

# Droites et plans dans l'espace

François DE MARÇAY  
Département de Mathématiques d'Orsay  
Université Paris-Saclay, France

## 1. Introduction

### 2. Indépendance linéaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $V_{\mathbb{R}^3}$

Rappelons que l'espace vectoriel  $\vec{V}_{\mathbb{R}^3}$ , consiste en des vecteurs à trois composantes :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad \dots, \dots,$$

qui bénéficient de l'addition et de la multiplication par des scalaires :

$$c\vec{u} + d\vec{v} = c \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ cu_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cu_1 + dv_1 \\ cu_2 + dv_2 \\ cu_3 + dv_3 \end{pmatrix}.$$

Rappelons aussi que l'espace des *points*  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire des triplets :

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

ne doit *pas être confondu* avec de l'espace des *vecteurs*  $\vec{V}_{\mathbb{R}^3}$ . Toutefois, on produit des vecteurs en « soustrayant » deux points donnés :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Maintenant, pour définir la notion de 2-plan dans l'espace des *points*  $\mathbb{R}^3$ , il faut se donner un point « de départ » dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$p_0 = (x_0, y_0, z_0),$$

ainsi que deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  placés en ce point, et se déplacer dans les deux directions possibles définies par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

$$P \stackrel{?}{:=} \{p_0 + s\vec{u} + t\vec{v} : s \in \mathbb{R} \text{ quelconque}, t \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\} \\ \subset \mathbb{R}^3.$$

Cependant, deux vecteurs choisis au hasard ne donnent pas toujours deux directions indépendantes dans l'espace,

**Question 2.1.** Comment exprimer que deux vecteurs donnés  $\vec{u} \in \vec{V}_{\mathbb{R}^3}$  et  $\vec{v} \in \vec{V}_{\mathbb{R}^3}$  sont linéairement indépendants ?

Dans le chapitre consacré aux droites dans le plan, nous avons vu que deux vecteurs arbitraires de l'espace vectoriel réel à 2 dimensions  $\vec{V}_{\mathbb{R}^2}$  :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

sont linéairement *indépendants* si et seulement si leur déterminant ne s'annule pas :

$$0 \neq \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

En particulier, ceci implique que  $\vec{u} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  sont chacun *non nuls* — sinon, le déterminant vaudrait 0 !

En dimension 3, avec deux vecteurs à 3 composantes :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

on peut former une matrice à 3 lignes et à 2 colonnes :

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{bmatrix},$$

et être « tenté » d'extraire les 3 couples de lignes (1, 2), (1, 3), (2, 3) :

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{bmatrix},$$

puis de former les 3 déterminants  $2 \times 2$  correspondants — et c'est la bonne idée !

« En mathématiques, être tenté, c'est toujours une bonne idée ! »

Nous admettons alors l'énoncé suivant, dont la démonstration pourra être reconstituée par les lecteurs curieux qui s'inspireront d'une proposition analogue, déjà démontrée dans le chapitre consacré aux droites dans le plan.

Mais auparavant, rappelons que :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \text{Au moins 1 parmi les 3 réels } a, b, c \text{ est } \neq 0.$$

**Proposition 2.2.** Dans l'espace vectoriel  $\vec{V}_{\mathbb{R}^3}$  à 3 dimensions, soient deux vecteurs non nuls :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes.

(i)  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont linéairement dépendants, à savoir par définition, il existe un couple de scalaires  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$  non tous les deux nuls tels que :

$$\vec{0} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}.$$

(ii) Il existe un scalaire non nul  $\tau \in \mathbb{R}^*$  tel que  $\vec{u} = \tau \vec{v}$  [d'où aussi  $\frac{1}{\tau} \vec{u} = \vec{v}$ ].

(iii) Les 3 déterminants  $2 \times 2$  extraits sont nuls :

$$0 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}, \quad 0 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \quad 0 = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}. \quad \square$$

Par contraposition, deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont alors linéairement *indépendants* si et seulement si au moins 1 parmi ces 3 déterminants est *non nul* :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Grâce à ces préliminaires, nous pouvons enfin formuler une définition rigoureuse du concept de 2-plan dans l'espace ponctuel  $\mathbb{R}^3$ .

**Définition 2.3.** Un *plan* dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  représenté de manière paramétrique est un ensemble de points du type :

$$P := \left\{ p_0 + s\vec{u} + t\vec{v} : s \in \mathbb{R} \text{ quelconque}, t \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \right\},$$

où  $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  est un point quelconque, et où  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  sont deux vecteurs linéairement indépendants arbitraires.

Dans la pratique, c'est-à-dire en TD, en DM, et en Examen, les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  seront la plupart du temps *numériques et concrets*. Vérifier qu'ils sont indépendants sera alors aisé, puisque d'après la caractérisation (ii), il suffira de vérifier qu'ils ne sont *pas* colinéaires, ce que l'on pourra faire la plupart du temps « à l'œil », sans aucun calcul.

### 3. Définition d'un 2-plan dans $\mathbb{R}^3$ par une équation cartésienne

Ainsi, les trois coordonnées  $(x, y, z)$  d'un point général sur un 2-plan issu du point :

$$p_0 = (x_0, y_0, z_0),$$

et dirigé par les deux vecteurs indépendants  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont :

$$x = x_0 + s u_1 + t v_1,$$

$$y = y_0 + s u_2 + t v_2,$$

$$z = z_0 + s u_3 + t v_3.$$

Comme  $s$  et  $t$  sont des nombres réels variables quelconques, et comme les  $p_i$ , les  $u_i$ , les  $v_i$  sont des constantes, ré-écrivons ces trois équations sous la forme d'un système de 3 équations à 2 « inconnues »  $s$  et  $t$  :

$$s u_1 + t v_1 = x - x_0,$$

$$s u_2 + t v_2 = y - y_0,$$

$$s u_3 + t v_3 = z - z_0.$$

Par hypothèse :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pour fixer les idées, supposons que le premier déterminant  $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$  ne s'annule pas. (Quand le second ou le troisième déterminant est  $\neq 0$ , les calculs sont très analogues.) Alors nous savons que le système constitué des équations 1 et 2 :

$$\begin{aligned} s u_1 + t v_1 &= x - x_0, \\ s u_2 + t v_2 &= y - y_0, \end{aligned}$$

se résout en :

$$s := \frac{\begin{vmatrix} x - x_0 & v_1 \\ y - y_0 & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}} = \frac{(x - x_0) v_2 - (y - y_0) v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1},$$

$$t := \frac{\begin{vmatrix} u_1 & x - x_0 \\ u_2 & y - y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}} = \frac{u_1 (y - y_0) - u_2 (x - x_0)}{u_1 v_2 - u_2 v_1}.$$

Les étudiants qui ne se souviennent pas de ces formules pourront : ou bien résoudre eux-même ce système à la main ; ou bien réviser rapidement le chapitre qui présente des formules générales pour intersecter deux droites dans le plan ; ou bien [technique la plus rapide] vérifier directement à la main que ces deux formules satisfont bien le système linéaire ci-dessus.

