Examens corrigés d'Algèbre Linéaire et Géométrie

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Examen 1

Exercice 1. Avec la méthode des stylos de couleurs, en utilisant *au minimum* deux couleurs, résoudre les quatre systèmes linéaires suivants, après les avoir traduits sous forme de matrice complète.

$$(S_1)\quad \begin{aligned} y+4\,z &= -5\\ x+3\,y+5\,z &= -2\\ 3\,x+7\,y+7\,z &= 6 \end{aligned} \qquad (S_2)\quad \begin{aligned} x-3\,y+4\,z &= -4\\ 3\,x-7\,y+7\,z &= -8\\ -4\,x+6\,y-z &= 7 \end{aligned}$$

$$(S_3)\quad \begin{aligned} x \qquad -3\,z &= 8\\ 2\,x+2\,y+9\,z &= 7\\ y+5\,z &= -2 \end{aligned} \qquad (S_4)\quad \begin{aligned} x-3\,y \qquad &= 5\\ -x+y+5\,z &= 2\\ y+z &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 2. Déterminer la solution générale des systèmes dont les matrices complètes sont les suivantes :

$$\textbf{(a)}\ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 7\\ 3 & 9 & 7 & 6 \end{array}\right] \end{array}; \qquad \textbf{(b)}\ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 0 & 7\\ 2 & 7 & 0 & 10 \end{array}\right] \end{array};$$

$$\textbf{(c)}\ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -7 & 0 & 6 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3\\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{array}\right] \end{array}; \qquad \textbf{(d)}\ \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -5 & -6 & 0 & -5\\ 0 & 1 & -6 & -3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Exercice 3. **(a)** Déterminer les solutions du système linéaire :

$$\begin{aligned} x_1+2\,x_2 &= a\\ 2\,x_1+5\,x_2 &= b \end{aligned}$$

où a et b sont des nombres réels arbitraires.

Exercice 4. **(a)** Dans le plan $\mathbb{R}^2$, déterminer le point de coordonnées (c_1, c_2) d'intersection entre les deux droites d'équations respectives $x_1+5\,x_2=7$ et $x_1-2\,x_2=-2$.

(b) Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées (x,y), représenter soigneusement ces deux droites ainsi que leur point d'intersection.

Exercice 5. On suppose que les deux matrices suivantes sont les matrices complètes de deux systèmes linéaires. Pour chacune d'entre elles, décrire par une phrase les deux premières opérations élémentaires sur les lignes à effectuer dans la procédure de résolution d'un système :

$$A := \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right], \qquad B := \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right].$$

Exercice 6. Dans les quatre *types généraux* d'exemples ci-dessous, on suppose que chaque matrice échelonnée non réduite est la matrice complète d'un certain système linéaire :

$$\textbf{(a)}\ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \end{array}\right] \end{array} \qquad \textbf{(b)}\ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{array}\right] \end{array}$$

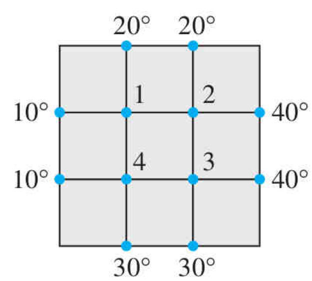
$$\textbf{(c)}\ \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \qquad \textbf{(d)}\ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{array}\right] \end{array}$$

Pour chaque type général de système, étudier l'existence et l'unicité de solutions. Indication: Écrire les sytèmes avec les variables x_1, x_2, x_3, x_4 utilisées dans le cours, puis résoudre en partant du bas, en utilisant les règles naturelles de calcul :

$$\blacksquare \cdot \blacksquare = \blacksquare, \qquad * \cdot \blacksquare = *, \qquad * + * = *, \qquad - * = *, \qquad \frac{*}{\blacksquare} = *,$$

qui sont essentiellement évidentes, puisque $\blacksquare$ désigne un nombre réel *non nul*, tandis que $*$ désigne un nombre réel *quelconque*, éventuellement nul.

Exercice 7. Parmi les problèmes importants que pose l'étude des transferts thermiques figure celui de la répartition de la température à l'état stationnaire d'une plaque fine dont la température est fixée.



On suppose que la plaque de la figure ci-dessus est la section d'une tige métallique ; on néglige le flux de chaleur dans la direction perpendiculaire à la plaque. Soient T_1, T_2, T_3, T_4 les températures aux quatre nœuds intérieurs du quadrillage de la figure.

La température en un nœud est à peu près égale à la moyenne des températures aux quatre nœuds voisins directs, au-dessus, à gauche, en-dessous, à droite. On a par exemple :

$$T_1 = \tfrac{1}{4}\big(10 + 20 + T_2 + T_4\big).$$

(a) Écrire un système de quatre équations dont la solution donne l'estimation des températures T_1, T_2, T_3, T_4.

(b) Résoudre ce système linéaire de 4 équations à 4 inconnues. Indication: Appliquer la méthode connue, et vérifier que la solution obtenue est bien une solution du système *initial*. S'il y a des erreurs (il y en a toujours ...), recommencer !

Exercice 8. **(a)** Décrire toutes les formes échelonnées possibles d'une matrice 2×2. On utilisera les symboles du cours $\blacksquare$, $*$, $\mathbf{0}$.

(b) Décrire ensuite toutes les formes échelonnées possibles d'une matrice 3×3.

2. Corrigé de l'examen 1

Exercice 1. $(\mathbf{S_1})$ On traduit le système sous forme d'une matrice complète en échangeant directement les lignes $1 \longleftrightarrow 2$, et on calcule à la main joyeusement :

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ -3 & -9 & -15 & 6 \\ 3 & 7 & 7 & 6 \\ 0 & -2 & -8 & 12 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 8 & -10 \\ 0 & -2 & -8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x+3y+5z=-2 \\ y+4z=-5 \\ 0=2 \end{array} \quad \text{SYSTÈME INCOMPATIBLE}$$

On obtient une matrice sous forme échelonnée de la forme « embêtante » :

$$\begin{array}{cccc} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{array}$$

qui est typique d'un système linéaire *incompatible*. Donc ce système n'a aucune solution !

$(\mathbf{S_2})$ De même, on écrit la matrice, et on enclenche les calculs, toujours en utilisant des couleurs.

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -3 & 4 & -4 \\ -3 & 9 & -12 & 12 \\ 3 & -7 & 7 & -8 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & -12 & 16 & -16 \\ -4 & 6 & -1 & 7 \\ 0 & -6 & 15 & -9 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 6 & -15 & 12 \\ 0 & -6 & 15 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x-3y+4z=-4 \\ 2y-5z=4 \\ 0=3 \end{array} \quad \text{SYSTÈME INCOMPATIBLE}$$

Aïe-Aïe ! Encore une incompatibilité ! Encore un système qui n'a aucune solution ! On est vraiment mal parti, on n'arrive toujours pas à décoller ! Qu'est-ce qu'il est « *vache* », ce DM [1].

$(\mathbf{S_3})$ Allez, après ces deux « râteaux », reprenons espoir :

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & -3 & 8 \\ -2 & 0 & 6 & -16 \\ 2 & 2 & 9 & 7 \\ 0 & 2 & 15 & -9 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 2 & 15 & -9 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & -10 & 4 \\ 0 & 2 & 15 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array} \; /5$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x-3z=8 \\ y+5z=-2 \\ z=-1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x-3(-1)=8 \quad \boxed{x=5} \\ y+5(-1)=-2 \quad \boxed{y=3} \\ \boxed{z=-1} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5-(3)(-1) \overset{?}{=} 8 \text{ OUI} \\ 2(5)+2(3)+9(-1) \overset{?}{=} 7 \text{ OUI} \\ 3+5(-1) \overset{?}{=} -2 \text{ OUI} \end{array}$$

Youpi ! Une solution ! Et en plus, elle est esthétique : $(5, 3, 1)$.

$(\mathbf{S_4})$ De même, on trouve une solution unique $(2, -1, 1)$:

1. En fait, c'est le livre de David Lay qui est « *vache* », car on n'a fait ici que suivre ses exercices dans le même ordre . . . .

$$\begin{matrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{matrix} \quad /7$$

(1) (2)

$$\begin{matrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x-3(-1)=5 & \boxed{x=2} \\ y+z=0 & \boxed{y=-1} \\ \boxed{z=1} & \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2-3(-1) \overset{?}{=} 5 & \text{OUI} \\ -2+(-1)+5(1) \overset{?}{=} 2 & \text{OUI} \\ -1+1 \overset{?}{=} 0 & \text{OUI} \end{matrix}$$

Exercice 2. **(a)** Par pivots de Gauss successifs, la matrice du système se réduit à :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 7 & 6 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{bmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{bmatrix},$$

donc la solution générale est :

$$\Big\{(x_1, x_2, x_3) : \; x_1 = -5 - 3x_2, \quad x_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}, \quad x_3 = 3\Big\}.$$

(b) De même :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 0 & 7 \\ 2 & 7 & 0 & 10 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -9 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

donc la solution générale est :

$$\Big\{(x_1, x_2, x_3) : \; x_1 = -9, \quad x_2 = 4, \quad x_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\Big\}.$$

(c) À nouveau par pivotations successives :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donc la solution générale est :

$$\Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \; x_1 = 5 + 7x_2 - 6x_4, \quad x_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconque},$$
$$x_3 = -3 + 2x_4, \quad x_4 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\Big\}.$$

(d) Toujours avec notre robot industriel (= la main !) de transformation d'une matrice vers une forme échelonnée *réduite*, nous trouvons rapidement :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -6 & 0 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & -6 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 7 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & \boxed{1} & -6 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix},$$

donc la solution générale est :

$$\Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \colon \; x_1 = -9 - 7x_2, \quad x_2 = 2 + 6x_3 + 3x_4, \quad x_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}, \\ x_4 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}, \quad x_5 = 0\Big\}.$$

Exercice 3. **(a)** Multiplions la 1ère équation par 2 :

$$2\,x_1 + 4\,x_2 \;=\; 2\,a,$$

et soustrayons ce résultat à la 2ème équation :

$$0 + (5-4)\,x_2 \;=\; b - 2\,a,$$

ce qui donne $x_2 = -\,2\,a + b$. Remplaçons cette valeur dans la 1ère équation :

$$x_1 + 2\big(-\,2\,a + b\big) \;=\; a \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 \;=\; a + 4\,a - 2\,b \;=\; 5\,a - 2\,b.$$

Enfin, vérifions qu'il s'agit bien d'une solution (unique) au système initial :

$$5\,a - 2\,b + \,2\big(-2\,a + b\big) \overset{?}{=} a \qquad \text{OUI},$$
$$2\,\big(5\,a - 2\,b\big) + 5\,\big(-2\,a + b\big) \overset{?}{=} b \qquad \text{OUI}.$$

Exercice 4. **(a)** Le point cherché a deux coordonnées (c_1, c_2) qui doivent satisfaire :

$$\begin{aligned} c_1 + 5\,c_2 &= \;\;\;7 \\ c_1 - 2\,c_2 &= -\,2 \end{aligned}$$

Soustrayons l'équation 2 à l'équation 1 :

$$0 + \big(5 - (-2)\big)\,c_2 \;=\; 7 - (-2),$$

c'est-à-dire :

$$7\,c_2 \;=\; 9,$$

donc $c_2 = \frac{9}{7}$ — Aïe ! Les fractions, ça fait mal !

