CONJECTURES ET AVENTURES MATHÉMATIQUES

JOËL MERKER

• Delightful waves at the Fields Institute .... 1.
• Explication (presque élémentaire) de la conjecture de Green-Griffiths .... 2.
• Naviguer dans l'infini du calcul comme un poisson dans l'eau .... 3.
• Énoncé effectif pour la dégénérescence algébrique .... 4.
• Vendredi 14 novembre: pari osé et fou .... 6.
• Samedi 15 novembre: vol Air France 0352 Paris–Toronto .... 6.
• Dimanche 16 novembre: la peur au ventre .... 6.
• Lundi 17 novembre: grand soulagement! .... 8.
• Mardi 18 novembre: joie mathématique absolue .... 9.
• Discussions avec Siu: reigne sans partage de la métaphysique spéculative .... 12.
• Qui n'expose pas ne s'expose pas et se repose .... 14.
• Vendredi 21 novembre: refusons de nous présenter à l'oral de rattrapage .... 14.
• Manuscrits sélectionnés et opérateur $\mathscr{R}^+$ de Joël .... 16.

• **Delightful waves at the Fields Institute.** Dans ce premier billet écrit sur l'invitation d'Étienne Ghys pour intervenir dans le nouveau site interactif du CNRS intitulé *Images des Mathématiques*, je voudrais relater l'histoire très récente d'une aventure mathématique délectable qui s'est déroulée au *Fields Institute* à Toronto, au Canada, lors de la conférence:

> "[A true story from the] Workshop Complex Hyperbolic Geometry and Related Topics, Fields Institute, Toronto, Canada, 17-21 November 2008".

Par ce témoignage riche en surprises et en rebondissements, je voudrais dire qu'à certaines occasions rarissimes, on s'amuse en mathématiques comme de grands enfants, et comme dirait Sartre, on jouit d'un « bonheur sans maître, ni collier, parfait », "because there is a real joy in practicing mathematics".

Date: 8-2-2010.

À Ragnar Sigurdsson qui fut l'un de ses élèves, Lars Hörmander confiait en privé que les moments de réussite en mathématiques, les moments où l'on a le sentiment d'avoir démontré un beau théorème, ou d'avoir eu une idée fondamentale, ces moments-là sont très rares dans une vie de mathématicien, et donc: " you really have to *enjoy* such moments ".

• **Explication (presque élémentaire) de la conjecture de Green-Griffiths.** La Conjecture de Green-Griffiths (1979) énonce que la plupart des variétés complexes X, à savoir celles qui sont dites « de type général », ont la propriété suivante: toute application holomorphe $f : \mathbb{C} \to X$ non constante doit nécessairement avoir son image $f(\mathbb{C})$ contenue dans une certaine sous-variété Y de X propre et stricte, cette sous-variété Y étant d'ailleurs autorisée à avoir des singularités, pourvu qu'elle soit de dimension inférieure à celle de X, telle est la conjecture.

Ici, l'objet unidimensionnel $f(\mathbb{C})$ envoyé dans X peut être vu intuitivement comme un filament lancé dans la variété X pour en tester la complexité, la dimension de X étant *a priori* très grande.

En fait, il existe des variétés unidimensionnelles, alias *surfaces de Riemann*, qui sont dites « spéciales » parce qu'elles peuvent héberger des images $f(\mathbb{C})$ non constantes, ce sont les surfaces de Riemann de genre égal à 0 (sphère) ou à 1 (tore), alors que les surfaces de Riemann dites « générales » forcent les images $f(\mathbb{C})$ contenues dans celles-ci à être *constantes*, donc dégénérées, et ce sont les surfaces de Riemann de genre $g \geqslant 2$. Ainsi la conjecture dit en particulier que toutes les surfaces de Riemann de genre égal à 0 ou à 1 qui sont « cachées » dans une variété de type général X, et qui sont donc « spéciales » d'après ce qui vient d'être dit, devraient nécessairement être « canalisées » dans un certain sous-objet strict Y de X.