Puisque nous savons ce que valent  $s$  et  $t$ , nous pouvons ensuite les remplacer dans l'équation 3 :

$$\begin{aligned} z - z_0 &= s u_3 + t v_3 \\ &= \left( \frac{(x - x_0) v_2 - (y - y_0) v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \right) u_3 + \left( \frac{u_1 (y - y_0) - u_2 (x - x_0)}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \right) v_3, \end{aligned}$$

et continuer les calculs en commençant par faire basculer à gauche le dénominateur commun  $u_1 v_2 - u_2 v_1$  :

$$\begin{aligned} [u_1 v_2 - u_2 v_1] (z - z_0) &= (x - x_0) v_2 u_3 - (y - y_0) v_1 u_3 + u_1 (y - y_0) v_3 - u_2 (x - x_0) v_3 \\ &= [u_3 v_2 - u_2 v_3] (x - x_0) + [-u_3 v_1 + u_1 v_3] (y - y_0), \end{aligned}$$

c'est-à-dire de manière équivalente :

$$[u_2 v_3 - u_3 v_2] (x - x_0) + [u_3 v_1 - u_1 v_3] (y - y_0) + [u_1 v_2 - u_2 v_1] (z - z_0) = 0.$$

Tiens ! Des visages connus ! Au signe près, on retrouve les deux déterminants  $2 \times 2$  ci-dessus ! « Ça, c'est chouette » ! Et nous avons supposé qu'au moins 1 parmi ces 3 facteurs :

$$u_2 v_3 - u_3 v_2 \neq 0 \quad \text{ou} \quad u_3 v_1 - u_1 v_3 \neq 0, \quad \text{ou} \quad u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0,$$

était non nul. Donc nous trouvons une vraie équation, qui fait apparaître au moins une parmi les trois coordonnées  $(x - x_0)$ ,  $(y - y_0)$ ,  $(z - z_0)$ .

En donnant des noms plus simples à ces trois facteurs :

$$a := u_2 v_3 - u_3 v_2, \quad b := u_3 v_1 - u_1 v_3, \quad c := u_1 v_2 - u_2 v_1,$$

nous avons donc construit une *équation cartésienne* :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

On peut aussi l'écrire :

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0,$$

et même poser pour abrégé :

$$d := ax_0 + by_0 + cz_0.$$

**Définition 3.1.** Un 2-plan  $P \subset \mathbb{R}^3$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  défini comme lieu d'annulation d'une équation cartésienne :

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\},$$

où  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  et  $d \in \mathbb{R}$  sont des constantes.

Comme pour les droites dans le plan, on peut démontrer le résultat suivant, que nous admettrons.

**Théorème 3.2. [Équivalence entre deux définitions]** Un 2-plan  $P \subset \mathbb{R}^3$  peut être défini de deux manières équivalentes, comme :

(i)  $P := \{p_0 + s\vec{u} + t\vec{v} : s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \text{ quelconques}\}$ , avec un point quelconque  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  et deux vecteurs linéairement indépendants  $\vec{u} \in \vec{V}_{\mathbb{R}^3}$  et  $\vec{v} \in \vec{V}_{\mathbb{R}^3}$  ;

(ii)  $P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\}$ , avec des constantes réelles  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , telles que  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ .  $\square$

La deuxième représentation consiste en une *équation cartésienne*, bien connue depuis le lycée. Autrement dit, un plan dans  $\mathbb{R}^3$  peut toujours être considéré comme l'ensemble des solutions d'un système linéaire *compatible* à trois inconnues, constitué d'une unique équation, et dont la forme échelonnée réduite peut être ou bien :

$$\left[ \blacksquare * * * \right] \quad \text{ou bien :} \quad \left[ 0 \blacksquare * * \right] \quad \text{ou bien :} \quad \left[ 0 0 \blacksquare * \right]$$

mais certainement pas :

$$\left[ 0 0 0 \blacksquare \right]$$

ce qui correspondrait à  $(a, b, c) = (0, 0, 0)$  et à  $d = \blacksquare$ , car cette forme est la forme générale d'un système *incompatible*.

#### 4. Produit scalaire et vecteur orthogonal directeur d'un 2-plan $P \subset \mathbb{R}^3$

Rappelons que dans  $\mathbb{R}^3$ , le *produit scalaire euclidien* (canonique) entre deux vecteurs  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

À tout couple de vecteurs, le produit *scalaire* associe donc un *nombre réel* (et non pas un vecteur !), ce qu'on appelle un *scalaire*.

**Définition 4.1.** On dit que deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont *orthogonaux* si  $0 = \vec{u} \cdot \vec{v}$ , ce qu'on note  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

Soit un plan d'équation cartésienne :

$$ax + by + cz = d.$$

**Proposition 4.2.** *Un plan  $P \subset \mathbb{R}^3$  passant par un point  $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  de l'espace peut être défini comme l'ensemble des points  $M \in \mathbb{R}^3$  tels que le vecteur  $\overrightarrow{p_0M}$  est orthogonal à un vecteur non nul  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  donné :*

$$P := \left\{ M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{p_0M} \perp \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\}. \quad \square$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{p_0M} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0), \end{aligned}$$

et on retrouve bien une équation cartésienne de plan.

Ensuite, soit un plan quelconque donné par une équation cartésienne :

$$P := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d \right\},$$

avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ . Un vecteur orthogonal (normal) naturel est donc :

$$\vec{n}_P := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Nous affirmons que les trois vecteurs suivants dont les coordonnées sont formées à partir des coefficients  $(a, b, c)$  de l'équation cartésienne du plan :

$$\vec{u}_{12} := \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_{13} := \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_{23} := \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix},$$

sont parallèles à ce plan, c'est-à-dire contenus dans ce plan à une translation près, car le plan ne passe pas forcément par l'origine  $(0, 0, 0)$ , à moins que  $d = 0$ .

En effet, il suffit de vérifier qu'ils sont *orthogonaux* au vecteur normal :

$$0 \stackrel{?}{=} \vec{u}_{12} \cdot \vec{n}_P \quad \text{OUI}, \quad 0 \stackrel{?}{=} \vec{u}_{13} \cdot \vec{n}_P \quad \text{OUI}, \quad 0 \stackrel{?}{=} \vec{u}_{23} \cdot \vec{n}_P \quad \text{OUI}.$$

**Lemme 4.3.** *Étant donné trois nombres réels  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  non tous nuls, il y a toujours, parmi les 3 vecteurs :*

$$\vec{u}_{12} := \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_{13} := \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_{23} := \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix},$$

*au moins 2 vecteurs linéairement indépendants.*

En fait, il ne peut pas y en avoir plus que 2 qui sont linéairement indépendants, puisqu'ils sont tous parallèles à un plan  $P \subset \mathbb{R}^3$ , de dimension 2.

*Démonstration.* Appliquons la Proposition 2.2 (iii) et calculons les 3 déterminants  $2 \times 2$  extraits pour chacun des couples de vecteurs.

•  $\vec{u}_{12}$  et  $\vec{u}_{13}$  :

$$\begin{vmatrix} -b & -c \\ a & 0 \end{vmatrix} = ac, \quad \begin{vmatrix} -b & -c \\ 0 & a \end{vmatrix} = -ab, \quad \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2.$$

En particulier, nous constatons que si  $a = 0$ , tandis que  $(b, c) \neq (0, 0)$  par hypothèse, ces trois résultats valent 0, et dans ce cas, les deux vecteurs  $\vec{u}_{12}$  et  $\vec{u}_{13}$  ne sont *pas* linéairement indépendants. Quand  $a = 0$ , il est donc nécessaire de considérer aussi  $\vec{u}_{23}$ .

