-) est un bord couplé.

Corollaire 1.20. *Tout groupe localement compact à base dénombrable de voisinages admet un bord fort.*

1.2. Application vers le bord d'un espace CAT(0)

Soient G un groupe localement compact à base dénombrable de voisinages, et B un bord fort de G. Le but de ce paragraphe est d'expliquer le résultat principal de [BaDL16b]. On définira la dimension télescopique dans le §1.2.1 ci-dessous ; notons pour l'instant que les variétés riemanniennes CAT(0) (de dimension finie) ou les complexes polygonaux de dimension finie sont de dimension télescopique finie.

THÉORÈME 1.21. *Soit X un espace métrique complet CAT(0) de dimension télescopique finie, et supposons que G agisse continûment par isométries sur X, sans plat invariant dans X. Alors il existe une application mesurable G-équivariante $B \to \partial_\infty X$.*

Notons que les plats peuvent éventuellement avoir dimension 0.

Ce théorème généralise deux résultats importants. Le premier est dû à Karlsson et Margulis [KaM99].

THÉORÈME 1.22. *Supposons que G est un groupe qui agit proprement et cocompactement sur un espace métrique CAT(0) X. Soit $\mu \in \mathrm{Prob}(G)$ une mesure admissible, et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire associée. Alors pour tout $x \in X$, la suite $(Z_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers un point du bord $\partial_\infty X$.*

Ce théorème est en fait plus général : il permet d'obtenir la convergence de la marche aléatoire vers un point du bord $\partial_\infty X$ sous la condition que la dérive $\lim_n \frac{d(Z_n x,x)}{n}$ est positive. Cette condition est automatique sous les hypothèses citées mais est difficile à vérifier en général. Notons que dans le cas où X est l'espace symétrique $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, ce résultat permet de retrouver le théorème d'Oseledets et ainsi de définir les exposants de Lyapunov de la marche aléatoire. Cette réduction est expliquée dans [KaM99] ou [Kai87] ; on pourra se référer à [BeQ16] pour les résultats classiques sur les marches aléatoires dans les groupes linéaires.

Un autre résultat similaire au nôtre, et dont nos preuves vont s'inspirer, concerne les groupes moyennables. Pour ceux-ci, rappelons que l'on peut prendre pour bord fort l'action de G sur un point. Une application G-équivariante vers $\partial_\infty X$ sera alors simplement un point fixe dans le bord. C'est exactement ce qu'obtiennent Caprace et Lytchak [CaL10], qui généralisent un théorème d'Adams et Ballmann [AdB98].

THÉORÈME 1.23. *Soit X un espace métrique complet CAT(0) de dimension télescopique finie, et soit G un groupe moyennable qui agit continûment par isométries sur X. Alors il existe un plat invariant dans X ou un point fixe dans $\partial_\infty X$.*

1.2.1. Espaces CAT(0) et dimension télescopique. Soit X un espace CAT(0) complet. Une utilisation fondamentale de l'inégalité CAT(0) est le *lemme du point fixe de Bruhat-Tits*. Celui-ci démontre le théorème 1.21 dans le cas particulier où G est fini ou compact.

Rappelons que le *bord visuel* $\partial_\infty X$ d'un espace CAT(0) X est défini comme l'ensemble des classes d'équivalence de rayon géodésique de X. Pour tout choix d'une origine $o \in X$, il existe un unique rayon géodésique partant de o dans la classe de $\xi \in \partial_\infty X$. On munit $\partial_\infty X$ de la topologie de la convergence simple de ces rayons géodésiques. Cette topologie ne dépend pas du choix de o, voir [BrH99]. Dans ce qui suit, on appelle *plat* de dimension $n \in \mathbb{N}$ d'un espace CAT(0) X une partie de X isométrique à $\mathbb{R}^n$.

PROPOSITION 1.24. *Si X est un espace CAT(0) complet, et G un groupe agissant sur X par isométries, avec une orbite bornée, alors G fixe un point de X.*

La preuve consiste à associer un *centre* à toute partie bornée $K \subset X$. Ce centre est défini comme l'unique x_0 tel que $K \subset B(x_0, r)$, où $r = \inf\{R \mid K \subset B(x_0, R)\}$; la preuve de la proposition consiste à démontrer l'existence et l'unicité de x_0.

Il est souvent plus facile de travailler avec des espaces CAT(0) complets et localement compacts : en effet, dans ce cas, le bord visuel est un espace compact. Même si le théorème 1.21 n'était déjà pas connu dans ce cadre, il va être important pour nous de ne pas supposer l'espace X localement compact, en vue des applications notamment aux espaces $X(p, \infty)$ décrits dans le §1.3. Par contre, on va voir que l'on peut, dans une certaine mesure, remplacer la compacité par une hypothèse de dimension finie.

Dans [Kle99], Kleiner introduit la *dimension géométrique* d'un espace CAT(0) X. On peut par exemple la définir comme la dimension topologique maximale d'une partie compacte de X. Dans [CaL10], Caprace et Lytchak définissent une autre notion de dimension, la *dimension télescopique,* inférieure à la dimension géométrique en général. Pour n'importe quel ultrafiltre ω sur $\mathbb{N}$ et toute suite de réels strictement positifs $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0, et également un choix d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X, on peut former le *cône asymptotique* de $(X, \omega, \lambda_n, x_n)$: on considère tout d'abord l'ensemble $\overline{X}$ des suites $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X vérifiant que $\sup d(x_i, y_i) < +\infty$. On munit $\overline{X}$ de la pseudo-distance $d_\omega((y_i), (z_i)) = \lim_\omega \lambda_i d(y_i, z_i)$. Le cône asymptotique X_ω est alors l'espace métrique quotient associé. Le cône asymptotique d'un espace CAT(0) est encore un espace CAT(0).

DÉFINITION 1.25. La *dimension télescopique* de X est la dimension géométrique maximale d'un cône asymptotique de X.

On peut donner une définition plus concrète en terme d'inégalité de Jung, voir [CaL10, Theorem 1.3].

EXEMPLES 1.26. Soit X un espace CAT(0).

(1) Si X est borné, alors il est de dimension télescopique 0.
(2) Si X est hyperbolique au sens de Gromov et non borné, alors il est de dimension télescopique 1. En effet, ses cônes asymptotiques sont des arbres réels non réduits à un point, donc de dimension 1.

(3) Si X est de dimension géométrique finie n, alors il est de dimension télescopique au plus n. En particulier, les espaces CAT(0) qui s'obtiennent par recollement de polyèdres euclidiens de dimension bornée sont de dimension télescopique finie.
(4) Les espaces symétriques de type non compact (possiblement de dimension infinie, voir §1.3) ont une dimension télescopique égale à leur rang.
(5) Les immeubles affines (au sens de Kleiner-Leeb par exemple, voir [KL97] ou [Par00]) ont également une dimension télescopique égale à leur rang.

1.2.2. Idées de preuve. La preuve du théorème 1.21 se fait en deux temps. La première partie est due à B. Duchesne [Duc13] : il s'agit d'une version équivariante du théorème 1.23. On conserve les notations et hypothèses du théorème 1.21.

On note $\mathcal{F}_d$ l'ensemble des plats de X de dimension d. Pour garder la légèreté des notations, je ne me préoccuperai pas ici des questions de mesurabilité des diverses applications (qui sont traitées en détail dans [BaDL16b], en utilisant le formalisme des champs d'espaces métriques).

THÉORÈME 1.27 ([Duc13]). *Soit (B,ν) un G-espace moyennable et ergodique. Alors il existe une application mesurable G-équivariante $B \to \partial_\infty X$ ou il existe $d \geqslant 0$ et une application mesurable G-équivariante $B \to \mathcal{F}_d$.*

L'objectif va donc être d'exclure le deuxième cas, ou de montrer qu'il implique le premier. On est donc amené à étudier les applications $B \to \mathcal{F}_d$. Vu les propriétés d'ergodicité de B, il est naturel de regarder l'application $B \times B \to \mathcal{F}_d \times \mathcal{F}_d$. Il faut donc comprendre la position relative de deux plats dans X. On dit déjà que deux plats F, F' sont *parallèles* si la fonction $x \mapsto d(x,F)$ est constante sur F' et $x \mapsto d(x,F')$ est constante sur F. On note alors $F \parallel F'$.

PROPOSITION 1.28. *Il existe quatre parties boréliennes $R_\parallel, R_p, R_\infty, R_s$ de $\mathcal{F}_d^2$ avec $\mathcal{F}_d^2 = R_\parallel \cup R_p \cup R_\infty \cup R_s$ telles que*

(1) pour tout $(F,F') \in R_\parallel$, F est parallèle à F',
(2) il existe une application mesurable $\mathrm{Isom}(X)$*-équivariante $R_p \to X$,*
(3) il existe une application mesurable$\mathrm{Isom}(X)$*-équivariante $R_\infty \to \partial_\infty X$, et*
(4) il existe une application mesurable $\mathrm{Isom}(X)$*-équivariante qui à $(F,F') \in R_s$ associe une sphère $S \subset \partial_\infty F$ de dimension $< d-1$.*

L'idée de la preuve est assez simple : on regarde la fonction convexe f qui à x associe $d(x,F')$, et on essaie de la minimiser sur F. Si f est constante, F et F' sont parallèles. Si le lieu des minima de f est borné, f définit un point de F. Si f n'atteint pas son minimum, on peut essayer de faire converger une suite minimisante vers un point de $\partial_\infty X$; le lieu des points ainsi obtenu permet de définir soit un point, soit une sous-sphère de $\partial_\infty F$.

Pour finir la preuve, on va utiliser plusieurs fibrés isométriques. Encore une fois, il est un peu pénible de justifier correctement les questions de mesurabilité et je me réfère à [BaDL16b] pour cela.

Proposition 1.29. *(1) Soient $d \geqslant 0$. Notons*

$$\partial\mathcal{F}_d = \{(F, \xi) \mid F \in \mathcal{F}_d \text{ et } \xi \in \partial_\infty F\} \ .$$

Alors la première projection $\partial\mathcal{F}_d \to \mathcal{F}_d$ peut être munie d'une structure de fibré isométrique muni d'une action isométrique de $\mathrm{Isom}(X)$.

(2) Soit $d' < d$. Notons $S_{d,d'}$ l'ensemble des couples (F, S) où $F \in \mathcal{F}_d$ et $S \subset \partial_\infty\mathcal{F}$ est une sphère de dimension d'. Alors la première projection $S_{d,d'} \to \mathcal{F}_d$ peut être munie d'une structure de fibré isométrique muni d'une action isométrique de $\mathrm{Isom}(X)$.

(3) Soit $d \geqslant 0$ et $\mathcal{F}_d^{\|} = \{(F, F') \mid F \parallel F'\}$. Alors la première projection $\mathcal{F}_d^{\|} \to \mathcal{F}_d$ peut être munie d'une structure de fibré isométrique muni d'une action isométrique de $\mathrm{Isom}(X)$.

Démonstration. Dans chaque cas, il s'agit de trouver une métrique naturelle (donc invariante). Dans le premier cas, on voit que si F est un plat, alors $\partial_\infty F$ admet une métrique naturelle : la métrique angulaire. Elle est bien invariante par le groupe des isométries. Dans le deuxième cas, on prend simplement la distance de Hausdorff associée. Pour le troisième fibré, si F', F'' sont parallèles à F, alors F' et F'' sont parallèles et la distance entre F' et F'' est $d(x, F')$ pour n'importe quel $x \in F$. □

Démonstration du Théorème 1.21. Soient X et G comme dans l'énoncé. On peut tout d'abord se réduire au cas où il n'y a pas de convexe fermé propre de X invariant par G, puis au cas où X ne s'écrit pas $X \times F$ où F est un plat.

Soit B un bord fort de G. Supposons qu'il n'existe pas d'application mesurable $B \to \partial_\infty X$. D'après le théorème 1.27, il existe donc une application mesurable G-équivariante $B \to \mathcal{F}_d$ pour un certain $d \geqslant 0$, que l'on va noter $b \mapsto E_b$. Notons que si $d = 0$ alors l'ergodicité isométrique implique que G admet un point fixe.

On obtient donc une application mesurable $B \times B \to \mathcal{F}_d \times \mathcal{F}_d$. Les quatre conditions de la proposition 1.28 sont mesurables et la double ergodicité permet de supposer qu'une seule d'entre elles est vérifiée. Il faut donc traiter chaque cas séparément ; traitons les deux premiers par exemple (pour les autres cas, on utilise des idées similaires, voir [BaDL16b] pour les détails.) Dans le premier cas, les plats E_b et $E_{b'}$ sont parallèles, pour presque tout b et b'. Dans ce cas, pour presque tout b, la réunion des plats parallèles à E_b est G-invariante. Mais ce n'est possible que si $d = 0$, et alors G a un point fixe.

Pour le deuxième cas, on va utiliser l'ergodicité isométrique relative. En effet, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} B \times B \arrow[r] \arrow[d] & \partial \mathcal{F}_d \arrow[d] \\ B \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[ur, dotted, "\varphi'"] & \mathcal{F}_d \end{tikzcd}$$

et on peut donc trouver φ' comme ci-dessus. En regardant la deuxième coordonnée de φ', on obtient une application $B \to \partial_\infty X$ avec les propriétés voulues. $\square$

1.2.3. Quelques questions.

(1) Dans [KaM99], Karlsson et Margulis obtiennent une application bord en démontrant directement la convergence de la marche aléatoire vers un point du bord. Ici, nous avons obtenu l'application bord par des moyens abstraits. Peut-on en déduire la convergence de la marche aléatoire vers un point du bord ? Dans des cas concrets, cela semble faisable. Par exemple lorsque X est hyperbolique, c'est la stratégie de Maher et Tiozzo [MaT18]. C'est aussi ce que j'ai fait avec T. Fernós et F. Mathéus dans [FLM18] pour des complexes cubiques (voir le chapitre 2). Cela devrait être relativement facile également lorsque X est un immeuble affine (éventuellement exotique, voir chapitre 4, ou non localement compact, voire de groupe de Weyl non discret) ou un espace symétrique du type $X(p, \infty)$. Un cas qui semble intéressant, et abordable, à étudier serait celui des espaces CAT(0) admettant une isométrie de rang 1.

(2) Une autre question est celle de l'unicité de l'application bord, ou plus généralement de la structure de l'ensemble des applications bord. C'est notamment utile pour démontrer des résultats de rigidités des commensurateurs, voir par exemple [BuM96]. Par exemple, si X est un complexe cubique CAT(0) irréductible, on démontre dans [FLM18] que l'application bord est unique.

    Si X est un espace symétrique de type non compact, typiquement cette application ne sera pas unique : en effet, dans ce cas $\partial_\infty X$ admet une structure naturelle d'immeuble sphérique. L'image d'un élément $b \in B$ par l'application bord sera alors un point d'un simplexe donné (toujours du même type par ergodicité) ; si ce simplexe n'est pas réduit à un point, on peut toujours choisir un autre point du simplexe et changer l'application bord en conséquence. Cependant, il y a effectivement unicité de l'application de B vers l'ensemble des simplexes d'un type fixé (lorsqu'elle existe), et finalement on voit que l'ensemble des applications bord s'identifie à un simplexe (fermé). Notons au passage que le point du simplexe choisi définit indirectement le spectre de Lyapunov de la marche aléatoire : c'est donc en soi une quantité intéressante.

Encore une fois le cas des espaces CAT(0) de rang 1 semble particulièrement intéressant : dans ce cas, je pense que l'application devrait être unique sous des hypothèses minimales.

(3) Plus généralement, on peut se poser la question de l'unicité de la mesure stationnaire sur le bord. Supposons que (B,ν) est le bord de Poisson-Furstenberg associé à une marche aléatoire symétrique de loi μ sur G, et notons $\varphi : B \to \partial_\infty X$ l'application bord. Alors $\varphi_*\nu$ est une mesure stationnaire sur $\partial_\infty X$ (notons déjà qu'on en déduit qu'une telle mesure existe, même si le bord n'est pas compact !). Plus généralement, grâce à une application standard du théorème de convergence des martingales, les mesures stationnaires correspondent aux applications mesurables équivariantes $\varphi : B \to \mathrm{Prob}(\partial_\infty X)$. L'unicité de la mesure stationnaire est donc un résultat plus fort que l'unicité de l'application bord. Elle se vérifie encore une fois pour les complexes cubiques CAT(0), ou pour les espaces symétriques de type non compact [BeQ16], si l'on considère l'ensemble des simplexes d'un type fixé au lieu du bord complet.

1.3. Groupes $\mathrm{O}(p,\infty)$

Gromov, dans [Gro93, §6], promeut l'étude des espaces symétriques de dimension infinie. Il suggère qu'une forme du théorème de superrigidité de Margulis pourrait être vérifiée dans ce cadre. C'est ce qu'a partiellement démontré B. Duchesne dans [Duc15] et dans [Duc13] (ce deuxième article nous ayant d'ailleurs servi d'inspiration pour [BaDL16b]). Plusieurs travaux ont mis en évidence des représentations intéressantes vers les groupes d'isométries de certains de ces espaces, voir par exemple [DeP12 ; MoP14].

Je vais présenter ici les groupes et espaces dont il est question, puis un résultat que nous avons obtenu dans [DuLP18], qui donne une description plus précise des applications bords possibles. Notre objectif dans [DuLP18] était de déduire des résultats de rigidité pour les représentations maximales, que je décrirai plus en détail dans le chapitre 1.4.

1.3.1. Espaces $X_{\mathbb{K}}(p,\infty)$.

Dans cette section, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient p et q tels que $p \leqslant q \leqslant +\infty$. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$, de dimension hilbertienne $p+q$ (et séparable). On choisit une base hilbertienne $(e_i)_{i\leqslant p+q}$ de $\mathcal{H}$. On note $\mathrm{L}(\mathcal{H})$ l'algèbre de Banach des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$ et $\mathrm{GL}(\mathcal{H}) \subset \mathrm{L}(\mathcal{H})$ le groupe de ceux qui sont inversibles.