En d'autres termes, *ce qui est spécial ne peut pas être partout distribué dans le général*, tel est donc le « principe métaphysique » élémentaire et plein de bon sens qui inspire cette conjecture.

D'ailleurs, la conjecture peut être renforcée de la manière suivante: si X est une variété *projective*, et si X est encore un peu plus générale, alors les images $f(\mathbb{C})$ doivent nécessairement toutes être constantes: *avec un peu plus de généralité, on élimine entièrement tout ce qui est spécial*.

Cettte deuxième conjecture a été formulée pour la première fois par le mathématicien japonais Shoshichi Kobayashi en 1970, l'année de ma naissance. En fait, c'est dans le cas où X est projective, *i.e.* contenue dans un espace projectif complexe $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$, que les deux conjectures sont les plus significatives, parce que l'on peut produire très facilement de très nombreux exemples de telles variétés X: il suffit en effet, dans des coordonnées homogènes $[z_0 : z_1 : \cdots : z_n : z_{n+1}]$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$, de prendre n'importe quel polynôme

$$\begin{aligned} P &= P(z_0, z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) \\ &= \sum_{a_0+a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}=d} \mathsf{Coeff}_{a_0,a_1,\dots,a_n,a_{n+1}} \cdot z_0^{a_0} z_1^{a_1} \cdots z_n^{a_n} z_{n+1}^{a_{n+1}} \end{aligned}$$

homogène d'un certain degré fixé $d \geqslant 1$ à coefficients complexes $\mathsf{Coeff}_{a_0,a_1,\dots,a_n,a_{n+1}} \in \mathbb{C}$ pour obtenir une variété X (peut-être avec des singularités) qui est une hypersurface, *i.e.* est de dimension n. Les variétés projectives de codimension quelconque sont alors définies par un nombre fini de telles équations polynomiales.

Notons immédiatement qu'il y a *a priori* un nombre gigantesque de coefficients arbitraires $\mathsf{Coeff}_{a_0,a_1,\dots,a_n,a_{n+1}} \in \mathbb{C}$, donc un très, très grand nombre de telles variétés X.

• **Naviguer dans l'infini du calcul comme un poisson dans l'eau.** Par conséquent, s'il nous est permis de nous inspirer du langage philosophique d'Albert Lautman (1908–1944), ces innombrables polynômes que l'on pourrait écrire automatiquement sur des logiciels de calcul formel fournissent aux mathématiques un *principe fondamental de générativité symbolique*, ils garantissent un *principe autonome de genèse de la réalité abstraite*, et ils prouvent *de facto* l'existence d'un *réservoir indéfini de réalité mathématique*, pour reprendre une expression fétiche d'Alain Connes.

Alors l'hypothèse que X est une variété lisse (*i.e.* sans singularités) sera satisfaite pour presque tous les choix de coefficients, et l'hypothèse qu'elle est de type général sera satisfaite lorsque les degrés des polynômes en question seront tous suffisamment grands. Le général, c'est ce qui est de très grand degré, et c'est donc ce qui est *a priori* le plus complexe. Peut-on parler de ce qui est le plus complexe? *Oui*, certains théorèmes peuvent et savent le dire, comme nous allons le voir dans un instant.

En résumé, avec les conjectures de Green-Griffiths (1979) et de Kobayashi (1970), on a donc affaire à deux énoncés qui sont absolument typiques, par leur difficulté et par leur profondeur, de la « mathématique anticipatrice », celle qui, en se basant sur quelques idées de bon sens, propose comme défi aux générations futures l'exploration d'objets mathématiques que tout le monde sait, en raison de leur très grande complexité, « impensables dans leur totalité ». Et sur les routes tracées dans la jungle obscure de l'Inconnu, tous les mathématiciens savent que la « réalité explorée » qui se construit sous leurs pas hésitants promet toujours de merveilleuses découvertes imprévisibles et enthousiasmantes.