- $\vec{u}_{12}$  et  $\vec{u}_{23}$  :

$$\begin{vmatrix} -b & 0 \\ a & -c \end{vmatrix} = bc, \quad \begin{vmatrix} -b & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = -b^2, \quad \begin{vmatrix} a & -c \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab.$$

- $\vec{u}_{13}$  et  $\vec{u}_{23}$  :

$$\begin{vmatrix} -c & 0 \\ 0 & -c \end{vmatrix} = c^2, \quad \begin{vmatrix} -c & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = -bc, \quad \begin{vmatrix} 0 & -c \\ a & b \end{vmatrix} = ac.$$

En regardant les  $3 \times 3 = 9$  résultats, nous voyons des carrés  $a^2, -b^2, c^2$ , les autres étant des produits. Comme au moins 1 parmi les 3 nombres réels  $a, b, c$  est  $\neq 0$  par hypothèse, nous concluons qu'au moins 1 de ces 9 déterminants est  $\neq 0$ , et donc, au moins 1 parmi les 3 couples de vecteurs :

$$(\vec{u}_{12}, \vec{u}_{13}), \quad (\vec{u}_{12}, \vec{u}_{23}), \quad (\vec{u}_{13}, \vec{u}_{23}),$$

est linéairement indépendant, ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

**Résumé 4.4.** *Étant donné l'équation cartésienne  $ax + by + cz = d$  avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  et  $d \in \mathbb{R}$  d'un plan dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  :*

- (1) *le vecteur non nul :*

$$\vec{n}_P := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

*est orthogonal à  $D$  ;*

- (2) *au moins 2 parmi les 3 vecteurs :*

$$\vec{u}_{12} := \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_{13} := \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_{23} := \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix},$$

*sont parallèles à  $D$ , c'est-à-dire forment un couple de vecteurs directeurs de  $P$  à partir desquels on peut reconstituer une équation paramétrique de  $P$ .*

## 5. Plan passant par trois points non alignés

Intuitivement, on « voit » que par trois points distincts et non alignés  $A, B, C$  dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , il passe toujours un et un seul plan. Notons :

$$A = (x_A, y_A, z_A), \quad B = (x_B, y_B, z_B), \quad C = (x_C, y_C, z_C).$$

Évidemment, si trois points  $A, B, C$  sont donnés, on commence par vérifier que les deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix}$$

sont linéairements indépendants, ou bien « à l'œil », ou bien en appliquant la Proposition 2.2.

**Question 5.1.** *Comment exprime-t-on qu'un point quelconque  $M = (x, y, z)$  de l'espace appartient au plan  $(ABC)$  ?*

Pour un point  $M = (x, y, z)$  quelconque du plan, considérons le vecteur :

$$\overrightarrow{AM} = M - A := \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}.$$

Il est clair que ce vecteur  $\overrightarrow{AM}$  doit être combinaison linéaire des deux vecteurs directeurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  du plan  $(ABC)$ . Autrement dit, il existe  $s \in \mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}$  — d'ailleurs arbitraires lorsque  $M$  parcourt tous les points du plan  $(ABC)$  — tels que :

$$\overrightarrow{AM} = s \overrightarrow{AB} + t \overrightarrow{AC},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} x - x_A &= s(x_B - x_A) + t(x_C - x_A), \\ y - y_A &= s(y_B - y_A) + t(y_C - y_A), \\ z - z_A &= s(z_B - z_A) + t(z_C - z_A). \end{aligned}$$

**Proposition 5.2.** *La représentation paramétrique du plan unique  $(AB)$  passant par trois points distincts et non alignés  $A, B, C$  dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  est :*

$$\begin{aligned} x &= x_A + s(x_B - x_A) + t(x_C - x_A), \\ y &= y_A + s(y_B - y_A) + t(y_C - y_A), \\ z &= z_A + s(z_B - z_A) + t(z_C - z_A), \end{aligned}$$

où  $s \in \mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}$  sont arbitraires. □

Alors le *point-mobile* doublement paramétré :

$$M(s, t) := A + s \overrightarrow{AB} + t \overrightarrow{AC},$$

satisfait :

$$M(0, 0) = A, \quad M(1, 0) = B, \quad M(0, 1) = C.$$

## 6. Intersections d'un plan avec les plans de coordonnées $0xy, 0xz, 0yz$

Partir d'une équation cartésienne de plan dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$ax + by + cz = d.$$

Intersecter ce plan avec les trois plans de coordonnées  $\{x = 0\}$ ,  $\{y = 0\}$ ,  $\{z = 0\}$ . Par symétrie entre les coordonnées, étudier seulement l'intersection avec le plan horizontal  $\{z = 0\}$ .

Donc on résout le système linéaire :

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ z &= 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} ax + by &= d \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Tout se passe donc dans le plan horizontal à hauteur nulle  $z = 0$ . Par hypothèse,  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  — sinon, ce n'est pas une équation de plan.

Si  $(a, b) \neq (0, 0)$  aussi, la première équation est une équation de droite dans le plan horizontal  $\{z = 0\}$ . On a donc l'intersection de deux plans, le premier tel une feuille posée verticalement sur une table :

$$\{(x, y, z) : ax + by = d\},$$



dont l'équation est *indépendante* de  $z$ , et le second  $\{z = 0\}$  étant le plan de la table, justement. Ces deux plans s'intersectent le long de la droite :

$$\{(x, y, 0) : ax + by = d\},$$

située dans le plan horizontal, comme un stylo au repos.

Mais  $(a, b) = (0, 0)$  peut se produire ! En effet, la contrainte  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  peut être satisfaite avec  $c \neq 0$ . Dans ce cas « exceptionnel », le système est alors :

$$\begin{array}{l} 0x + 0y + cz = d \\ z = 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} z = \frac{d}{c} \\ z = 0 \end{array}$$

il correspond à deux plans horizontaux parallèles. Leur intersection est vide lorsque  $\frac{d}{c} \neq 0$ , et ces deux plans horizontaux sont *confondus* lorsque  $\frac{d}{c} = 0$ .

Modulo une permutation des coordonnées  $x, y, z$ , l'étude générale est terminée !

## 7. Équations graphées de plans $P \subset \mathbb{R}^3$

Partir de :

$$ax + by + cz = d.$$

Supposer  $c \neq 0$ . Résoudre :

$$\begin{aligned} z &= -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y + \frac{d}{c} \\ &=: px + qy + r, \end{aligned}$$

Voir la coordonnée verticale  $z = z(x, y)$  comme fonction des coordonnées horizontales  $(x, y)$ . S'imaginer une surface dans l'espace, une « nappe » (toute droite, sans bosselures, une planche bien rabotée, quoi !).

Lorsque  $c = 0$ , supposer  $b \neq 0$ , résoudre :

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{d}{b}.$$

Voir  $y = y(x, z)$  comme une fonction de  $(x, z)$ , avec les variables  $x, z$  libres et quelconques, dans un cas spécial où  $y$  ne dépend en fait pas de  $z$ .

Lorsque  $c = 0$  et  $b = 0$ , d'où  $a \neq 0$  nécessairement puisque pour l'équation d'un plan il faut toujours supposer  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ , résoudre :

$$x = \frac{d}{a},$$

et obtenir un plan 'vertical', avec  $x = x(y, z)$  fonction des deux variables libres  $y, z$ , et en fait, fonction constante.

## 8. Intersection entre deux plans $P \subset \mathbb{R}^3$ et $P' \subset \mathbb{R}^3$


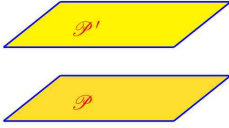
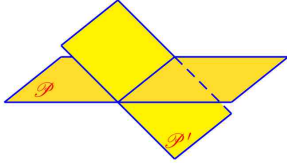
Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , considérons 2 plans  $P \subset \mathbb{R}^3$  et  $P' \subset \mathbb{R}^3$  d'équations cartésiennes respectives :

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d, \\ a'x + b'y + c'z &= d', \end{aligned}$$

avec bien sûr  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  et  $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ .

**Question 8.1.** Quelles sont toutes les intersections possibles entre 2 plans donnés  $P \subset \mathbb{R}^3$  et  $P' \subset \mathbb{R}^3$  ?

Puisque les 8 lettres  $a, b, c, d, a', b', c', d'$  désignent des constantes réelles qui peuvent prendre des valeurs très diverses, nous nous doutons bien que de nombreux cas algébriques pourront se produire, qui correspondront aux trois situations géométriques bien connues.