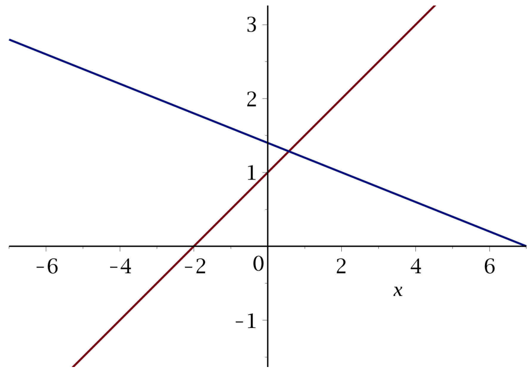
Ensuite, remplaçons dans l'équation 2 :

$$c_1 - 2 \cdot \tfrac{9}{7} \;=\; -\,2 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad c_1 \;=\; -\,2 + \tfrac{18}{7} \;=\; \tfrac{-14+18}{7} \;=\; \tfrac{4}{7}.$$

Enfin, vérifions que nous ne nous sommes pas trompés :

$$\tfrac{4}{7} + 5 \cdot \tfrac{9}{7} \overset{?}{=} 7 \;=\; \tfrac{4+45}{7} \;=\; \tfrac{49}{7} \qquad \text{OUI},$$
$$\tfrac{4}{9} - 2 \cdot \tfrac{9}{7} \overset{?}{=} -\,2 \;=\; \tfrac{4-18}{7} \;=\; \tfrac{-14}{7} \qquad \text{OUI}.$$

(b) Voici la figure demandée :



Exercice 5. **(A)** Pour la première matrice A, on élimine $\mathbf{5}$ et $\mathbf{-3}$ par pivot 'vers le haut' :

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & \mathbf{5} & 0 & 7 \\ 0 & 1 & \mathbf{-3} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{-4} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix},$$

puis on fait de même pour éliminer $\mathbf{-4}$, ce qui donne la forme échelonné *réduite* (unique) de la matrice RER A — terminus Poissy !

(B) Pour la seconde matrice B, on élimine $\mathbf{3}$ par pivot 'vers le bas', puis on divise la quatrième ligne par 5 :

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 1 & 6 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 15 \end{bmatrix},$$

puis on élimine $\mathbf{2}$ de même :

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{2} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6. **(a)** Ce système s'écrit :

$$\begin{aligned} \blacksquare x_1 + \ast x_2 + \ast x_3 &= \ast, \\ \blacksquare x_2 + \ast x_3 &= \ast, \\ \blacksquare x_3 &= \ast, \end{aligned}$$

d'où en résolvant par le bas :

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{\blacksquare}\big(\ast - \ast\, x_2 - \ast x_3\big) = \tfrac{1}{\blacksquare}\big(\ast - \ast\,\ast - \ast\,\ast\big) = \tfrac{1}{\blacksquare}\ast = \ast, \\ x_2 &= \tfrac{1}{\blacksquare}\big(\ast - \ast\, x_3\big) = \tfrac{1}{\blacksquare}\big(\ast - \ast\,\ast\big) = \tfrac{1}{\blacksquare}\ast = \ast, \\ x_3 &= \tfrac{1}{\blacksquare}\ast = \ast. \end{aligned}$$

Ainsi, le système **(a)** admet une unique solution.

(b) Ce système s'écrit, sans aucune occurrence de x_1 :

$$\begin{aligned} \blacksquare\, x_2 + *\, x_3 + *\, x_4 &= *, \\ \blacksquare\, x_3 + *\, x_4 &= *, \\ \mathbf{0} &= \blacksquare. \end{aligned}$$

Tonnerre de Brest ! Déflagration d'une contradiction fatale ! Aucune solution, mon Capitaine Haddock !

(c) On supprime d'emblée la dernière ligne, car elle est identiquement nulle :

$$\begin{aligned} \blacksquare\, x_1 + *\, x_2 &= *, \\ \blacksquare\, x_2 &= *, \end{aligned}$$

et là, c'est « *super-fastoche* » :

$$\begin{aligned} x_1 &= = \tfrac{1}{\blacksquare}\big(* - *\ x_2\big) = \tfrac{1}{\blacksquare}\big(* - *\ *\big) = \tfrac{1}{\blacksquare} * = *, \\ x_2 &= \tfrac{1}{\blacksquare} * = *. \end{aligned}$$

(d) Ce dernier système s'écrit :

$$\begin{aligned} \blacksquare\, x_1 + *\ x_2 + *\ x_3 + *\ x_4 &= *, \\ \blacksquare\, x_3 + *\ x_4 &= *, \\ \blacksquare\, x_4 &= *, \end{aligned}$$

d'où en résolvant par le bas :

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{\blacksquare}\big(* - *\ x_2 - * x_3 - * x_4\big) = \tfrac{1}{\blacksquare}\big(* - *\ x_2 - *\ * - *\ *\big) = \tfrac{1}{\blacksquare}\big(* + *\ x_2\big) = * + * x_2, \\ x_3 &= \tfrac{1}{\blacksquare}\big(* - *\ x_4\big) = \tfrac{1}{\blacksquare}\big(* - *\ *\big) = \tfrac{1}{\blacksquare} * = *, \\ x_4 &= \tfrac{1}{\blacksquare} * = *. \end{aligned}$$

Ainsi, le système **(a)** admet une infinité de solutions, paramétrées par $x_2 \in \mathbb{R}$ quelconque.

Exercice 7. **(a)** Aux quatre nœuds de la plaque thermique, on a :

$$\begin{aligned} T_1 &= \tfrac{1}{4}\big(10 + 20 + T_2 + T_4\big), \\ T_2 &= \tfrac{1}{4}\big(20 + 40 + T_3 + T1\big), \\ T_3 &= \tfrac{1}{4}\big(40 + 30 + T_4 + T_2\big), \\ T_4 &= \tfrac{1}{4}\big(30 + 10 + T_1 + T_3\big), \end{aligned}$$

c'est-à-dire après réorganisation :

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4\,T_1 & - & T_2 & & & - & T_4 & = & 30 \\ -\,T_1 & + & 4\,T_2 & - & T_3 & & & = & 60 \\ & - & T_2 & + & 4\,T_3 & - & T_4 & = & 70 \\ -\,T_1 & & & - & T_3 & + & 4\,T_4 & = & 40 \end{array}$$

(b) Après échange des lignes 1 et 4, on écrit la matrice complète du système, puis on applique la méthode des quatre couleurs.

$$\begin{array}{rrrrr} -1 & 0 & -1 & 4 & 40 \\ 1 & 0 & 1 & -4 & -40 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 60 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 20 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\ -4 & 0 & -4 & 16 & 160 \\ 4 & -1 & 0 & -1 & 30 \\ 0 & -1 & -4 & 15 & 190 \end{array} \quad \begin{array}{rrrrr} -1 & 0 & -1 & 4 & 40 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\ 0 & -4 & 16 & -4 & 280 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 16 & -8 & 300 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -70 \\ 0 & -1 & -4 & 15 & 190 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & 120 \end{array} \quad \begin{array}{rrrrr} -1 & 0 & -1 & 4 & 40 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\ 0 & 0 & 16 & -8 & 300 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & 120 \end{array} /2$$

$$\begin{array}{rrrrr} -1 & 0 & -1 & 4 & 40 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 150 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 150 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 270 \end{array} \qquad \begin{aligned} -T_1 - 30 + 4\cdot\tfrac{45}{2} &= 40 \\ -T_2 + 4\cdot 30 - \tfrac{45}{2} &= 70 \\ 8T_3 - 4\cdot\tfrac{45}{2} &= 150 \\ 12\,T_4 &= 270 \end{aligned}$$

$\boxed{T_1 = 20}$ $\boxed{T_2 = \frac{55}{2}}$ $\boxed{T_3 = 30}$ $\boxed{T_4 = \frac{45}{2}}$

VÉRIFICATION LAISSÉE AU LECTEUR

Exercice 8. **(a)** Il y en a quatre :

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * \\ 0 & \blacksquare \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Il y en a huit, elles sont très belles, et la dynamique est fort amusante, car c'est le 0 rouge qui finit par conquérir tout le territoire (de la notation sur 20 ?) :

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observons que les quatre dernières matrices peuvent être obtenues à l'aide des quatre matrices trouvées dans la Question **(a)**.

3. Examen 2

Exercice 1. **(a)** Écrire deux systèmes d'équations équivalents aux deux équations vectorielles suivantes :

$$x_1 \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Inversement, écrire une équation vectorielle équivalente aux deux systèmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned} x_2 + 5\,x_3 &= 0 \\ 4\,x_1 + 6\,x_2 - x_3 &= 0 \\ -\,x_1 + 3\,x_2 - 8\,x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} 4\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 &= 9 \\ x_1 - 7\,x_2 - 2\,x_3 &= 2 \\ 8\,x_1 + 6\,x_2 - 5\,x_3 &= 15 \end{aligned}$$

Exercice 2. **(a)** Déterminer si le vecteur $\vec{b}$ est combinaison linéaire des vecteurs formés par les colonnes de la matrice A, où :

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 8 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \vec{b} := \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3. Soit un entier $k \geqslant 1$. On considère k points représentés par des vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ dans l'espace « physique » $\mathbb{R}^3$, et l'on suppose que pour tout indice j compris entre 1 et k, un objet de masse $m_j > 0$ est situé au point $\vec{v}_j$. Les physiciens appellent de tels objets des *points matériels* [à défaut de *points sur* 20]. La masse totale du système de points matériels est :

$$m := m_1 + \cdots + m_k.$$

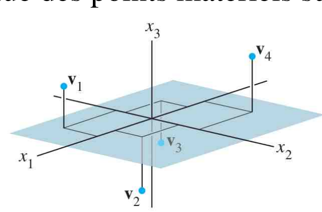
Le *centre de gravité*, ou *centre de masse*, ou *barycentre*, du système, est le point associé au vecteur :

$$\vec{g} := \tfrac{1}{m}\big(m_1\vec{v}_1 + \cdots + m_k\vec{v}_k\big).$$

(a) Le vecteur $\vec{g}$ appartient-il à l'espace vectoriel Vect $\big(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\big)$ engendré par les vecteurs $\vec{v}_j$?

(b) Calculer le centre de gravité du système constitué des points matériels suivants.

Point	Masse
$\mathbf{v}_1 = (5, -4, 3)$	2 g
$\mathbf{v}_2 = (4, 3, -2)$	5 g
$\mathbf{v}_3 = (-4, -3, -1)$	2 g
$\mathbf{v}_4 = (-9, 8, 6)$	1 g



Exercice 4. On remarque que $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$.

(a) Avec cette relation, et sans effectuer d'opérations sur les lignes, sans calculer, trouver des scalaires c_1, c_2, c_3 vérifiant l'égalité :

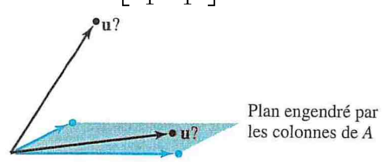
$$\begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 5. Calculer les quatre produits de matrices suivants, ou, si un produit n'est pas défini, expliquer pourquoi :

$$\textbf{(a)}\quad \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(b)}\quad \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{(c)}\quad \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -4 & -3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(d)}\quad \begin{bmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6. On pose $\vec{u} := \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $A := \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.