• **Énoncé effectif pour la dégénérescence algébrique.** Voyons maintenant comment une solution a été donnée très récemment, dans le cas des hypersurfaces projectives de grand degré, à la conjecture de Green-Griffiths.

Théorème (DIVERIO-MERKER-ROUSSEAU). *En dimension* $n \geqslant 2$ *arbitraire, la plupart des hypersurfaces projectives* $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ *de l'espace projectif complexe contiennent un sous-ensemble algébrique strict* $Y \subset X$ *de dimension* $\leqslant n-1$ *qui absorbe intégralement l'image de toute application holomorphe non constante* $f : \mathbb{C} \to X$*, à savoir: on doit alors nécessairement avoir* $f(\mathbb{C}) \subset Y$*, pourvu que le degré* $d = \deg X$ *satisfasse la minoration effective:*

$$d \geqslant n^{(n+1)^{n+5}}$$

exprimée en fonction de la dimension n *de* X *seulement.*

En dimension n arbitraire, c'est le premier énoncé jamais obtenu dans cette direction.

L'annonce de ce résultat est parue le lundi 17 novembre 2008 à 00h00 sur le site américain de prépublications `arxiv.org` hébergé à Cornell University. Les curieux pourront donc consulter l'adresse internet arxiv.org/abs/0811.2346, pour y contempler ("in zapping style") les calculs très systématiques qui accouchent de cette borne doublement exponentielle $n^{(n+1)^{n+5}}$. Cinquante pages, *my Lord*, plus de cinquante pages de calculs très délicats!

Or ce fameux lundi en question coïncidait avec le premier jour de la conférence intitulée:

Workshop on Complex Hyperbolic Geometry and Related Topics, Fields Institute, Toronto, Canada, 17-21 November 2008

Pendant le semestre July-December 2008, Yum-Tong Siu du département de mathématiques de l'Université de Harvard à Boston était l'invité spécial des très prestigieuses *Distinguished Lecture Series*. Citons en passant l'intitulé de ses leçons:

Multiplier Ideal Sheaves – an Interface Between Analysis and Algebraic Geometry. THEMATIC PROGRAM ON ARITHMETIC GEOMETRY, HYPERBOLIC GEOMETRY AND RELATED TOPICS, JULY-DECEMBER 2008.

• **Vendredi 14 novembre: pari osé et fou.** Mais revenons-en maintenant à notre joli théorème. Deux jours et demi auparavant, le vendredi 14 novembre vers 16h, heure de Paris, le texte complet avait déjà été soumis — pari osé et fou! — électroniquement à `arxiv.org`. Or les envois effectués peu de temps avant le week-end ne paraissent sur `arxiv.org` que le lundi de la semaine suivante. Qu'allait-il se passer entre-temps? Le ventre d'`arxiv` allait-il « recracher » le texte comme prévu?

• **Samedi 15 novembre: vol Air France 0352 Paris-Toronto.** Le samedi 15 novembre, S. D. et Joël Merker se retrouvent dans le Vol Air France 0352 qui les conduit de Paris à Toronto. Inquiétude: l'introduction, trop minimaliste, rédigée dans la précipitation par manque de temps, sera lue telle quelle le lundi. Seuls de longs calculs d'élimination apparaissent dans cette première version longue (57 pages) et préliminaire de l'article, l'aspect qui s'en dégage est plutôt « technique », aucun rappel géométrique n'y est effectué, et de surcroît, la version qui dort dans un lit bouillant d'électrons ce week-end va jaillir lundi, alors qu'elle admet comme prérequis trois articles, un de chaque auteur, et ce, sans aucun rappel. Ce n'est qu'une semaine plus tard que nous aurons la confirmation qu'il fallait annoncer la démonstration complète *au moment même de la conférence*, avant même d'avoir le temps de polir l'ouvrage, avant même de peaufiner une version impeccable qui pourrait être soumise à un grand journal de mathématiques.

