M2 Probabilités et Statistiques – Université Paris-Saclay

Mouvement brownien et calcul stochastique

Examen du 12 janvier 2022, 3 heures sans documents

Barème approximatif. Exercice 1 : 5 pts. Exercice 2 : 5 pts. Problème : 10 pts.

Dans l'Exercice 2 et le Problème, l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est muni d'une filtration complète $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$.

Exercice 1. *Les questions* **2** *et* **3** *sont indépendantes de la question* **1**. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel issu de 0. Comme dans le cours, on note $S_t = \sup_{s\leq t} B_s$, pour tout $t \geq 0$.

1. Pour tout réel $a \geq 0$, on pose $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$. Montrer que le processus $(T_a)_{a\geq 0}$ est à accroissements indépendants et stationnaires, au sens où, pour tous $0 \leq a \leq b$, la variable $T_b - T_a$ est indépendante de la tribu $\sigma(T_c, 0 \leq c \leq a)$ et a même loi que T_{b-a}.

2. On pose $G = \sup\{s \in [0,1] : B_s = 0\}$. La variable G est-elle un temps d'arrêt de la filtration canonique de B ? On justifiera la réponse par un argument précis.

3. Soit $t \in [0,1]$. Montrer à l'aide de la propriété de Markov simple que

$$P(G \geq t) = P(S'_{1-t} \geq |B_t|),$$

où la variable aléatoire S'_{1-t} a même loi que S_{1-t} mais est indépendante de B_t. En déduire que G a même loi que

$$\frac{N^2}{N^2 + N'^2}$$

où N et N' sont deux variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes.

Exercice 2. On rappelle que, pour tout réel x, $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{th}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel issu de 0. On se donne deux réels b et λ.

1. Ecrire la décomposition du processus

$$Y_t = \frac{b}{2}\,(B_t)^2\ \mathrm{th}(b(1-t)) + \lambda \int_0^t (B_s)^2\,\mathrm{d}s$$

comme somme d'une martingale locale et d'un processus à variation finie.

2. On suppose que $b^2 = 2\lambda$. Montrer que le processus

$$M_t = (\mathrm{ch}(b(1-t)))^{-1/2}\ \exp(-Y_t)$$

est une martingale locale (*on pourra chercher à écrire M_t comme une martingale exponentielle*).

3. En déduire que, pour tout $\lambda > 0$,

$$E\Big[\exp\Big(-\lambda\int_0^1 (B_t)^2\,\mathrm{d}t\Big)\Big] = (\mathrm{ch}(\sqrt{2\lambda}))^{-1/2}.$$

Problème. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel issu de 0, et soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une semimartingale continue. On suppose qu'il existe une fonction continue $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que

$$X_t = B_t + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}s.$$

1. Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour que $F(X_t)$ soit une martingale locale, il suffit que F satisfasse l'équation différentielle $F'' + 2\,b\,F' = 0$.

2. Vérifier que la solution de cette équation différentielle qui satisfait $F(0) = 0$ et $F'(0) = 1$ s'écrit sous la forme $F(x) = \int_0^x \exp(-2\beta(y))\,\mathrm{d}y$, avec une fonction β que l'on déterminera en termes de b. Dans la suite, F désigne cette solution particulière. On remarquera que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On note $M_t = F(X_t)$.

3. Dans cette question seulement, on suppose la fonction b intégrable ($\int_{\mathbb{R}} |b(x)|\mathrm{d}x < \infty$).

(a) Montrer que la martingale locale $M_t = F(X_t)$ est une vraie martingale.

(b) Montrer que $\langle M, M\rangle_\infty = \infty$ p.s.

(c) En déduire que

$$\limsup_{t\to\infty} X_t = +\infty\ ,\ \liminf_{t\to\infty} X_t = -\infty\ ,\ \text{p.s.}$$

4. On revient au cas général. Soient $c < 0$ et $d > 0$, et

$$T_c = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq c\}\ ,$$
$$T_d = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq d\}\ .$$

Montrer que, sur l'événement $\{T_c \wedge T_d = \infty\}$, les variables aléatoires $|B_{n+1} - B_n|$, pour $n \in \mathbb{N}$, sont majorées par une constante (déterministe) indépendante de n. En déduire que $P[T_c \wedge T_d = \infty] = 0$.

5. Calculer $P[T_c < T_d]$ en fonction des quantités $F(c)$ et $F(d)$.

6. Dans cette question seulement, on suppose que $b(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, que b est nulle sur $]-\infty, 0]$ et qu'il existe une constante $\alpha > 1/2$ telle que $b(x) \geq \alpha/x$ pour tout $x \geq 1$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir $c < 0$ tel que

$$P[T_n < T_c,\ \text{pour tout } n \geq 1] \geq 1 - \varepsilon.$$

En déduire que $X_t \longrightarrow +\infty$ quand $t \to \infty$, p.s. (on pourra observer que la martingale locale $M_{t\wedge T_c}$ est bornée).

7. Inversement, on suppose que $b(x) = 1/(2x)$ pour tout $x \geq 1$. Montrer que

$$\liminf_{t\to\infty} X_t = -\infty\ ,\ \text{p.s.}$$