Plans parallèles		Plans non parallèles
confondus	strictement parallèles	sécants en une droite
		

La matrice complète du système est :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array} \right].$$

Tout d'abord, chacune des deux lignes formées par la matrice *non* complète :

$$\begin{aligned} [a \ b \ c] &\neq [0 \ 0 \ 0], \\ [a' \ b' \ c'] &\neq [0 \ 0 \ 0], \end{aligned}$$

ne peut *pas* être identiquement nulle. Par conséquent, *il y aura toujours un pivot en première ligne*.

Pour cette raison, lorsqu'on applique la méthode du pivot pour résoudre un tel système linéaire de 2 équations à 3 inconnues, seuls les trois branches suivantes de cas variés pourront se produire.

- Premièrement, quand le pivot de la ligne 1 est en position  $(1, 1)$ , quatre cas peuvent se produire :

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \end{array} \right]}_{\infty^1 \text{ solutions}}, \quad \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \end{array} \right]}_{\infty^1 \text{ solutions}}, \quad \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{array} \right]}_{\text{Aucune solution!}}, \quad \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{\infty^2 \text{ solutions}},$$

et les espaces de solutions respectifs sont :

$$\text{Sol} = \{ (* + * z, * + * z, z) : z \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \},$$

$$\text{Sol} = \{ (* + * y, y, *) : y \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \},$$

$$\text{Sol} = \emptyset,$$

$$\text{Sol} = \{ (* + * y + * z, y, z) : y \in \mathbb{R} \text{ quelconque}, z \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \}.$$

- Deuxièmement, quand le pivot de la ligne 1 est en position  $(1, 2)$ , trois cas peuvent se produire :

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \end{array} \right]}_{\infty^1 \text{ solutions}}, \quad \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{array} \right]}_{\text{Aucune solution!}}, \quad \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{\infty^2 \text{ solutions}},$$

et les espaces de solutions respectifs sont :

$$\text{Sol} = \{(x, *, *) : x \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\},$$

$$\text{Sol} = \emptyset,$$

$$\text{Sol} = \{(x, * + *z, z) : x \in \mathbb{R} \text{ quelconque}, z \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\}.$$

• Troisièmement et dernièrement, quand le pivot de la ligne 1 est en position (1, 3), deux cas peuvent se produire :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \blacksquare & | & * \\ 0 & 0 & 0 & | & \blacksquare \end{bmatrix}}_{\text{Aucune solution!}}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \blacksquare & | & * \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}}_{\infty^2 \text{ solutions}},$$

et les espaces de solutions respectifs sont :

$$\text{Sol} = \emptyset,$$

$$\text{Sol} = \{(x, y, *) : x \in \mathbb{R} \text{ quelconque}, y \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\}.$$

Ainsi, grâce à cette première approche « intuitive » qui sous-entend de nombreux calculs, nous sommes maintenant bien convaincus qu'il y a effectivement trois dispositions possibles de deux plans  $P$  et  $P'$  dans  $\mathbb{R}^3$  :

- les deux plans  $P = P'$  sont confondus  $\longleftrightarrow$  **solutions doublement infinies**  $\infty^2$  ;
- les deux plans  $P // P'$  avec  $P \neq P'$  sont parallèles et non confondus  $\longleftrightarrow$  **aucune solution** ;
- les deux plans  $P \cap P' = D$  sont transversaux, *i.e.* sécants en une droite  $\longleftrightarrow$  **solutions simplement infinies**  $\infty^1$ .

Maintenant, nous pouvons donner une caractérisation très simple du fait que deux droites  $D = D'$  coïncident.

**Théorème 8.2.** Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , soient deux plans  $P$  et  $P'$  d'équations cartésiennes  $ax + by + cz = d$  et  $a'x + b'y + c'z = d'$ , avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  et  $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ . Alors on a équivalence entre :

(i) il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  non nul tel que :

$$a' = \lambda a, \quad b' = \lambda b, \quad c' = \lambda c, \quad d' = \lambda d;$$

(ii)  $P = P'$ .

*Démonstration.* Un énoncé analogue a déjà été démontré pour caractériser la coïncidence de 2 droites  $D \subset \mathbb{R}^2$  et  $D' \subset \mathbb{R}^2$  dans le plan, en travaillant avec deux variables  $x, y$ . Le lecteur courageux élaborera aisément une généralisation de cette démonstration au cas de 3 variables  $x, y, z$ .  $\square$

**Terminologie 8.3.** Deux plans  $P \subset \mathbb{R}^3$  et  $P' \subset \mathbb{R}^3$  d'équations cartésiennes :

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d, \\ a'x + b'y + c'z &= d', \end{aligned}$$

avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  et  $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ , seront dits *transversaux* quand leurs 2 vecteurs normaux :

$$\vec{n}_P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n}_{P'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

sont *non colinéaires*, *i.e.* sont linéairement indépendants.

Rappelons que tel et le cas si et seulement si l'un au moins parmi les 3 déterminants  $2 \times 2$  suivants :

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0,$$

est non nul.

**Théorème 8.4.** *Deux plans  $P \subset \mathbb{R}^3$  et  $P' \subset \mathbb{R}^3$  sont transversaux si et seulement si leur intersection est une droite.*  $\square$

Afin de déterminer cette droite, nous pouvons enfin entreprendre un calcul ! Pour fixer les idées, supposons que :

$$0 \neq \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}.$$

Pour résoudre le système linéaire de 2 équations à 3 inconnues associé à nos deux plans  $P$  et  $P'$ , ré-écrivons ces 2 équations sous la forme :

$$\begin{aligned} ax + by &= d - cz, \\ a'x + b'y &= d' - c'z. \end{aligned}$$

Une application directe de formules déjà vues dans le chapitre consacré aux droites dans le plan, ou une résolution manuelle *ad hoc* (exercice), fournit l'expression premièrement de :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} d-cz & b \\ d'-c'z & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(d - cz)b' - (d' - c'z)b}{ab' - a'b} \\ &= \frac{db' - d'b}{ab' - a'b} + \frac{-cb' + c'b}{ab' - a'b} z, \end{aligned}$$

puis deuxièmement de :

$$\begin{aligned} y &= \frac{\begin{vmatrix} a & d-cz \\ a' & d'-c'z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \\ &= \frac{a(d' - c'z) - a'(d - cz)}{ab' - a'b} \\ &= \frac{ad' - a'd}{ab' - a'b} + \frac{-ac' + a'c}{ab' - a'b} z. \end{aligned}$$

**Théorème 8.5.** *Sous l'hypothèse  $0 \neq \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ , la droite d'intersection entre deux plans transversaux :*

$$D := P \cap P',$$

*a pour équations paramétriques :*

$$\begin{aligned} x &= \frac{db' - d'b}{ab' - a'b} + \frac{-cb' + c'b}{ab' - a'b} z, \\ y &= \frac{ad' - a'd}{ab' - a'b} + \frac{-ac' + a'c}{ab' - a'b} z, \\ z &= z, \end{aligned}$$

avec  $z \in \mathbb{R}$  quelconque jouant le rôle du paramètre temporel  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Certainement, dans la « vraie vie » d'un étudiant de Licence 1, tous les calculs de ce type seront la plupart du temps à effectuer, non pas avec des lettres formelles  $a, b, c, d, a', b', c', d'$ , mais avec des quantités numériques précises.

