M2 Mathématiques de l'Aléatoire — Université Paris Sud
Calcul stochastique et Processus de Markov

Feuille d'exercices n°1
Processus gaussiens

Dans tous les exercices ci-dessous, un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est fixé.

Exercice 1. Soit $(X_t)_{t\in[0,1]}$ un processus gaussien centré. On suppose que l'application $(t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$ est mesurable de $[0,1]\times\Omega$ dans $\mathbb{R}$. On note K la fonction de covariance de X.

1. Montrer que l'application $t \mapsto X_t$ est continue de $[0,1]$ dans $L^2(\Omega)$ si et seulement si K est continue sur $[0,1]^2$. On suppose dans la suite que cette condition est satisfaite.
2. Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $\int_0^1 |h(t)|\sqrt{K(t,t)}dt < \infty$. Montrer que, pour presque tout ω, l'intégrale $\int_0^1 h(t)X_t(\omega)dt$ est absolument convergente. On notera $Z = \int_0^1 h(t)X_t dt$.
3. On fait maintenant l'hypothèse un peu plus forte $\int_0^1 |h(t)|dt < \infty$. Montrer que Z est la limite dans L^2, quand $n \to \infty$, des variables $Z_n = \sum_{i=1}^n X_{\frac{i}{n}} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} h(t)dt$ et en déduire que Z est une variable gaussienne.
4. On suppose que K est de classe C^2. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, la limite
$$\dot{X}_t := \lim_{s\to t} \frac{X_s - X_t}{s-t}$$
existe dans $L^2(\Omega)$. Vérifier que $(\dot{X}_t)_{t\in[0,1]}$ est un processus gaussien centré. Calculer sa fonction de covariance.

Exercice 2. (Filtrage de Kalman)
On se donne deux suites indépendantes $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires gaussiennes indépendantes telles que pour tout n, ϵ_n est de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et η_n est de loi $\mathcal{N}(0,\delta^2)$, où $\sigma > 0$ et $\delta > 0$. On considère les deux autres suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations $X_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = a_n X_n + \epsilon_{n+1}$ et $Y_n = cX_n + \eta_n$, où c et a_n sont des constantes strictement positives. On pose
$$\hat{X}_{n/n} = \mathbb{E}[X_n \mid Y_0, Y_1, \ldots, Y_n]$$
$$\hat{X}_{n+1/n} = \mathbb{E}[X_{n+1} \mid Y_0, Y_1, \ldots, Y_n].$$
Le but de l'exercice est de trouver une formule récursive permettant de calculer ces deux suites de variables.

1. Vérifier que $\hat{X}_{n+1/n} = a_n \hat{X}_{n/n}$, pour tout $n \geq 0$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$,
$$\hat{X}_{n/n} = \hat{X}_{n/n-1} + \frac{\mathbb{E}[X_n Z_n]}{\mathbb{E}[Z_n^2]} Z_n,$$
avec $Z_n := Y_n - c\hat{X}_{n/n-1}$.

3. Calculer $\mathbb{E}[X_n Z_n]$ et $\mathbb{E}[Z_n^2]$ en fonction de $P_n := \mathbb{E}[(X_n - \hat{X}_{n/n-1})^2]$ et en déduire que pour tout $n \geq 1$,

$$\hat{X}_{n+1/n} = a_n \left(\hat{X}_{n/n-1} + \frac{cP_n}{c^2 P_n + \delta^2} Z_n \right).$$

4. Vérifier que $P_1 = \sigma^2$ et que l'on a, pour tout $n \geq 1$, la relation de récurrence

$$P_{n+1} := \sigma^2 + a_n^2 \frac{\delta^2 P_n}{c^2 P_n + \delta^2}.$$

Exercice 3. (Construction de Lévy du mouvement Brownien)
On pose, pour chaque $t \in [0;1]$, $h_0(t) = 1$ puis, pour tout entier $n \geq 0$ et tout $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$,

$$h_k^n(t) = 2^{n/2} \mathbf{1}_{[(2k)2^{-n-1},(2k+1)2^{-n-1})}(t) - 2^{n/2} \mathbf{1}_{[(2k+1)2^{-n-1},(2k+2)2^{-n-1})}(t).$$

On admettra que $h_0, (h_k^n)_{n \geq 0, 0 \leq k \leq 2^n - 1}$ est une base orthonormale de $L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dt)$. Soient $N_0, (N_k^n)_{n \geq 0, 0 \leq k \leq 2^n - 1}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Justifier l'existence d'une (unique) mesure Gaussienne sur $[0,1]$, d'intensité $\mathrm{d}t$ telle que $G(h_0) = N_0$ et $G(h_k^n) = N_k^n$ pour tout $n \geq 0$ et tout $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$.
2. On pose, pour tout $t \in [0,1]$, $B_t = G([0,t])$. Vérifier que

$$B_t = t\, N_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{2^n - 1} g_k^n(t)\, N_k^n \Big),$$

où la série converge dans L^2, et les fonctions $g_k^n : [0,1] \to [0, \infty)$ sont données par

$$g_k^n(t) = \int_0^t h_k^n(s) ds.$$

3. Pour tout entier $m \geq 0$ et tout $t \in [0,1]$, on pose

$$B_t^{(m)} = t\, N_0 + \sum_{n=0}^{m-1} \Big(\sum_{k=0}^{2^n - 1} g_k^n(t)\, N_k^n \Big).$$

Vérifier que la suite de fonctions continues $t \mapsto B_t^{(m)}(\omega)$ converge uniformément sur $[0,1]$ lorsque $m \to \infty$, pour presque tout ω.

4. En conclure que l'on peut, pour tout $t \geq 0$, construire une variable aléatoire B_t' qui est presque sûrement égale à B_t, de sorte que l'application $t \mapsto B_t'(\omega)$ soit continue pour tout $\omega \in \Omega$.