On note Q la forme quadratique définie dans la base hilbertienne $(e_i)_{i\leqslant p+q}$ par

$$Q((x_i)_{i\leqslant p+q}) = \sum_{i=0}^{p-1} |x_i|^2 - \sum_{i=p}^{p+q} |x_i|^2 .$$

Le groupe $G = \mathrm{O}_{\mathbb{K}}(p,q)$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ qui préserve Q. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ on peut également utiliser la notation plus standard $\mathrm{U}(p,q)$. Il contient un sous-groupe K isomorphe à $\mathrm{O}_{\mathbb{K}}(p) \times \mathrm{O}_{\mathbb{K}}(q)$ (stabilisateur du sous-espace donné par les p premiers vecteurs et de son orthogonal). Si $q < +\infty$, c'est un sous-groupe compact maximal de G ; si $q = +\infty$ ce n'est plus le cas, mais il faut le voir comme un sous-groupe borné maximal de G.

Par analogie avec le cas de la dimension finie, on définit ensuite dans le cas général l'espace symétrique $X_{\mathbb{K}}(p,q)$. Topologiquement, celui-ci s'identifie au quotient G/K, et il est donc muni d'une action (transitive) de G. On peut également le voir comme l'ensemble des sous-espaces vectoriels V de $\mathcal{H}$, de dimension p, tels que $Q_{|V}$ est définie positive. On note également $X_{\mathbb{K}}(p,q) = X(\mathcal{H}, Q)$.

On peut munir $X_{\mathbb{K}}(p,q)$ d'une structure de variété modelée sur un espace de Hilbert. Il est naturellement muni d'une métrique riemannienne complète $\mathrm{O}_{\mathbb{K}}(p,q)$-invariante, qui est à courbure sectionnelle partout négative ou nulle. C'est donc un espace CAT(0), dont le groupe des isométries est $\mathrm{PO}_{\mathbb{K}}(p,q) = \mathrm{O}_{\mathbb{K}}(p,q)/\{\lambda\,\mathrm{Id}, |\lambda| = 1\}$. De plus, son rang, ainsi que sa dimension télescopique, sont exactement égaux à p. Ces faits (et bien d'autres) sont démontrés dans [Duc13].

1.3.2. Notions de densités. Pour énoncer notre résultat, nous aurons besoin de définir ce qu'est un sous-groupe Zariski-dense de G. La définition est un peu moins commode qu'en dimension finie. En fait il y a plusieurs définitions possibles, suivant ce qu'on décide d'appeler «polynôme». Une première définition est due à Harris et Kaup [HaK77]. Nous avons choisi une définition un peu plus restrictive, d'où l'ajout de l'adjectif «standard» dans la définition suivante.

Définition 1.30. Un *coefficient matriciel* est une application linéaire continue $f\colon \mathrm{L}(\mathcal{H}) \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe deux points $x, y \in \mathcal{H}$ tels que $f(L) = \langle Lx, y\rangle$ pour tout $L \in \mathrm{L}(\mathcal{H})$. Une application $P : \mathrm{L}(\mathcal{H}) \to \mathbb{K}$ est dite *polynomiale homogène standard de degré d* s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ et des scalaires $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}^{2d}}$, $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}^{2d}}$ tels que pour tout $M \in \mathrm{L}(\mathcal{H})$, le scalaire $P(M)$ puisse s'écrire comme une série absolument convergente

$$P(M) = \sum_{i\in\mathbb{N}^{2d}} \lambda_i \mu_j P_i(M)$$

où $P_i(M) = \prod_{k=0}^{d-1} \langle M e_{i_{2k}}, e_{i_{2k+1}}\rangle$pour $i \in \mathbb{N}^{2d}$.

Une application est dite *polynomiale standard* si c'est une somme finie de polynômes standards homogènes.

Un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ est un *sous-groupe algébrique standard* si c'est un groupe qui s'obtient comme ensemble de zéros d'une famille de polynômes standard de degrés uniformément bornés.

Définition 1.31. Un sous-groupe de $\mathrm{O}_{\mathbb{K}}(p,\infty)$ est dit Zariski-dense s'il n'est pas contenu dans un sous-groupe algébrique standard propre de $\mathrm{O}_{\mathbb{K}}(p,\infty)$.

EXEMPLES 1.32. (1) Pour $x, y \in \mathcal{H}$, le coefficient matriciel $M \mapsto \langle Mx, y\rangle$ est un polynôme standard homogène.

(2) Le groupe $\mathrm{O}_{\mathbb{K}}(p,\infty)$ est lui-même un groupe algébrique standard. En effet, soit $\mathcal{H} = V \oplus W$ une décomposition telle que $Q_{|V}$ est définie positive, et $Q_{|W}$ est définie négative. Soit $I_{p,\infty}$ la transformation auto-adjointe $\mathrm{Id}_V \oplus (-\mathrm{Id}_W)$, et soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne adaptée à la décomposition $V \oplus W$. Soit $g \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$. Alors on voit que $g \in \mathrm{O}_{\mathbb{K}}(p,\infty)$ si et seulement si $\langle I_{p,\infty} g e_i, g e_j\rangle = \langle I_{p,\infty} e_i, e_j\rangle$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}$. En écrivant

$$\langle I_{p,\infty} g e_i, g e_j\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle g e_i, I_{p,\infty} e_k\rangle\langle g e_j, e_k\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_k \langle g e_i, e_k\rangle\langle g e_j, e_k\rangle$$

avec $\varepsilon_k = 1$ si $k \leqslant p$ et -1 si $k > p$, on voit que $\mathrm{O}_{\mathbb{K}}(p,\infty)$ est en effet un groupe algébrique standard.

(3) Le stabilisateur d'un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$ est un sous-groupe algébrique standard.

REMARQUE 1.33. La topologie de Zariski que l'on pourrait définir grâce aux applications polynomiales ne se comporte pas bien. Par exemple, il n'est pas vrai qu'une intersection quelconque de groups algébriques est encore un groupe algébrique (le problème vient de la condition que les degrés des polynômes doivent être bornés).

On peut avoir également envie d'introduire d'autres notions de densités. Par exemple, une notion plus agréable à manipuler (mais moins facile à vérifier) est la *densité géométrique*, implicitement utilisée dans [CaM09a].

DÉFINITION 1.34. Soit G un groupe agissant sur un espace CAT(0) X. On dit que l'action est *géométriquement dense* si G ne fixe pas de point de $\partial_\infty X$ et ne préserve pas de partie convexe fermée strictement incluse dans X.

Dans [DuLP18], nous avons utilisé une notion plus faible de densité géométrique, que j'appelle donc densité géométrique faible ici pour éviter les confusions.

DÉFINITION 1.35. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{O}_{\mathbb{K}}(p,\infty)$. Alors G est *faiblement géométriquement dense* si G ne fixe pas de point de $\partial_\infty X_{\mathbb{K}}(p,\infty)$ et ne préserve pas de sous-espace totalement géodésique de $X_{\mathbb{K}}(p,\infty)$.

Il est facile de voir que les stabilisateurs de points à l'infini ou de sous-espaces totalement géodésiques de $X_{\mathbb{K}}(p,\infty)$ sont des sous-groupes algébriques de $\mathrm{O}_{\mathbb{K}}(p,\infty)$. On obtient donc immédiatement le résultat suivant.

PROPOSITION 1.36. *Soit G un sous-groupe de $\mathrm{O}_{\mathbb{K}}(p,\infty)$. Si l'action de G sur $X_{\mathbb{K}}(p,\infty)$ est géométriquement dense, ou si G est Zariski-dense dans $\mathrm{O}_{\mathbb{K}}(p,\infty)$, alors G est faiblement géométriquement dense.*

1.3.3. Bords et espaces transverses. Comme en dimension finie, le bord visuel $\partial_\infty X_{\mathbb{K}}(p, \infty)$ a une structure d'immeuble sphérique (voir encore [Duc13]). Voici sa structure combinatoire. Les simplexes de dimension r sont en bijection avec les drapeaux $(V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_r)$, où les V_i sont des sous-espaces vectoriels totalement isotropes (pour Q) de $\mathcal{H}$. En particulier, les sommets correspondent aux sous-espaces vectoriels totalement isotropes ; le simplexe correspondant au drapeau $(V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_r)$ contient alors les sommets $V_1, \ldots, V_r$.

Tout sommet a un *type,* qui est la dimension (entre 1 et p) du sous-espace vectoriel qui lui correspond. Plus généralement, le type d'un simplexe est l'ensemble des types de ses sommets.

Définition 1.37. Deux sommets de $\partial_\infty X_{\mathbb{K}}(p, \infty)$, correspondant à des sous-espaces vectoriels isotropes V et W, sont dits *opposés* si $Q_{|V+W}$ est non-dégénérée ; autrement dit, si $V \cap W^\perp = 0$.

Remarque 1.38. On peut vérifier que deux sommets sont opposés si et seulement s'ils peuvent être reliés par une géodésique (bi-infinie) dans $X_{\mathbb{K}}(p, \infty)$.

Enfin, à un sommet (ou plus généralement un simplexe) $\xi \in \partial_\infty X$, on peut associer un nouvel espace symétrique, appelé *espace transverse.* Cette construction est l'exact analogue de la construction des arbres-cloisons dans les immeubles affines (voir chapitre 4). Prenons donc un sommet de $\partial_\infty X$, correspondant à un espace isotrope V. Puisque V est isotrope, on a $V \subset V^\perp$, et $Q_{|V^\perp}$ est une forme quadratique dégénérée de noyau exactement égal à V. Ainsi, Q définit une nouvelle forme (encore notée Q) sur $V^\perp/V$. L'espace transverse au sommet ξ est alors simplement l'espace symétrique $X(V^\perp/V, Q)$. Il s'identifie donc à l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $V^\perp/V$ où Q est définie positive.

1.3.4. Application bord.

Définition 1.39. Soit $p \leqslant q \leqslant +\infty$. On note $\mathcal{I}_k(p, q)$ l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes de $\mathbb{K}^{p+q}$ (ou $\mathcal{H}$ si $q = \infty$) de dimension k. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le *bord de Shilov* de $X_{\mathbb{K}}(p, q)$ est $\mathcal{I}_p(p, q)$.

Nous démontrons dans [DuLP18] le théorème suivant.

Théorème 1.40. *Soit* Γ *un sous-groupe Zariski dense de* $\mathrm{O}_{\mathbb{K}}(p, \infty)$, *et* B *un bord fort de* Γ. *Alors il existe une application mesurable* Γ*-équivariante* $B \to \mathcal{I}_p(p, \infty)$.

Je crois que les mêmes techniques permettent de démontrer qu'il existe en fait une application vers l'espace des simplexes maximaux de $\partial_\infty X_{\mathbb{K}}(p, \infty)$.

Remarque 1.41. Si $p = 1$ ou 2, on peut même supprimer l'hypothèse de densité de Zariski. Pour cela, on démontre dans un premier temps que l'hypothèse de densité de Zariski peut être remplacée par la densité géométrique faible. Mais si l'action n'est pas faiblement géométriquement dense, alors ou bien elle a un point fixe au bord (et donc une application bord triviale), ou bien elle a un sous-espace totalement géodésique invariant. On peut alors se restreindre à un sous-espace minimal, sur lequel l'action est alors faiblement géométriquement dense.

Idées de démonstration du Théorème 1.40. D'après le théorème 1.21, il existe une application bord $B \to \partial_\infty X_{\mathbb{K}}(p,\infty)$. Par ergodicité, son image est contenue dans l'ensemble des simplexes d'un type donné, et à un tel simplexe on peut toujours associer son sommet de type maximal. Donc on a démontré qu'il existe un $k \leqslant d$ et une application mesurable Γ-équivariante $B \to \mathcal{I}_k(p,\infty)$, que l'on va noter $b \mapsto V_b$: V_b est donc un sous-espace vectoriel totalement isotrope de $\mathcal{H}$ de dimension k.

Pour démontrer le théorème 1.40, il faut donc arriver à augmenter la dimension k. On arrive tout d'abord facilement à démontrer que pour presque tous b, b', les espaces V_b et $V_{b'}$ sont opposés, en utilisant l'hypothèse de Zariski densité.

On applique alors les idées de la preuve du théorème 1.21 aux espaces transverses $X_b = X(V_b^\perp/V_b, Q)$. De la même manière, en utilisant l'ergodicité isométrique relative, on obtient alors ou bien une application bord $b \mapsto u_b$ où $u_b \in \partial_\infty X_b$, ou bien une application qui à b associe un plat F_b de X_b. Dans le premier cas, on a gagné : en effet, les points du bord de X_b correspondent à des sous-espaces totalement isotropes de $V_b^\perp \subset \mathcal{H}$ qui contiennent V_b. Dans le deuxième cas, on utilise le concept suivant (à comparer avec la définition 4.2).

Définition 1.42. Supposons que $V_1, V_2 \in \mathcal{I}_k$ sont des sommets opposés. La *perspectivité* entre $X_1 = X(V_1^\perp/V_1, Q)$ et $X_2 = X(V_2^\perp/V_2, Q)$ est l'application σ_{V_1,V_2} définie par

$$\sigma_{V_1,V_2}(W) = ((W + V_1) \cap V_2^\perp) + V_2$$

(où $W \in X_1$ est vu comme un sous-espace vectoriel de $V_1^\perp/V_1$, ce qui fait que $W + V_1$ a un sens comme sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$).

Lemme 1.43. *L'application σ_{V_1,V_2} est une isométrie, de bijection réciproque σ_{V_2,V_1}.*

Revenons à la preuve du théorème 1.40. En utilisant encore une fois l'ergodicité isométrique relative, dans l'esprit de [BaDL16b], on démontre que, si le théorème n'est pas vérifié, alors pour presque tous les b, b', on a $\sigma_{V_b,V_{b'}}(F_b) = F_{b'}$. En manipulant les relations algébriques induites entre les sous-espaces correspondant à F_b et à F_b', on vérifie que Γ stabilise un sous-espace vectoriel fermé d'un produit extérieur de $\mathcal{H}$, ce qui contredit la Zariski-densité.

□

1.3.5. Questions.

(1) La réciproque de la proposition 1.36 est-elle valable ? Pour un espace symétrique de dimension finie, il est assez facile de voir que la densité géométrique implique la densité de Zariski : c'est [CaM09a, Proposition 2.8].

L'implication «faiblement géométriquement dense» implique «géométriquement dense» est également vraie, mais plus difficile : voir [KL06] ou [Qui05]. Je ne sais pas si ces implications subsistent en dimension infinie.

Même si cette réciproque n'est pas vraie, ou trop difficile, on peut quand même espérer démontrer le théorème 1.40 sous une hypothèse de densité géométrique faible. Pour l'instant, nous sommes arrivés à le démontrer dans le cas $p = 1$ ou 2 uniquement.

(2) Le raisonnement conduisant à la preuve de 1.40 semble en fait plus général. En effet, le coeur de la preuve s'applique sans difficulté pour n'importe quel espace symétrique (de rang fini) ou immeuble affine, localement compact ou non. On trouve ainsi une famille de plats à l'infini, invariante par perspectivité et par l'action de Γ. Peut-on en déduire l'existence d'une application bord vers l'espace des simplexes maximaux de $\partial_\infty X$?

Pour des espaces symétriques de dimension finie, le résultat est déjà connu : c'est la simplicité du spectre de Lyapunov d'une marche aléatoire (voir par exemple [BeQ16]). Mais déjà pour un sous-groupe de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p)$ il est faux sous l'hypothèse seule de Zariski-densité (par exemple, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$ est Zariski-dense, mais fixe un point de l'immeuble). Y a-t-il une bonne condition qui entraîne la simplicité du spectre de Lyapunov dans ce cadre ? Est-ce que par exemple la densité géométrique (faible) suffirait ?

1.4. Représentations maximales dans $\mathrm{U}(p,\infty)$

Après avoir étudié les applications bords dans $X(p,\infty)$, nous avons dans l'article [DuLP18] utilisé celles-ci pour en déduire des propriétés de rigidités pour des représentations maximales.

Les réseaux Γ de $\mathrm{SU}(1,n)$ ne sont pas toujours superrigides, puisque le groupe de Lie ambiant est de rang 1. Ils peuvent d'ailleurs avoir une variété de représentations très riches. Par exemple, lorsque $n = 1$, Γ est un groupe de surface (ou plus précisément de 2-orbifold si Γ a de la torsion), les représentations $\Gamma \to \mathrm{SU}(1,1)$ qui sont d'images discrètes et injectives fournissent alors une structure hyperbolique sur la surface ; on retrouve ainsi un point de vue sur l'espace de Teichmüller.

Pour généraliser ceci en dimension supérieure, on est amené à considérer des classes de représentations $\rho : \Gamma \to \mathrm{SU}(1,n)$ un peu plus spécifiques. Le minimum que l'on va exiger soit que ρ soit fidèle et injective ; on veut de plus regarder un ensemble de représentations qui soit stable par petites déformations. Il y a plusieurs constructions possibles de telles classes de représentations, voir par exemple [Poz] pour un état de l'art.

Dans ce chapitre, je vais m'intéresser à une de ces classes de représentations, définie à l'aide d'un invariant cohomologique : il s'agit des représentations *maximales*, à valeur dans un groupe de Lie simple de type hermitien. En dimension finie, ces représentations sont maintenant bien comprises : voir en particulier [BuI09 ;

BuIW10 ; Poz15 ; KoM17]. Le but de ce chapitre, qui résume la deuxième partie de [DuLP18], est de généraliser certains de ces résultats à la dimension infinie.

1.4.1. Définition des représentations maximales.

Cohomologie bornée. Commençons tout d'abord par une définition rapide de la cohomologie bornée d'un groupe ; on pourra consulter [Mon01] pour plus d'informations.

DÉFINITION 1.44. Soit G un groupe. Le *complexe des cochaînes homogènes bornées* est

$$\mathrm{C}_b^n(G,\mathbb{R})^G = \left\{ f : G^{n+1} \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ est } G\text{-invariant}, \sup_{(g_0,\dots,g_n)\in G^{n+1}} |f(g_0,\dots,g_n)| < \infty \right\}$$

avec un opérateur de cobord

$$df(g_0,\dots,g_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f(g_0,\dots,\hat{g}_i,\dots,g_{n+1}).$$

La *cohomologie bornée* $\mathrm{H}_b^\bullet(G)$ de G est la cohomologie de ce complexe.

Un des avantages de la cohomologie bornée est que l'on peut définir une semi-norme, la *norme de Gromov*, sur $\mathrm{H}_b^n(G)$:

$$\|\kappa\|_\infty := \inf_{[f]=\kappa} \sup_{(g_0,\dots,g_n\in G^{n+1}} |f(g_0,\dots,g_n)|.$$

Si G est un groupe topologique, on peut également se restreindre aux cochaînes continues : on obtient alors la *cohomologie continue bornée* $\mathrm{H}_{cb}^\bullet(G)$.