Enfin, traitons l'intersection entre un premier plan  $P$  donné sous forme cartésienne :

$$ax + by + cz = d,$$

et un deuxième plan  $P'$  donné sous forme paramétrique :

$$x = x_0 + su_1 + tv_1,$$

$$y = y_0 + su_2 + tv_2,$$

$$z = z_0 + su_3 + tv_3.$$

Naturellement, on injecte cette représentation dans l'équation cartésienne, on réorganise :

$$\begin{aligned} 0 &= a(x_0 + su_1 + tv_1) + b(y_0 + su_2 + tv_2) + c(z_0 + su_3 + tv_3) - d \\ &= ax_0 + by_0 + cz_0 - d + [au_1 + bu_2 + cu_3]s + [av_1 + bv_2 + cv_3]t, \end{aligned}$$

et on obtient une relation de la forme :

$$0 = \alpha + \beta s + \gamma t.$$

La plupart du temps (mais pas toujours), on a  $\beta \neq 0$  ou  $\gamma \neq 0$ . Quand  $\gamma \neq 0$ , on peut donc résoudre  $t$  en fonction de  $s$ , ce qui donne :

$$t = -\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma}s,$$

et en remplaçant dans la représentation paramétrique, on obtient la *droite d'intersection*  $D := P \cap P'$  :

$$x = x_0 - \frac{\alpha}{\gamma}v_1 + \left[u_1 - \frac{\beta}{\gamma}v_1\right]s,$$

$$y = y_0 - \frac{\alpha}{\gamma}v_2 + \left[u_2 - \frac{\beta}{\gamma}v_2\right]s,$$

$$z = z_0 - \frac{\alpha}{\gamma}v_3 + \left[u_3 - \frac{\beta}{\gamma}v_3\right]s.$$

À nouveau, dans la vraie vie, ces calculs seront à effectuer non pas avec des lettres, mais avec des nombres (rationnels) explicites.

### 9. Intersection entre trois plans $P, P', P'' \subset \mathbb{R}^3$ et déterminant $3 \times 3$ formel

Avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ , avec  $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ , avec  $(a'', b'', c'') \neq (0, 0, 0)$ , donnons-nous trois plans  $P, P', P''$  dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  sous forme cartésienne :

$$ax + by + cz = d,$$

$$a'x + b'y + c'z = d',$$

$$a''x + b''y + c''z = d''.$$

Les 3 vecteurs normaux correspondants sont :

$$\vec{n}_P := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_{P'} := \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_{P''} := \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}.$$

Géométriquement, on se doute bien que :

- $P, P', P''$  sont *parallèles* si et seulement si :

$$1 = \dim \text{Vect}(\vec{n}_P, \vec{n}_{P'}, \vec{n}_{P''});$$

- Deux parmi les trois plans  $P, P', P''$  sont *parallèles* si et seulement si :

$$2 = \dim \text{Vect} (\vec{n}_P, \vec{n}_{P'}, \vec{n}_{P''});$$

- $P, P', P''$  s'intersectent en un point *unique* si et seulement si :

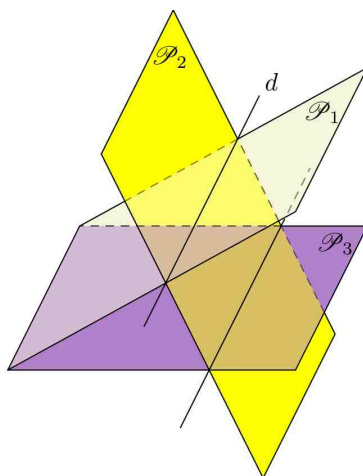
$$3 = \dim \text{Vect} (\vec{n}_P, \vec{n}_{P'}, \vec{n}_{P''}).$$

En réfléchissant plus, on trouve les situations géométriques suivantes.

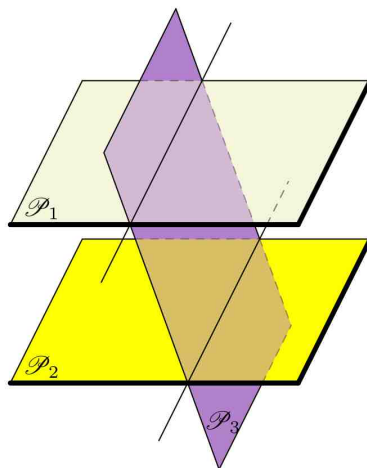
On considère trois plans  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  de vecteurs normaux respectifs  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  et  $\vec{n}_3$ .

- **Point de vue géométrique**

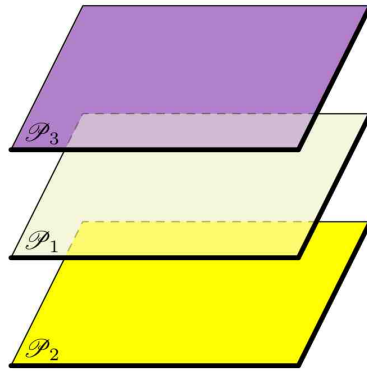
1. L'intersection des plans  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  peut être **vide**.



Deux plans sont sécants suivant une droite  $d$  et le troisième plan est strictement parallèle à  $d$

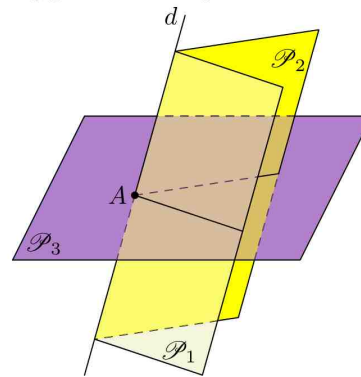


Deux plans sont strictement parallèles et le troisième les coupe suivant deux droites parallèles



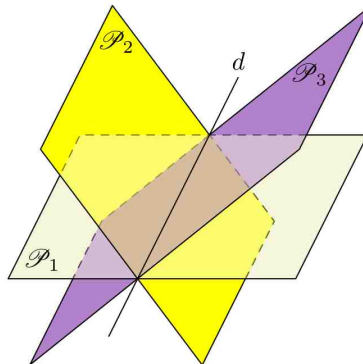
Deux plans sont strictement parallèles, le troisième est parallèle aux précédents

2. L'intersection des plans  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  peut être **un point**.



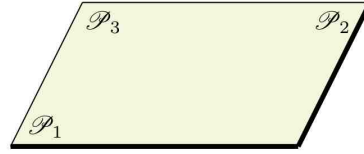
Deux plans sont sécants suivant une droite  $d$  et le troisième coupe  $d$  en un point  $A$ .

3. L'intersection des plans  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  peut être **une droite**.



Les trois plans sont sécants suivant une droite  $d$

4. L'intersection des plans  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  peut être **un plan**.



Les trois plans sont confondus

**Problème 9.1.** Décrire algébriquement toutes les situations respectives possibles de 3 plans quelconques  $P$ ,  $P'$ ,  $P''$  dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

La matrice complète du système linéaire décrivant l'intersection  $P \cap P' \cap P''$  des trois plans est :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array} \right].$$

Tout d'abord, chacune des trois lignes formées par la matrice *non* complète :

$$\begin{aligned} [a \ b \ c] &\neq [0 \ 0 \ 0], \\ [a' \ b' \ c'] &\neq [0 \ 0 \ 0], \\ [a'' \ b'' \ c''] &\neq [0 \ 0 \ 0], \end{aligned}$$

ne peut *pas* être identiquement nulle. Par conséquent, *il y aura toujours un pivot en première ligne*.

Pour cette raison, lorsqu'on applique la méthode du pivot pour résoudre un tel système linéaire de 2 équations à 3 inconnues, seuls les trois branches suivantes de cas variés pourront se produire.