• **Dimanche 16 novembre: la peur au ventre.** À Toronto le dimanche, une fébrilité psychologique s'empare de chacun de trois auteurs. E. R., invité deux mois au *Fields Institute*, était déjà présent au Canada depuis trois semaines. Par courrier électronique, il avait déjà informé S. D. et Joël Merker que le titre de l'intervention de Yum-Tong Siu n'était autre que:

Hyperbolicity of generic hypersurfaces of high degree,

c'est-à-dire: Siu parlera exactement du même sujet, et nous serons donc explicitement en compétition avec le grand génie!

Tous les spécialistes savent que Siu annonce une démonstration des conjectures de Green-Griffiths et de Kobayashi pour les hypersurfaces (sans borne effective toutefois) depuis bientôt plus de cinq années, et qu'en 2004, il a publié six pages (seulement!) afin de décrire une stratégie de preuve, mais ces pages sont denses, résumées et elliptiques. En fait, dans ce « message » volontairement tronqué, Siu fait référence à un gros manuscrit de 80 pages sur lequel il prend appui, mais qu'il n'a jamais fait circuler. Qu'adviendrait-il de nous si jamais son manuscrit secret renfermait de bien meilleurs résultats que ceux que nous annonçons, et si jamais — ô comble de l'inquiétude! — ce preprint gardé sous le manteau devait paraître lui aussi lundi sur `arxiv.org`?

L'anxiété croît, un risque a été pris, l'enjeu mathématique est de taille.

Après un déjeuner rapide des trois auteurs stressés, la ville encombrée d'une manifestation sportive et musicale semble vouloir bloquer leur retour à l'hôtel. Rigolades coincées dans la foule-obstacle, mais il faut revenir au plus vite à l'hôtel, il faut réécrire à trois, ensemble, directement sur l'ordinateur portable une meilleure introduction minimaliste, et il faut renvoyer au plus vite la nouvelle version sur `arxiv.org`, avant la nuit, avant lundi.

Mais après quatre heures et demi de travail et de batailles stylistiques, quelle déception! En consultant plus à fond le site `arxiv.org`, nous apprenons que la version du vendredi pourrait fort bien être distribuée telle quelle le lundi, avant que le site `arxiv.org` ne la remplace officiellement mardi par la nouvelle version qui comporte l'introduction que nous venons d'amender avec force éclats de rire, en jouant avec les mots comme des enfants.

• **Lundi 17 novembre: grand soulagement!** Mais lundi heureusement, dans la fébrilité accentuée par la prise de risque, l'oracle `arxiv.org` fait déjà apparaître notre version 2 sur la page de téléchargement. *Alea jacta est*, c'est le grand saut!

Avant le début de la première intervention orale, Nessim Sibony félicite brièvement E. R. Au déjeuner, Gerd Dethloff nous conseille d'aller parler quelques minutes avec Siu avant son exposé. Siu est déjà au courant, mais il n'a aucun temps à nous consacrer avant son exposé. La pression est contagieuse, et chacun remobilise ses forces dans son propre camp.

Et à la fin d'après-midi, pendant son exposé d'une heure que nous craignons tant, Siu consacre trente minutes à décrire des idées remontant à Bloch et à Clemens. D'après lui, ce sont les deux seules idées qui aient jamais existé dans le sujet, et il les utilise dans sa « démonstration » annoncée des conjectures de Green-Griffiths et de Kobayashi. Dans la deuxième moitié de son exposé, il poursuit ensuite sur l'hyperbolicité générique des espaces de modules.

Grand soulagement! De l'avis de tous les auditeurs spécialistes de la question, l'exposé de Siu n'a montré aucune nouveauté par rapport à ses interventions des années 2002 à 2004; qui plus est, Siu semble ne plus être véritablement intéressé par le sujet en ce moment, il se consacre surtout à la mise en place d'un algorithme de Kohn effectif, en relation avec sa grande idée des idéaux multiplicateurs en géométrie algébrique, dont les principes métaphysiques remontent à Kohn et à Skoda, que Siu admite indéfectiblement.