Groupes de Lie de type hermitien. Soit G un groupe de Lie réel simple, ou un $O_{\mathbb{K}}(p,\infty)$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit X_G son espace symétrique associé. Rappelons qu'une *structure complexe* sur X_G est la donnée d'un isomorphisme de fibré vectoriel $J : TM \to TM$ qui munit chaque espace tangent d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel, compatible avec la métrique riemannienne ; cette définition est toujours valable en dimension infinie.

DÉFINITION 1.45. L'espace symétrique X_G est *hermitien* s'il admet une structure complexe G-invariante. Le groupe G est alors dit *de type hermitien.*

Si X_G est hermitien, on peut alors définir sa *forme de Kähler* ω par $\omega(X,Y) = g(X,JY)$. C'est une 2-forme alternée.

On pourra se reporter à [Hel01] pour la classification des groupes de Lie de type hermitien (en dimension finie). Pour les groupes $O_{\mathbb{K}}(p,\infty)$, on peut facilement démontrer que pour tout p, $\mathrm{O}_{\mathbb{C}}(p,\infty)$ est de type hermitien, tandis que pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ seul $O_{\mathbb{R}}(2,\infty)$ l'est.

Soit G un groupe de Lie réel simple de type hermitien. Pour $x,y,z \in X_G$, on note $\Delta(x,y,z)$ une surface dans X_G dont le bord est formé par les géodésiques reliant x à y, x à z et y à z. Choisissons $x \in X_G$. On peut alors définir un cocycle sur G par la formule

$$C(g_0, g_1, g_2) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta(g_0 x, g_1 x, g_2 x)} \omega \ .$$

(La forme ω est toujours fermée, donc cette intégrale ne dépend pas du choix de la surface $\Delta(g_0 x, g_1 x, g_2 x)$).

Par exemple si $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, ω est la forme d'aire et on calcule simplement l'aire du triangle géodésique $\Delta(g_0 x, g_1 x, g_2 x)$. Cette aire est toujours majorée par π, donc $C(g_0, g_1, g_2)$ est toujours borné en valeur absolue par 1.

Ce cocycle définit une classe de cohomologie continue bornée sur G, que l'on appelle la *classe de Kähler bornée* de G. Elle ne dépend pas du choix du point x, et on la note κ_G^b. Il découle d'un théorème de Burger et Monod [BuM99] que, pour n'importe quel groupe de Lie réel simple, $\mathrm{H}^2_{cb}(G) = \mathbb{R}\kappa_G^b$ si G est de type hermitien, et 0 sinon. Si $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ la majoration ci-dessus démontre que $\|\kappa_G^b\| \leqslant 1$. On a en fait en général $\|\kappa_G^b\| = \mathrm{rang}(G)$, voir [DoT87] pour le cas de la dimension finie (dont le cas général se déduit facilement).

Représentations maximales. Soit Γ un réseau de $\mathrm{SU}(1,n)$. L'injection de Γ dans G, notée i, induit une application restriction $i^* : \mathrm{H}^2_{cb}(\mathrm{SU}(1,n)) \to \mathrm{H}^2_b(\Gamma)$. En utilisant la probabilité sur G/Γ, Burger et Iozzi [BuI09, §2.7.2] définissent un adjoint à gauche de i^* : c'est *l'application transfert*

$$T_b^* : \mathrm{H}^2_b(\Gamma) \to \mathrm{H}^2_{cb}(\mathrm{SU}(1,n)) \ .$$

Vu la discussion ci-dessus, pour tout $c \in \mathrm{H}^2_b(\Gamma)$, la classe $T_b^*(c)$ est un multiple de $\kappa^b_{\mathrm{SU}(1,n)}$.

Définition 1.46. Soient G un groupe de Lie de type hermitien, ou $\mathrm{O}_{\mathbb{C}}(p, \infty)$ ou $\mathrm{O}_{\mathbb{R}}(2, \infty)$, et $\rho : \Gamma \to G$ un morphisme de groupe. L'*invariant de Toledo* de la représentation ρ est le nombre i_ρ tel que

$$T_b^* \rho^* \kappa_G^b = i_\rho \kappa^b_{\mathrm{SU}(1,n)}$$

La représentation est dite *maximale* si $i_\rho = \mathrm{rang}(G)$.

L'emploi du mot «maximal» est justifié par le fait que les opérateurs T_b^* ainsi que ρ^* sont de norme au plus 1, si bien qu'on a toujours $|i_\rho| \leqslant \mathrm{rang}(G)$ (c'est *l'inégalité de Milnor-Wood généralisée*). On pourra se référer à [BuIW10] ou [KoM17] pour plus d'informations sur la structure des représentations maximales en dimension finie.

1.4.2. Représentations maximales en dimension infinie. Soient toujours Γ un réseau de $\mathrm{SU}(1,n)$ (pour $n \geqslant 1$), et $p \in \mathbb{N}^*$.

Le théorème principal que nous avons obtenu dans [DuLP18] est le suivant.

Théorème 1.47. *Il n'existe pas de représentation maximale Zariski-dense dans* $\mathrm{O}_{\mathbb{C}}(p, \infty)$.

On peut se demander ce qui se passe pour les représentations dans le groupe de type hermitien $\mathrm{O}_{\mathbb{R}}(2,\infty)$. Prenons par exemple la surface Σ homéomorphe à un tore privé d'un point, et soit $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$. Le groupe Γ est donc un réseau de $\mathrm{SU}(1,1)$.

THÉORÈME 1.48. *Soit* $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$ *comme ci-dessus. Alors il existe des représentations maximales Zariski-denses de* Γ *dans* $\mathrm{O}_{\mathbb{R}}(2,\infty)$.

La différence entre $\mathrm{O}_{\mathbb{C}}(p,\infty)$ et $\mathrm{O}_{\mathbb{R}}(2,\infty)$ est que le second est *de type tube* tandis que le premier ne l'est pas. C'est ce qui crée de la rigidité, tout comme en dimension finie.

Si $p = 1$ ou 2, on peut en utilisant la remarque 1.41 renforcer la conclusion :

THÉORÈME 1.49. *Si* $\rho : \Gamma \to \mathrm{O}_{\mathbb{C}}(p,\infty)$ *est une représentation maximale avec* $p \leqslant 2$*, alors* ρ *est à valeur dans un conjugué de* $\mathrm{O}_{\mathbb{C}}(p,np)$ *(pour l'inclusion standard de* $\mathrm{O}_{\mathbb{C}}(p,np)$ *dans* $\mathrm{O}_{\mathbb{C}}(p,\infty)$*).*

L'idée de la preuve du théorème 1.47 est la suivante. Supposons que l'on ait une représentation maximale Zariski-dense. On utilise l'application bord vers $\mathcal{I}_p(p,\infty)$ fournie par le théorème 1.40. Notons-la $\varphi : B \to \mathcal{I}_p(p,\infty)$. On utilise ensuite le *cocycle de Bergmann*, étudié par Clerc dans [Cle07] en dimension finie (où il est appelé indice de Maslov) : c'est un cocycle $\beta_G : \mathcal{I}_p(p,\infty)^3 \to \mathbb{R}$, borné en valeur absolue par p. Le travail de Clerc s'étend sans difficulté en dimension infinie, simplement en observant que trois points génériques de $\mathcal{I}_p(p,\infty)$ sont contenus dans le bord d'un sous-espace de dimension finie. De plus, il découle également de ces travaux que si $\beta_G(x,y,z)$ est maximal alors x, y, z sont dans le bord d'un espace symétrique isométrique à $X_{\mathbb{C}}(p,p)$.

Dans notre cas, le bord de Γ n'est autre que $\mathcal{I}_1(1,n)$. On utilise alors une variante de la «formule utile» en cohomologie bornée [BuI09, Proposition 2.38], qui permet de transférer le cocycle de Bergmann via ρ :

PROPOSITION 1.50. *Soit* $\rho : \Gamma \to \mathrm{O}_{\mathbb{C}}(p,\infty)$ *une représentation maximale, et soit* $\varphi : \mathcal{I}_1(1,n) \to \mathcal{I}_p(p,\infty)$ *une application bord. Alors pour tous les* $x, y, z \in \mathcal{I}_1(1,n)$ *deux à deux distincts, on a (à un cobord près) :*

$$\beta_{\mathrm{SU}(1,n)}(x,y,z) = \int_{\Gamma\backslash \mathrm{SU}(1,n)} \beta_{\mathrm{O}_{\mathbb{C}}(p,\infty)}(\varphi(gx),\varphi(gy),\varphi(gz))\,d\mu(g)$$

(où μ *est la mesure de probabilité* $\mathrm{SU}(1,n)$*-invariante sur* $\Gamma\backslash \mathrm{SU}(1,n)$*).*

La suite de la preuve suit exactement [BuIW10] dans le cas où $n = 1$, et [Poz15] dans le cas $n > 1$. Appelons *chaîne* dans $\partial_\infty X_{\mathbb{C}}(p,q)$ ($p \leqslant q \leqslant +\infty$) le bord d'un espace symétrique isométrique à $X_{\mathbb{C}}(p,p)$ (si $p = q$, il n'y a donc qu'une seule chaîne). On a vu que β_G est maximal uniquement pour des points au bord d'une chaîne, qui est alors unique. On peut alors en déduire que φ doit envoyer une chaîne de $X_{\mathbb{C}}(1,n)$ sur une chaîne de $X_{\mathbb{C}}(p,\infty)$. Si $n = 1$, le bord $\partial X_{\mathbb{C}}(1,1)$ tout entier est une chaîne, donc l'image de φ est essentiellement contenue dans le bord d'une chaîne, qui est donc Γ-invariante : c'est une contradiction avec la Zariski-densité. Si $n > 1$, les chaînes de $X_{\mathbb{C}}(1, n)$ définissent une géométrie d'incidence (deux points sont dans une unique chaîne), et on peut démontrer que n chaînes permettent de retrouver tout $\partial_\infty X_{\mathbb{C}}(1, n)$. On en déduit que l'image de φ est contenue dans le bord de n chaînes. Ces n chaînes sont alors contenues dans un sous-espace de type $X_{\mathbb{C}}(p, np)$ qui est Γ-invariant.

REMARQUE 1.51. On a obtenu en fait bien plus qu'une contradiction avec la densité de Zariski, puisqu'on sait précisément dans quel sous-groupe se trouve l'image. Le problème est qu'en général on a besoin de la densité de Zariski pour obtenir l'application bord. Si on parvient à démontrer l'existence de l'application bord sans hypothèse, on aura une version du théorème 1.49 sans l'hypothèse $p \leqslant 2$.

1.5. Groupes algébriques sur des corps valués

Le but de ce paragraphe est d'exposer les résultats de [BaDL17].

Notre motivation était de fournir les outils nécessaires à la généralisation du théorème de superrigidité de Margulis lorsque le but est un groupe algébrique sur un corps qui n'est pas forcément local. Cette généralisation a été obtenue par Bader et Furman dans [BaF18a].

THÉORÈME 1.52. *Soit Γ un réseau irréductible dans un groupe algébrique $H = \mathbf{H}(\ell)$ semisimple connexe de rang supérieur sur un corps local ℓ. Soit k un corps valué complet. Soit G le groupe des k-points d'un groupe algébrique $\mathbf{G}$ défini sur k, connexe, adjoint et k-simple. Soit $\rho : \Gamma \to G$ un morphisme d'image Zariski-dense et non bornée.*

Alors ρ s'étend en un morphisme continu $\hat{\rho} : H \to G$.

(Le morphisme $\hat{\rho}$ est alors essentiellement algébrique, voir [BaF18a, Corollary 8.1] pour un énoncé précis.).

Bader et Furman démontrent plusieurs versions plus générales de ce théorème : lorsque Γ est un réseau irréductible dans un produit d'au moins deux groupes localement compacts [BaF18c], dans un groupe localement compact S engendré par des groupes abéliens T_i tels que T_i commute à T_{i+1}, sous des conditions d'ergodicité [BaF18b]. Ils démontrent également un théorème de superrigidité des cocycles à la Zimmer [BaF13].

Le but de ce chapitre est d'expliquer comment généraliser le résultat à des corps qui ne sont pas locaux a priori. Pour cela, on va démontrer encore une fois l'existence d'une application bord :

THÉORÈME 1.53. *Avec les notations du théorème 1.52, soit (B, ν) un bord de Γ. Alors il existe un k-sous-groupe $\mathbf{L} \subsetneq \mathbf{G}$ et une application ρ−équivariante $B \to \mathbf{G}/\mathbf{L}(k)$.*

Une telle application est appelée *représentation algébrique* dans [BaF18a] et les autres articles ci-dessus. C'est l'ingrédient essentiel pour démarrer leur preuve du théorème de superrigidité. On réutilisera cette notion dans le chapitre 4.

Notons que la signification du «non-borné» dans le théorème 1.52 n'est pas évidente. Si $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_n$, un sous-groupe de $\mathbf{G}(k)$ est borné si tous ses coefficients matriciels sont uniformément bornés (par rapport à la valeur absolue sur k, bien sûr). Plus généralement, soit $\mathbf{V}$ une k-variété algébrique. Une partie de $\mathbf{V}(k)$ est dite bornée si son image par n'importe quelle fonction régulière $\mathbf{V}(k) \to k$ est bornée.

On pourrait démontrer ce théorème en utilisant l'immeuble affine sur lequel G agit, avec le théorème 1.21 (en tenant compte de la difficulté que l'immeuble n'est pas complet en général). Nous avons cependant choisi une autre approche, qui va donner des résultats plus forts : on va généraliser des résultats de Furstenberg et Zimmer sur la dynamique des actions sur des espaces de mesures.

1.5.1. Cadre et énoncé des résultats.

1.5.1.1. *Corps non-locaux.* Commençons par un tour d'horizon des corps considérés. Soit k un corps. Rappelons qu'une valeur absolue sur k est une fonction $|\cdot| : k \to \mathbb{R}^+$ vérifiant, pour tous les $x, y \in k$,

- $|xy| = |x| \cdot |y|$
- $|x + y| \leqslant |x| + |y|$
- $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

La valeur absolue est dite *ultramétrique* si l'inégalité triangulaire peut être renforcée en $|x + y| \leqslant \max(|x|, |y|)$.

Un corps muni d'une valeur absolue est appelé *corps valué*. Les exemples les plus connus sont bien sûr $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (et leur sous-corps). En général, la valeur absolue définit une métrique, et donc une topologie, sur k. La complétion de k pour cette métrique est toujours un corps, et dans toute la suite de ce chapitre on va travailler uniquement avec des corps complets. Si k est complet et $k \neq \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors d'après le théorème d'Ostrowski-Gelfand-Mazur, la valeur absolue peut être prise ultramétrique. Vu que tous les résultats présentés ici sont bien connus pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on ne perd rien à supposer k ultramétrique.

Dans la suite, on va supposer que k est un corps valué complet, et de plus qu'il est séparable (au sens topologique : il existe une suite dense). Cette hypothèse est nécessaire pour utiliser des résultats de théorie de la mesure. Notons qu'elle disparaît dans le théorème 1.52, simplement parce que Γ est de type fini.

Remarque 1.54. Si k est un corps valué complet séparable, alors il en est de même du complété de sa clôture algébrique.

Exemples 1.55. Les corps suivants sont des corps valués complets séparables :

(1) les corps locaux, par exemple $\mathbf{Q}_p$ ou $\mathbf{F}_q(\!(t)\!)$
(2) le corps $\mathbf{C}_p$, complétion de la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$

(3) le corps de séries de Hahn
$$K(\!(t^\Gamma)\!) = \{\sum_{x\in\Gamma} a_x t^x \mid a_x \in K; \mathrm{Supp}((a_x)_{x\in\Gamma}) \text{ est bien ordonné } \},$$
où K est un corps dénombrable et Γ un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$.

Il y a des exemples «naturels» de corps valués qui ne sont pas séparables. Citons par exemple les corps de Robinson, utiles en analyse non-standard, ou le complété sphérique Ω_p de $\mathbb{C}_p$ (un espace métrique est dit *sphériquement complet* si toute suite décroissant de boules possède une intersection). Pour plus d'informations sur la théorie générale des corps valués, on pourra consulter [EP05] par exemple.

Question. Soit k un corps topologique. Supposons k polonais. Peut-on munir k d'une valeur absolue compatible avec sa topologie ?

1.5.1.2. *Actions lisses.*

Définition 1.56. Soit S un groupe polonais, agissant continûment sur un espace polonais X. L'action de S sur X est dite *lisse* si l'espace topologique quotient X/S est un espace de Kolmogoroff (c'est-à-dire T_0) : pour tout couple de points, il existe un ouvert qui contient l'un mais pas l'autre.

D'après [Eff65], cette condition est équivalente à ce que pour tout $x \in X$, l'application orbitale $S/\operatorname{Stab}_S(x) \to X$ est un homéomorphisme.

L'intérêt de cette définition est que si μ est une mesure ergodique sur X, et que l'action est lisse, alors μ est supportée sur une orbite de X.

La lissité de l'action sur X est entraînée par la condition que les orbites soient localement fermées (ouvertes dans leur adhérence). C'est en fait équivalent si S est localement compact, voir [Eff65].

On reprend maintenant notre cadre d'étude : G est le groupe des k-points d'un groupe algébrique sur un corps valué complet k. La proposition suivante est implicitement démontrée dans [BeZ76], voir également [GaGM14].

Proposition 1.57. *Si V est une variété algébrique définie sur k, munie d'une action k-algébrique de G, alors l'action de G sur V est lisse.*

Pour faire court, une variété algébrique définie sur k et munie d'une action k-algébrique de G sera appelée une k-G-variété.

On sait que tout sous-groupe compact d'un groupe algébrique réel est lui-même algébrique. Ce n'est cependant pas le cas en général, et c'est pourquoi on a besoin de la définition suivante.

Définition 1.58. Un sous groupe L de G est dit *presque algébrique* s'il existe un sous-groupe k-algébrique $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$ tel que $\mathbf{H}(k)$ est un sous-groupe distingué et cocompact de L.

Une action de G sur un espace polonais X est dite *presque algébrique* si elle est lisse et si les stabilisateurs sont des sous-groupes presque algébriques de G.

