M2 Mathématiques de l'Aléatoire — Université Paris Sud
Calcul stochastique et Processus de Markov

Feuille d'exercices n°2
Propriétés du mouvement brownien

Dans tous les exercices ci-dessous, $(B_t)_{t\geqslant 0}$ désignera un mouvement brownien réel issu de 0. On note $S_t = \sup_{0\leq s\leq t} B_s$.

Exercice 1. (Retournement du temps)
On pose $B'_t = B_1 - B_{1-t}$ pour tout $t \in [0,1]$. Montrer que les deux processus $(B_t)_{t\in[0,1]}$ et $(B'_t)_{t\in[0,1]}$ ont même loi (c'est-à-dire que, pour tout $p \geq 1$ et tout choix de $t_1, \ldots, t_p$ dans $[0,1]$, $(B'_{t_1}, \ldots, B'_{t_p})$ a même loi que $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_p})$).

Exercice 2. (Pont brownien)
On pose $W_t = B_t - tB_1$ pour tout $t \in [0,1]$.

1. Montrer que $(W_t)_{t\in[0,1]}$ est un processus gaussien centré et donner sa fonction de covariance définie pour $s,t \in \mathbb{R}^+$ par $K(s,t) := \mathbb{E}[W_s W_t] - \mathbb{E}[W_s]\mathbb{E}[W_t]$.
2. Soient $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p < 1$. Montrer que la loi de $(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_p})$ a pour densité
$$g(x_1, \ldots, x_p) = \sqrt{2\pi}\, p_{t_1}(x_1) p_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) \cdots p_{t_p - t_{p-1}}(x_p - x_{p-1}) p_{1-t_p}(-x_p),$$
où $p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-x^2/2t)$. Justifier le fait que la loi de $(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_p})$ peut être interprétée comme la loi de $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_p})$ conditionnellement à $B_1 = 0$.
3. Vérifier que les deux processus $(W_t)_{t\in[0,1]}$ et $(W_{1-t})_{t\in[0,1]}$ ont même loi.

Exercice 3. (Inversion du temps)

1. Montrer que le processus $(W_t)_{t\geq 0}$ défini par $W_0 = 0$ et $W_t = tB_{1/t}$ pour $t > 0$ est indistinguable d'un mouvement brownien réel issu de 0 (vérifier d'abord que W est un pré-mouvement brownien).
2. En déduire que $\lim_{t\to\infty} \dfrac{B_t}{t} = 0$ p.s..

Exercice 4. (Non-différentiabilité)
A l'aide de la loi du tout ou rien, montrer que, p.s.,
$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \quad , \quad \liminf_{t\downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty .$$
En déduire que pour tout $s \geq 0$, la fonction $t \mapsto B_t$ n'est p.s. pas dérivable à droite en s.

Exercice 5. (Maxima locaux)
Montrer que p.s. les maxima locaux du mouvement brownien sont distincts : p.s. pour tout choix des rationnels p, q, r, s tels que $p < q < r < s$ on a
$$\sup_{p\leq t\leq q} B_t \neq \sup_{r\leq t\leq s} B_t .$$

Exercice 6. (Zéros du mouvement brownien)
Soit $H := \{t \in [0,1]; B_t = 0\}$. En utilisant la propriété de Markov forte, montrer que H est p.s. un sous-ensemble compact sans point isolé et de mesure de Lebesgue nulle de l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 7. (Temps d'atteinte)
Pour tout réel $a \geq 0$, on pose $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$. Montrer que le processus $(T_a)_{a\geq 0}$ est à accroissements indépendants et stationnaires, au sens où, pour tous $0 \leq a \leq b$, la variable $T_b - T_a$ est indépendante de la tribu $\sigma(T_c, 0 \leq c \leq a)$ et a même loi que T_{b-a}.

Exercice 8.
On pose $S := \inf\{t \geq 0 : B_t = 1\}$ et $T := \inf\{t \geq S : B_t = 0\}$.

1. La variable aléatoire T est-elle un temps d'arrêt ?
2. Déterminer la loi de T.

Exercice 9. (Loi de l'arcsinus)
On pose $T := \inf\{t \geq 0 : B_t = S_1\}$.

1. Montrer que $T < 1$ p.s. puis que T n'est pas un temps d'arrêt.
2. Vérifier que les trois variables aléatoires S_t, $S_t - B_t$ et $|B_t|$ ont même loi.
3. Montrer que T suit la loi dite de l'arcsinus qui a pour densité
$$g(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\,\mathbf{1}_{]0,1[}(t).$$
4. Montrer que les résultats des questions **1.** et **3.** restent vrais si on remplace T par $L := \sup\{t \leq 1 : B_t = 0\}$.

Exercice 10. (Loi du logarithme itéré)
Le but de l'exercice est de montrer la propriété suivante :
$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1 \quad \text{p.s.}$$
On pose $h(t) = \sqrt{2t\log\log t}$.

1. Montrer que, pour tout $t > 0$, $P(S_t > u\sqrt{t}) \sim \dfrac{2e^{-u^2/2}}{u\sqrt{2\pi}}$, quand u tend vers $+\infty$.
2. On se donne deux réels r et c tels que $1 < r < c^2$. Etudier le comportement des probabilités $P(S_{r^n} > c\,h(r^{n-1}))$ quand $n \to \infty$ et en déduire que p.s.
$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} \leq 1.$$
3. Montrer qu'il existe p.s. une infinité de valeurs de n telles que
$$B_{r^n} - B_{r^{n-1}} \geq \sqrt{\frac{r-1}{r}}\,h(r^n).$$
En déduire le résultat annoncé.
4. Que vaut la limite $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}}$?
5. Pour tout s fixé, montrer que p.s.
$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{B_{t+s} - B_s}{\sqrt{2t\log\log(1/t)}} = 1 \quad \text{et} \quad \liminf_{t\downarrow 0} \frac{B_{t+s} - B_s}{\sqrt{2t\log\log(1/t)}} = -1.$$
6. En déduire que p.s. les trajectoires de B ne sont nulle part $1/2-$hölderiennes.