• Premièrement, quand le pivot de la ligne 1 est en position  $(1, 1)$ , six cas peuvent se produire :

$$\begin{array}{cccc} \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \end{array} \right]}_{1 \text{ solution}}, & \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{array} \right]}_{\text{Aucune solution!}}, & \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{array} \right]}_{\text{Aucune solution!}}, & \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{\infty^1 \text{ solutions}}, \\ \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{\text{Aucune solution!}}, & \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{\infty^2 \text{ solutions}}. \end{array}$$

• Deuxièmement, quand le pivot de la ligne 1 est en position  $(2, 1)$ , quatre cas peuvent se produire :

$$\begin{array}{cccc} \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{array} \right]}_{\text{Aucune solution!}}, & \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{\infty^1 \text{ solutions}}, & \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{\text{Aucune solution!}}, & \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{\infty^2 \text{ solutions}}. \end{array}$$



- Troisièmement, quand le pivot de la ligne 1 est en position  $(3, 1)$ , deux cas peuvent se produire :

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{\text{Aucune solution!}}, \quad \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{\infty^2 \text{ solutions}}.$$

**Terminologie 9.2.** Trois plans  $P, P', P'' \subset \mathbb{R}^3$ , d'équations cartésiennes :

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d, \\ a'x + b'y + c'z &= d', \\ a''x + b''y + c''z &= d'', \end{aligned}$$

avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ ,  $(a'', b'', c'') \neq (0, 0, 0)$ ,  $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$  seront dits *transversaux* quand leurs 3 vecteurs normaux :

$$\vec{n}_P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_{P'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_{P''} = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants.

Maintenant, nous ne savons toujours pas comment caractériser l'indépendance entre trois vecteurs.

Pour l'instant, essayons de résoudre notre système linéaire. Commençons par éliminer  $x$  entre les équations 1 et 2 :

$$\begin{aligned} a'(ax + by + cz = d), \\ a(a'x + b'y + c'z = d'), \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$(a'b - ab')y + (a'c - ac')z = a'd - ad'.$$

De même, éliminons  $x$  entre les équations 1 et 3 :

$$\begin{aligned} a''(ax + by + cz = d), \\ a(a''x + b''y + c''z = d''), \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$(a''b - ab'')y + (a''c - ac'')z = a''d - ad''.$$

Nous obtenons ainsi un système de 2 équations à 2 inconnues de la forme :

$$\begin{aligned} \alpha y + \beta z &= \gamma, \\ \alpha' y + \beta' z &= \gamma', \end{aligned}$$

et on sait ce qu'il faut faire pour le résoudre, modulo le fait que ici, les constantes  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ , sont un petit peu compliquées.

En tout cas, nous pouvons calculer courageusement afin d'éliminer la variable  $y$  :

$$\begin{aligned} (a''b - ab'') \left( (a'b - ab')y + (a'c - ac')z \right) &= a'd - ad', \\ (a'b - ab') \left( (a''b - ab'')y + (a''c - ac'')z \right) &= a''d - ad'', \end{aligned}$$

et nous obtenons une équation en  $z$  seulement :

$$\left[ (a''b - ab'')(a'c - ac') - (a'b - ab')(a''c - ac'') \right] z = (a''b - ab'')(a'd - ad') - (a'b - ab')(a''d - ad'').$$

Maintenant, développons tous les termes :

$$\begin{bmatrix} \underline{a''ba'c} - a''bac' - ab''a'c + ab''ac' \\ -\underline{a'ba''c} + a'bac'' + ab'a''c - ab'ac'' \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} \underline{a''ba'd} - a''bad' - ab''a'd + ab''ad' \\ -\underline{a'ba''d} + a'bad'' + ab'a''d - ab'ad'' \end{bmatrix}$$

observons que 2 paires de termes s'annihilent, et que tout se factorise par  $a$  :

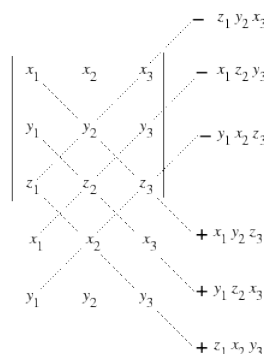
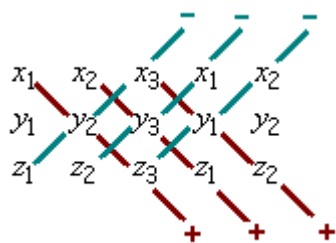
$$-a \left[ ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - a'bc'' - ab''c' \right] z = -a \left( ab'd'' + a'b''d + a''bd' - a''b'd - a'bd'' - ab''d' \right).$$

**Définition 9.3.** Le *déterminant* d'une matrice  $3 \times 3$  :

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix},$$

est le scalaire noté avec des barres verticales, et calculé mentalement grâce à la « règle de Sarrus » :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} := u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1 - u_2v_1w_3 - u_1v_3w_2.$$



Après échange entre lignes et colonnes, le déterminant reste le même :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

On peut démontrer la

**Proposition 9.4.** Trois vecteurs dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

sont linéairement dépendants si et seulement si leur déterminant s'annule :

$$0 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

□

Par contraposition,  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  sont linéairement *indépendants* ssi :

$$0 \neq \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

En revenant à l'équation laissée sur le bord du chemin plus haut, on constate, après division par  $a$  (que l'on suppose  $\neq 0$ ), que  $z$  se résout sous la forme d'un quotient de deux déterminants :

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}.$$

**Théorème 9.5. [Formules de Cramér en dimension 3]** Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , trois plans donnés sous forme cartésienne :

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d, \\ a'x + b'y + c'z &= d', \\ a''x + b''y + c''z &= d'', \end{aligned}$$

avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ , avec  $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ , avec  $(a'', b'', c'') \neq (0, 0, 0)$ , s'intersectent en un point unique  $Q := P \cap P' \cap P''$  si et seulement si leurs 3 vecteurs normaux :

$$\vec{n}_P := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_{P'} := \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_{P''} := \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix},$$

sont linéairement indépendants, si et seulement si :

$$0 \neq \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Dans ce cas, les coordonnées du point  $Q = P \cap P' \cap P''$  sont :

$$x_Q := \frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}, \quad y_Q := \frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}, \quad z_Q := \frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}. \quad \square$$

## 10. Droites $D \subset \mathbb{R}^3$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , soit un point fixé :

$$p_0 = (x_0, y_0, z_0),$$

et soit un vecteur *non nul* fixé :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Question 10.1.** Comment définir la droite passant par le point  $p_0$  qui est dirigée par le vecteur non nul  $\vec{v}$  ?

C'est très simple ! Un point quelconque  $M = (x, y, z)$  appartient à cette droite si et seulement si le vecteur  $\overrightarrow{p_0M}$  est colinéaire au vecteur  $\vec{v}$ . Autrement dit, avec  $t \in \mathbb{R}$  quelconque, ssi :

$$\overrightarrow{p_0M} = t\vec{v}.$$

En coordonnées, nous obtenons la *représentation paramétrique d'une droite*  $D \subset \mathbb{R}^3$  dans l'espace :

$$\begin{aligned}x - x_0 &= t\alpha, \\y - y_0 &= t\beta, \\z - z_0 &= t\gamma.\end{aligned}$$

Au paramètre quelconque  $t$  est donc associé le point mobile sur la droite :

$$M(t) := (x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta, z_0 + t\gamma),$$

qui se situe bien évidemment au point de départ  $p_0$  à l'origine des temps  $t = 0$  :

$$M(0) = p_0 = (x_0, y_0, z_0).$$

Une autre manière de voir une droite  $D \subset \mathbb{R}^3$  dans l'espace consiste à éliminer la variable  $t$  entre ces 3 équations. De manière équivalente, on peut aussi partir de la matrice  $3 \times 2$  des coordonnées des deux vecteurs  $\vec{v}$  et  $\overrightarrow{p_0M}$  :

$$\begin{bmatrix} \alpha & x - x_0 \\ \beta & y - y_0 \\ \gamma & z - z_0 \end{bmatrix},$$

puis appliquer la Proposition 2.2 afin d'exprimer que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants si et seulement si les trois déterminants  $2 \times 2$  extraits suivants s'annulent :