(a) Le vecteur $\vec{u}$ appartient-il au plan de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$ engendré par les colonnes de A ? Pourquoi ?

Exercice 7. On pose $\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, puis $\vec{v}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, et enfin $\vec{v}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(a) L'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ engendre-t-il l'espace vectoriel $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$? Pourquoi ?

Exercice 8. **(a)** Construire une matrice 3×3 non nulle A telle que le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ soit solution de $A\vec{x} = \vec{0}$.

Exercice 9. On pose $\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, puis $\vec{v}_2 := \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$, et enfin $\vec{y} := \begin{bmatrix} h \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$, où $h \in \mathbb{R}$ est un nombre réel arbitraire.

(a) Déterminer la ou les valeurs de h telles que $\vec{y}$ appartienne au plan vectoriel engendré par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

Exercice 10. On suppose que A est une matrice 4×3, c'est-à-dire avec 4 lignes et 3 colonnes, et que $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$ est un vecteur, tels que l'équation $A\,\vec{x} = \vec{b}$ admet une solution unique.

(a) Que peut-on dire de la forme échelonnée réduite de A ? Justifier la réponse.

4. Corrigé de l'examen 2

Exercice 1. **(a)** Les deux systèmes sont :

$$\begin{aligned} 6\,x_1 - 3\,x_2 &= 1 \\ -\,x_1 + 4\,x_2 &= -7 \\ 5\,x_1 &= -5 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} -\,2\,x_1 + 8\,x_2 + x_3 &= 0 \\ 3\,x_1 + 5\,x_2 - 6\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Les deux équations vectorielles sont :

$$x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. **(a)** Ce vecteur $\vec{b}$ est combinaison linéaire des 3 colonnes de cette matrice A si et seulement si il existe $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} x_1 - 4\,x_2 + 2\,x_3 &= 3 \\ 3\,x_2 + 5\,x_3 &= -7 \\ -\,2\,x_1 + 8\,x_2 - 4\,x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues. Cherchons à déterminer s'il y a des solutions en soumettant sa matrice complète à l'algorithme du pivot :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -7 \\ -2 & 8 & -4 & -3 \end{array}\right] \longmapsto \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \end{array}.$$

Immédiatement, la dernière ligne :

$$\mathbf{0}\,x_1 + \mathbf{0}\,x_2 + \mathbf{0}\,x_3 = 3,$$

est impossible, donc ce système est incompatible. En conclusion, le vecteur $\vec{b}$ n'est *pas* combinaison linéaire des vecteurs formés par les colonnes de A.

Exercice 3. **(a)** Soient $k \geqslant 1$ vecteurs quelconques $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$. Soient des masses $m_1 > 0, \dots, m_k > 0$, d'où $m_1 + \cdots + m_k > 0$. Certainement, le vecteur-barycentre :

$$\vec{g} := \frac{m_1 \vec{v}_1 + \cdots + m_k \vec{v}_k}{m_1 + \cdots + m_k},$$

appartient à l'espace vectoriel engendré par $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$:

$$\mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\big) := \Big\{\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{v}_k \colon \ \lambda_1 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}, \ \dots, \ \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\Big\},$$

car il correspond aux choix :

$$\lambda_1 := \frac{m_1}{m_1 + \cdots + m_k}, \ \dots, \ \lambda_k := \frac{m_k}{m_1 + \cdots + m_k}.$$

(b) Le vecteur-centre de gravité demandé est :

$$\begin{aligned}
\vec{g} &:= \frac{1}{2+5+2+1}, \left\{ 2 \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{10} \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{10} \left\{ \begin{pmatrix} 10+20-8-9 \\ -8+15-6+8 \\ 6-10-2+6 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{10} \left\{ \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \begin{pmatrix} 13/10 \\ 9/10 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercice 4. **(a)** Il suffit de lire la multiplication matricielle :

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix},$$

comme signifiant :

$$-3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on trouve :

$$c_1 := -3, \qquad\qquad c_2 := -1, \qquad\qquad c_3 := 2.$$

Exercice 5. Une matrice M ayant p lignes et q colonnes ne peut être multipliée à droite par une matrice N ayant r lignes et s colonnes :

$$M \cdot N = \textbf{?},$$

que si $q = r$, et alors, le résultat est une matrice à p lignes et à s colonnes :

$$\big(p,\, \underline{q}\big) \cdot \big(\underline{r},\, s\big) \quad \longleftrightarrow \quad \underline{q} \,=\, \underline{r}.$$

(a) Ici, $(p, q) = (3, \underline{2})$ et $(\underline{3}, 1) = (r, s)$. Comme $\underline{2} \neq \underline{3}$, le produit matriciel n'a pas de sens.

(b) Ici, $(p, q) = (3, \underline{1})$ et $(\underline{2}, 1) = (r, s)$. Comme $\underline{1} \neq \underline{2}$, le produit matriciel n'a pas de sens.

(c) Ici, $(p, q) = (3, \underline{2})$ et $(\underline{2}, 1) = (r, s)$, donc on peut multiplier :

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -4 & -3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) \\ -4 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) \\ 7 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - 15 \\ -8 + 9 \\ 14 - 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

(d) Ici, $(p, q) = (2, \underline{3})$ et $(\underline{3}, 1) = (r, s)$, donc on peut multiplier :

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6. **(a)** Le vecteur $\vec{u}$ appartient à l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A si et seulement si il existe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 3\,x_1 - 5\,x_2 &= 0 \\ -\,2\,x_1 + 6\,x_2 &= 4 \\ x_1 + \quad x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Pivotons :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 0 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 0 \\ -2 & 6 & 4 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -8 & -12 \\ 0 & 8 & 12 \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array},$$

c'est-à-dire :

$$x_1 \,=\, 4 - x_2 \,=\, 4 - \frac{3}{2} \,=\, \frac{5}{2},$$

$$x_2 \,=\, \frac{12}{8} \,=\, \frac{3}{2}.$$

On vérifie :

$$\begin{aligned} 3 \cdot \tfrac{5}{2} - 5 \cdot \tfrac{3}{2} &\overset{?}{=} 0 \qquad \text{OUI}, \\ -\,2(\tfrac{5}{2}) + 6(\tfrac{3}{2}) &\overset{?}{=} 4 \qquad \text{OUI}, \\ \tfrac{5}{2} + \quad \tfrac{3}{2} &\overset{?}{=} 4 \qquad \text{OUI}. \end{aligned}$$

En conclusion, $\vec{v}$ appartient bien à l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A.

Exercice 7. **(a)** Tout d'abord, il est clair que $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ ne sont pas colinéaires, donc engendrent un 2-plan vectoriel dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$.

Le vecteur $\vec{v}_3$ est aussi $\neq \vec{0}$. S'il appartenait à Vect $\big(\vec{v}_1, \vec{v}_2\big)$, il existerait $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x_1\,\vec{v}_1 + x_2\,\vec{v}_2 \,=\, \vec{v}_3,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad &= \;\;1 \\ -\,x_2 &= \;\;0 \\ -\,x_1 \qquad\quad &= \;\;0 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Les équations 1 et 3 sont manifestement contradictoires. Donc $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ engendrent un espace vectoriel de dimension 3 dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$.

Question. *Les* 3 *vecteurs* $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ *peuvent-ils engendrer* tout *l'espace vectoriel* $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$ *de dimension* 4 *?*

A priori, il semble que *non*, car par exemple de manière analogue, seulement 2 vecteurs dans l'espace vectoriel « physique » $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ semblent ne jamais pouvoir engendrer, embrasser, couvrir plus que 2 dimensions parmi 3.

Maintenant, vérifions cette intuition par le calcul. Un vecteur quelconque de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$ s'écrit $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{smallmatrix}\right)$, avec 4 composantes réelles quelconques $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Si donc les trois vecteurs qui nous ont été donnés $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ devaient engendrer tout l'espace vectoriel $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$, le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + x_3 &= a_1, \\ -\,x_2 \qquad\quad &= a_2, \\ -\,x_1 \qquad\qquad\qquad &= a_3, \\ x_2 - x_3 &= a_4, \end{aligned}$$

devrait être résoluble (avoir au moins une solution), *quelles que soient les valeurs des constantes* $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$.

En additionnant les lignes 1 et 3 on trouve :

$$x_3 \,=\, a_1 + a_3.$$

En additionnant les lignes 2 et 4 on trouve :

$$-\,x_3 \,=\, a_2 + a_4.$$

En additionnant ces deux équation, on tombe sur une *relation de compatibilité* qui doit nécessairement être satisfaite par a_1, a_2, a_3, a_4 pour que ce système ait au moins une solution :

$$0 \,=\, a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Comme quatre nombres réels quelconques a_1, a_2, a_3, a_4 ne satisfont *pas toujours* cette relation — prendre par exemple $a_1 := 1$, $a_2 := 1$, $a_3 := 1$, $a_4 := 1$ —, nous concluons bien que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ ne peuvent *pas* engendrer $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$.

Exercice 8. **(a)** Voici une matrice 3×3 telle que $A \cdot \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$:

$$A := \begin{bmatrix} \frac{\pi}{3} & -\pi & \frac{2\pi}{3} \\ -7 & 2 & 5 \\ -512 & 1024 & -512 \end{bmatrix}.$$

Exercice 9. **(a)** On a $\vec{y} \in \mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1, \vec{v}_2\big)$ si et seulement si il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ x_2 \\ -2x_1 + 8x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Pivotons :

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 8 & -3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -3+2h \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7+2h \end{bmatrix}.$$

Pour assurer la compatibilité, il faut que $0 = 7 + 2h$, c'est-à-dire $h = -\frac{7}{2}$. Alors :

$$x_2 = -5, \qquad \text{puis} \qquad x_1 = -\tfrac{7}{2} - 3(-5) = -\tfrac{37}{2}.$$

Exercice 10. **(a)** Il n'y a qu'une forme échelonnée réduite de A possible pour une matrice A à 4 lignes et 3 colonnes de telle sorte que l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ ait une solution unique :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

la matrice complète du système devant être de la forme :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{array}\right].$$

5. Examen 3

Exercice 1. Soit un paramètre $k \in \mathbb{R}$. On considère le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{aligned} x + 2\,y - z &= 1, \\ 2\,x + 4\,y - 2\,z &= 2, \\ -\,x - 2\,y + z &= k. \end{aligned}$$

(a) Montrer que le système est incompatible lorsque $k \neq -1$.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions lorsque $k = -1$.

Exercice 2. Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées (x, y), on se donne la droite Δ d'équation cartésienne $5\,x - 7\,y + 11 = 0$, ainsi que la famille de droites $(D_m)_{m \in \mathbb{R}}$ dépendant d'un paramètre $m \in \mathbb{R}$ d'équations :

$$m\,x - y + 3 = 0.$$

(a) Représenter graphiquement les droites D_{-1} et $D_{\frac{1}{2}}$.

(b) Étudier les valeurs de m telles que les droites Δ et D_m soient parallèles, en précisant la situation : parallélisme strict, ou coïncidence.