Si V est un espace polonais, alors $\mathrm{Prob}(V)$ (comme inclus dans le dual des fonctions continues bornées, muni de la topologie faible-*) est également un espace polonais.

Notre théorème principal dans [BaDL17] est :

THÉORÈME 1.59. *Considérons une action presque algébrique de G sur un espace polonais V. Alors l'action de G sur* $\mathrm{Prob}(V)$ *est une action presque algébrique.*

Ce théorème est dû à Zimmer dans le cas où k est local et de caractéristique nulle. Le cas local de caractéristique positive ne semble déjà pas connu.

On démontre en fait un résultat un peu plus fort, qui nous permet de généraliser au cas non-local un résultat de Shalom [Sha99].

THÉORÈME 1.60. *Supposons que pour tout k-sous-groupe algébrique distingué strict $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$, le quotient $\mathbf{G}(k)/\mathbf{H}(k)$ n'est pas compact. Alors toute mesure finie G-invariante sur une k-G-variété est supportée sur l'ensemble des points fixes de G.*

Si k est local, on déduit facilement de ce théorème le théorème de densité de Borel : tout réseau de G est Zariski-dense dans G. En effet, si Γ est un réseau dans G, et H son adhérence de Zariski, alors G/H a une mesure invariante. D'après le théorème 1.60, G a donc des points fixes sur G/H, donc $H = G$.

1.5.2. Applications bord. Expliquons maintenant comment démontrer le théorème 1.53 à partir du théorème 1.59. Encore une fois, pour utiliser l'ergodicité isométrique, il va nous falloir exhiber un espace métrique. Pour cela, nous allons utiliser l'espace des normes et des seminormes. On suppose k ultramétrique. On fixe dans ce paragraphe un k-espace vectoriel V de dimension finie d.

DÉFINITION 1.61. Une *seminorme* (ultramétrique) sur V est une application $\eta : V \to \mathbb{R}^+$ telle que, pour tous les $a, b \in V$ et $\lambda \in k$,

- $\eta(a+b) \leqslant \max(\eta(a), \eta(b))$
- $\eta(\lambda a) = |\lambda|\, \eta(a)$.

C'est une norme si de plus $\eta(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des normes sur V, et $S = S(V)$ l'ensemble des seminormes non nulles sur V, quotientés par homothétie (la relation $\eta \sim \lambda\eta$ pour $\lambda > 0$). Le groupe $\mathrm{PGL}(V)$ agit sur $\mathcal{U}$ et sur S. Un sous-groupe de $\mathrm{PGL}(V)$ est borné si et seulement s'il stabilise un élément de $\mathcal{U}$. On munit S et $\mathcal{U}$ de la topologie (quotient de) la topologie de la convergence simple.

DÉFINITION 1.62. La *distance de Goldman-Iwahori*, notée d_∞, sur $\mathcal{U}$ est donnée par

$$d_\infty(\eta, \eta') = \sup_{v \neq 0, v' \neq 0} \left| \log\left(\frac{\eta(v)\eta'(v')}{\eta(v')\eta'(v)}\right) \right| .$$

Il est clair que $\mathrm{PGL}(V)$ agit par isométries sur $(\mathcal{U}, d_\infty)$.

Remarque 1.63. Dans le cas où k est un corps local, on reconnaît une construction classique de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}(V)$. La distance d_∞ correspond alors à une distance sur cet immeuble qui se restreint à chaque appartement en une norme infinie. L'espace S a alors été étudié par A. Werner [Wer04], c'est une compactification de cet immeuble.

Dans le cas général, $\mathcal{U}$ contient strictement l'immeuble, sauf si k est sphériquement complet, voir [Par00]. (Notons qu'un corps polonais et sphériquement complet est en fait toujours un corps local).

Si η est une seminorme, on définit son *noyau* comme $\ker(\eta) = \{x \ : \ \eta(x) = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de V. Pour $k \leqslant d$, soit $S^k \subset S$ l'ensemble des $\eta \in S$ dont le noyau a dimension k. Ainsi on a une stratification

$$S = \mathcal{U} \cup S^1 \cup \cdots \cup S^d$$

D'autre part, l'ensemble des fonctions $V \to \mathbb{R}^+$, quotienté par homothéties, est un espace compact (pour la convergence simple). Vu que les conditions définissant une seminorme sont fermées, on voit que S est compact. De plus, on peut démontrer qu'un sous-groupe de $GL(V)$ est borné si et seulement s'il fixe un point de $\mathcal{U}$ [BaDL17, Theorem 4.8] (c'est une application de l'équivalence des normes sur des espaces vectoriels de dimension finie).

Démonstration du Théorème 1.53. Soit $\rho : \Gamma \to H$ une représentation d'image non-bornée. On fixe une représentation irréductible $\mathbf{H} \to \mathrm{PGL}_d$ définie sur k ; on sait donc que les sous-groupes bornés de H sont exactement ceux qui fixent un point de $\mathcal{U}$.

On a donc une action de Γ sur $S = S(k^d)$. Par compacité de S, on en déduit une application ρ-équivariante $\pi : B \to \mathrm{Prob}(S)$. Par ergodicité, il existe un unique i tel que $\pi^{-1}(S^i)$ est de mesure 1. Si $i = 0$, alors π est essentiellement à valeurs dans $\mathcal{U}$, qui est muni d'une action isométrique de Γ. Par ergodicité isométrique, π est donc essentiellement constante et ρ est donc bornée, ce qui contredit l'hypothèse.

Sinon, on utilise l'application (mesurable et équivariante) qui à une norme associe son noyau pour obtenir une application équivariante de B vers la grasmannienne $\mathcal{G}_i$ des i-plans dans k^d. Celle-ci est une $k-\mathbf{H}$-variété algébrique. D'après le théorème 1.59 (avec la Proposition 1.57), l'action de $\mathbf{H}$ sur $\mathrm{Prob}(\mathcal{G}_i)$ est presque algébrique. Donc $\pi_*\nu$ est supportée sur une H-orbite, qui est homéomorphe à un H/L avec L presque algébrique (et non réduit à un point puisque la représentation $H \to \mathrm{PGL}_d$ est irréducible). Si L est algébrique, on obtient le résultat directement. Sinon, il faut travailler un peu plus : on utilise pour cela une variante un peu plus forte du théorème 1.60 pour obtenir le résultat (voir [BaDL17] pour les détails). $\square$

Chapitre 2

Marches aléatoires sur des complexes cubiques

Soit G un groupe discret dénombrable.

Reprenons les notations introduites dans la partie 1.1.2. On fixe donc une mesure admissible μ sur G, et on considère la marche aléatoire associée $Z_n = g_1 g_2 \dots g_n$ sur G. Une question générale est : si G agit sur un espace X et $x \in X$, que dire du comportement de la suite $(Z_n x)_{n \in \mathbb{N}}$? Une première étape serait de se demander si elle converge vers un point dans une bonne compactification de X. On connaît de nombreux résultats dans ce sens : citons [Kai00] pour beaucoup de cas de courbure négative, [KaM99] pour les espaces CAT(0) avec dérive positive, [MaT18] pour les actions non-élémentaires sur les espaces hyperboliques (pas forcément propres !)

Dans ce chapitre, je m'intéresserai au cas où X est un complexe cubique CAT(0). On note $\partial_R X$ son bord de Roller (voir §2.1.2 pour la définition).

Mon objectif est d'expliquer les résultats obtenus dans l'article [FLM18], dont le résultat principal est le suivant.

THÉORÈME 2.1. *Supposons que G agisse sur un complexe cubique CAT(0) de dimension finie X, de manière essentielle et non-élémentaire. Alors $Z_n o$ converge presque sûrement vers un point du bord $\partial_R X$.*

Les hypothèses sur l'action sont expliquées dans le §2.1 ci-dessous ; elles sont là pour assurer que l'action n'est pas trop dégénérée. Notons qu'en utilisant les résultats décrits dans le §2.1.2, on peut également obtenir la convergence vers un point du bord visuel $\partial_\infty X$ si le complexe est irréductible (c'est-à-dire qu'il ne s'écrit pas comme un produit, voir le §2.1.1.1).

Nous démontrons également dans [FLM18] des théorèmes plus précis sur la marche aléatoire. Par exemple, la mesure limite est l'unique mesure stationnaire, et la dérive de la marche aléatoire est positive (sous une hypothèse de moment).

Nous avons également mis en évidence des propriétés dynamiques de l'action. On dit qu'une géodésique ℓ est *contractante* s'il existe C tel que la projection de toute boule disjointe de ℓ sur ℓ a un diamètre $< C$. Si $g \in G$ agit sur X, on dit que c'est une *isométrie contractante* si c'est une isométrie hyperbolique, dont un axe de translation est une géodésique contractante. Le résultat principal de Caprace et Sageev [CaS11, Theorem A] affirme que si G agit de manière non-élémentaire sur un complexe cubique irréductible de dimension finie alors il a une isométrie contractante.

THÉORÈME 2.2 ([FLM18, Theorem 11.7]). *Soit X un complexe cubique CAT(0) irréductible de dimension finie. Considérons une action essentielle et non-élémentaire de G sur X. Alors presque sûrement*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}|\{k \leqslant n \mid Z_k \text{ est contractant}\}| = 1.$$

Si X n'est plus irréductible, X peut s'écrire comme un produit de facteurs irréductibles $X_1 \times \cdots \times X_n$. Chaque facteur possède des isométries contractantes. On dit que $g \in G$ est une isométrie *régulière* si g agit sur X_i comme une isométrie contractante.

Un corollaire frappant de notre résultat est le suivant.

COROLLAIRE 2.3. *Soit X un complexe cubique CAT(0) de dimension finie muni d'une action essentielle et non-élémentaire de G. Alors G possède des éléments réguliers.*

Ce théorème était connu de Caprace et Sageev seulement lorsque G est discret cocompact dans X. Une autre preuve a été trouvée récemment par A. Genevois [Gen17].

2.1. Les complexes cubiques et leurs bords

Dans tout ce chapitre, X désigne un complexe cubique CAT(0) de dimension finie, avec un nombre au plus dénombrable de cubes.

Commençons par rappeler quelques notions basiques sur les complexes cubiques CAT(0) (voir par exemple [Sag14] pour plus d'informations). Dans chaque cube, le parallelélisme définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des arêtes ; on a donc une relation d'équivalence par cube. Un *hyperplan* du complexe X est une classe d'équivalence pour la clôture transitive de l'ensemble de ces relations d'équivalence. Le résultat fondamental est qu'un complexe cubique est CAT(0) si et seulement si chaque hyperplan $\hat{h}$ divise le complexe en exactement deux sous-espaces, appelés *demi-espaces*, dont $\hat{h}$ est appelé le *bord*. Il s'ensuit que chaque sommet $x \in X$ est déterminé par l'ensemble U_x des demi-espaces qui le contiennent.

Si h est un demi-espace, on note $\hat{h}$ son bord (c'est donc un hyperplan), et h^* le demi-espace opposé. On note $\mathcal{H}(X)$, ou plus simplement $\mathcal{H}$ s'il n'y a pas ambiguïté, l'ensemble des demi-espaces de X. La structure combinatoire de X (et donc sa géométrie) est entièrement déterminée par l'ensemble $\mathcal{H}$ (muni de la relation d'inclusion et de l'involution $h \mapsto h^*$).

DÉFINITION 2.4. Deux demi-espaces h et k sont *transverses* si les quatre intersections $h \cap k$, $h \cap k^*$, $h^* \cap k$ et $h^* \cap k^*$ sont non vides.

Cette définition est inchangée lorsqu'on remplace h par h^* ; on peut donc également parler d'hyperplans transverses. La *dimension* de X est le nombre maximal d'hyperplans deux à deux transverses de X.

2.1.1. Actions sur des complexes cubiques. On note $\mathrm{Aut}(X)$ le groupe des isométries de X qui préservent la structure cubique de X (c'est bien souvent le groupe des isométries de X, voir [Bre17]).

2.1.1.1. *Produits.* Soient X_1 et X_2 deux complexes cubiques CAT(0). Leur produit $X = X_1 \times X_2$ est encore un complexe cubique CAT(0), et on a $\mathcal{H}(X) = \mathcal{H}(X_1) \cup \mathcal{H}(X_2)$. De plus, un hyperplan de $\mathcal{H}(X_1)$ est transverse (dans X) à tout hyperplan de $\mathcal{H}(X_2)$. Réciproquement, une telle décomposition de $\mathcal{H}(X)$ induit sur X une structure de produit.

DÉFINITION 2.5. Un complexe cubique est dit *irréductible* s'il ne peut pas s'écrire comme un produit de deux complexes cubiques (non réduits à un point).

En utilisant la description combinatoire ci-dessus, on obtient facilement la proposition suivante.

PROPOSITION 2.6. *Voir [CaS11, Proposition 2.6] Soit X un complexe cubique CAT(0) de dimension finie. Alors il existe une décomposition canonique*

$$X = X_1 \times \cdots \times X_p$$

où les X_i sont irréductibles. En particulier, tout automorphisme de X préserve (à permutation près) chacun des facteurs X_i ; on a donc $\mathrm{Aut}(X_1) \times \cdots \times \mathrm{Aut}(X_p)$ *qui se plonge comme un sous-groupe d'indice fini de* $\mathrm{Aut}(X)$.

2.1.1.2. *Actions élémentaires et esentielles.* Puisque l'espace X est CAT(0), on peut définir son bord visuel $\partial_\infty X$.

DÉFINITION 2.7. Une action de G sur X est *élémentaire* si G a une orbite finie dans $X \cup \partial_\infty X$. Elle est dite *non-élémentaire* sinon.

DÉFINITION 2.8. Une action d'un groupe Γ sur un complexe cubique CAT(0) X est dite *essentielle* si, pour tout demi-espace h, il existe un $v \in X$ tel que $\Gamma.v \cap h$ contient des points à distance arbitrairement grande de l'hyperplan $\hat{h}$.

Il est très facile de fabriquer des actions qui ne sont pas essentielles : on peut partir d'une action de Γ sur X, et considérer le complexe X' obtenu à partir de X en rajoutant une arête à chaque sommet. La proposition suivante (due encore à Caprace et Sageev [CaS11, Proposition 3.5]) permet souvent de se ramener à une action essentielle.

PROPOSITION 2.9. *Soit* Γ *un groupe avec une action sur un complexe cubique de dimension finie X. Supposons que* Γ *n'a pas de point fixe dans X ou dans le bord visuel $\partial_\infty X$. Alors il existe un sous-complexe convexe Y de X qui est non borné,* Γ*-invariant, et sur lequel l'action de* Γ *est essentielle.*

2.1.2. Bords de complexes cubiques. En tant qu'espace CAT(0), X a un bord visuel, noté $\partial_\infty X$. Notons que X n'est pas supposé localement fini, si bien que la topologie usuelle sur $\partial_\infty X$ n'est pas compacte a priori. Il est souvent plus pratique de travailler avec le *bord de Roller*. Rappelons sa définition.

Puisqu'un sommet de X est uniquement déterminé par les demi-espaces qui le contiennent, on a un plongement ι de l'ensemble des sommets de X (que je vais noter $X^{(0)}$) dans $2^{\mathcal{H}}$. On munit $2^{\mathcal{H}}$ de la topologie de la convergence simple ; c'est donc un espace compact.

DÉFINITION 2.10. Le *compactifié de Roller* de X est l'adhérence $\overline{X}$ de $\iota(X^{(0)})$ dans $2^{\mathcal{H}}$. Le *bord de Roller* de X est $\partial_R X = \overline{X} \backslash \iota(X^{(0)})$.

Un point $v \in \overline{X}$ est donc une partie de $\mathcal{H}$. Pour conserver le parallèle avec les points de X, on note U_v l'ensemble des demi-espaces de v (donc formellement $U_v = v$). Si $h \in U_v$, on dira que h *contient* v (plutôt que l'inverse).

Notons que le compactifié de Roller est toujours un espace compact, mais le bord de Roller ne l'est pas si X n'est pas propre (et dans ce cas $\overline{X}$ n'est pas une compactification de $X^{(0)}$, puisque $X^{(0)}$ n'est pas ouvert dans $\overline{X}$).

REMARQUE 2.11. Il existe une application G-équivariante $\overline{X} \to X \cup \partial_\infty X$ (voir [FLM18, Corollary 6.3], qui utilise essentiellement le théorème 1.23). Par conséquent, si l'action de G n'a pas d'orbite finie dans $\overline{X}$, elle n'en a pas non plus dans $X \cup \partial_\infty X$.

Dans [NS13], Nevo et Sageev identifient le bord de Poisson d'un groupe agissant proprement et cocompactement sur X. Ils sont conduits à introduire la condition suivante.

DÉFINITION 2.12. Un point $v \in \overline{X}$ est *non-terminant* si pour tout $h \in U_v$ il existe $k \in U_v$ avec $k \subsetneq h$.

Le bord de Poisson d'un groupe G s'identifie alors à l'espace $\partial_R X$ muni d'une mesure portée par les points non-terminants.

Lorsque l'action n'est plus cocompacte, nous nous sommes rendus compte qu'il était plus naturel d'introduire une condition plus forte.

DÉFINITION 2.13. Deux demi-espaces h et k sont *fortement séparés* s'il n'existe pas de demi-espace transverse à la fois à h et k.

Si X est irréductible, un point $\xi \in \partial_R X$ est *régulier* si pour tous $h_1, h_2 \in U_\xi$ il existe un demi-espace $k \subset h_1 \cap h_2$ qui est fortement séparé à la fois de h_1 et de h_2.

Un définition équivalente est donnée par le lemme suivant (voir [Fer18, Proposition 7.4]).

LEMME 2.14. *Supposons X irréductible. Un point $\xi \in \partial_R X$ est régulier si et seulement s'il existe une chaîne $h_1 \supset h_2 \supset \cdots \supset h_n \supset \ldots$ de demi-espaces deux à deux fortement séparés.*

Les résultats de Caprace et Sageev (voir par exemple [CaS11, Proposition 5.1]) fournissent de nombreux hyperplans fortement séparés, et en particulier permettent de démontrer qu'un complexe irréductible admet toujours des points réguliers.

On note $\partial_r X$ l'ensemble des points réguliers de $\partial_R X$, si X est irréductible. Si X n'est pas irréductible, on écrit $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ avec les X_i irréductibles, et on définit l'ensemble des points réguliers $\partial_r X$ par $\partial_r X = \partial_r X_1 \times \cdots \times \partial_r X_n$.

