M2 Mathématiques de l'Aléatoire — Université Paris Sud
Calcul stochastique et Processus de Markov

Feuille d'exercices n°4
Martingales locales

Dans les exercices qui suivent, on se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration complète $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$.

Exercice 1. Soit U une variable aléatoire réelle $\mathcal{F}_0$-mesurable, et soit M une martingale locale. Montrer que le processus $N_t = UM_t$ est encore une martingale locale.

Exercice 2. Soit M une martingale locale issue de 0

1. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $T_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| = n\}$. Montrer que p.s.

$$\Big\{\lim_{t\to\infty} M_t \text{ existe et est finie}\Big\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{T_n = \infty\} \subset \{\langle M, M\rangle_\infty < \infty\}.$$

2. On pose $S_n = \inf\{t \geq 0 : \langle M, M\rangle_t = n\}$ pour tout entier $n \geq 1$. Montrer qu'on a aussi p.s.

$$\{\langle M, M\rangle_\infty < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{S_n = \infty\} \subset \Big\{\lim_{t\to\infty} M_t \text{ existe et est finie}\Big\},$$

et conclure que

$$\Big\{\lim_{t\to\infty} M_t \text{ existe et est finie}\Big\} = \{\langle M, M\rangle_\infty < \infty\} \quad , \text{ p.s.}$$

Exercice 3. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $M^n = (M^n_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale issue de 0. On suppose dans tout l'exercice que

$$\lim_{n\to\infty} \langle M^n, M^n\rangle_\infty = 0$$

en probabilité.

1. Soit $\varepsilon > 0$, et, pour tout $n \geq 1$, soit

$$T^n_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : \langle M^n, M^n\rangle_t \geq \varepsilon\}.$$

Justifier le fait que T^n_ε est un temps d'arrêt, puis montrer que la martingale locale arrêtée

$$M^{n,\varepsilon}_t = M^n_{t\wedge T^n_\varepsilon} , \qquad \forall t \geq 0 ,$$

est une vraie martingale bornée dans L^2.

2. Montrer que

$$E\Big[\sup_{t\geq 0} |M^{n,\varepsilon}_t|^2\Big] \leq 4\,\varepsilon.$$

3. En écrivant, pour tout $a > 0$,

$$P\Big[\sup_{t\geq 0} |M^n_t| \geq a\Big] \leq P\Big[\sup_{t\geq 0} |M^{n,\varepsilon}_t| \geq a\Big] + P[T^n_\varepsilon < \infty]$$

montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{t\geq 0} |M^n_t|\Big) = 0$$

en probabilité.

Exercice 4.

1. Soit A un processus croissant (à trajectoires continues, adapté, tel que $A_0 = 0$) tel que $A_\infty < \infty$ p.s., et soit Z une variable positive intégrable. On suppose que, pour tout temps d'arrêt T, on a
$$E[A_\infty - A_T] \leq E[Z\,\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}].$$
Montrer en utilisant un temps d'arrêt bien choisi que pour tout $\lambda > 0$,
$$E[(A_\infty - \lambda)\,\mathbf{1}_{\{A_\infty>\lambda\}}] \leq E[Z\,\mathbf{1}_{\{A_\infty>\lambda\}}].$$

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante de classe C^1, telle que $f(0) = 0$ et soit $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ pour tout $x \geq 0$. Montrer que, sous les hypothèses de la question 1., on a
$$E[F(A_\infty)] \leq E[Z\,f(A_\infty)].$$
(On pourra remarquer que $F(x) = xf(x) - \int_0^x \lambda\, f'(\lambda)\,d\lambda$ pour tout $x \geq 0$.)

3. Soit M une martingale à trajectoires continues, bornée dans L^2, telle que $M_0 = 0$, et soit M_∞ la limite presque sûre de M_t quand $t \to \infty$. Montrer que les hypothèses de la question 1. sont satisfaites lorsque $A_t = \langle M, M\rangle_t$ et $Z = M_\infty^2$. En déduire que, pour tout réel $q \geq 1$,
$$E[(\langle M, M\rangle_\infty)^{q+1}] \leq (q+1)\,E[(\langle M, M\rangle_\infty)^q\,M_\infty^2].$$

4. Soit $p \geq 2$ un réel tel que $E[(\langle M, M\rangle_\infty)^p] < \infty$. Montrer que
$$E[(\langle M, M\rangle_\infty)^p] \leq p^p\,E[|M_\infty|^{2p}].$$

5. Soit N une martingale locale telle que $N_0 = 0$, et soit T un temps d'arrêt tel que la martingale arrêtée N^T soit uniformément intégrable. Montrer que, pour tout réel $p \geq 2$,
$$E[(\langle N, N\rangle_T)^p] \leq p^p\,E[|N_T|^{2p}].$$
Donner un exemple montrant que ce résultat peut être faux si N^T n'est pas uniformément intégrable.