(c) Lorsque les droites Δ et D_m sont sécantes, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées (x, y), donner les équations paramétriques *et* cartésiennes des droites définies comme suit.

(a) Une droite passant par le point $(0, 4)$ et de pente 3.

(b) Une droite passant par le point $(2, -3)$ et parallèle à l'axe des x.

(c) Une droite passant par le point $(-2, 5)$ et parallèle à la droite d'équation $8\,x + 4\,y = 3$.

Exercice 4. Dans l'espace tridimensionnel $\mathbb{R}^3$, la distance (euclidienne) d'un point quelconque $A_0 = (x_0, y_0, z_0)$ à un plan arbitraire P d'équation cartésienne $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est donné par la formule [admise] :

$$\mathsf{dist}\big(A_0, P\big) = \frac{\big|a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d\big|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

(a) Calculer cette distance pour $A_0 = (1, 0, 2)$ et $P = \big\{2\,x + y + z + 4 = 0\big\}$.

(b) Calculer cette distance pour $A_0 = (3, 2, 1)$ et $P = \big\{-\,x + 5\,y - 4\,z - 5 = 0\big\}$.

(c)* Calculer la distance du point $A_0 = (1, 2, 3)$ à la *droite* D d'équations cartésiennes :

$$\begin{aligned} -\,2\,x + y - 3\,z &= 1, \\ x \phantom{{}+y} + z &= 1. \end{aligned}$$

Exercice 5. Soit $k \in \mathbb{R}$ un paramètre et soit le système linéaire :

$$\begin{aligned} x + \ \ y + 2\,z - \ \ t - \ \ u &= 1, \\ x + \ \ y + \ \ z \qquad\qquad &= 3, \\ 2\,x + 2\,y - \ \ z + 4\,t + 4\,u &= 2, \\ 3\,x + 3\,y + \ \ z - 6\,t - 6\,u &= 93, \\ x + \ \ y \qquad\qquad\qquad &= k. \end{aligned}$$

(a) Montrer qu'il n'y a aucune solution lorsque $k \neq 15$.

(b) Quand $k = 15$, montrer que la solution générale dépend de 2 inconnues réelles libres quelconques, et déterminer explicitement cette solution.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$, on considère la droite D_1 d'équations cartésiennes :

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z+9}{5},$$

et la droite D_2 d'équations paramétriques :

$$x \,=\, 7 + 3\,t, \qquad\qquad y \,=\, 10 + 5\,t, \qquad\qquad z \,=\, -10 - 6\,t \qquad\qquad {\scriptstyle (t \in \mathbb{R})}.$$

(a) Prouver que ces deux droites sont contenues dans un même plan, unique.

(b) Déterminer un système de trois équations paramétriques de ce plan.

(c) Déterminer une équation cartésienne de ce plan.

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$, on considère la famille de plans $(P_m)_{m \in \mathbb{R}}$ paramétrés par $m \in \mathbb{R}$ d'équations cartésiennes :

$$m^2\,x + (2m-1)\,y + m\,z \,=\, 3.$$

(a) Trouver tous les paramètres $m \in \mathbb{R}$ tels que P_m contient le point $(1, 1, 1)$.

(b) Trouver tous les paramètres $m \in \mathbb{R}$ tels que le vecteur $\vec{v} := \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -5/2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ est normal (orthogonal) à P_m.

(c) Trouver tous les paramètres $m \in \mathbb{R}$ tels que le vecteur $\vec{w} := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ est un vecteur '*directeur*' de P_m, c'est-à-dire est parallèle à P_m.

(d) Montrer qu'il existe un unique point appartenant à *tous* les plans P_m, $\forall\, m \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$, on se donne les trois points $A := (-1, 6, 7)$, $B := (2, 5, 8)$, $C := (-3, 4, 0)$.

(a) Déterminer un système de 2 équations paramétriques pour le plan P qui passe par ces 3 points.

(b)* Déterminer une équation cartésienne de P.

(c) Déterminer l'intersection de ce plan P avec la droite D d'équations paramétriques :

$$x \,=\, -1 + t, \qquad\qquad y \,=\, 1 - t, \qquad\qquad z \,=\, 2\,t \qquad\qquad {\scriptstyle (t \in \mathbb{R})}.$$

6. Corrigé de l'examen 3

Exercice 1. (a) Soumettons la matrice complète de ce système à la « moulinette » du pivot. Un travail sur la seule colonne 1 suffit :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & k \end{array}\right] \quad \longmapsto \quad \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{array}\right].$$

Ainsi, le système est équivalent à :

$$\begin{aligned} x + 2\,y - \,z &= \quad 1 \\ 0 &= \quad 0 \\ 0 &= k+1. \end{aligned}$$

Clairement, il y a incompatibilité lorsque $k = -1$.

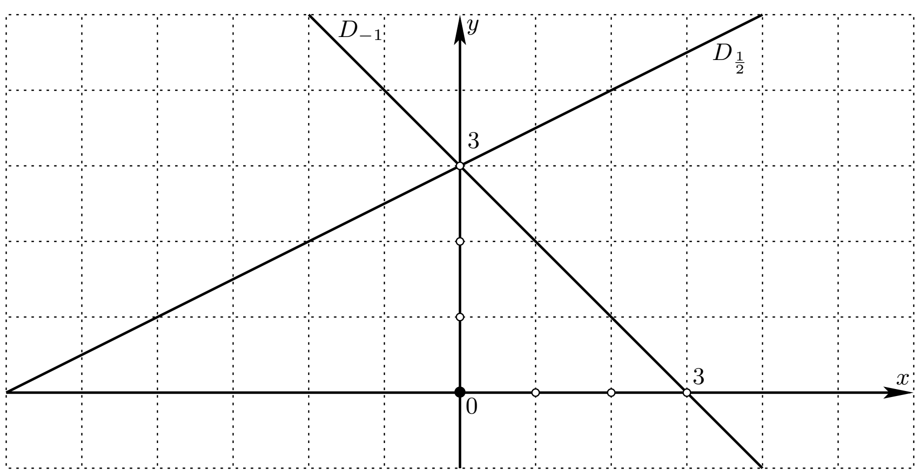
(b) Supposons donc $k = -1$. Le système se réduit à une seule équation :

$$x + 2\,y - z \,=\, 0,$$

donc :

$$\mathsf{Sol} \;=\; \big\{\big(1 - 2y + z,\, y,\, z\big) \colon\; y \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\; z \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

Exercice 2. (a) Voici une représentation graphique de $D_{-1} = \big\{x - y + 3 = 0\big\}$ et de $D_{\frac{1}{2}} = \big\{\frac{1}{2}\,x - y + 3 = 0\big\}$:



(b) D'après un théorème du cours, Δ d'équation cartésienne $5\,x - 7\,y + 11 = 0$ et D_m d'équation cartésienne $m\,x - y + 3 = 0$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs :

$$\vec{v}_\Delta \;:=\; \begin{pmatrix} -(-7) \\ 5 \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \vec{v}_{D_m} \;:=\; \begin{pmatrix} -(-1) \\ m \end{pmatrix}$$

sont parallèles, si et seulement si le déterminant de ces deux vecteurs s'annule :

$$0 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & m \end{vmatrix} = 7\,m - 5,$$

c'est-à-dire ssi :

$$m = \tfrac{5}{7}.$$

Une équation cartésienne équivalente pour $D_{\frac{5}{7}}$ s'obtient en multipliant l'équation par 7 :

$$0 = 7\left(\tfrac{5}{7}\,x - y + 3\right) = 5\,x - 7\,y + 21.$$

Alors $D_{\frac{5}{7}}$ et Δ sont parallèles, mais ne coïncident *pas*, parce que, d'après un autre théorème du cours :

$$\begin{aligned} \big\{\underset{(a',b')\neq(0,0)}{a'x + b'y + c' = 0}\big\} &= \big\{\underset{(a,b)\neq(0,0)}{ax + by + c = 0}\big\} \\ \Longleftrightarrow \qquad & \Big(\exists\,\lambda \in \mathbb{R}^* \quad a' = \lambda\,a, \;\; b' = \lambda\,b, \;\; c' = \lambda\,c\Big), \end{aligned}$$

et ici :

$$\big\{5\,x - 7\,y + 21 = 0\big\} \overset{?}{=} \big\{5\,x - 7\,y + 11 = 0\big\},$$

entraînerait $\lambda = 1$ à cause des deux premières équations :

$$5 = \lambda\,5, \qquad\qquad -7 = \lambda\,(-7), \qquad\qquad 21 \overset{!}{=} \lambda\,11,$$

et la dernière serait impossible à satisfaire.

En conclusion, Δ et $D_{\frac{5}{7}}$ sont parallèles non confondues.

(c) D'après un théorème du cours, Δ et D_m sont sécantes si et seulement si :

$$0 \neq \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & m \end{vmatrix} = 7\,m - 5,$$

c'est-à-dire ssi $m \neq \frac{5}{7}$. En effet, résolvons le système linéaire :

$$\begin{aligned} 5\,x - 7\,y &= -11, \\ 7\,\big(m\,x - y &= -3\big), \end{aligned} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{aligned} 5\,x - 7\,y &= -11, \\ 7\,m\,x - 7\,y &= -21, \end{aligned}$$

puis :

$$\big(5 - 7\,m\big)\,x + \mathbf{0}\,y = -11 - (-21), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x = \frac{10}{5 - 7\,m},$$

et enfin :

$$y = m\,\frac{10}{5 - 7\,m} + 3 = \frac{10\,m + 15 - 21\,m}{5 - 7\,m} = \frac{15 - 11\,m}{5 - 7\,m}.$$

En conclusion, toujours pour $m \neq \frac{5}{7}$, les deux droites Δ et D_m sont sécantes en le point d'intersection unique :

$$P := \Delta \cap D_m = \Big\{\Big(\tfrac{10}{5-7\,m},\; \tfrac{15-11\,m}{5-7\,m}\Big)\Big\} \qquad (m \neq \tfrac{5}{7}).$$

Exercice 3. **(a)** Rappelons qu'une droite graphée dans le plan $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$ a pour équation $y = p\,x + q$, où p est la pente, et q l'ordonnée de son point d'intersection avec l'axe des y vertical.