L'avantage des points réguliers est que l'on peut toujours définir une *bande* entre un point régulier et un autre point du bord, au sens suivant.

LEMME 2.15. *Supposons X irréductible. Soient $\alpha \in \partial_r X$ et $\beta \in \overline{X}$ avec $\beta \neq \alpha$. Alors il existe un sommet $x \in X$ qui appartient à tous les demi-espaces contenant à la fois α et β. L'ensemble de ces sommets s'appelle la* bande *entre α et β, notée $S(\alpha, \beta)$.*

La condition de régularité d'un point du bord est une notion très naturelle. Cependant, pour pouvoir mieux comparer la convergence vers un point de Roller ou vers un point du bord visuel, nous avons également été amenés à introduire une variante plus forte. La distance entre deux demi-espaces est définie comme la distance minimale entre deux points de ces demi-espaces.

DÉFINITION 2.16. Supposons que X soit irréductible. Soit $\alpha \in \partial_R X$. On dit que α est *écrasant* (*squeezing* en anglais) s'il existe $r > 0$ et $x \in X$ tels qu'il existe un nombre infini de paires de demi-espaces $h \subset k$, avec $d(h,k) \leqslant r$, tels que $\alpha \in h \cap k$ et $x \in h^* \cap k^*$.

Un point $\xi \in \partial_\infty X$ est *écrasant* s'il existe $x \in X$ et $r > 0$, et un nombre infini de paires de demi-espaces $h \subset k$, avec $d(h,k) \leqslant r$, tels que $x \in h^* \cap k^*$ et le rayon géodésique de x à ξ rencontre $\hat{h}$ et $\hat{k}$.

Si on raisonne en terme de chaîne descendante, $\alpha \in \partial_R X$ est écrasant s'il existe une chaîne descendante $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de demi-espaces fortement séparés contenant α, telle que $d(h_{2n}, h_{2n+1}) \leqslant r$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On utilise le même terme pour les deux sortes de points pour la raison suivante [FLM18, Lemma 6.10].

PROPOSITION 2.17. *Il existe un homéomorphisme* $\mathrm{Aut}(X)$*-équivariant entre le sous-espace des points écrasants de $\partial_R X$ et le sous-espace des points écrasants de $\partial_\infty X$.*

Cette bijection est construite de la manière suivante : si $\alpha \in \partial_R X$ est écrasant, on démontre que $\bigcap_{h \in U_\alpha} \partial_\infty h$ est réduit à un point ξ. On démontre alors que ce point est écrasant, et de plus, que toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers ξ dans $\partial_\infty X$ converge également vers α dans $\partial_R X$. Le résultat s'ensuit.

Après avoir écrit [FLM18], nous nous sommes aperçus que certains arguments pouvaient être simplifiés en utilisant le *graphe de contact* $\mathscr{C}X$ de X. Celui-ci est défini comme suit : ses sommets sont les hyperplans de X, et deux hyperplans sont reliés par une arête s'ils s'intersectent ou contiennent deux points à distance 1 dans X. Hagen [Hag14] démontre que le graphe de contact est hyperbolique (en fait isométrique à un quasi-arbre). On peut alors démontrer que le bord de Gromov $\partial_\infty \mathscr{C}X$ de $\mathscr{C}X$ est également homéomorphe de manière $\mathrm{Aut}(X)$ équivariante avec l'ensemble $\partial_r X$ des points réguliers. Dans un article en cours d'écriture, nous utiliserons ce fait pour démontrer également un théorème central limite pour les marches aléatoires sur $\mathrm{Aut}(X)$.

2.2. Marches aléatoires

Revenons au cadre du théorème 2.1. On considère un groupe G agissant sur X, de manière essentielle et non-élémentaire. On va regarder une marche aléatoire $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur G de loi μ admissible. On s'intéresse au comportement asymptotique de $Z_n o$, où $o \in X$ est une origine arbitraire.

La preuve du théorème 2.1 se déroule en plusieurs étapes. La première étape de la preuve est d'analyser les applications bord vers le bord de Roller de X. Ce travail a été effectué précédemment par T. Fernós dans [Fer18].

Théorème 2.18. *Soit B un bord fort du groupe G. Alors il existe une unique application mesurable G-équivariante $\varphi : B \to \partial_R X$. De plus l'image essentielle de cette application est contenue dans l'ensemble des points écrasant de $\partial_R X$.*

En analysant la preuve, nous nous sommes aperçus qu'on peut l'adapter pour démontrer l'unicité de l'application (mesurable, G-équivariante) $B \to \mathrm{Prob}(\overline{X})$. On obtient donc le résultat suivant [FLM18, Corollary 7.3].

Théorème 2.19. *Il existe une unique mesure stationnaire ν sur $\overline{X}$. L'ensemble des points écrasant de $\partial_R X$ est de ν-mesure pleine.*

D'après le théorème de convergence des martingales, on sait que la suite des $Z_n(\omega)_*\nu$ converge (faible-*) vers $\delta_{\phi(\omega)}$, pour presque tout $\omega \in \Omega$. Il reste à en déduire la convergence de $Z_n o$ vers $\phi(\omega)$.

Notons que l'action de G sur chaque facteur irréductible de X est encore essentielle et non-élémentaire : ceci permet de se ramener au cas où X est irréductible.

La convergence se démontre alors grâce au résultat suivant.

Proposition 2.20 ([FLM18, Lemma 8.6]). *Supposons que X soit irréductible, et soient $\lambda \in \mathrm{Prob}(\overline{X})$, $g_n \in \mathrm{Aut}(X)$ et $b \in \partial_r X$ tels que $g_n\lambda$ converge (faible-*) vers δ_b.*

Alors pour tout $o \in X$, $g_n o$ converge vers b.

La preuve de cette proposition est inspirée d'un argument de Kaimanovich [Kai00, Lemma 2.2], en utilisant les bandes du lemme 2.15. L'idée est d'extraire une sous-suite de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $Z_n o$ converge dans $\overline{X}$ vers un point ξ. On démontre ensuite que toute valeur d'adhérence de $(Z_n\nu)_{n\in\mathbb{N}}$ est concentrée sur un petit ensemble autour de ξ, et on en déduit que $b = \xi$.

En utilisant la proposition 2.17, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 2.21. *Supposons que X soit irréductible. Alors $(Z_n o)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point écrasant du bord visuel $\partial_\infty X$.*

Si X n'est pas irréductible, la convergence vers un point du bord visuel ne s'obtient pas automatiquement à partir de celle vers un point du bord de Roller. Cependant, elle reste vraie, sous une hypothèse de premier moment fini : cela découle de la positivité de la dérive ci-dessous, avec le théorème de Karlsson-Margulis [KaM99]. Je ne sais pas si ce résultat est toujours vrai sans hypothèse de moment.

L'unicité de la mesure stationnaire, et le fait qu'elle est supportée sur les points réguliers, nous permet en effet d'appliquer sans difficulté la stratégie exposée dans [BeQ16] pour les groupes linéaires pour démontrer la positivité de la dérive. Rappelons que celle-ci est définie comme

$$\lambda = \lim \frac{1}{n} d(Z_n o, o)$$

(Cette limite est bien définie et ne dépend pas de o, ni (presque sûrement) du tirage de la suite (Z_n).).

Théorème 2.22 ([FLM18, Theorem 9.3]). *Soient $G \to \mathrm{Aut}(X)$ une action essentielle et non-élémentaire, et $\mu \in \mathrm{Prob}(G)$ une mesure admissible vérifiant que $\int d(o, go) d\mu(g) < +\infty$. Alors $\lim \frac{1}{n} d(Z_n o, o) > 0$.*

L'idée de la preuve est d'approximer $d(Z_n o, o)$ par une horofonction $h_\xi(Z_n o)$, où $\xi \in \partial_r X$ est fixé. Ceci est possible précisément parce que la marche aléatoire converge vers un point régulier (qui n'est presque sûrement pas ξ). L'intérêt des horofonctions est qu'elles satisfont des relations de cocycles, ce qui permet d'utiliser des résultats connus sur les cocycles (notamment le lemme d'Atkinson [Atk76], voir aussi Kesten [Kes75]).

2.2.1. Questions.

(1) Que se passe-t-il en dimension infinie ? Dans ce cas, les outils fournis par [CaS11] s'effondrent. Mais il n'est pas exclu que le théorème 2.1 reste vrai, peut-être avec quelques hypothèses supplémentaires. Cela donnerait une piste pour pouvoir généraliser les résultats de [ChFI16] en dimension infinie (question d'Y. Cornulier).

(2) Il y a beaucoup de résultats sur les marches aléatoires sur les arbres, ou plus généralement les groupes hyperboliques, dont on peut espérer une généralisation aux complexes cubiques (sans doute en mettant des hypothèses supplémentaires). Dans un article en cours d'écriture (encore avec T. Fernós et F. Mathéus), nous démontrons un théorème central limite pour les actions sur les complexes cubiques CAT(0). On peut se poser bien d'autres questions. Par exemple, peut-on identifier la frontière de Martin d'un complexe cubique CAT(0) ? Peut-on démontrer un théorème local limite ? Des estimées de grandes déviation ? Ce sont des questions qui

semblent difficiles en général, mais peut-être accessibles sur des exemples simples.

(3) Il existe des exemples d'actions élémentaires qui peuvent être intéressants. Par exemple, déjà pour un arbre, Cartrwight, Kaimanovich et Woess [CarKW94] étudient les marches aléatoires sur le stabilisateur d'un point à l'infini d'un arbre. Peut-on faire une étude comparable sur un groupe fixant un point du bord d'un complexe cubique CAT(0) ?

(4) Peut-on généraliser les techniques et les résultats dans d'autres cadres ? Par exemple, les espaces CAT(0) ayant une isométrie de rang 1 semblent un bon début. Avec A. Genevois, nous avons commencé à réfléchir à un équivalent pour les groupes acylindriquement hyperboliques ; la difficulté est alors de dégager la bonne notion de bord.

Chapitre 3

IRS

Dans ce chapitre, je vais expliquer les résultats de [BaDL16a] et [Duc+15].

3.1. Sous-groupes aléatoires invariants

Soit G un groupe localement compact σ-compact. Notons $\mathrm{Sub}(G)$ l'ensemble des sous-groupes fermés de G. On munit $\mathrm{Sub}(G)$ de la *topologie de Chabauty* : pour un compact $K \subseteq G$ et un ouvert $U \subseteq G$, définissons les sous-ensembles de $\mathrm{Sub}(G)$ suivants :

$$O^K = \{H \in \mathrm{Sub}(G);\ H \cap K \neq \varnothing\} \text{ et } O_U = \{H \in \mathrm{Sub}(G);\ H \cap U = \varnothing\}.$$

La topologie de Chabauty est la plus petite topologie sur $\mathrm{Sub}(G)$ telle que tous les O^K et O_U sont ouverts.

La notion d'IRS, définie ci-dessous, a été explicitée pour la première fois dans [AbGV14] (même si elle apparaissait déjà implicitement dans des travaux antérieurs, voir [AbGV14] pour un panorama). Elle a depuis fait l'objet de nombreuses investigations, et a notamment donné une application spectaculaire à la géométrie des variétés localement symétriques [Abe+17] (voir [Gel18b] ou [Gel18a] pour un panorama).

Définition 3.1. Un *sous-groupe aléatoire invariant* (en abrégé IRS, à cause de l'anglais *Invariant Random Subgroup*), est une mesure de probabilité sur $\mathrm{Sub}(G)$ qui est invariante par conjugaison.

Par exemple, un sous-groupe distingué N de G définit un IRS (prendre la mesure de Dirac en N). Un sous-groupe d'indice fini H de G fournit également un IRS : prendre la mesure de probabilité uniforme sur les conjugués de H.

On peut construire d'autres exemples de la manière suivante : soit (X, μ) un espace probabilisé, muni d'une action de G qui préserve la mesure de probabilité. On a alors une application (mesurable) $S : X \to \mathrm{Sub}(G)$ donnée par $x \mapsto \mathrm{Stab}_G(x)$. La mesure $S_*\mu$ est alors un IRS sur G. On peut démontrer que tous les IRS peuvent s'obtenir de cette manière, voir [AbGV14] pour le cas discret et [Abe+17] pour le cas général.

3.2. Groupes agissant sur des espaces CAT(0)

Soit maintenant X un espace CAT(0) muni d'une action de G. Que peut-on dire des IRS de G ? Dans le cas où G est un groupe de Lie réel simple (au sens des groupes abstraits), le théorème de densité de Borel affirme que les réseaux de G sont Zariski-denses dans G (et G n'a pas de sous-groupe distingué). Peut-on généraliser ce fait aux IRS ?

Dans [CaM09b] et [CaM09a], Caprace et Monod donnent de nombreuses informations sur la structure des groupes agissant sur des espaces CAT(0). Ils prouvent en particulier une généralisation du théorème de densité de Borel dans un cadre plus géométrique. Rappelons que nous avons défini la notion d'action géométriquement dense dans la définition 1.34.

Supposons que l'action de G sur X soit géométriquement dense. D'après [CaM09b], sous des hypothèses raisonnables, l'action d'un sous-groupe distingué N de G, ainsi que de tout réseau Γ de G, est également géométriquement dense. Il est naturel de généraliser ces résultats aux IRS, et c'est ce que nous avons obtenu dans [Duc+15].

Théorème 3.2. *Soit X un espace CAT(0) de dimension télescopique finie, irréductible et non isométrique à $\mathbb{R}$, muni d'une action d'un groupe G par isométries qui est fidèle, continue, géométriquement dense. Soit μ un IRS de G. Alors l'action restreinte à μ-presque tout sous-groupe fermé H de G est géométriquement dense.*

Ces deux théorèmes généralisent des résultats de Caprace et Monod : dans [CaM09a, Theorem 2.4], ceux-ci démontrent le résultat analogue pour les réseaux, tandis que dans [CaM09b, Theorem 1.10], ils démontrent (sous les mêmes hypothèses) qu'un sous-groupe distingué de G est également géométriquement dense.

Nous obtenons également une version réductible.

Théorème 3.3. *Soient $G_1, \ldots, G_n$ des groupes localement compacts à base dénombrable d'ouverts, $X_1, \ldots, X_n$ des espaces CAT(0) irréductibles de dimension telescopique fini non isométriques à $\mathbb{R}$. Supposons que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, le groupe G_i soit muni d'une action fidèle, continue, géométriquement dense par isométries sur X_i. Soit μ un IRS de $G = G_1 \times \cdots \times G_n$. Supposons également que la projection de μ sur $\mathrm{Sub}(G_i)$ soit non triviale pour tout i. Alors l'action de μ-presque tout $H \in \mathrm{Sub}(G)$ sur X est géométriquement dense.*

La preuve utilise des techniques assez proches de celles décrites dans le paragraphe 1.2. Par exemple, un cas très facile est celui où H a preque sûrement un unique point fixe sur $\partial_\infty X$ (ou plus généralement définit de manière canonique un point du bord) : dans ce cas, on obtient une application μ-presque partout définie $\mathrm{Sub}(G) \to \partial_\infty X$, et donc une mesure de probabilité invariante sur $\partial_\infty X$. Cela contredit la minimalité de G, si X est irréductible et $\neq \mathbb{R}$, d'après le théorème de Caprace-Lytchak (Théorème 1.23, voir [CaL10]). Dans le cas général, c'est bien sûr plus difficile ; l'idée est d'arriver à montrer qu'il n'y a pas de familles de convexes de X indexés par un espace muni d'une mesure de probabilité G-invariante.

3.3. IRS moyennables

Dans l'article [AbGV14], Abert, Glasner et Virag mettent en évidence l'importance des IRS dont le support est formé uniquement de sous-groupes moyennables de G.

Notons $\mathrm{Sub}_{\mathrm{moy}}(G)$ le sous-espace de $\mathrm{Sub}(G)$ formé par les sous-groupes fermés moyennables de G. C'est une partie borélienne de G, voir l'appendice de [BaDL16a]. Notons au passage qu'il n'est pas clair que $\mathrm{Sub}_{\mathrm{moy}}(G)$ soit fermé dans $\mathrm{Sub}(G)$, voir [CaM14]. Rappelons par ailleurs qu'il existe un unique sous-groupe distingué moyennable maximal de G (voir par exemple [Zim84, Proposition 4.1.12]). On le notera $\mathrm{Rad}_m(G)$.

Définition 3.4. Un IRS μ sur G est *moyennable* si $\mu(\mathrm{Sub}_{\mathrm{moy}}(G)) = 1$.

Dans [AbGV14], les auteurs utilisent le théorème suivant : si G est un groupe linéaire, tout IRS moyennable est supporté sur $\mathrm{Sub}(\mathrm{Rad}_m(G))$. On peut se poser la question pour un groupe quelconque. Cette question apparaît également dans [BiT17] et dans [Tuc12, §7].

C'est ce que nous avons démontré dans [BaDL16a].

Théorème 3.5. *Tout IRS moyennable de G donne mesure 1 à* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Rad}_m(G))$.

Ceci permet de généraliser [AbGV14, Theorem 5] aux groupes qui ne sont pas linéaires.

Il a aussi la conséquence suivante, démontrée dans [Tuc12] (voir [Kec10] pour la définition d'une action faiblement contenue dans une autre)

Corollaire 3.6. *Soit Γ un groupe dénombrable de radical moyennable trivial. Si $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ est une action qui préserve une mesure de probabilité, et si cette action est faiblement contenue dans le décalage de Bernoulli $\Gamma \curvearrowright [0,1]^\Gamma$, alors l'action de Γ sur X est essentiellement libre.*

Le théorème 3.5 est également à mettre en relation avec une percée récente spectaculaire dans le domaine des algèbres d'opérateurs. Soit Γ un groupe dénombrable. On note $C^*_r(\Gamma)$ la C^*-algèbre réduite de Γ : c'est l'algèbre engendrée par les opérateurs $\lambda_g : f \mapsto f(g^{-1}\cdot)$ sur $\mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$. Une question naturelle est de comprendre les idéaux fermés de cette algèbre, et en particulier de savoir si cette algèbre est simple : on dit alors que le groupe Γ est *C^*-simple*. Il est assez facile de voir que la présence d'un radical moyennable est une obstruction à cette simplicité. La réciproque à cette question était complètement ouverte jusqu'à il y a peu (voir [dlHar07] par exemple).

