M2 Mathématiques de l'aléatoire — Université Paris-Sud

Calcul stochastique et Processus de Markov

Feuille d'exercices n°7
Equations différentielles stochastiques

Exercice 1. On considère l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \sigma(X_t)\, dB_t \tag{1}$$

où la fonction $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et telle qu'il existe deux constantes $\varepsilon > 0$ et M telles que $\varepsilon \leq \sigma \leq M$.

1. Dans cette question et la suivante, on suppose que X est une solution de (1) avec $X_0 = x$. On pose, pour tout $t \geq 0$,

$$A_t = \int_0^t \sigma(X_s)^2\, ds \quad , \quad \tau_t = \inf\{s \geq 0 : A_s > t\}.$$

Justifier les égalités

$$\tau_t = \int_0^t \frac{dr}{\sigma(X_{\tau_r})^2} \ , \quad A_t = \inf\{s \geq 0 : \int_0^s \frac{dr}{\sigma(X_{\tau_r})^2} > t\}.$$

2. Montrer qu'il existe un mouvement brownien réel issu de x, noté $\beta = (\beta_t)_{t\geq 0}$, tel que, p.s. pour tout $t \geq 0$,

$$X_t = \beta_{\inf\{s\geq 0: \int_0^s \sigma(\beta_r)^{-2} dr > t\}}.$$

3. Montrer qu'il y a existence et unicité faibles pour (1) (*pour l'existence, on pourra observer que si X est défini à partir d'un mouvement brownien β par la formule de la question* **2.**, *X est dans une filtration appropriée une martingale de variation quadratique $\langle X, X\rangle_t = \int_0^t \sigma(X_s)^2 ds$*).

Exercice 2. On considère l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \sigma(X_t)\, dB_t + b(X_t)\, dt \tag{2}$$

où les fonctions $\sigma, b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues et bornées et telles que $\int_{\mathbb{R}} |b(x)| dx < \infty$ et $\sigma \geq \varepsilon$ pour une constante $\varepsilon > 0$.

1. Soit X une solution de (2). Montrer qu'il existe une fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante de classe C^2 telle que $F(X_t)$ soit une martingale. On déterminera une formule explicite pour F en termes de σ et b.
2. Montrer que le processus $Y_t = F(X_t)$ satisfait une équation différentielle stochastique de la forme $dY_t = \sigma'(Y_t)\, dB_t$, avec une fonction σ' que l'on déterminera.
3. En utilisant le résultat de l'exercice précédent, montrer qu'il y a existence et unicité faibles pour (2). Montrer qu'il y a unicité trajectorielle si de plus σ est lipschitzienne.