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha & x - x_0 \\ \beta & y - y_0 \end{vmatrix}, \quad 0 = \begin{vmatrix} \alpha & x - x_0 \\ \gamma & z - z_0 \end{vmatrix}, \quad 0 = \begin{vmatrix} \beta & y - y_0 \\ \gamma & z - z_0 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire que les 3 équations cartésiennes suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned}0 &= \alpha(y - y_0) - \beta(x - x_0), \\0 &= \alpha(z - z_0) - \gamma(x - x_0), \\0 &= \beta(z - z_0) - \gamma(y - y_0).\end{aligned}$$

En général, 2 équations parmi ces 3 équations suffisent toujours, ce qui est naturel, puisqu'une droite est de dimension  $1 = 3 - 2$  dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  de dimension 3, et qu'il est intuitivement clair qu'une droite s'obtient toujours en intersectant 2 plans transversaux chacun défini par 1 équation cartésienne. Dans chaque cas particulier, il faut donc *sélectionner* 2 parmi ces 3 équations cartésiennes.

Par exemple, quand toutes les composantes  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$  du vecteur  $\vec{v}$  sont *non nulles*, on peut écrire ces 3 équations cartésiennes sous la forme symétrique :

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}.$$

Implicitement, une *troisième égalité* à lieu, en partant du dernier terme pour revenir au premier terme :

$$\frac{z - z_0}{\gamma} = \frac{x - x_0}{\alpha}.$$

Supposons maintenant que  $\alpha = 0$ , d'où  $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$  par hypothèse. Supposons même que  $\beta \neq 0$  et  $\gamma \neq 0$ . Les 3 équations plus haut deviennent :

$$\begin{aligned} 0 &= -\beta(x - x_0), \\ 0 &= -\gamma(x - x_0), \\ 0 &= \beta(z - z_0) - \gamma(y - y_0), \end{aligned}$$

et il est clair dans ce cas que les deux premières équations se ramènent à une seule équation :

$$0 = x - x_0,$$

et donc la droite est effectivement définie par  $2 = 3 - 1$  équations cartésiennes indépendantes :

$$\begin{aligned} 0 &= x - x_0, \\ 0 &= \beta(z - z_0) - \gamma(y - y_0), \end{aligned}$$

comme on s'y attendait sur le plan géométrique.

Sans produire de démonstration précise par manque de temps, nous admettrons l'énoncé suivant, que le lecteur-étudiant comprendra sans mal grâce aux considérations qui précèdent. En fait, la plupart du temps, en TD, en DM, et en Examen, toutes les données seront numériques et concrètes, et on aura une intuition claire concernant l'indépendance et l'équivalence entre représentation paramétrique et systèmes de deux équations cartésiennes.

**Théorème 10.2.** Une droite  $D \subset \mathbb{R}^3$  peut être définie de deux manières équivalentes, comme :

(i)  $D := \{p_0 + t\vec{v} : t \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\}$ , avec un point quelconque  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  et un vecteur arbitraire non nul  $\vec{v} \in \vec{V}_{\mathbb{R}^3} \setminus \{\vec{0}\}$ ;

(ii) une intersection entre deux plans  $P \subset \mathbb{R}^3$  et  $P' \subset \mathbb{R}^3$  d'équations cartésiennes :

$$D: \begin{cases} ax + by + cz = d, \\ a'x + b'y + c'z = d', \end{cases}$$

qui sont transversaux au sens où leurs 2 vecteurs normaux :

$$\vec{n}_P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n}_{P'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

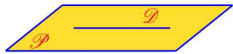

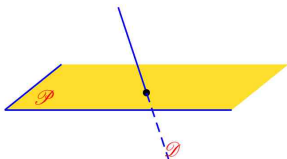
sont non colinéaires, i.e. linéairement indépendants.

Rappelons que tel et le cas si et seulement si l'un au moins parmi les 3 déterminants  $2 \times 2$  :

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0,$$

est non nul.

## 11. Intersection entre une droite $D \subset \mathbb{R}^3$ et un plan $P \subset \mathbb{R}^3$

Plans et droites parallèles		Plans et droites non parallèles
droite incluse	strictement parallèles	sécants en un point
		

Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , comme la figure ci-dessus le montre, il existe *trois* situations géométriques « évidentes » pour l'intersection d'une droite quelconque  $D \subset \mathbb{R}^3$  avec un plan quelconque  $P \subset \mathbb{R}^3$ .

Notre objectif est de comprendre cela, d'un point de vue purement algébrique. Nous allons traiter deux circonstances, suivant que  $D$  est donnée sous forme cartésienne ou sous forme paramétrique, avec  $P$  toujours donné sous forme cartésienne.

Première circonstance. La droite  $D$  est donnée sous forme cartésienne, et de même pour le plan  $P$  :

$$D: \begin{cases} ax + by + cz = d, \\ a'x + b'y + c'z = d', \end{cases} \quad \text{et} \quad P: \begin{cases} a''x + b''y + c''z = d''. \end{cases}$$

D'après le Théorème 10.2, les deux équations cartésiennes de  $D$  sont indépendantes au sens où les deux vecteurs normaux :

$$\vec{n}_D = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n}_{D'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

sont *non colinéaires*, i.e. linéairement indépendants.

Par conséquent, après application de la méthode du pivot de Gauss, et après une permutation éventuelle des trois coordonnées  $(x, y, z)$ , nous pouvons supposer que les deux équations cartésiennes de la droite  $D$  s'écrivent :

$$D: \begin{cases} x + cz = d, \\ y + c'z = d', \end{cases} \\ P: \begin{cases} a''x + b''y + c''z = d'', \end{cases}$$

avec des nouveaux coefficients  $c, d, c', d'$  pour lesquels nous ré-utilisons la même notation.

Si nous écrivons en-dessous l'équation cartésienne de  $P$  aussi, nous devinons alors immédiatement qu'après deux transformations de Gauss évidentes, les points de l'intersection  $D \cap P$  seront donnés par un système de 3 équations linéaires à 3 inconnues du type :

$$D \cap P: \begin{cases} x + cz = d, \\ y + c'z = d', \\ c''z = d'', \end{cases}$$

avec des nouveaux coefficients  $c'', d''$  pour lesquels nous utilisons à nouveau la même notation.

Notre connaissance des systèmes linéaires nous permet alors de comprendre instantanément l'énoncé suivant, sans avoir besoin de produire une démonstration.

**Théorème 11.1.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , l'intersection générale entre une droite  $D$  quelconque donnée sous forme cartésienne, et un plan  $P$  quelconque donné aussi sous forme cartésienne, se ramène, après permutation éventuelle des coordonnées  $x, y, z$ , et après des transformations de Gauss, à un système linéaire du type :

$$D: \begin{cases} x & + c z = d, \\ y + c' z & = d', \end{cases}$$

$$P: \begin{cases} c'' z & = d''. \end{cases}$$

(1) Si  $c'' \neq 0$ , alors  $D \cap P = \{M\}$  est le point unique :

$$M := \left( d - c \frac{d''}{c''}, d' - c' \frac{d''}{c''}, \frac{d''}{c''} \right).$$

(2) Si  $c'' = 0 \neq d''$ , alors  $D \cap P = \emptyset$ , c'est-à-dire que la droite  $D // P$  est parallèle au plan  $P$  sans être contenue dans  $P$ .