D'autre part, la C^*-simplicité de Γ entraîne une autre propriété, la *propriété de trace unique*. Rappelons qu'une *trace* sur une C^*–algèbre $\mathcal{A}$ est une application linéaire $\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, positive, vérifiant $\tau(ab) = \tau(ba)$ et $\tau(1) = 1$. Un groupe a la propriété de trace unique si et seulement si la seule trace sur $C^*_r(\Gamma)$ est l'application $a \mapsto \langle a\delta_1, \delta_1\rangle$. Là encore, il n'était pas clair si cette propriété entraîne la simplicité de la C^*-algèbre réduite de Γ.

Les réponses à ces questions ont été obtenues tout récemment : dans [LeB17], Le Boudec donne un exemple de groupe qui n'est pas C^*-simple mais qui a un radical moyennable trivial. D'autre part, Breuillard, Kalantar, Kennedy et Ozawa démontrent dans [Bre+17] que la propriété de la trace unique est équivalente à la trivialité du radical moyennable.

Le lien avec les IRS est donné par l'article de Tucker-Drob [Tuc12] : l'auteur y démontre que la propriété de la trace unique implique que tout IRS moyennable sur Γ est trivial. En combinant ce résultat avec le résultat de [Bre+17] mentionné ci-dessus, on obtient donc une autre preuve du théorème 3.5 pour les groupes dénombrables.

Idée de preuve. L'idée de la preuve du théorème 3.5 est assez simple. On commence par se ramener au cas où l'IRS est «générateur», grâce au lemme suivant.

LEMME 3.7. *Soit μ un IRS sur G. Alors il existe un unique $N \lhd G$ minimal tel que μ-presque tout $H \in \mathrm{Sub}(G)$ est inclus dans N. Si $N = G$, on dira que l'IRS est* générateur.

Si μ est moyennable, il s'agit donc de montrer que N est contenu dans $\mathrm{Rad}_m(G)$, autrement dit, que N est moyennable. En remplaçant G par N, on va donc supposer que μ est générateur, et montrer que G est moyennable.

Il faut tout d'abord utiliser la bonne définition de la moyennabilité d'un groupe, que je vais rappeler maintenant. Un *G-convexe compact affine* est un sous-espace G-invariant convexe, faible-* fermé du dual d'un espace de Banach sur lequel G agit par isométries. On dit alors qu'un groupe G est *moyennable* si toute action de G sur un G-convexe compact affine a un point fixe.

Soit μ un IRS moyennable sur G. Soit C un G-convexe compact affine, inclus dans le dual d'un espace de Banach E. Par le lemme de Zorn, on peut supposer que C ne contient pas de partie convexe G-invariante. Il s'agit de démontrer que G a un point fixe. On sait que μ-presque tout H admet un point fixe sur C. Commençons par supposer qu'il existe un *unique* point fixe $x_H \in C$. Alors le résultat est immédiat : en effet, $\int x_H d\mu(H)$ est un point de C (par convexité) qui est G-invariant.

En général, on ne peut pas espérer que H ait un unique point fixe : le lieu des points fixes de H forme un convexe fermé non vide $C_H \subset C$. Pour pouvoir appliquer le raisonnement précédent, il est donc naturel de changer d'espace : on va considérer l'ensemble $\mathcal{C}(C)$ des convexes faible-* fermés de C.

LEMME 3.8. *Il existe un espace vectoriel topologique localement convexe $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{C}(C)$ soit un convexe faible-* fermé de $\mathcal{E}^*$. De plus C est un point extrémal de $\mathcal{C}(C)$.*

DÉMONSTRATION. Voici la construction de $\mathcal{E}$. On peut supposer que C est inclus dans la boule unité E_1^* de E^*. On définit $\mathcal{E}$ comme $\prod_{b \in E_1^*} \mathbb{R}$, avec la topologie produit. L'injection de $\mathcal{C}(C)$ dans $\mathcal{E}$ est l'application qui à un convexe $C' \subset C$

associe la fonction $b \in E_1^* \mapsto \max_{x \in C} b(x)$. C'est bien une injection grâce au théorème de Hahn-Banach. Pour le reste du lemme, voir [BaDL16a, Lemma 2.1]. $\square$

Nous pouvons maintenant finir la preuve du théorème 3.4. D'après la discussion ci-dessus, on a une application $H \mapsto C_H$ de $\mathrm{Sub}(G)$ dans $\mathcal{C}(C)$. On a donc une mesure $\nu \in \mathrm{Prob}(\mathcal{C}(C))$ qui est G-invariante. Soit C_0 son barycentre : $C_0 = \int C_H d\nu(H)$ (cette intégrale a lieu dans l'espace vectoriel topologique $\mathcal{E}$). Le convexe C_0 est G-invariant puisque ν l'est. Par convexité de $\mathcal{C}(C)$, on a $C_0 \subset C$, donc par minimalité de l'action, $C_0 = C$. Mais comme C est un point extrémal de $\mathcal{C}(C)$, il s'ensuit que pour μ-presque tout H on a $C_H = C$. Cela signifie que μ-presque tout H agit trivialement sur C. Mais comme l'IRS μ est supposé générateur, on en déduit que G agit également trivialement sur C, et donc en particulier avec un point fixe. Donc G est moyennable.

Chapitre 4

Immeubles $\widetilde{A_2}$

Dans ce chapitre, j'expose les résultats de [BaCL19]. Le théorème principal (voir les théorèmes 4.6 et 4.7) est que certains réseaux cocompacts dans un immeuble affine n'admettent aucune représentation linéaire infinie.

Ce résultat peut (et doit) encore être vu comme une généralisation du théorème de super-rigidité de Margulis. On a toujours un groupe Γ, analogue d'un réseau, et on se ramène rapidement à étudier les représentations non-bornées Zariski-denses dans des groupes semisimples. Mais cette fois, comme il n'y a pas de groupe ambiant auquel étendre la représentation, l'analogue sera simplement qu'une telle représentation n'existe pas.

Il s'agit donc d'un point de vue un peu différent de celui adopté dans le chapitre 1 : on change le groupe au départ plutôt qu'à l'arrivée. S'il y a bien sûr des idées communes, les difficultés techniques que nous avons dues résoudre sont assez différentes.

4.1. Plans projectifs et projectivités

Définition 4.1. Un *plan projectif* est la donnée de deux ensembles P et L, appelés respectivement *points* et *droites*, et d'une relation d'incidence entre les deux, tels que

(1) deux points distincts sont incidents à une unique droite,
(2) deux droites distinctes sont incidentes à un unique point.

On utilisera librement le vocabulaire qui vient de l'intuition habituelle (un point appartient à une droite, deux droites s'intersectent, etc.)

Les exemples les plus importants sont bien sûr les plans projectifs $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ sur un corps (commutatif ou non) $\mathbb{K}$. On les appelle *desarguésiens*, et *pappiens* si $\mathbb{K}$ est commutatif (ceci vient du fait que le plan projectif correspondant satisfait respectivement le théorème de Desargues et celui de Pappus). On peut aussi faire des constructions exceptionnelles avec des algèbres octonioniques ; ils satisfont alors une condition appelée *Moufang* qui peut être vue comme un affaiblissement du théorème de Desargues. Il y a cependant bien d'autres plans projectifs !

Le *graphe d'incidence* d'un plan projectif est le graphe dont les sommets sont les éléments de $P \cup L$, et deux sommets sont reliés par une arête s'ils sont incidents.

Soit $u \in P$ (resp. $u \in L$). On note $\mathrm{Res}(u)$ l'ensemble des droites (resp. points) incidents à u. L'*ordre* d'un plan projectif est le cardinal de $\mathrm{Res}(u)$ (il ne dépend pas du choix de u).

Définition 4.2. Soient $u \in P$, $v \in L$ (resp. $u \in L, v \in P$) non incidents. La *perspectivité* $[u, v]$ est l'application $\mathrm{Res}(u) \to \mathrm{Res}(v)$ définie par $[u, v](x) = x \cap v$ (resp. $[u, v](x) = (xv)$.)

La perspectivité $[u_1, u_2, \ldots u_n]$ est la composition $[u_n, u_{n-1}] \circ \cdots \circ [u_2, u_1]$, si toute ces perspectivités sont bien définies.

Une *projectivité* est une perspectivité de la forme $[u_1, u_2, \ldots, u_n, u_1]$.

L'ensemble des projectivités forme donc un groupe, qui agit naturellement sur $\mathrm{Res}(u_1)$. On voit facilement qu'il ne dépend pas du choix de u_1, à isomorphisme près (et de plus les actions sur $\mathrm{Res}(u_1)$ et $\mathrm{Res}(u_2)$ sont conjuguées). On le note Π (ou $\Pi(P, L)$ s'il y a besoin de préciser le plan projectif).

Pour un plan projectif pappien, le groupe Π est isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ (avec son action naturelle sur la droite projective). Une idée générale est que plus le plan projectif est exotique, plus le groupe Π sera gros. Par exemple si (P, L) est fini mais n'est pas desarguésien alors Π contient le groupe alterné sur $\mathrm{Res}(u)$. On pourra consulter le livre [PlS81] pour plus de théorèmes de ce type.

4.2. Immeubles affines

4.2.1. Immeubles de Bruhat-Tits et immeubles exotiques.

Définition 4.3. Un *immeuble* $\widetilde{A}_2$ est un complexe triangulaire simplement connexe dont les links en n'importe quels sommets sont des graphes d'incidences de plans projectifs.

L'*ordre* d'un tel immeuble est l'ordre du link d'un sommet.

L'ordre d'un immeuble ne dépend pas du sommet choisi ; on le supposera toujours fini par la suite. En particulier, tous les immeubles considérés dans ce chapitre seront supposés localement finis.

Les immeubles $\widetilde{A}_2$ sont surtout intéressants pour les groupes qui agissent dessus. On note $\mathrm{Aut}(X)$ les automorphismes de X (comme complexe simplicial). Voici quelques exemples de groupes qui agissent cocompactement sur des immeubles $\widetilde{A}_2$ localement finis.

Exemples 4.4.
(1) Si k est un corps (commutatif) local, $\mathrm{PGL}_3(k)$ agit sur un immeuble $\widetilde{A}_2$, dont l'ensemble des sommets est $\mathrm{PGL}_3(k)/\mathrm{PGL}_3(\mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de k.
(2) Si k est une algèbre à division centrale de dimension finie sur un corps local, $\mathrm{PGL}_3(k)$ agit également sur un immeuble $\widetilde{A}_2$, transitivement sur les sommets.

(3) Les premiers autres exemples cocompacts sont dûs à Tits et Ronan [Ron84], [Tit13, Cours de 1984-84]. Ce sont des groupes qui agissent simplement transitivement sur les chambres de l'immeuble. Deux d'entre eux sont des réseaux dans un corps local, et deux ne le sont pas.
(4) Dans [Car+93], les auteurs classent les groupes agissant simplement transitivement sur les sommets d'un immeuble $\widetilde{A}_2$ exotique. Lorsque $q = 2$ ou 3, ils donnent une liste complète, dont une partie importante ne sont pas des réseaux dans un $\mathrm{PGL}_3(k)$.
(5) Essert [Ess13] donne des constructions de groupes agissant simplement transitivement sur les arêtes d'un immeuble, par exemple
$$\Gamma = \langle x, y, z \mid x^7, y^7, z^7, xyz^3, x^3y^3z \rangle$$
qui n'est pas non plus un sous-groupe d'un $\mathrm{PGL}_3(k)$.
(6) Les constructions d'Essert ont été analysées et généralisées par S. Witzel [Wit17] ; N. Radu [Rad19] démontre que, lorsque q tend vers l'infini, la proportion d'immeubles exotiques, parmi ceux ayant un groupe simplement transitif sur les arêtes, tend vers 1.

J'ai utilisé le terme «exotique» dans les exemples ci-dessus. Précisons sa signification.

Définition 4.5. Un immeuble $\widetilde{A}_2$ est dit *de Bruhat-Tits* s'il provient d'une action de $\mathrm{PGL}_3(k)$ comme dans les deux premiers exemples ci-dessus, ou bien d'un plan octonionique. Il est dit *exotique* sinon.

Dans l'article [BaCL19], nous avons démontré le théorème suivant.

Théorème 4.6. *Soient X un immeuble $\widetilde{A}_2$, Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(X)$ agissant cocompactement sur X. Si X est exotique, alors toute représentation $\Gamma \to \mathrm{GL}_d(F)$ (pour $d \geqslant 1$ et F un corps commutatif) est d'image finie.*

Si X est l'immeuble associé à $\mathrm{PGL}_3(k)$, on sait que $\mathrm{Aut}(X)$ est un produit semi-direct de $\mathrm{PGL}_3(k)$ par $\mathrm{Aut}(k)$. Si k est de caractéristique positive, $\mathrm{Aut}(k)$ est infini, bien que compact. On peut donc *a priori* trouver des réseaux dont la projection sur $\mathrm{Aut}(k)$ est infinie. Plus généralement, si $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique connexe k-simple défini sur k, alors $\mathrm{Aut}(\mathbf{G}(k))$ (le groupe des automorphismes du groupe abstrait $\mathbf{G}(k)$) agit sur l'immeuble associé à $\mathbf{G}(k)$.

Une variante de la preuve du théorème 4.6 permet de démontrer :

Théorème 4.7. *Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique k-simple de k-rang $\geqslant 2$ sur un corps local k, et Γ un réseau dans $\mathrm{Aut}(\mathbf{G}(k))$. Si Γ a une projection infinie dans $\mathrm{Out}(\mathbf{G}(k))$, alors toute représentation $\Gamma \to \mathrm{GL}_d(F)$ (pour $d \geqslant 1$ et F un corps commutatif) est d'image finie.*

L'existence de réseaux avec une projection infinie dans $\mathrm{Out}(\mathbf{G}(k))$ est à l'heure actuelle une question ouverte, posée par Y. Cornulier dans [Cor14].

4.2.2. Bord à l'infini. Soit X un immeuble $\widetilde{A}_2$ localement fini. On note q son ordre. Rappelons que $\partial_\infty X$ peut être défini comme l'ensemble des rayons géodésiques, quotienté par la relation «être à distance de Hausdorff finie». L'espace $\partial_\infty X$ peut être muni d'une distance (la métrique de Tits) qui en fait le graphe d'incidence d'un plan projectif $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$. On peut caractériser la régularité de l'immeuble X en fonction de ce plan projectif (voir le livre [Wei09]).

THÉORÈME 4.8. *Le plan projectif* $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ *a la propriété de Moufang si et seulement si* X *est un immeuble de Bruhat-Tits.*

Si $u \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$, on peut munir l'ensemble des rayons tendant vers u d'une pseudo-métrique : $d_u(\rho, \rho') = \inf_{t,t'} d(\rho(t), \rho'(t'))$.

LEMME 4.9. *L'espace métrique quotient obtenu est alors un arbre* $(q+1)$*-régulier, que l'on note* T_u*. Le bord* $\partial_\infty T_u$ *s'identifie canoniquement à* $\mathrm{Res}(u)$*.*

(Pour des preuves ou plus d'informations sur les arbres T_u, je renvois également au livre [Wei09], et en particulier son chapitre 11.)

Dans le cas de l'immeuble associé à $\mathrm{PGL}_3(k)$, le sommet u correspond à une droite ou un plan de k^3, disons un plan $P \subset k^3$ pour fixer les idées. L'arbre T_u est alors l'arbre de Bruhat-Tits associé à $\mathrm{PGL}(P)$. Son bord est l'ensemble des droites de P ; il s'identifie bien à $\mathrm{Res}(u)$.

Si $u \in \mathcal{P}$ et $v \in \mathcal{L}$ ne sont pas incidents, alors on peut trouver des géodésiques dans X qui relient u à v. Dans ce cas toutes ces géodésiques sont parallèles ; la distance entre deux géodésiques est donc bien définie et on obtient un espace métrique que je vais noter $T_{u,v}$. On démontre [Wei09, Proposition 11.16] que $T_{u,v}$ est encore un arbre $(q+1)$-régulier et que les applications naturelles $T_{u,v} \to T_u$ et $T_{u,v} \to T_v$ sont des isométries. De plus la composition de ces isométries $T_u \to T_{u,v} \to T_v$ induit au bord la perspectivité $[u,v] : \mathrm{Res}(u) \to \mathrm{Res}(v)$, et on notera donc également $[u,v]$ l'isométrie $T_u \to T_v$ obtenue. En composant ces perspectivités, on obtient donc le lemme suivant.

LEMME 4.10. *L'action du groupe des projectivités* $\Pi(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ *sur* $\mathrm{Res}(u)$ *s'étend en une action sur* $\partial_\infty T_u$*.*

En combinant un ancien résultat de Schleirmacher [Sch70] avec des résultats récents de Caprace et Stulemeijer [CaS15], nous démontrons :

THÉORÈME 4.11. *Soit* P *l'adhérence de* $\Pi(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ *dans* $\mathrm{Aut}(T_u)$*. Si* P *a un sous-groupe ouvert ayant une représentation continue fidèle dans un* $\mathrm{GL}_n(k)$*, où* k *est un corps local, alors* X *est un immeuble de Bruhat-Tits.*

L'objectif va donc être, à partir d'une représentation linéaire de Γ d'image infinie, de fabriquer une représentation injective de P.

4.3. Flots sur l'immeuble

L'outil principal pour la preuve du théorème 4.6 est l'introduction d'un flot associé à l'immeuble, appelé le *flot singulier*. L'idée est d'imiter le flot du groupe $S_0 = \left\{ \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ 0 & p^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ sur $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{Q}_p)/\Gamma$ quand Γ est un réseau de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{Q}_p)$.

Pour cela, reprenons les notations ci-dessus et fixons $u \in \mathcal{P}$, $v \in \mathcal{L}$ tels que u n'est pas incident à v. On a défini ci-dessus un arbre $T_{u,v}$. Il est simplicialement isomorphe à l'arbre $(q+1)$-régulier que l'on va noter T_{q+1}. On note Υ le sous-complexe de X obtenu comme réunion de toutes les géodésiques entre u et v. Il ne dépend pas (à isomorphisme simplicial près) de u et v, et il est isométrique à $\mathbb{R} \times T_{q+1}$.

Définition 4.12. Le *flot singulier* $\widetilde{\mathcal{W}}$ sur X est l'espace des plongements simpliciaux $\Upsilon \to X$, muni de la topologie de la convergence simple.