Instantanément, on trouve l'équation cartésienne $y = 3\,x + 4$. Une équation paramétrique est alors :

$$x = t, \qquad\qquad y = 3\,t + 4 \qquad\qquad (t \in \mathbb{R}).$$

(b) La pente $p = 0$ étant nulle puisque la droite est horizontale, on trouve aussitôt l'équation cartésienne $y = -3$. Une équation paramétrique est alors :

$$x = t, \qquad\qquad y = -3 \qquad\qquad (t \in \mathbb{R}).$$

(c) Il existe une constante c telle que l'équation cartésienne recherchée soit $8\,x + 4\,y = c$. Comme le point $(-2, 5)$ doit satisfaire cette équation :

$$8\,(-2) + 4\,(5) = c,$$

on trouve $c = 4$. L'équation cartésienne est donc $8\,x + 4\,y = 4$, ou, de manière équivalente, $2\,x + y = 1$. Une équation paramétrique est alors :

$$x = t, \qquad\qquad y = -2\,t + 1 \qquad\qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Exercice 4. (a) C'est une application directe de la formule :

$$\mathsf{dist}\,\big(A_0, P\big) = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{4\,\sqrt{6}}{3}.$$

(b) Encore une application directe :

$$\mathsf{dist}\,\big(A_0, P\big) = \frac{|-1 \cdot 3 + 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{(-1)^2 + 5^2 + (-4)^2}} = \frac{|-3 + 10 - 4 - 5|}{\sqrt{1 + 25 + 16}} = \frac{2}{\sqrt{42}}.$$

(c)* Tout d'abord, on constate qu'une représentation paramétrique de la droite D en question est :

$$x = 1 - t, \qquad\qquad y = 3 + t, \qquad\qquad z = t,$$

puisque, en injectant dans ses deux équations cartésiennes, on trouve bien 0 :

$$\begin{aligned} -2\,(1-t) + 3 + t - 3\,(t) - 1 &\overset{?}{=} 0 \qquad \text{OUI}, \\ 1 - t \qquad + \qquad t - 1 &\overset{?}{=} 0 \qquad \text{OUI}. \end{aligned}$$

Ensuite, avec $M_t := \big(1-t,\, 3+t,\, t\big)$, un point variable sur cette droite, la distance au carré de M_t au point $A_0 = (1, 2, 3)$ vaut :

$$\big\|\overrightarrow{A_0M}\big\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1-t-1 \\ 3+t-2 \\ t-3 \end{pmatrix} \right\|^2 = (-t)^2 + (1+t)^2 + (t-3)^2 = 3\,t^2 - 4\,t + 10.$$

Cherchons à minimiser cette distance en choisissant bien le temps t, cela, en faisant astucieusement apparaître un carré :

$$\begin{aligned} 3\,t^2 - 4\,t + 10 &= 3\left(t^2 - \tfrac{4}{3}\,t + \tfrac{10}{3}\right) \\ &= 3\left(\left(t - \tfrac{2}{3}\right)^2 - \tfrac{2^2}{3^2} + \tfrac{10}{3}\right) \\ &= 3\left(t - \tfrac{2}{3}\right)^2 + \tfrac{26}{3}, \end{aligned}$$

donc comme le carré $\big(t - \frac{2}{3}\big)^2$ ne peut être que $\geqslant 0$, afin de minimiser cette somme, il suffit d'annuler ledit carré en choisissant :

$$t := \tfrac{2}{3}.$$

En conclusion :

$$\mathsf{dist}\,\big(A_0, D\big) \;=\; \sqrt{\frac{26}{3}}.$$

Exercice 5. **(a)** Soumettons la matrice complète de ce système à l'algorithme du pivot :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & -6 & -6 & 93 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & k \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & -3 & 90 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & k-1 \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -8 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & k-5 \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k-15 \end{array}\right].$$

La ligne 4 peut être supprimée, et nous obtenons un système échelonné :

$$\begin{aligned} \boxed{1}\,x + y + \quad 2\,z - \quad t - u &= 1 \\ \boxed{-1}\,z + \quad t + u &= 2 \\ \boxed{1}\,t + u &= -10 \\ 0 &= k - 15. \end{aligned}$$

Clairement, le système est incompatible lorsque $k \neq 15$.

(b) Quand $k = 15$, après suppression de la dernière ligne, ré-écrivons le système sous la forme d'une matrice, et continuons à appliquer la méthode du pivot jusqu'à atteindre une forme échelonnée réduite :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -10 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -10 \end{array}\right] \end{array},$$

d'où :

$$\mathsf{Sol} \;=\; \Big\{\big(15 - y,\, y,\, -12,\, -10 - u,\, u\big) \colon\; y \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\;\; u \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\Big\}.$$

Exercice 6. **(a)** Les deux équations cartésiennes de D_1 sont :

$$-2\,x - y + 13 \,=\, 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad 5\,x - z - 24 \,=\, 0.$$

Pour intersecter D_1 avec D_2, injectons la représentation paramétrique de D_2 :

$$-2\big(7+3\,t\big)-10-5\,t+13 \,=\, 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad 5\,\big(7+3\,t\big)-\big(-10-6\,t\big)-24 \,=\, 0,$$

c'est-à-dire :

$$-11\,t - 11 \,=\, 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad 21\,t + 21 \,=\, 0,$$

deux équations qui se résolvent en $t = -1$. Ainsi, les deux droites D_1 et D_2 s'intersectent au point correspondant à $t = -1$:

$$P \,:=\, \big(4,\, 5,\, -4\big).$$

On sait que ceci implique que D_1 et D_2 sont contenues dans un même plan de $\mathbb{R}^3$.

(b) Comme vecteur directeur de ce plan, nous pouvons donc prendre deux vecteurs directeurs de D_1 et de D_2.

Pour D_1, on sait qu'une droite représentée sous la forme :

$$\frac{x - x_0}{\alpha} \,=\, \frac{y - y_0}{\beta} \,=\, \frac{z - z_0}{\gamma},$$

avec certaines constantes non nulles $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, a pour vecteur directeur $\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{smallmatrix}\right)$. Donc on peut prendre :

$$\vec{n}_{D_1} \,:=\, \left(\begin{smallmatrix}1\\ -2\\ 5\end{smallmatrix}\right).$$

Par ailleurs, D_2 étant donnée sous forme paramétrique, il est clair que l'on peut prendre :

$$\vec{n}_{D_2} \,:=\, \left(\begin{smallmatrix}3\\ 5\\ -6\end{smallmatrix}\right).$$

Le plan engendré par les deux droites coplanaires D_1 et D_2 peut donc être représenté sous la forme paramétrique :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(c) Dans ces équations :

$$\begin{aligned} 2\,\big(x &= 4 + u + 3\,v\big), \\ y &= 5 - 2\,u + 5\,v, \\ z &= -4 + 5\,u - 6\,v, \end{aligned}$$

il suffit d'éliminer u des équations 1 et 2 :

$$2\,x + y \,=\, 13 + 11\,v \qquad \text{d'où :} \qquad v \,=\, \tfrac{2}{11}\,x + \tfrac{1}{11}\,y - \tfrac{13}{11},$$

$$\begin{aligned} \text{puis :} \qquad u &= x - 4 - 3\,v \\ &= x - 4 - 3\left(\tfrac{2}{11}\,x + \tfrac{1}{11}\,y - \tfrac{13}{11}\right) \\ &= \tfrac{5}{11}\,x - \tfrac{3}{11}\,y - \tfrac{5}{11}, \end{aligned}$$

et de remplacer dans l'équation 3, ce qui donne :

$$\begin{aligned} z &= -4 + 5\left(\tfrac{5}{11}\,x - \tfrac{3}{11}\,y - \tfrac{5}{11}\right) - 6\left(\tfrac{2}{11}\,x + \tfrac{1}{11}\,y - \tfrac{13}{11}\right) \\ &= \tfrac{13}{11}\,x - \tfrac{21}{11}\,y + \tfrac{9}{11} \end{aligned}$$

ce qui donne l'équation cartésienne demandée :

$$13\,x - 21\,y - 11\,z + 9 \,=\, 0.$$

Exercice 7. **(a)** Le point de coordonnées $(1,1,1)$ appartient à P_m si et seulement si :

$$\begin{aligned}0 \,&=\, m^2\,(1) + (2m-1)\,(1) + m\,(1) - 3\\ &=\, m^2 + 3\,m - 4\\ &=\, (m-1)\,(m+4),\end{aligned}$$

c'est-à-dire ssi $m = 1$ ou $m = -4$.

(b) D'après le cours, un vecteur normal à un plan donné sous la forme $P = \big\{a\,x + b\,y + c\,z = d\big\}$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ est :

$$\vec{n}_P \,:=\, \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

Pour P_m :

$$\vec{n}_{P_m} \,:=\, \begin{pmatrix}m^2\\2m-1\\m\end{pmatrix}.$$

Alors le vecteur donné $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-5/2\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal à P_m si et seulement si il est colinéaire à $\vec{n}_{P_m}$, ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ avec :

$$\vec{v} \,=\, \lambda\,\vec{n}_{P_m},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}2 \,&=\, \lambda\,m^2,\\ -\tfrac{5}{2} \,&=\, \lambda\,(2\,m-1),\\ -1 \,&=\, \lambda\,m \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad -m \,=\, \lambda\,m^2,\end{aligned}$$

d'où par soustraction des lignes 1 et 3^{bis} :

$$2 - (-m) \,=\, \lambda\,m^2 - \lambda\,m^2 \,=\, 0,$$

et enfin $m = -2$, puis $\lambda = \frac{1}{2}$.

En conclusion, dans la famille $(P_m)_{m\in\mathbb{R}}$, seul le plan P_{-2} est tel que le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-5/2\\-1\end{pmatrix}$ lui est orthogonal.

(c) Le vecteur $\vec{w} := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est parallèle à P_m, ou est un des vecteurs directeur de P_m, si et seulement si :

$$\begin{aligned}0 \,=\, \vec{w}\bullet\vec{n}_{P_m} \,&=\, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}m^2\\2m-1\\m\end{pmatrix}\\ &=\, 1\cdot m^2 + 1\cdot(2m-1) + 1\cdot m\\ &=\, m^2 + 3\,m - 1.\end{aligned}$$

On résout alors grâce à la formule des babyloniens :

$$m \,=\, \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Deux plans associés à ces deux valeurs de m conviennent, donc.

(d) Prenons trois plans P_m « au hasard », par exemple pour $m = -1, 0, 1$, et écrivons les trois équations cartésiennes que devrait satisfaire un (hypothétique) point commun à *tous* les P_m :

$$\begin{aligned} x - 3\,y - \,z &= 3 \\ -\,y \quad &= 3 \\ x + \, y + \,z &= 3 \end{aligned}$$

Il vient $y := -3$, puis :

$$\begin{aligned} x - z &= -6, \\ x + z &= 6 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} x &:= 0, \\ z &:= 6. \end{aligned}$$

Ainsi, on a trouvé un point :

$$Q := P_{-1} \cap P_0 \cap P_1 = \big\{(0, -3, 6)\big\}.$$

Question. *Ce point Q appartient-il à* tous *les plans $(P_m)_{m\in\mathbb{R}}$?*

Oui, car on a bien :

$$3 \overset{?}{=} m^2 \cdot 0 + (2m-1)\cdot(-3) + m \cdot 6 \qquad \text{OUI}.$$

Exercice 8. (a) Aux trois points $A = (-1, 6, 7)$, $B = (2, 5, 8)$, $C = (-3, 4, 0)$ sont associés les deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC} = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -2 \\ -7 \end{smallmatrix}\right),$$

qui sont linéairement indépendants, puisqu'ils ne sont (visiblement) pas multiples l'un de l'autre.

D'après une définition du cours, le plan passant par A, B, C est représenté paramétriquement comme :

$$P := \big\{A + u\,\overrightarrow{AB} + v\,\overrightarrow{AC} \colon\ u \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\ v \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix},$$

d'où :

$$\begin{aligned} x &= -1 + 3\,u - 2\,v, \\ y &= \ \ 6 - \ \ u - 2\,v, \\ z &= \ \ 7 + \ \ u - 7\,v. \end{aligned}$$

(b)* Encore d'après un théorème du cours, une équation cartésienne du plan P s'obtient en éliminant u et v à partir de 2 équations parmi 3, et en remplaçant le résultat obtenu dans la $3^{\text{ième}}$ équation.