Victoire: notre résultat tient donc debout! c'est le premier résultat effectif annoncé avec une démonstration complète et vérifiable. Nos techniques « marient » d'ailleurs les travaux fins de Demailly avec les idées initiales de Siu, dont on sait qu'ils sont deux concurrents prestigieux en géométrie algébrique complexe, mais nous surmontons aussi de très nombreux obstacles combinatoires et calculatoires pour atteindre l'effectivité.

• **Mardi 18 novembre: joie mathématique absolue.** En appliquant l'idée de Clemens considérablement généralisée, la dernière partie de notre démonstration repose sur l'existence de champs de vecteurs méromorphes à pôle d'ordre contrôlé sur l'espace des jets verticaux d'ordre n sur l'hypersurface universelle. En dimension n arbitraire, Joël Merker (arxiv.org/abs/0805.3987/) avait obtenu en juin 2008 une construction explicite de tels champs de vecteurs et avait déduit un ordre effectif des pôles égal à $\frac{n^2+5n}{2}$, généralisant des résultats de Clemens, Voisin, Paŭn et R., alors que dans les six pages que Siu a publiées en 2004, une proposition non effective est énoncée, sans aucune indication de preuve.

Toutefois, l'engendrement par des champs de vecteurs méromorphes globaux n'est valable qu'en dehors d'un mauvais sous-ensemble algébrique Σ de l'espace des jets. À cause de ce Σ intempestif, on ne peut malheureusement pas espérer obtenir la dégénérescence algébrique *forte* des courbes holomorphes entières $f\colon \mathbb{C} \to X$, *i.e.* $f(\mathbb{C}) \subset Y \subsetneqq X$ avec Y indépendant de f, parce que la condition $j^n f \subset \Sigma$ dont on doit tenir compte à la fin des raisonnements (clarifiés par Paŭn et par R.) implique que l'image $f(\mathbb{C})$ est contenue dans une section hyperplane de X, l'hyperplan en question dépendant en général de f.

La version de notre travail sur `arxiv.org` n'annonce d'ailleurs que la dégérescence algébrique *faible* de $f(\mathbb{C})$, *i.e.* ce qu'on appelle la conjecture de Green-Griffiths *faible*: Y dépend *a priori* de f. Et jusqu'à présent, dans les travaux de Paŭn (2005) et de R. (2007), Σ dépendait de f. Et que diable trouve-t-on dans les 80 pages secrètes de Siu? Qu'arrive-t-il vraiment à faire, lui?

La veille au restaurant le soir, S. D. avait fait observer que pour le Σ des travaux cités, la condition $j^n f(\mathbb{C}) \subset \Sigma$ implique en fait que l'image $f(\mathbb{C})$ est contenue dans une section de X de codimension égale à deux. Chance: le résultat d'E. R. 2007 en dimension $n = 3$ se renforçait d'un seul coup.

Mardi 18 novembre à 08h45, Joël Merker annonce à S. D. et à E. R. qu'après avoir réfléchi dix minutes la veille au soir, il peut prétendre démontrer que la condition $j^n f(\mathbb{C}) \subset \Sigma$ implique en fait que l'image $f(\mathbb{C})$ est contenue dans une droite, ce qui donnera alors Green-Griffiths « *fort* ».

Mais à 10h, après avoir assisté à l'exposé de Steve Zelditch, très lourde déception: ce que dit Joël Merker est trivialement faux. S. D., Joël Merker et E. R. ont chacun réfléchi pendant l'exposé et ils s'en sont tous trois rendus compte.

L'erreur de Joël est vraiment stupide: l'ensemble Σ en question est défini comme lieu des zéros de tous les mineurs de taille $n \times n$ d'une matrice de taille $n \times (n+1)$, et ce lieu n'est que de codimension égale à 2. Cette observation s'identifie d'ailleurs à ce que disait déjà S. D.. Joël a revérifié cela en dimension $n = 3$ par un calcul négligé effectué à la sauvette en diagonale sur un bout de papier, il a trouvé que Σ est de dimension 1, et il a extrapolé qu'il devait en être de même en toute dimension $n \geqslant 3$. Même les plus puissantes machines à calcul formel peuvent se tromper!