Il est muni d'une action de Γ (par post composition), et d'une action de $\mathrm{Aut}(\Upsilon)$ (par précomposition).

Le groupe $\mathrm{Aut}(\Upsilon)$ contient un sous-groupe S isomorphe à $\mathbb{Z}$ (action de translation des géodésiques), mais contient aussi le groupe complet d'automorphismes d'un arbre. Celui-ci est trop gros pour notre but. Pour revenir au cas classique où Γ est un réseau dans $G = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{Q}_p)$, il faudrait arriver à se limiter à une seule orbite.

C'est ce qu'on va faire grâce aux définitions qui vont suivre. Pour commencer, nous allons supposer à partir de maintenant que Γ préserve le type (donc agit bien par automorphismes sur $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$). Ce n'est pas une hypothèse restrictive dans la mesure où $\mathrm{Aut}(X)$ a un sous-groupe d'indice fini qui préserve le type.

Remarquons tout d'abord qu'un $\phi \in \widetilde{\mathcal{W}}$ définit deux sommets $u \in \mathcal{P}$ et $v \in \mathcal{L}$ (quitte à échanger $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$) définis comme les limites dans $\partial_\infty X$ de $\phi(t,x)$ quand t tend vers $-\infty$ et $+\infty$ respectivement (ces limites ne dépendant pas de $x \in T_{q+1}$). On note alors $u = \phi^+$ et $v = \phi^-$. De plus, pour $x \in T_{q+1}$ fixé, $\{\phi(t,x) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est une géodésique de X qui définit un point de $T_{u,v}$. Ainsi ϕ définit une application (qui est un isomorphisme simplicial) $f : T_{q+1} \to T_u$, que l'on va noter $\pi_+(\phi)$. On définit de même $\pi_-(\phi) : T_{q+1} \to T_v$.

Définition 4.13. Soit $\phi, \phi' \in \widetilde{\mathcal{W}}$. On note $\phi \sim_+ \phi'$ (resp. $\phi \sim_- \phi'$) si $\pi_+(\phi) = \pi_+(\phi')$ (resp. $\pi_-(\phi) = \pi_-(\phi')$).

On définit également les relations d'équivalence orbitale $\sim_S$ et $\sim_\Gamma$ comme suit : $\phi \sim_S \phi'$ s'il existe $s \in S$ tel que $\phi(t,x) = \phi'(t+s,x)$ pour tout $(t,x) \in \Upsilon$, et $\phi \sim_\Gamma \phi'$ s'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma\phi(t,x) = \phi'(t,x)$ pour tout $t, x \in \Upsilon$.

Finalement, on note $\sim$ la relation d'équivalence engendrée par $\sim_+$, $\sim_-$ et les relations $\sim_S$ et $\sim_\Gamma$.

L'espace $\mathcal{W}$ est l'adhérence d'une classe d'équivalence (pour $\sim$) d'un $\phi_0 \in \widetilde{\mathcal{W}}$.

Par construction, l'espace $\mathcal{W}$ est muni d'une action de Γ et d'une action de S (et ces deux actions commutent). Par contre, le groupe $\mathrm{Aut}(\Upsilon)$, qui agissait sur $\widetilde{\mathcal{W}}$, n'agit plus sur $\mathcal{W}$. Cependant, nous allons voir que le groupe des perspectivités $\Pi(\mathcal{P},\mathcal{L})$, qui est naturellement un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\Upsilon)$, agit encore sur $\mathcal{W}$.

En effet, soit $\phi,\phi' \in \widetilde{\mathcal{W}}$ tels que $\phi \sim_+ \phi'$. Notons $v = \phi^+ = \phi'^+$, $u = \phi^-$ et $u' = \phi'^-$. On a donc par hypothèse $\pi_+(\phi) = \pi_+(\phi') : T_{q+1} \to T_v$. Mais alors on en déduit que $\pi_-(\phi')$ est en fait égal à la composition $[v,u'] \circ \pi_+(\phi')$. De même $\pi_-(\phi) = [v,u] \circ \pi_+(\phi)$. Par conséquent $[u,v,u'] \circ \pi_-(\phi) = \pi_-(\phi')$ (rappelons que la perspectivité $[u,v]$ peut être vue comme un isomorphisme $T_u \to T_v$, et que $[u,v,u'] = [u,v] \circ [v,u']$.)

Partant de ϕ_0, notons $u_0 = \phi_0^-$ et $v_0 = \phi_0^+$. Pour tout $v \in \mathcal{L}$ non adjacent à u_0, il est facile de trouver $\phi_1 \in \widetilde{\mathcal{W}}$ tel que $\phi_1^+ = v$ et $\phi_1 \sim_- \phi_0$; en particulier on a alors $\phi_1 \in \mathcal{W}$ et $\pi_-(\phi_1) = [u,v]$. Répétant cet argument, on trouve, pour toute suite de sommets $u_0, u_1, u_2, \dots u_n, u_0$ tels que la perspectivité $[u_1, u_2, \dots u_n, u_0]$ est bien définie, un nouveau $\phi \in \mathcal{W}$ tel que $\phi^- = u_0$, $\phi^+ = v_0$, et $\pi_-(\phi) = [u_1, u_2, \dots u_n, u_0] \circ \pi_-(\phi_0)$. On en déduit que $\phi = [u_1, u_2, \dots u_n, u_0] \cdot \phi_0 \in \mathcal{W}$, ce qui montre bien qu'un élément du groupe $\Pi(\mathcal{P},\mathcal{L})$ préserve la classe de ϕ_0.

Pour conclure ce paragraphe, revenons au cas où X est l'immeuble de $G = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{Q}_p)$, et S_0 est comme ci-dessus. Alors le groupe des projectivités $\Pi(\mathcal{P},\mathcal{L})$ est isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$, et le normalisateur de S_0 dans G est également isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Le stabilisateur (dans G) d'un élément de $\mathcal{W}$ est trivial. Son orbite est donc (comme G-ensemble) isomorphe à G ; elle est munie d'une action de G (par multiplication à gauche), d'une action de S_0 (par multiplication à droite) et d'une action de $N_G(S_0)$ (par multiplication à droite également) ; ces trois actions commutent deux à deux. On peut effectivement vérifier que l'espace $\mathcal{W}$ défini ci-dessus est exactement la G-orbite de ϕ_0 : il faut pour cela interpréter les relations $\sim_+$ et $\sim_-$ comme des relations d'équivalences orbitales pour des sous-groupes unipotents. Notons que dans ce cas la relation $\sim_\Gamma$ est redondante.

Une fois défini le flot $\mathcal{W}$, on définit une mesure sur cet espace qui soit à la fois Γ-invariante et S-invariante. La construction devient assez technique et je me réfère à [BaCL19] pour cela. Le théorème final est le suivant ; ce sera l'outil principal pour démontrer le théorème 4.6.

Théorème 4.14. *Il existe une mesure de probabilité λ sur $\mathcal{W}/S$, quasi-invariante par Γ et par P, telle quel l'action de Γ sur $\mathcal{W}/S$ est ergodique.*

Pour la preuve de l'ergodicité, on se place plutôt sur $\mathcal{W}/\Gamma$, qui porte une mesure de probabilité S-invariante ; la preuve s'inspire de l'argument de Hopf pour le flot géodésique en courbure négative.

4.4. Preuve de la non-linéarité

Voici maintenant comment déduire du théorème 4.14 la non-linéarité d'un réseau dans un immeuble exotique. La majeure partie de la preuve est valide dans un immeuble exotique ou de Bruhat-Tits de manière indifférente ; c'est le théorème 4.11 qui permettra de conclure à la non-linéarité.

La stratégie de preuve suit essentiellement la preuve du théorème de superrigidité de Margulis (et d'ailleurs, dans le cas où Γ est un réseau de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{Q}_p)$, c'est le début d'une preuve possible).

Fixons un immeuble $\widetilde{A}_2$ quelconque (localement fini) X et Γ un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(X)$ qui agit proprement cocompactement sur X. Comme Γ agit cocompactement il est de type fini. De plus, il a la propriété (T) [Pan98]. On veut étudier les représentations $\Gamma \to \mathrm{GL}_n(K)$, où K est un corps quelconque. Vu que Γ est de type fini, on peut supposer que K est également de type fini, donc est un corps global, que l'on peut localiser. C'est la première étape de la preuve du théorème suivant, essentiellement dû à Breuillard et Gelander [BrG07], qui s'inspirent de la preuve de l'alternative de Tits [Tit72].

Théorème 4.15. *Soit* Γ *un groupe de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe un corps K*, un entier* $n > 0$ *et un morphisme* $\Gamma \to \mathrm{GL}_n(K)$ *dont l'image n'est pas virtuellement résoluble*

(ii) Il existe un corps local k*, un groupe algébrique* $\mathbf{G}$ *défini sur* k *et* k*-simple, et un morphisme* $\Gamma \to \mathbf{G}(k)$ *d'image Zariski-dense et non bornée.*

À partir de maintenant, on va donc supposer qu'il existe une représentation $\rho : \Gamma \to \mathbf{G}(k)$ Zariski-dense et non bornée dans un groupe algébrique simple sur un corps local k.

Soit (Y, μ) un Γ-espace de Lebesgue ergodique. Rappelons la définition suivante, vue dans la partie §1.5 (et due à Bader-Furman).

Rappelons que si $\mathbf{H}$ est un sous-groupe algébrique de $\mathbf{G}$ défini sur k, alors le quotient $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ est naturellement muni d'une structure de variété algébrique définie sur k. L'ensemble de ses k-points est noté $(\mathbf{G}/\mathbf{H})(k)$ (et $(\mathbf{G}/\mathbf{H})(k)$ ne s'identifient en général pas au quotient $\mathbf{G}(k)/\mathbf{H}(k)$.)

Définition 4.16. Une *représentation algébrique* de (Y, μ) est une application ρ-équivariante de Y vers $(\mathbf{G}/\mathbf{H})(k)$, où $\mathbf{H}$ est un sous-groupe algébrique de $\mathbf{G}$.

D'après le théorème 1.53, on sait que si Y est moyennable alors il existe une représentation algébrique non-triviale de Y.

L'ensemble des représentations algébriques est partiellement ordonné de la manière suivant : soit $\rho : Y \to \mathbf{G}/\mathbf{H}(k)$, $\rho' : Y \to (\mathbf{G}/\mathbf{H}')(k)$. On écrit $\rho \prec \rho'$ si $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathbf{H}'$ et ρ' s'obtient en composant ρ avec le morphisme naturel $\mathbf{G}/\mathbf{H} \to \mathbf{G}/\mathbf{H}'$. En combinant la noetherianité de $\mathbf{G}$ avec l'ergodicité de Y, on obtient (voir par exemple [BaF18c, Theorem 4.3 et 4.7]) le résultat suivant.

Proposition 4.17. *Il existe un sous-groupe algébrique* $\mathbf{H}$ *de* $\mathbf{G}$*, unique à conjugaison près, qui est minimal parmi les sous-groupes admettant une représentation algébrique* $Y \to (\mathbf{G}/\mathbf{H})(k)$*. De plus, il existe un morphisme* $\mathrm{Aut}_\Gamma(Y) \to N_G(H)$ *(où* $G = \mathbf{G}(k)$ *et* $H = \mathbf{H}(k)$*).*

Le sous-groupe $\mathbf{H}$ (ou le quotient $\mathbf{G}/\mathbf{H}$) est appelé un *portail* de l'espace Y.

Voici finalement la fin de la preuve du théorème 4.6. Soit Γ un groupe agissant proprement et cocompactement sur un immeuble X de type $\widetilde{A}_2$. Supposons que Γ a une représentation linéaire d'image infinie. D'après le théorème 4.15, on obtient une représentation Zariski-dense et non bornée dans un $\mathbf{G}(k)$, k local et $\mathbf{G}$ k-simple.

Considérons le flot singulier $\mathcal{W}$, ou plutôt le Γ-espace de Lebesgue $\mathcal{W}/S$ fourni par le théorème 4.14. Il est facile de trouver une application mesurable de $\mathcal{W}/S$ vers l'ensemble Δ des chambres de l'immeuble sphérique à l'infini ∂X. Or l'action de Γ sur Δ est moyennable [Léc10a]. Par conséquent, l'action de Γ sur $\mathcal{W}/S$ est également moyennable.

On peut donc utiliser le théorème 1.53 pour trouver une représentation algébrique non triviale de $\mathcal{W}/S$, ce qui nous vend un morphisme de $\mathrm{Aut}_\Gamma(\mathcal{W}/S)$ vers un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(k)$, pour un n assez grand.

Or, le groupe P agit sur $\mathcal{W}$, en commutant à la fois à l'action de S et à celle de Γ. Par conséquent, on obtient une représentation de P dans $\mathrm{GL}_n(k)$. Il n'est pas très difficile de vérifier les conditions du théorème 4.11, et on en déduit donc que X est un immeuble de Bruhat-Tits.

4.5. Questions et travaux en cours

(1) Soit Γ un réseau cocompact dans un immeuble $\widetilde{A}_2$ exotique. On sait que Γ n'a pas de représentation linéaires d'images infinies. Que se passe-t-il pour les représentations d'image finie ? Autrement dit, quels sont les quotients finis de Γ ?

En fait, après quelques expérimentations informatiques (avec l'aide également de S. Witzel), nous conjecturons le résultat suivant.

Conjecture. *Soit* Γ *un réseau cocompact dans un immeuble* $\widetilde{A}_2$ *exotique. Alors* Γ *est virtuellement simple.*

Une première étape pour démontrer cette conjecture serait le théorème suivant.

Théorème 4.18. *Soit* Γ *un réseau cocompact dans un immeuble* $\widetilde{A}_2$ *exotique. Alors tout sous-groupe distingué de* Γ *est d'indice fini.*

Ce théorème a été annoncé par T. Steger et Y. Shalom, mais aucune preuve écrite n'est disponible. Avec U. Bader, P.-E. Caprace et A. Furman, nous avons commencé à réécrire la preuve du théorème (fortement inspirée par la preuve analogue de Margulis pour les réseaux de rang supérieur).

Nous espérons également généraliser ce résultat à une classification des IRS de Γ : tout IRS de Γ devrait être supporté sur les sous-groupes d'indices finis, voire peut-être démontrer la rigidité des caractères, dans l'esprit de [Pet14].

Pour démontrer la conjecture ci-dessus, la deuxième étape serait donc de compter les quotients finis de Γ. Il semble qu'il faille de nouvelles idées pour y arriver.

(2) Peut-on simplifier la définition du flot singulier ? Ce sont des questions d'apparence technique, mais qui sont je pense assez importantes. Par exemple, je ne sais déjà pas si les classes d'équivalences pour $\sim$ sont fermées ou pas, ou de manière assez proche, si le groupe des projectivités est fermé ou pas dans $\mathrm{Aut}(T_u)$. Si l'immeuble est de Bruhat-Tits, ce groupe est fermé ; il est probable que ce ne soit pas le cas dans tous les autres cas (comparer à [Sal+95, §66]). Je ne sais pas non plus à quel point il est important de saturer la relation d'équivalence par l'action de Γ : par exemple, si $\Gamma < \mathrm{PGL}_3(\mathbb{Q}_p)$, il n'y a rien besoin de rajouter. Cette saturation joue un rôle important dans la preuve du théorème 4.7 : si elle est facultative, on en déduirait des informations intéressantes sur les réseaux de $\mathrm{Aut}(\mathbf{G}(\mathbb{K}))$.

(3) Quelles sont les propriétés ergodiques du flot singulier ? Est-il mélangeant (cela pourrait être utile pour démontrer la rigidité des caractères par exemple) ? Quelle est son entropie topologique ? Cette dernière question pourrait encore faire apparaître une différence entre les immeubles de Bruhat-Tits et les immeubles exotiques : je pense que l'entropie devrait être plus grande si l'immeuble est exotique.

(4) Que se passe-t-il pour les autres types d'immeubles ? Comme il n'existe pas d'immeubles exotiques de rang $\geqslant 3$, il reste à s'intéresser aux autres immeubles de rang 2 ($\widetilde{B}_2$ et $\widetilde{G}_2$). La construction d'une mesure ergodique sur le flot singulier devrait se généraliser sans trop de difficultés. La difficulté est que je ne connais pas d'équivalent du théorème de Schleirmacher dans ce cadre.