Écrivons donc les deux équations 1 et 2 sous la forme :

$$\begin{aligned} 3\,u - 2\,v &= 1 + x, \\ u + 2\,v &= 6 - y, \end{aligned}$$

d'où :

$$4\,u = 7 + x - y, \qquad\qquad u = \tfrac{7}{4} + \tfrac{1}{4}\,x - \tfrac{1}{4}\,y,$$

puis :

$$2\,v = 6 - y - u = 6 - y - \tfrac{7}{4} - \tfrac{1}{4}\,x + \tfrac{1}{4}\,y = \tfrac{17}{4} - \tfrac{1}{4}\,x - \tfrac{3}{4}\,y,$$

et enfin, remplaçons dans l'équation 3 :

$$\begin{aligned} z &= 7 + \tfrac{7}{4} + \tfrac{1}{4}\,x - \tfrac{1}{4}\,y - 7\,\big(\tfrac{17}{8} - \tfrac{1}{8}\,x - \tfrac{3}{8}\,y\big) \\ &= \tfrac{56+14-119}{8} + \tfrac{2+7}{8}\,x + \tfrac{-2+21}{8}\,y \\ &= -\,\tfrac{49}{8} + \tfrac{9}{8}\,x + \tfrac{19}{8}\,y. \end{aligned}$$

Donc l'équation cartésienne demandée est :

$$9\,x + 19\,y - 8\,z - 49 \,=\, 0.$$

Comme si nous étions en examen, vérifions que nos trois points A, B, C satisfont bien cette équation cartésienne :

$$\begin{aligned} 0 &\overset{?}{=} 9\,(-1) + 19\,(6) - 8\,(7) - 49 \,=\, -\,9 + 114 - 56 - 49 \,=\, 0 && \textsc{oui}, \\ 0 &\overset{?}{=} 9\,(2) + 19\,(5) - 8\,(8) - 49 \,=\, 18 + 95 - 64 - 49 \,=\, 0 && \textsc{oui}, \\ 0 &\overset{?}{=} 9\,(-3) + 19\,(4) - 8\,(0) - 49 \,=\, -27 + 76 - 0 - 49 \,=\, 0 && \textsc{oui}. \end{aligned}$$

(c) C'est très simple : il suffit d'injecter la représentation paramétrique dans l'équation cartésienne :

$$\begin{aligned} 0 &= 9\,x + 19\,y - 8\,z - 49 \\ &= 9\,(-1+t) + 19\,(1-t) - 8\,(2\,t) - 49 \\ &= -9 + 19 - 49 + t\,\big(9 - 19 - 16\big) \\ &= -\,39 - 26\,t, \end{aligned}$$

d'où :

$$t \,:=\, \frac{39}{-\,26} \,=\, -\,\frac{3}{2}.$$

Le point d'intersection entre cette droite et notre plan a donc pour coordonnées :

$$x \,=\, -\,1 - \tfrac{3}{2} \,=\, -\,\tfrac{5}{2}, \qquad\qquad y \,=\, 1 + \tfrac{3}{2} \,=\, \tfrac{5}{2}, \qquad\qquad z \,=\, -\,3.$$

7. Examen 4

Exercice 1. **(a)** Résoudre le système linéaire :

$$\begin{aligned} 2\,x \qquad\quad - 6\,z &= -8 \\ y + 2\,z &= 3 \\ 3\,x + 6\,y - 2\,z &= -4. \end{aligned}$$

Exercice 2. **(a)** Résoudre le système linéaire :

$$\begin{aligned} x - 5\,y + 4\,z &= -\,3 \\ 2\,x - 7\,y + 3\,z &= -\,2 \\ -\,2\,x + \quad y + 7\,z &= -\,1 \end{aligned}$$

Indication: On rappelle qu'un système linéaire à un nombre quelconque $n \geqslant 1$ de variables avec un nombre quelconque $m \geqslant 1$ d'équations, ou bien n'a aucune solution (cela arrive !), ou bien a une solution unique, ou bien a une infinité de solutions.

Exercice 3. **(a)** Sans nécessairement en effectuer la résolution complète, étudier la compatibilité du système linéaire suivant de 4 équations à 4 inconnues :

$$\begin{aligned} x - \;6\,y \qquad\qquad\quad &= 5 \\ y - 4\,z + \quad t &= 0 \\ -\,x + \;6\,y + \quad z + 5\,t &= 3 \\ -\,y + 5\,z + 4\,t &= 0 \end{aligned}$$

(b) Appliquer la méthode systématique de création de zéros **0** rouges, et confirmer par une autre voie la réponse à la question **(a)** précédente.

Exercice 4. **(a)** On considère le système linéaire suivant, de 2 équations (seulement) à 3 inconnues :

$$\begin{aligned} x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 &= 7 \\ 3\,x_1 + 9\,x_2 + 7\,x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Montre que l'espace, Sol, de ses solutions, est :

$$\mathsf{Sol} \;=\; \big\{\big(-\,5 - 3\,x_2,\;\; x_2,\;\; 3\big):\;\; x_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

Combien y a-t-il de solutions ?

(b) Effectuer une vérification soignée du fait que Sol est bien solution du système initial.

Exercice 5. **(a)** On considère le système linéaire suivant, de 2 équations (seulement) à 3 inconnues :

$$\begin{aligned} x_2 - 2\,x_3 &= 3 \\ x_1 - 3\,x_2 + 4\,x_3 &= -\,6 \end{aligned}$$

Déterminer (sans aide) l'espace Sol de ses solutions.

(b) Vérifier soigneusement que les solutions trouvées sont bien solutions du système initial.

Exercice 6. **(a)** On donne le système linéaire suivant de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{aligned} 3\,x_1 - 2\,x_2 + \ \ 4\,x_3 &= 0 \\ 9\,x_1 - 6\,x_2 + 12\,x_3 &= 0 \\ 6\,x_1 - 4\,x_2 + \ \ 8\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Montrer que l'espace Sol de ses solutions est :

$$\begin{aligned} \mathsf{Sol} &= \big\{\big(\tfrac{2}{3}\,x_2 - \tfrac{4}{3}\,x_3,\ x_2,\ x_3\big) \colon\ x_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\ x_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\} \\ &= \big\{\big(x_1,\ \tfrac{3}{2}\,x_1 + 2\,x_3,\ x_3\big) \colon\ x_1 \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\ x_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\} \\ &= \big\{\big(x_1,\ x_2,\ -\tfrac{3}{4}\,x_1 + \tfrac{1}{2}\,x_2\big) \colon\ x_1 \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\ x_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}. \end{aligned}$$

(b) Pourquoi peut-on représenter Sol de 3 manières différentes ? Pourquoi ces 3 manières sont-elles équivalentes ?

Exercice 7. On suppose que a, b, c, d sont des constantes réelles telles que $a \neq 0$, et on considère le système linéaire général suivant, de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{aligned} a\,x_1 + b\,x_2 &= f \\ c\,x_1 + d\,x_2 &= g \end{aligned}$$

où f, g sont aussi des constantes réelles.

(a) Montrer que ce système linéaire est équivalent au système :

$$\begin{aligned} a\,x_1 + \qquad\quad b\,x_2 &= \qquad f \\ \big(d - \tfrac{c\,b}{a}\big)\,x_2 &= g - \tfrac{c\,f}{a} \end{aligned}$$

Indication: Multiplier par $\frac{1}{a}$ la ligne 1 afin de faire apparaître un coefficient 1 dans l'équation $1 \cdot x_1 + \frac{b}{a}\,x_2 = \frac{f}{a}$. Ensuite, remultiplier cette équation par un coefficient approprié afin de faire fonctionner la (super !) méthode de création de **0**, c'est-à-dire, afin de remplacer, à la ligne en-dessous, le terme $c \cdot x_1$ par $\mathbf{0} \cdot x_1$.

(b) On suppose $d - \frac{c\,b}{a} \neq 0$. Montrer que le système linéaire considéré possède alors la solution *unique :*

$$x_1 = \frac{f\,d - g\,b}{a\,d - b\,c}, \qquad\qquad x_2 = \frac{a\,g - c\,f}{a\,d - b\,c}.$$

Ensuite, vérifier scrupuleusement que cette solution est *bien* solution du sytème initial.

(c) On s'intéresse ensuite au cas où $d - \frac{c\,b}{a} = 0$. Dans le sous-cas où $g - \frac{c\,f}{a} \neq 0$, vérifier que le système est *incompatible*, c'est-à-dire n'a *aucune* solution.

(d) Enfin, toujours dans le cas où $d - \frac{c\,b}{a} = 0$, on suppose que $g - \frac{c\,f}{a} = 0$, ce qui est la dernière possibilité à étudier. Montrer que l'espace Sol des solutions du systèmes est infini, et, plus précisément, montrer que :

$$\mathsf{Sol} = \big\{\big(\tfrac{f}{a} - \tfrac{b}{a}\,x_2,\ x_2\big) \colon\ x_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

Exercice 8. **(a)** Comment comprendre *mathématiquement* la réaction chimique suivante :

$$15 \cdot \mathsf{Pb\,N_6} + 44 \cdot \mathsf{Cr\,Mn_2\,O_8} \longmapsto 5 \cdot \mathsf{Pb_3\,O_4} + 22 \cdot \mathsf{Cr_2\,O_3} + 88 \cdot \mathsf{Mn\,O_2} + 90 \cdot \mathsf{N\,O} \ \textbf{?}$$

8. Corrigé de l'examen 4

Exercice 1. (a) Commençons par écrire la matrice complète de ce système linéaire, en divisant *directement* sa première ligne par 2 :

$$\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & -2 & -4 \end{array}$$

Juste en-dessous du $\boxed{1}$ encadré, il y a déjà un $0 = \mathbf{0}$: *good*. Mais encore en-dessous, il y a un 3, *à éliminer*.

Pour éliminer ce 3, espaçons davantage les lignes 2 et 3 afin de créer une ligne vide supplémentaire, multiplions la ligne 1 par par -3, écrivons le résultat en vert dans la ligne vide, additionnons-la avec la ligne 3 :

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ \scriptstyle -3 & \scriptstyle -0 & \scriptstyle 9 & \scriptstyle 12 \\ 3 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \end{array} \qquad \longmapsto \qquad \begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & -3 & -4 \\ \mathbf{0} & \boxed{1} & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

et enfin, recopions les lignes 1 et 2 non touchées, ainsi que la nouvelle ligne 3.