Mais entretemps, pendant cette même heure d'écoute buissonnière, Joël Merker avait immédiatement corrigé le tir — tel est l'avantage d'être rompu aux dialectiques de la recherche, ce dont les *vraies* machines sont par nature incapables, parce qu'elles sont *inertes* et n'ont donc pas le pouvoir de *décision* propre au règne animal.

En examinant la construction des champs de vecteurs méromorphes, on voit en effet sans peine qu'il est possible de satisfaire à la condition d'engendrement en dehors d'un sous-ensemble Σ plus petit, défini par des équations qui comprennent en particulier les n équations suivantes:

$$0 = \begin{vmatrix} f_i' & (f_i^2)' & (f_i^3)' & \cdots & (f_i^n)' \\ f_i'' & (f_i^2)'' & (f_i^3)'' & \cdots & (f_i^n)'' \\ f_i''' & (f_i^2)''' & (f_i^3)''' & \cdots & (f_i^n)''' \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ f_i^{(n)} & (f_i^2)^{(n)} & (f_i^3)^{(n)} & \cdots & (f_i^n)^{(n)} \end{vmatrix} = 1!\,2!\,3!\,\cdots\,n!\,\big(f_i'\big)^{\frac{n(n+1)}{2}} \qquad (i = 1 \cdots n),$$

et alors si $j^n f \subset \Sigma$, on en déduit immédiatement que $f_i' = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, d'où f est constante! Il n'est même plus nécessaire de parler de section hyperplane!

Par cette seule observation effectuée presque sans effort, d'un seul coup, le théorème paru sur `arxiv.org` la veille se transformait alors en une réponse à la conjecture de Green-Griffiths *forte* pour les hypersurfaces!

Quelques heures après, la nouvelle semble déjà circuler dans les couloirs. Gerd Dethloff nous conseille alors d'actualiser rapidement la version sur `arxiv.org`, mais nous décidons ensemble de ne pas le faire, afin que le suspens soit maintenu dans les paroles échangées entre spécialistes. En conférence ou en séminaire dans les mois précédents, les géomètres algébristes complexes s'étaient d'ailleurs délectés à nous demander à la fin de nos exposés si la dégénérescence algébrique dépendait de la courbe entière. Maintenant, la prochaine fois que la question sera posée, nous pourrons annoncer:

« On a Green-Griffiths fort en dimension quelconque! ».

• **Discussions avec Siu: reigne sans partage de la métaphysique spéculative.** Dans les jours qui suivent, Joël Merker parvient à échanger plusieurs fois oralement avec Siu, qui avait clairement manifesté le désir d'une rencontre. Message: « *The Riemann-Roch theorem is just linear algebra* », mais que faut-il entendre? On croirait une parole de Gromov: provocatrice, déstabilisante, profonde peut-être, mystérieuse en tout cas, mais quand on entrevoit enfin, après des heures ou des jours de réflexion, ce qu'elle pourrait bien vouloir dire, on est ébloui par un tel recul et par une telle puissance philosophique.

A priori donc, l'approche de Siu qui consiste à construire des différentielles de jets explicitement dans un système de coordonnées affines sur $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ n'est pas « juste de l'algèbre linéaire », elle s'annonce comme « *better than Demailly's approach* ». Il ne suffit pas, en effet, d'étudier les caractéristiques d'Euler-Poincaré *via* la formule de Riemann-Roch-Hirzebruch, et d'étudier les dimensions des groupes de cohomologie intermédiaires des fibrés de Schur sur les variétés projectives, car toutes ces données ne fournissent à terme *que* des estimations dimensionnelles. « *Cramer's rule provides explicit jet differentials* », voilà toute la différence entre un Riemann-Roch purement dimensionnel et la géométrie algébrique *effective* qui doit chercher à produire des représentants explicites des classes de cohomologie dans un système de cartes couvrantes.