Bibliographie

[Abe+17] M. Abert, N. Bergeron, I. Biringer, T. Gelander, N. Nikolov, J. Raimbault et I. Samet, “On the growth of L^2-invariants for sequences of lattices in Lie groups”, Ann. of Math. (2) 185.**3** (2017), p. 711-790 (cf. p. 47)

[AbGV14] M. Abért, Y. Glasner et B. Virág, “Kesten’s theorem for invariant random subgroups”, Duke Math. J. 163.**3** (2014), p. 465-488 (cf. p. 47, 49)

[AbB08] P. Abramenko et K. S. Brown, *Buildings*, t. 248, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2008 (cf. p. 8)

[AdB98] S. Adams et W. Ballmann, “Amenable isometry groups of Hadamard spaces”, Math. Ann. 312.**1** (1998), p. 183-195 (cf. p. 19)

[Atk76] G. Atkinson, “Recurrence of co-cycles and random walks”, J. London Math. Soc. (2) 13.**3** (1976), p. 486-488 (cf. p. 45)

[BaCL19] U. Bader, P.-E. Caprace et J. Lécureux, “On the linearity of lattices in affine buildings and ergodicity of the singular Cartan flow”, J. Amer. Math. Soc. 32.**2** (2019), p. 491-562 (cf. p. 53, 55, 58)

[BaDL16a] U. Bader, B. Duchesne et J. Lécureux, “Furstenberg maps for CAT(0) targets of finite telescopic dimension”, Ergodic Theory Dynam. Systems 36.**6** (2016), p. 1723-1742 (cf. p. 11, 16, 19, 21, 22, 24, 28)

[BaDL16b] ———, “Amenable invariant random subgroups”, Israel J. Math. 213.**1** (2016), With an appendix by Phillip Wesolek, p. 399-422 (cf. p. 11, 47, 49, 51)

[BaDL17] ———, “Almost algebraic actions of algebraic groups and applications to algebraic representations”, Groups Geom. Dyn. 11.**2** (2017), p. 705-738 (cf. p. 11, 33, 36, 37)

[BaF13] U. Bader et A. Furman, “Algebraic Representations of Ergodic Actions and Super-Rigidity”, Prépublication (2013), arXiv : `1311.3696` (cf. p. 33)

[BaF14] ———, *Boundaries, rigidity of representations, and Lyapunov exponents*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. III, Kyung Moon Sa, Seoul, 2014, p. 71-96 (cf. p. 9, 13, 15-18)

[BaF18a] ———, “An extension of Margulis’ Super-Rigidity Theorem”, Prépublication (2018), arXiv : `1810.01607` (cf. p. 33, 34)

[BaF18b] ———, “Margulis’ Super-Rigidity Theorem for non-lattice”, Prépublication (2018), arXiv : `1810.01608` (cf. p. 33)

[BaF18c] ———, “Super-Rigidity and non-linearity for lattices in products”, Prépublication (2018), arXiv : `1802.09931` (cf. p. 33, 59)

[BeS01] I. Benjamini et O. Schramm, “Recurrence of distributional limits of finite planar graphs”, Electron. J. Probab. 6 (2001), no. 23, 13 pp. (electronic)

[BeQ16] Y. Benoist et J.-F. Quint, *Random walks on reductive groups*, t. 62, Ergeb. Math. Grenz. 3. Folge. Springer, 2016 (cf. p. 19, 24, 29, 45)

[BeZ76] I. N. Bernstein et A. V. Zelevinskii, “Representations of the group $GL(n, F)$, where F is a local non-Archimedean field”, Uspehi Mat. Nauk 31.**3(189)** (1976), p. 5-70 (cf. p. 35)

[BiT17] I. Biringer et O. Tamuz, "Unimodularity of invariant random subgroups", Trans. Amer. Math. Soc. 369.**6** (2017), p. 4043-4061 (cf. p. 49)

[Bre17] C. Bregman, "Isometry groups of CAT(0) cube complexes", Prépublication (2017), arXiv : `1712.04805` (cf. p. 41)

[BrG07] E. Breuillard et T. Gelander, "A topological Tits alternative", Ann. of Math. (2) 166.**2** (2007), p. 427-474 (cf. p. 59)

[Bre+17] E. Breuillard, M. Kalantar, M. Kennedy et N. Ozawa, "C^*-simplicity and the unique trace property for discrete groups", Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 126 (2017), p. 35-71 (cf. p. 50)

[BrH99] M. R. Bridson et A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, t. 319, Grund. Math. Wiss. Springer-Verlag, 1999 (cf. p. 20)

[BuM99] M. Burger et N. Monod, "Bounded cohomology of lattices in higher rank Lie groups", J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 1.**2** (1999), p. 199-235 (cf. p. 31)

[BuM02] ———, "Continuous bounded cohomology and applications to rigidity theory", Geom. Funct. Anal. 12.**2** (2002), p. 219-280 (cf. p. 14)

[BuM96] M. Burger et S. Mozes, "CAT(-1)-spaces, divergence groups and their commensurators", J. Amer. Math. Soc. 9.**1** (1996), p. 57-93 (cf. p. 14, 23)

[BuI09] M. Burger et A. Iozzi, "A useful formula from bounded cohomology", Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités, t. 18, Sémin. Congr. Soc. Math. France, Paris, 2009, p. 243-292 (cf. p. 29, 31, 32)

[BuIW10] M. Burger, A. Iozzi et A. Wienhard, "Surface group representations with maximal Toledo invariant", Ann. of Math. (2) 172.**1** (2010), p. 517-566 (cf. p. 30-32)

[CaL10] P.-E. Caprace et A. Lytchak, "At infinity of finite-dimensional CAT(0) spaces", Math. Ann. 346.**1** (2010), p. 1-21 (cf. p. 19, 20, 48)

[CaM09a] P.-E. Caprace et N. Monod, "Isometry groups of non-positively curved spaces: discrete subgroups", J. Topol. 2.**4** (2009), p. 701-746 (cf. p. 26, 28, 48)

[CaM09b] ———, "Isometry groups of non-positively curved spaces: structure theory", J. Topol. 2.**4** (2009), p. 661-700 (cf. p. 48)

[CaM14] ———, "Relative amenability", Groups Geom. Dyn. 8.**3** (2014), p. 747-774 (cf. p. 49)

[CaS11] P.-E. Caprace et M. Sageev, "Rank rigidity for CAT(0) cube complexes", Geom. Funct. Anal. 21.**4** (2011), p. 851-891 (cf. p. 39, 41, 42, 45)

[CaS15] P.-E. Caprace et T. Stulemeijer, "Totally Disconnected Locally Compact Groups with a Linear Open Subgroup", Int. Math. Res. Not. IMRN **24** (2015), p. 13800-13829 (cf. p. 56)

[CarKW94] D. I. Cartwright, V. A. Kaimanovich et W. Woess, "Random walks on the affine group of local fields and of homogeneous trees", Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 44.**4** (1994), p. 1243-1288 (cf. p. 46)

[Car+93] D. I. Cartwright, A. M. Mantero, T. Steger et A. Zappa, "Groups acting simply transitively on the vertices of a building of type $\tilde{A}_2$. II. The cases $q = 2$ and $q = 3$", Geom. Dedicata 47.**2** (1993), p. 167-223 (cf. p. 55)

[ChFI16] I. Chatterji, T. Fernós et A. Iozzi, "The median class and superrigidity of actions on CAT(0) cube complexes", J. Topol. 9.**2** (2016), With an appendix by Pierre-Emmanuel Caprace, p. 349-400 (cf. p. 45)

[Cle07] J.-L. Clerc, "An invariant for triples in the Shilov boundary of a bounded symmetric domain", Comm. Anal. Geom. 15.**1** (2007), p. 147-173 (cf. p. 32)

[Cor14] Y. Cornulier, "Aspects de la géométrie des groupes", Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Sud, 2014 (cf. p. 55) [dlHar07] P. de la Harpe, “On simplicity of reduced C^*-algebras of groups”, Bull. Lond. Math. Soc. 39.**1** (2007), p. 1-26 (cf. p. 49)

[DeP12] T. Delzant et P. Py, “Kähler groups, real hyperbolic spaces and the Cremona group”, Compos. Math. 148.**1** (2012), p. 153-184 (cf. p. 24)

[DoT87] A. Domic et D. Toledo, “The Gromov norm of the Kaehler class of symmetric domains”, Math. Ann. 276.**3** (1987), p. 425-432 (cf. p. 31)

[Duc13] B. Duchesne, “Infinite-dimensional nonpositively curved symmetric spaces of finite rank”, Int. Math. Res. Not. IMRN **7** (2013), p. 1578-1627 (cf. p. 21, 24, 25, 27)

[Duc15] ———, “Superrigidity in infinite dimension and finite rank via harmonic maps”, Groups Geom. Dyn. 9.**1** (2015), p. 133-148 (cf. p. 24)

[Duc+15] B. Duchesne, Y. Glasner, N. Lazarovich et J. Lécureux, “Geometric density for invariant random subgroups of groups acting on CAT(0) spaces”, Geom. Dedicata 175 (2015), p. 249-256 (cf. p. 11, 47, 48)

[DuLP18] B. Duchesne, J. Lécureux et M. B. Pozzetti, “Boundary maps and maximal representations on infinite dimensional Hermitian symmetric spaces”, Prépublication (2018), arXiv : `1810.10208` (cf. p. 10, 16, 24, 26, 27, 29-31)

[Eff65] E. G. Effros, “Transformation groups and C^*-algebras”, Ann. of Math. (2) 81 (1965), p. 38-55 (cf. p. 35)

[EP05] A. J. Engler et A. Prestel, *Valued fields*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005, p. x+205 (cf. p. 35)

[Ers10] A. Erschler, *Poisson-Furstenberg boundaries, large-scale geometry and growth of groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010, p. 681-704 (cf. p. 17)

[Ess13] J. Essert, “A geometric construction of panel-regular lattices for buildings of types $\tilde{A}_2$ and $\tilde{C}_2$”, Algebr. Geom. Topol. 13.**3** (2013), p. 1531-1578 (cf. p. 55)

[Fer18] T. Fernós, “The Furstenberg-Poisson boundary and CAT(0) cube complexes”, Ergodic Theory Dynam. Systems 38.**6** (2018), p. 2180-2223 (cf. p. 42, 44)

[FLM18] T. Fernós, J. Lécureux et F. Mathéus, “Random walks and boundaries of CAT(0) cubical complexes”, Comment. Math. Helv. 93.**2** (2018), p. 291-333 (cf. p. 11, 23, 39, 40, 42-45)

[Fur02] A. Furman, “Random walks on groups and random transformations”, Handbook of dynamical systems, Vol. 1A, North-Holland, 2002, p. 931-1014 (cf. p. 17)

[Fur73] H. Furstenberg, *Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces*, Harmonic analysis on homogeneous spaces (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVI, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1972), 1973, p. 193-229 (cf. p. 10)

[GaGM14] O. Gabber, P. Gille et L. Moret-Bailly, “Fibrés principaux sur les corps valués henséliens”, Algebr. Geom. 1.**5** (2014), p. 573-612 (cf. p. 35)

[Gel18a] T. Gelander, “A view on Invariant Random Subgroups and Lattices”, Prépublication (2018), arXiv : `1807.06979` (cf. p. 47)

[Gel18b] ———, “A lecture on invariant random subgroups”, New directions in locally compact groups, t. 447, London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, 2018, p. 186-204 (cf. p. 47)

[Gen17] A. Genevois, “Hyperbolicities in CAT(0) cube complexes”, Prépublication (2017), arXiv : `1709.08843` (cf. p. 40)

[GlW16] E. Glasner et B. Weiss, “Weak mixing properties for non-singular actions”, Ergodic Theory Dynam. Systems 36.**7** (2016), p. 2203-2217 (cf. p. 14)

[Gro93] M. Gromov, “Asymptotic invariants of infinite groups”, Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), t. 182, London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, 1993, p. 1-295 (cf. p. 24)

[Hag14] M. F. Hagen, “Weak hyperbolicity of cube complexes and quasi-arboreal groups”, J. Topol. 7.**2** (2014), p. 385-418 (cf. p. 43)

[HaK77] L. A. Harris et W. Kaup, “Linear algebraic groups in infinite dimensions”, Illinois J. Math. 21.**3** (1977), p. 666-674 (cf. p. 25)

[Hel01] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, t. 34, Grad. Stud. Math. Corrected reprint of the 1978 original, Amer. Math. Soc., 2001 (cf. p. 30)

[Kai87] V. A. Kaimanovich, “Lyapunov exponents, symmetric spaces and a multiplicative ergodic theorem for semisimple Lie groups”, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 164.**Differentsialnaya Geom. Gruppy Li i Mekh. IX** (1987), p. 29-46, 196-197 (cf. p. 19)

[Kai03] ———, “Double ergodicity of the Poisson boundary and applications to bounded cohomology”, Geom. Funct. Anal. 13.**4** (2003), p. 852-861 (cf. p. 18)

[Kai00] V. A. Kaimanovich, “The Poisson formula for groups with hyperbolic properties”, Ann. of Math. (2) 152.**3** (2000), p. 659-692 (cf. p. 17, 39, 44)

[KaM99] A. Karlsson et G. A. Margulis, “A multiplicative ergodic theorem and nonpositively curved spaces”, Comm. Math. Phys. 208.**1** (1999), p. 107-123 (cf. p. 11, 19, 23, 39, 45)

[Kec10] A. S. Kechris, *Global aspects of ergodic group actions*, t. 160, Math. Surveys and Mono. Amer. Math. Soc, 2010 (cf. p. 49)

[Kes75] H. Kesten, “Sums of stationary sequences cannot grow slower than linearly”, Proc. Amer. Math. Soc. 49 (1975), p. 205-211 (cf. p. 45)

[Kle99] B. Kleiner, “The local structure of length spaces with curvature bounded above”, Math. Z. 231.**3** (1999), p. 409-456 (cf. p. 20)

[KL97] B. Kleiner et B. Leeb, “Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings”, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **86** (1997), 115-197 (1998) (cf. p. 21)

[KL06] ———, “Rigidity of invariant convex sets in symmetric spaces”, Invent. Math. 163.**3** (2006), p. 657-676 (cf. p. 29)

[KoM17] V. Koziarz et J. Maubon, “Maximal representations of uniform complex hyperbolic lattices”, Ann. of Math. (2) 185.**2** (2017), p. 493-540 (cf. p. 30, 31)

[LeB17] A. Le Boudec, “C^*-simplicity and the amenable radical”, Invent. Math. 209.**1** (2017), p. 159-174 (cf. p. 50)

[Léc10a] J. Lécureux, “Amenability of actions on the boundary of a building”, Int. Math. Res. Not. IMRN **17** (2010), p. 3265-3302 (cf. p. 60)

[MaT18] J. Maher et G. Tiozzo, “Random walks on weakly hyperbolic groups”, J. Reine Angew. Math. 742 (2018), p. 187-239 (cf. p. 23, 39)

[Mar91] G. A. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, t. 17, Erg. Math. und ihrer Grenz. (3), Springer-Verlag, 1991 (cf. p. 9, 15)

[Mon01] N. Monod, *Continuous bounded cohomology of locally compact groups*, t. 1758, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2001, p. x+214 (cf. p. 30)

[MoP14] N. Monod et P. Py, “An exotic deformation of the hyperbolic space”, Amer. J. Math. 136.**5** (2014), p. 1249-1299 (cf. p. 24)

[Mos73] G. D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Ann. Math. Studies, No. 78, Princeton Univ. Press, 1973 (cf. p. 9)

[NS13] A. Nevo et M. Sageev, “The Poisson boundary of CAT(0) cube complex groups”, Groups Geom. Dyn. 7.**3** (2013), p. 653-695 (cf. p. 42)

[Pan98] P. Pansu, “Formules de Matsushima, de Garland et propriété (T) pour des groupes agissant sur des espaces symétriques ou des immeubles”, Bull. Soc. Math. France 126.**1** (1998), p. 107-139 (cf. p. 59)

[Par00] A. Parreau, “Immeubles affines: construction par les normes et étude des isométries”, Crystallographic groups and their generalizations (Kortrijk, 1999), t. 262, Contemp. Math. Amer. Math. Soc., 2000, p. 263-302 (cf. p. 21, 37)

[Pet14] J. Peterson, *Character Rigidity for lattices in higher-rank Lie groups*, Preprint available at `math.vanderbilt.edu/peters10/rigidity.pdf`, 2014 (cf. p. 61)

[Pet] ———, “Characterization of amenable actions”, MathOverflow, eprint : `https://mathoverflow.net/q/132147` (cf. p. 13)

[PlS81] P. Plaumann et K. Strambach, éd., *Geometry—von Staudt’s point of view*, t. 70, NATO Adv. Study Inst. Ser. Ser. C: Mathematical and Physical Sciences, D. Reidel Pub. Co., 1981 (cf. p. 54)

[Poz15] M. B. Pozzetti, “Maximal representations of complex hyperbolic lattices into $\mathrm{SU}(M,N)$”, Geom. Funct. Anal. 25.**4** (2015), p. 1290-1332 (cf. p. 30, 32)

[Poz] ———, “Higher rank Teichmüller theories”, Séminaire Bourbaki 1161, Mars 2019. Disponible sur `http://www.bourbaki.ens.fr/TEXTES/Exp1161-Pozzetti.pdf` (cf. p. 29)

[Pra79] G. Prasad, “Lattices in semisimple groups over local fields”, Studies in algebra and number theory, t. 6, Adv. in Math. Suppl. Stud. Academic Press, 1979, p. 285-356 (cf. p. 9)

[Qui05] J.-F. Quint, “Groupes convexes cocompacts en rang supérieur”, Geom. Dedicata 113 (2005), p. 1-19 (cf. p. 29)

[Rad19] N. Radu, “A homogeneous $\widetilde{A}_2$-building with a non-discrete automorphism group is Bruhat-Tits”, Geom. Dedicata 199 (2019), p. 1-26 (cf. p. 55)

[Ron84] M. A. Ronan, “Triangle geometries”, J. Combin. Theory Ser. A 37.**3** (1984), p. 294-319 (cf. p. 55)

[Sag14] M. Sageev, “CAT(0) cube complexes and groups”, Geometric group theory, t. 21, IAS/Park City Math. Ser. Amer. Math. Soc., 2014, p. 7-54 (cf. p. 40)

[Sal+95] H. Salzmann, D. Betten, T. Grundhöfer, H. Hähl, R. Löwen et M. Stroppel, *Compact projective planes*, t. 21, De Gruyter Exp. Math. With an introduction to octonion geometry, Walter de Gruyter & Co., 1995 (cf. p. 61)

[Sch70] A. Schleiermacher, “Reguläre Normalteiler in der Gruppe der Projektivitäten bei projektiven und affinen Ebenen”, Math. Z. 114 (1970), p. 313-320 (cf. p. 56)

[Sha99] Y. Shalom, “Invariant measures for algebraic actions, Zariski dense subgroups and Kazhdan’s property (T)”, Trans. Amer. Math. Soc. 351.**8** (1999), p. 3387-3412 (cf. p. 36)

[Tit72] J. Tits, “Free subgroups in linear groups”, J. Algebra 20 (1972), p. 250-270 (cf. p. 59)

[Tit13] J. Tits, *Résumés des cours au Collège de France 1973–2000*, t. 12, Documents Mathématiques, Soc. Math. France, 2013 (cf. p. 55)

[Tuc12] R. D. Tucker-Drob, “Shift-minimal groups, fixed price 1, and the unique trace property”, Prépublication (2012), arXiv : `1211.6395` (cf. p. 49, 50)

[Wei09] R. M. Weiss, *The structure of affine buildings*, t. 168, Ann. of Math. Stud. Princeton Univ. Press, 2009 (cf. p. 56)

[Wer04] A. Werner, “Compactification of the Bruhat-Tits building of PGL by seminorms”, Math. Z. 248.**3** (2004), p. 511-526 (cf. p. 37)

[Wit17] S. Witzel, "On panel-regular $\widetilde{A}_2$ lattices", Geom. Dedicata 191 (2017), p. 85-135 (cf. p. 55)

[Zim77] R. J. Zimmer, "Amenable ergodic actions, hyperfinite factors, and Poincaré flows", Bull. Amer. Math. Soc. 83.**5** (1977), p. 1078-1080 (cf. p. 13)

[Zim84] ———, *Ergodic theory and semisimple groups*, t. 81, Mono. Math. Birkhäuser Verlag, 1984 (cf. p. 9, 13, 14, 49)