En position $(2,2)$, c'est-à-dire à la ligne 2, colonne 2, utilisons le nouveau $\boxed{1}$ afin d'éliminer le 6 qui se trouve juste en-dessous de lui, ce, en multipliant la ligne 2 par -6, en recopiant le résultat au-dessus de la ligne 3 — après avoir ménagé un espacement vertical supplémentaire — puis en additionnant, et enfin, recopions les trois lignes obtenues :

$$\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & -3 & -4 \\ \mathbf{0} & \boxed{1} & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & 6 & 7 & 8 \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -3 & -4 \\ \mathbf{0} & \boxed{1} & 2 & 3 \\ \scriptstyle 0 & \scriptstyle -6 & \scriptstyle -12 & \scriptstyle -18 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & -3 & -4 \\ \mathbf{0} & \boxed{1} & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -5 & -10 \end{array}$$

Profitons du fait que les coefficients de la dernière ligne sont tous multiples de 5, et même, de -5, pour la diviser par -5 :

$$\begin{array}{cccc} \scriptstyle x & \scriptstyle y & \scriptstyle z & \\ \boxed{1} & 0 & -3 & -4 \\ \mathbf{0} & \boxed{1} & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{1} & 2 \end{array}$$

À ce stade, un premier « escalier inférieur » de zéros rouges $\mathbf{0}$ est achevé. Deux options s'offrent alors à nous.

Première option : Refaire apparaître les variables x, y, z qui existaient, telles des « *lettres fantomatiques* » dans les matrices précédentes, écrire le système — équivalent ! — obtenu :

$$\begin{aligned} x \quad - 3\,z &= -\,4 \\ y + 2\,z &= \quad 3 \\ z &= \quad 2 \end{aligned}$$

et le résoudre pas à pas en partant du bas :

$$x - 3(2) \,=\, -\,4 \iff \boxed{x \,=\, 2}$$

$$y + 2(2) \,=\, 3 \iff \boxed{y \,=\, -\,1}$$

$$\boxed{z \,=\, 2}$$

Deuxième option : Continuer d'appliquer la méthode de créations de zéros rouges $\mathbf{0}$, mais en remontant « comme des saumons » du bas-droite vers le haut-gauche, afin de créer un deuxième « escalier supérieur » de zéros rouges $\mathbf{0}$.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ \mathbf{0} & 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{1} & 2 \end{array}$$

Pour cela, nous devons nous servir du dernier $\boxed{1}$ en bas à droite, afin d'éliminer le 2 et le -3 qui se situent au-dessus de lui, en créant des lignes supplémentaires, en écrivant en vert[2] les multiplications par -2 et par 3 de la ligne 3, en additionnant vers le haut, puis en recopiant le résultat :

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \mathbf{0} & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \\ \scriptstyle 0 & \scriptstyle 0 & \scriptstyle 3 & \scriptstyle 6 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ \scriptstyle 0 & \scriptstyle 0 & \scriptstyle -2 & \scriptstyle -4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{1} & 2 \end{array} \qquad \longmapsto \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \mathbf{0} & 2 \\ \mathbf{0} & \boxed{1} & \mathbf{0} & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 2 \end{array}$$

et comme le nombre au-dessus du $\boxed{1}$ en position $(2,2)$ est *déjà égal à* $0 = \mathbf{0}$, il n'y a plus de travail à effectuer.

En effet, si nous réveillons les variables fantômes x, y, z en les faisant apparaître au-dessus de la matrice du système équivalent obtenu :

$$\begin{array}{cccc} \scriptstyle x & \scriptstyle y & \scriptstyle z & \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2 \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 2 \end{array}$$

nous pouvons aisément ré-écrire explicitement le sytème final :

2. On remarquera que maintenant, les lignes vertes sont écrites *en-dessous*, et que l'addition se fait *vers le haut*.

et là, ô miracle, les valeurs de x, y, z sont immédiatement visibles !

$$\begin{aligned} x \quad &= \quad 2 \\ y \quad &= -1 \\ z \quad &= \quad 2 \end{aligned}$$

Quelle que soit la technique choisie, il faut toujours impérativement vérifier que les solutions obtenues sont bien des solutions du système initial

Alors, de peur de perdre des points aux examens (partiel ou terminal), effectuons une vérification rassurante :

$$\begin{aligned} 2(2) \qquad\qquad - 6(2) &\overset{?}{=} -8 \qquad \text{OUI}, \\ 1\,(-1) + 2\,(2) &\overset{?}{=} \quad 3 \qquad \text{OUI}, \\ 3\,(2) + 6(-1) - 2\,(2) &\overset{?}{=} -4 \qquad \text{OUI}. \end{aligned}$$

Exercice 2. **(a)** On écrit la matrice complète du système, et, avec des couleurs, on applique la méthode de création de zéros **0** en première colonne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -5 & 4 & -3 \\ 2 & -7 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 7 & -1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -5 & 4 & -3 \\ {\scriptstyle -2} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle -8} & {\scriptstyle 6} \\ 2 & -7 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 4 \\ {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle -10} & {\scriptstyle 8} & {\scriptstyle -6} \\ -2 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & -9 & 15 & -7 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -5 & 4 & -3 \\ \mathbf{0} & 3 & -5 & 4 \\ \mathbf{0} & -9 & 15 & -7 \end{array}\right)$$

Ensuite, on ajoute 3 fois la deuxième ligne à la troisième :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & -3 \\ \mathbf{0} & 3 & -5 & 4 \\ {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle -9} & {\scriptstyle -15} & {\scriptstyle 12} \\ \mathbf{0} & -9 & 15 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \longmapsto \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} {\scriptstyle x} & {\scriptstyle y} & {\scriptstyle z} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -5 & 4 & -3 \\ \mathbf{0} & 3 & -5 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 5 \end{array}\right) \end{array}$$

et en réveillant les variables cachées x, y, z, on constate que la dernière ligne du système — équivalent ! — obtenu :

$$\mathbf{0} \cdot x + \mathbf{0} \cdot y + \mathbf{0} \cdot z \;=\; 0 \overset{!}{=} 5,$$

est formellement interdite par les mathématiques !

Donc le système est *incompatible*, *id est* — *cela est*, en Latin, synonyme de *c'est-à-dire* — n'a *aucune* solution.

Exercice 3. **(a)** Nous allons constater que le système est incompatible. Écrivons sa matrice complète, en indiquant au-dessus de lui les variables fantomatiques x, y, z, t, et en indiquant à droite les 4 lignes (L_1), (L_2), (L_3), (L_4) :

$$
\begin{array}{ccccc l}
x & y & z & t & & \\
1 & -6 & 0 & 0 & 5 & (L_1) \\
0 & 1 & -4 & 1 & 0 & (L_2) \\
-1 & 6 & 1 & 5 & 3 & (L_3) \\
0 & -1 & 5 & 4 & 0 & (L_4)
\end{array}
$$

L'idée-astuce est de ne pas appliquer « bêtement » la méthode de création de zéros $\mathbf{0}$ rouges, ce qui pourrait occasionner du travail.

En effet, dans ce système, on observe des similitudes entre les lignes 1 et 3, ainsi qu'entre les lignes 2 et 4, et donc, on est tenté de remplacer la ligne (L_4) par la ligne $(L_4 + L_2) =:$ (L_4') :

$$
\begin{array}{ccccc l}
1 & -6 & 0 & 0 & 5 & (L_1) \\
0 & 1 & -4 & 1 & 0 & (L_2) \\
-1 & 6 & 1 & 5 & 3 & (L_3) \\
0 & -1 & 5 & 4 & 0 & (L_4)
\end{array}
\longmapsto
\begin{array}{c ccccc l}
(L_1) & 1 & -6 & 0 & 0 & 5 & \\
(L_2) & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & \\
(L_3) & -1 & 6 & 1 & 5 & 3 & \\
(L_4 + L_2) & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & (L_4')
\end{array}
$$

Ensuite, recopions cette matrice, et remplaçons la ligne (L_3) par $(L_3 - L_4') =: (L_3')$:

$$
\begin{array}{l ccccc}
(L_1) & 1 & -6 & 0 & 0 & 5 \\
(L_2) & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\
(L_3) & -1 & 6 & 1 & 5 & 3 \\
(L_4') & 0 & 0 & 1 & 5 & 0
\end{array}
\longmapsto
\begin{array}{c cccccc l}
(L_1) & 1 & -6 & 0 & 0 & & 5 & \\
(L_2) & 0 & 1 & -4 & 1 & c & 0 & \\
(L_3 - L_4') & -1 & 6 & 0 & 0 & & 3 & (L_3') \\
(L_4') & 0 & 0 & 1 & 5 & & 0 &
\end{array}
$$

Enfin recopions, puis additionnons la ligne (L_3') à la ligne (L_1), *sans même considérer les autres lignes :*

$$
\begin{array}{l ccccc}
(L_1) & 1 & -6 & 0 & 0 & 5 \\
(L_2) & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\
(L_3') & -1 & 6 & 0 & 0 & 3 \\
(L_4') & 0 & 0 & 1 & 5 & 0
\end{array}
\longmapsto
\begin{array}{l ccccc}
 & x & y & z & t & \\
(L_1 + L_3') & 0 & 0 & 0 & 0 & 8
\end{array}
$$

ce qui donne une équation :

$$
0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot t \;=\; 0 \stackrel{!}{=} 8,
$$

parfaitement *impossible* en mathématiques.

En conclusion, le système est *incompatible*, il n'a *aucune solution*.

(b) Résumons les calculs comme suit, en encadrant le nombre dont nous nous servons pour créer des zéros $\mathbf{0}$ rouges *en-dessous* de lui (on peut d'ailleurs suivre les calculs « de tête », sans même écrire les lignes vertes intercalaires) :

$$
\left.\begin{array}{cccc|c}
\boxed{1} & -6 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\
-1 & 6 & 1 & 5 & 3 \\
0 & -1 & 5 & 4 & 0
\end{array}\right.
\longmapsto
\left.\begin{array}{cccc|c}
1 & -6 & 0 & 0 & 5 \\
\mathbf{0} & \boxed{1} & -4 & 1 & 0 \\
\mathbf{0} & 0 & 1 & 5 & 8 \\
\mathbf{0} & -1 & 5 & 4 & 0
\end{array}\right.
\longmapsto
\left.\begin{array}{cccc|c}
1 & -6 & 0 & 0 & 5 \\
\mathbf{0} & 1 & -4 & 1 & 0 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{1} & 5 & 8 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 5 & 0
\end{array}\right.
$$

$$
\longmapsto
\left.\begin{array}{cccc|c}
1 & -6 & 0 & 0 & 5 \\
\mathbf{0} & 1 & -4 & 1 & 0 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 5 & 8 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{0} & -8
\end{array}\right.
$$

Mais alors — *Mézalor* —, en faisant ré-apparaître les variables temporairement masquées x, y, z, t, nous constatons de manière similaire que la dernière ligne :

$$\mathbf{0} \cdot x + \mathbf{0} \cdot y + \mathbf{0} \cdot z + \boxed{0} \cdot t \;=\; 0 \;\overset{!}{=}\; -8,$$

exprime une équation parfaitement *impossible* en mathématiques, ce qui confirme, par une autre voie, l'incompatibilité du système déjà constatée en **(a)**.

A priori, dans un « bon escalier de **0** honnêtes », *le zéro encadré « en plus »* $\boxed{0}$ *ne devrait pas exister*, il devrait être un nombre réel non nul, et alors, on pourrait résoudre la variable t, puis, en remontant comme des saumons, résoudre z, puis y, puis x.

Or dans la vie, certaines fois, les choses ne se passent pas toujours de la manière la plus simple qui soit… Donc il est tout à fait possible que de tels zéros encadrés $\boxed{0}$ turbulents et intempestifs existent.