J'entrevois enfin la confirmation de ce que je soupçonnais depuis des mois: *en évitant volontairement les calculs, la géométrie algébrique s'égare parfois dans l'in-effectivité*. Au vingt-et-unième siècle, les mathématiques effectives du dix-neuvième siècle ne cesseront jamais de ressusciter!

Tombé enfant dans la géométrie algébrique comme Obélix dans une marmite de potion magique, Siu sait tout cela, et c'est pour lui du B.A.-BA. Je revois dans un film mental instantané toutes les pyramides de calculs systématiques de Sophus Lie, et je comprends en un éclair qu'un vaste champ de géométrie algébrique combinatoire et calculatoire est « caché » derrière les conjectures de Green-Griffiths et de Kobayashi. Si seulement Siu pouvait en dire plus! J'aurais enfin l'impression de comprendre ce qu'est un groupe de cohomologie. Saisir les objets en coordonnées, entrevoir leurs ramifications algébriques, laisser la générativité symbolique se déployer, voilà le vrai bon point de vue!

Mais pourquoi Siu ne nous donne-t-il pas une copie de son preprint de 80 pages? On les finirait, tous ces calculs qu'il ne parvient pas à finaliser! Voilà que Siu s'attable, une tasse de thé à la main, m'adresse la parole, et ouvre son épais classeur bleu. Voilà que devant mes yeux ébahis, il feuillette rapidement ses 80 pages. Je vois aussi d'autres preprints tout aussi secrets dans ce classeur bleu et magnétique. Je les a vues, ces 80 pages, et Mihai Paŭn en avait déjà témoigné, mais nul n'a eu encore le droit de les étudier. Et Siu d'ajouter qu'il postera son texte sur `arxiv.org` dans quelques jours. Il dit toujours cela, dit-on.

Notre approche qui utilise pour l'instant la tour de Demailly et se base donc sur un calcul de Riemann-Roch qui n'est effectif qu'à l'égard des dimensions, est donc *a priori* moins puissante que celle de Siu.

Oui, Siu défend l'effectivité. Oui, Siu plus que de nombreux géomètres algébristes « abstraits » est conscient que la réalité mathématique regorge de problèmes algébriques très difficiles. Oui, Siu est une merveilleuse « machine de guerre », aurait dit Gilles Châtelet, un « monstre sacré vivant des mathématiques ».

C’est presque une révélation — cette rencontre fut une révélation, et de jour en jour, le contact avec Siu s’affirmait. Il devenait de plus en plus clair que Siu estime la puissance de calcul, contrairement aux mathématiciens structuralistes qui ont trahi le génie d’Euler, trahi le génie de Gauss, trahi le génie de Sophus Lie, trahi le génie d’Élie Cartan. Et surtout, la joie s’affirmait en moi de se voir élu membre peut-être d’une *aristocratie mathématique spéculative trans-historique*.

• **Qui n’expose pas ne s’expose pas et se repose.** Comment se faisait-il alors qu’aucun de nous trois n’exposât dans cette conférence? Bien plus qu’une revanche indirecte face à cette « injustice », l’annonce de lundi sur *arxiv.org* prenait de jour en jour de l’ampleur dans les bruits de couloir. Steven Lu aurait dit en privé à Gerd Dethloff que le résultat était trop beau pour être vrai, qu’il devait certainement être faux. Une erreur serait salvatrice pour tous ceux qui ont essayé de démontrer la conjecture de Green-Griffiths! Michael McQuillan nous conseille de soumettre le résultat aux Publications Mathématiques de l’IHES. D’autres participants évoquent Annals of Mathematics, Inventiones Mathematicae, mais aucune autre revue qui ne serait pas d’un niveau comparable.