(3) Si  $c'' = 0 = d''$ , alors la droite  $D \subset P$  est contenue dans le plan  $P$ .  $\square$

Deuxième circonstance, la plus fréquente. La droite  $D$  est donnée sous forme paramétrique, et le plan  $P$  est donné sous forme cartésienne :

$$D: \begin{cases} x = x_0 + t \alpha, \\ y = y_0 + t \beta, \\ z = z_0 + t \gamma, \end{cases} \quad \text{et} \quad P: \begin{cases} a x + b y + c z = d. \end{cases}$$

Les points de  $D$  sont alors paramétrés par  $t \in \mathbb{R}$ , donc il est évident que les points éventuels de l'intersection  $D \cap P$  peuvent être « chassés » avec un filet à papillons en injectant l'équation paramétrique de  $D$  dans l'équation cartésienne de  $P$  :

$$a(x_0 + t \alpha) + b(y_0 + t \beta) + c(z_0 + t \gamma) = d,$$

ce qui donne après réorganisation, :

$$t[a \alpha + b \beta + c \gamma] = d - a x_0 - b y_0 - c z_0.$$

Les calculs sont donc beaucoup plus rapides, car il n'exigent pas l'application de la méthode du pivot de Gauss. Et la discussion est tout aussi rapide, car il n'y a qu'une inconnue à résoudre,  $t$ .

**Théorème 11.2.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , l'intersection générale entre une droite  $D$  quelconque donnée sous forme paramétrique, et un plan  $P$  quelconque donné sous forme cartésienne :

$$D: \begin{cases} x = x_0 + t \alpha, \\ y = y_0 + t \beta, \\ z = z_0 + t \gamma, \end{cases} \quad \text{et} \quad P: \begin{cases} a x + b y + c z = d, \end{cases}$$

se ramène aux 3 situations algébrico-géométriques différentes suivantes.

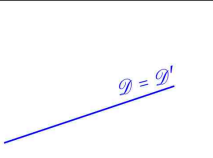
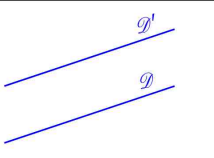
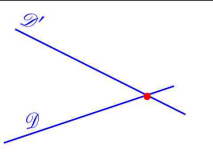
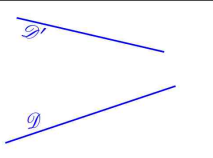
(1) Si  $a \alpha + b \beta + c \gamma \neq 0$ , l'intersection  $D \cap P$  est un point unique  $M$  repéré par le temps :

$$t_M := \frac{d - a x_0 - b y_0 - c z_0}{a \alpha + b \beta + c \gamma}.$$

(2) Si  $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$  tandis que  $0 \neq d - ax_0 - by_0 - cz_0$ , alors  $D \cap P = \emptyset$  est l'ensemble vide, c'est-à-dire que la droite  $D$  est parallèle au plan  $P$  sans être contenue dans  $P$ .

(3) Si  $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$  et si  $0 = d - ax_0 - by_0 - cz_0$  aussi, alors  $D \subset P$ . □

## 12. Intersection entre deux droites $D \subset \mathbb{R}^3$ et $D' \subset \mathbb{R}^3$

Droites parallèles		Droites non parallèles	
confondues	strictement parallèles	sécantes	non coplanaires
			
coplanaires			non coplanaires

Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , comme la figure ci-dessus le montre, il existe *quatre* situations géométriques « évidentes » pour l'intersection de deux droites  $D \subset \mathbb{R}^3$  et  $D' \subset \mathbb{R}^3$ .

Notre objectif est de comprendre cela, d'un point de vue purement algébrique. Nous allons traiter deux circonstances, suivant que  $D$  et  $D'$  sont données sous forme cartésienne ou suivant que  $D$  est donnée sous forme paramétrique, tandis que  $D'$  est donnée sous forme cartésienne.

Première circonstance. La droite  $D$  est donnée sous forme cartésienne, et de même pour la droite  $D'$  :

$$D: \begin{cases} ax + by + cz = d, \\ a'x + b'y + c'z = d', \end{cases} \quad \text{et} \quad D': \begin{cases} a''x + b''y + c''z = d'', \\ a'''x + b'''y + c'''z = d''', \end{cases}$$

Il s'agit alors de résoudre un système linéaire de 4 équations linéaires aux trois inconnues  $x, y, z$  :

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d, \\ a'x + b'y + c'z &= d', \\ a''x + b''y + c''z &= d'', \\ a'''x + b'''y + c'''z &= d'''. \end{aligned}$$

Mais d'après le Théorème 10.2, chacune des deux paires d'équations cartésiennes pour  $D$  et pour  $D'$  sont indépendantes. Après application de la méthode du pivot de Gauss, et permutation éventuelle des coordonnées, le système se ramène donc — sans changer le nom des coefficients — d'abord à :

$$\begin{aligned} x \quad \quad \quad + cz &= d, \\ \quad \quad \quad y + c'z &= d', \\ a''x + b''y + c''z &= d'', \\ a'''x + b'''y + c'''z &= d''', \end{aligned}$$



puis à :

$$\begin{aligned}x + c z &= d, \\y + c' z &= d', \\c'' z &= d'', \\c''' z &= d''',\end{aligned}$$

Traitons premièrement le cas où  $c'' \neq 0$ , qui est équivalent au cas  $c''' \neq 0$ .

**Théorème 12.1.** Lorsque  $c'' \neq 0$ , et  $c''' \frac{d''}{c''} = d'''$ , les deux droites  $D \cap D' = \{P\}$  ont comme intersection un point unique.

Lorsque  $c'' \neq 0$ , tandis que  $c''' \frac{d''}{c''} \neq d'''$ , les deux droites  $D \cap D' = \emptyset$  sont d'intersection vide et non coplanaires.  $\square$

Traitons deuxièmement le cas  $c'' = 0 = c'''$ .

**Théorème 12.2.** Lorsque  $c'' = c''' = 0$  et lorsque  $d'' = d''' = 0$ , les deux droites  $D = D'$  sont confondues.

Lorsque  $c'' = c''' = 0$  et lorsque  $d'' \neq 0$ , les deux droites  $D \cap D' = \emptyset$  sont d'intersection vide. Elles sont de plus coplanaires, lorsque  $0 = d'''$ .  $\square$

Deuxième circonstance. La droite  $D$  est donnée sous forme paramétrique, et la droite  $D'$  est donnée sous forme cartésienne :

$$D: \begin{cases} x = x_0 + t\alpha, \\ y = y_0 + t\beta, \\ z = z_0 + t\gamma, \end{cases} \quad \text{et} \quad D': \begin{cases} ax + by + cz = d, \\ a'x + b'y + c'z = d'. \end{cases}$$

Les points éventuels de l'intersection  $D \cap D'$  peuvent être « chassés » avec douceur en injectant l'équation paramétrique de  $D$  dans les deux équations cartésiennes de  $D \cap D'$  :

$$\begin{aligned}a(x_0 + t\alpha) + b(y_0 + t\beta) + c(z_0 + t\gamma) &= d, \\a'(x_0 + t\alpha) + b'(y_0 + t\beta) + c'(z_0 + t\gamma) &= d',\end{aligned}$$

ce qui donne après réorganisation :

$$\begin{aligned}t[a\alpha + b\beta + c\gamma] &= d - ax_0 - by_0 - cz_0, \\t[a'\alpha + b'\beta + c'\gamma] &= d' - a'x_0 - b'y_0 - c'z_0.\end{aligned}$$

Il n'y a qu'une inconnue à résoudre,  $t$ , pour deux équations, que l'on peut abrégé comme suit :

$$\begin{aligned}\lambda t &= \delta, \\ \lambda' t &= \delta'.\end{aligned}$$

La discussion, facile, est proposée comme exercice laissé au lecteur-étudiant studieux.

### 13. Exercices

#### Exercice 1.