• **Vendredi 21 novembre: refusons de nous présenter à l’oral de rattrapage.** La conférence se terminait vendredi à 12h40. Au milieu de l’après-midi du même jour, Joël Merker discute à l’improviste du résultat en privé avec John Bland, ouvre deux prépublications, évoque le cône nef, la tour de Demailly, la « stratégie des colonnes de Buren », le choix des poids, l’ordre lexicographique inverse, les déterminants de Jacobi-Trudy, les descentes inductives, l’estimation finale, *etc.*

Deux heures plus tard, vers 18h, John Bland (un des organisateurs en poste à Toronto, spécialiste célèbre des équations aux dérivées partielles et de la géométrie CR) propose à Joël

Merker de parler le lundi 24 novembre au séminaire du Fields Institute. Inconsidérément, Joël accepte.

Contrariété légitime de E. R., inquiétude sur le délai, retour de S. D. à l'Institut, discussion à trois, paroxysme de nervosité, puis après vifs débats et arguties, vers 20h, nous décidons tous trois d'envoyer raisonnablement un courriel à John Bland pour décliner l'offre de se produire oralement. Trop peu de temps pour préparer l'exposé, trop de fatigue, et au fond de nous-mêmes: « si les organisateurs avaient vraiment voulu nous écouter parler, l'un de nous trois au moins aurait dû être invité à la conférence qui vient de s'achever ».

Le samedi matin par courriel, John Bland, Min Ru et Steven Lu tentent à nouveau leur chance: « *but it could very well be an informal talk*! ». Et le lundi matin, les mêmes réitèrent leurs demandes appuyées.

• **Conclusion.** Ca y est: sans même avoir parlé à la conférence, nous sommes déjà vraiment célèbres. Finalement, E. R. sera appelé à parler pendant deux heures sur le sujet le lundi 1 er décembre, devant un large public attiré par la rumeur. Auditoire impressionné, forcément, mais Siu était absent, comme si Vercingétorix avait pressenti Alésia.

• **Épilogue.** Au fait, à quelle vitesse s'est donc écrite la version Latex envoyée sur `arxiv.org` le vendredi 14 décembre vers 16h00? Six pages ébauchées seulement existaient le 4 novembre, jour d'exposé à Paris 6 sur les invariants de Demailly. Au total, bien qu'aucun manuscrit achevé à l'avance ne secondât l'écriture sur ordinateur et bien qu'il s'avérât nécessaire de finaliser la rédaction en retravaillant régulièrement les détails des preuves au stylo sur des pages blanches, les 57 pages ont été écrites et finalisées en 9 jours, à un rythme de moins de 8 heures par jour de travail en moyenne, *le style témoignant d'une rigueur implacable quant à la lisibilité des calculs*.

Comment écrire plus de 50 pages rhétoriquement tenues en seulement 10 jours? Secret de fabrication — on y reviendra dans d'autres billets. Disons seulement que les grands et longs calculs doivent être conduits dans l'ivresse et à une vitesse « supersonique ».

• **Manuscrits sélectionnés.** Pour l'instant, sur la page internet:

`www.dma.ens.fr/∼merker/Manuscrits/`

le lecteur curieux trouvera les photographies de 11 pages manuscrites parmi les plus cruciales qui ont accompagné les jours ultimes de la rédaction des calculs d'élimination.

• **L'« opérateur $\mathscr{R}^+$ de Joël ».** C'est très simple: c'est l'opérateur qui remplace tous les signes « moins » par des signes « plus ». Tous les enfants vont adorer!

• **Unité des mathématiques.** Cet opérateur sert à *faire faire* de l'Analyse à un problème de Géométrie qui se ramène à de l'Algèbre incontrôlable.

• **Dans la démonstration.** Accessoirement aussi, il est utilisé dans la preuve de notre théorème sus-mentionné.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS, UMR 8553 DU CNRS, ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 45 RUE D'ULM, F-75230 PARIS CEDEX 05, FRANCE.

E-mail address: `merker@dma.ens.fr`