Nous verrons d'ailleurs plus tard dans la théorie générale que ces zéros *supplémentaires* $\boxed{0}$ sont la cause principale d'incompatibilité pour certains systèmes linéaires.

Exercice 4. **(a)** Soustrayons 3 fois la ligne 1 à la ligne 2, en écrivant toujours la ligne 1 :

$$\begin{aligned} x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 \;&=\; 7 \\ -\,5\,x_3 \;&=\; -15 \end{aligned}$$

Si la lecture simple de la deuxième ligne ne suffit pas pour la compréhension, le lecteur-étudiant est invité à *ajouter lui-même* avec un stylo vert la ligne intermédiaire égale à -3 fois la première ligne, directement sur le corrigé imprimé, afin de faire l'addition.

Une fois cette (unique) opération effectuée, le travail est presque terminé. Pourquoi ? Parce que l'on peut constater qu'il y a 2 variables que l'on peut simplement résoudre à partir de ces 2 équations :

$$\begin{aligned} \boxed{x_1} + 3\,x_2 + \;\; 4\,x_3 \;&=\; 7 \\ -\,5\,\boxed{x_3} \;&=\; -15 \end{aligned}$$

sans aucune interférence entre les deux équations, tandis que la variable x_2 n'intervient pas du tout. En un certain sens, elle est « *libre et invisible* », comme les électrons.

Donc si on résout les deux variables encadrées x_3 puis x_1 en commençant par le bas :

$$x_1 \;=\; 7 - 3\,x_2 - 4(3) \;=\; -\,5 - 3\,x_2,$$

$$x_3 \;=\; 3,$$

on est certain que les deux équations du système sont satisfaites, quelle que soit la valeur de $x_2 \in \mathbb{R}$, d'ailleurs.

En conclusion, on a bien démontré que :

$$\mathsf{Sol} \;=\; \big\{\big(-\,5 - 3\,x_2,\; x_2,\; 3\big) : \;\; x_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

Et clairement, il y a une infinité de solutions, puisque la variable x_3 dans Sol est libre, et puisqu'il y a une infinité de nombres réels $x_3 \in \mathbb{R}$.

(b) Certes, nous avons trouvé des solutions, mais-mais-mais… nous nous sommes peut-être trompés… et donc, une vérification s'impose, en remplaçant les solutions obtenues dans le système initial :

$$\begin{aligned} \big(-\,5 - 3\,x_2\big) + 3\,x_2 + 4\,(3) \;&\overset{?}{=}\; 7 \qquad \text{OUI}, \\ 3\,\big(-\,5 - 3\,x_2\big) + 9\,x_2 + 7(3) \;&\overset{?}{=}\; 6 \qquad \text{OUI}. \end{aligned}$$

Exercice 5. **(a)** C'est facile ! En partant du système dans lequel on encadre les deux variables x_1 et x_2 :

$$\begin{aligned} \boxed{x_2} - 2\,x_3 &= 3 \\ \boxed{x_1} - 3\,x_2 + 4\,x_3 &= -6 \end{aligned}$$

on peut résoudre directement tout d'abord :

$$x_2 = 3 + 2\,x_3,$$

puis, après remplacement de la valeur de x_2 dans la deuxième équation :

$$\begin{aligned} x_1 &= -6 + 3\,x_2 - 4\,x_3 \\ &= -6 + 3\,\big(3 + 2\,x_3\big) - 4\,x_3 \\ &= -6 + 9 + 6\,x_3 - 4\,x_3 \\ &= 3 + 2\,x_3. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathsf{Sol} = \big\{\big(3 + 2\,x_3,\, 3 + 2\,x_3,\, x_3\big) \colon\ x_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

(b) Effectuons donc une vérification, en partie par calcul mental :

$$\begin{aligned} \big(3 + 2\,x_3\big) - 2\,x_3 &\overset{?}{=} 3 && \textsc{oui}, \\ \big(3 + 2\,x_3\big) - 3\,\big(3 + 2\,x_3\big) + 4\,x_3 &\overset{?}{=} -6 && \textsc{oui}. \end{aligned}$$

Exercice 6. **(a)** Si on donne un nom à ces 3 équations :

$$\begin{aligned} &(E_1) \qquad 3\,x_1 - 2\,x_2 + 4\,x_3 = 0 \\ &(E_2) \qquad 9\,x_1 - 6\,x_2 + 12\,x_3 = 0 \\ &(E_3) \qquad 6\,x_1 - 4\,x_2 + 8\,x_3 = 0 \end{aligned}$$

le point-clé est d'observer que (E_2) et (E_3) sont redondantes par rapport à (E_1), car :

$$\begin{aligned} (E_1) &= (E_1), \\ (E_2) &= 3\,(E_1), \\ (E_3) &= 2\,(E_1), \end{aligned}$$

et donc, le système se réduit à 1 équation unique et non pas 3 équations :

$$(E_1) \qquad 3\,x_1 - 2\,x_2 + 4\,x_3 = 0.$$

Comme il n'y a qu'une seule équation, et 3 variables x_1, x_2, x_3, dont les 3 coefficients 3, -2, 4 sont non nuls, on peut faire 3 choix de résolution différents.

☐ Résoudre x_1 :

$$3\,\boxed{x_1} - 2\,x_2 + 4\,x_3 = 0 \qquad\iff\qquad x_1 = \tfrac{2}{3}\,x_2 - \tfrac{4}{3}\,x_3,$$

d'où : $\mathsf{Sol} = \big\{\big(\frac{2}{3}\,x_2 - \frac{4}{3}\,x_3,\ x_2,\ x_3\big) \colon\ x_2,\, x_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconques}\big\}$.

☐ Résoudre x_2 :

$$3\,x_1 - 2\,\boxed{x_2} + 4\,x_3 = 0 \qquad\iff\qquad x_2 = \tfrac{3}{2}\,x_1 + 2\,x_3,$$

d'où : $\mathsf{Sol} = \big\{\big(x_1,\ \frac{3}{2}\,x_1 + 2\,x_3,\ x_3\big) \colon\ x_1,\, x_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconques}\big\}$.

☐ Résoudre x_3 :

$$3\,x_1 - 2\,x_2 + 4\boxed{x_3} \;=\; 0 \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad x_3 \;=\; -\tfrac{3}{4}\,x_1 + \tfrac{1}{2}\,x_3,$$

d'où : $\quad \mathsf{Sol} \;=\; \big\{\big(x_1,\; x_2,\; -\tfrac{3}{4}\,x_1 + \tfrac{1}{2}\,x_2\big):\; x_1,\, x_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconques}\big\}.$

(b) Nous venons d'expliquer qu'on pouvait résoudre ou bien x_1, ou bien x_2, ou bien x_3, *parce que* leurs coefficients respectifs, 3, -2, 4, dans l'unique équation restante (E_1), sont tous différents de zéro.

Ces trois représentations de Sol sont bien équivalentes, pour des raisons purement *logiques*, *parce que* chacune d'entre elles satisfait l'unique équation (E_1) du 'système'.

On peut d'ailleurs vérifier directement par le calcul les équivalences entre ces trois représentations de Sol, par exemple, l'équivalence entre la première représentation et la deuxième représentation :

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{2}{3}\boxed{x_2} - \tfrac{4}{3}\,x_3, \\ x_2 &= x_2, \\ x_3 &= x_3, \end{aligned} \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1, \\ \boxed{x_2} &= \tfrac{3}{2}\,x_1 + 2\,x_3 \\ x_3 &= x_3. \end{aligned}$$

Exercice 7. **(a)** L'indication était parfaite ! Effectivement, on multiplie par c la première équation multipliée par $\frac{1}{a}$:

$$c\,\big(\,x_1 + \tfrac{b}{a}\,x_2 \;=\; \tfrac{f}{a}\,\big)$$

ce qui donne :

$$c\,x_1 + \tfrac{c\,b}{a}\,x_2 \;=\; \tfrac{f}{a},$$

et on soustrait cela à la deuxième ligne, ce qui donne bien, en recopiant aussi la première ligne :

$$\begin{aligned} a\,x_1 + \qquad\quad b\,x_2 &= \qquad f \\ \big(d - \tfrac{c\,b}{a}\big)\,x_2 &= g - \tfrac{c\,f}{a} \end{aligned}$$

(b) Dans le cas où $d - \frac{c\,b}{a} \neq 0$, on peut résoudre x_2 à partir de la deuxième ligne comme suit :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{g - \frac{c\,f}{a}}{d - \frac{c\,b}{a}} \\ [\tfrac{a}{a} \,=\, 1] \qquad &= \frac{a\,\big(g - \frac{c\,f}{a}\big)}{a\,\big(d - \frac{c\,b}{a}\big)} \\ &= \frac{a\,g - c\,f}{a\,d - b\,c}, \end{aligned}$$

ce qui est l'expression annoncée de x_2. Notons qu'on a pu écrire $\frac{a}{a} = 1$, parce qu'on suppose $a \neq 0$ tout au long de l'exercice (on rappelle que $\frac{0}{0} = 1$ est faux et n'a absolument aucun sens).

Notons aussi au passage qu'on a les équivalences :

$$d - \frac{c\,b}{a} \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{a\,d - b\,c}{a} \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a\,d - b\,c \neq 0,$$

puisqu'on suppose $a \neq 0$ tout au long de l'exercice.

Ensuite, on peut remplacer cette valeur de x_2 dans la première équation pour résoudre x_1 puis calculer patiemment afin simplifier, en utilisant l'hypothèse $a \neq 0$ valable tout au long de cet exercice :

$$\begin{aligned}
& & x_1 &= \frac{1}{a}\Big(f - b\,x_2\Big) \\
& & &= \frac{1}{a}\bigg[f \cdot 1 - b \cdot \frac{a\,g - c\,f}{a\,d - b\,c}\bigg] \\
& [1 = \tfrac{\mathsf{chose}}{\mathsf{chose}}] & &= \frac{1}{a}\bigg[f \cdot \frac{a\,d - b\,c}{a\,d - b\,c} - b \cdot \frac{a\,g - c\,f}{a\,d - b\,c}\bigg] \\
& & &= \frac{1}{a}\bigg[\frac{f\,\big(a\,d - b\,c\big) - b\,\big(a\,g - c\,f\big)}{a\,d - b\,c}\bigg] \\
& \text{[Annihilation par paire !]} & &= \frac{1}{a}\bigg[\frac{f\,a\,d - \underline{f\,b\,c} - b\,a\,g + \underline{b\,c\,f}}{a\,d - b\,c}\bigg] \\
& \text{[Factorisation par } a \text{ !]} & &= \frac{1}{\underline{a}}\bigg[\frac{\underline{a}\,(f\,d - b\,g)}{a\,d - b\,c}\bigg] \\
& \text{[Disparition de } a \text{ !]} & &= \frac{f\,d - g\,b}{a\,d - b\,c}.
\end{aligned}$$

(c) Dans le cas où $d - \frac{c\,b}{a} = 0$, la deuxième équation du système(équivalent) transformé devient :

$$0 \cdot x_2 = 0 \overset{!}{=} g - \tfrac{c\,f}{a},$$

et donc, lorsque $g - \frac{c\,f}{a} \neq 0$, cette équation est *impossible*, ce qui conclut que le système n'a *aucune* solution.

(d) Si maintenant $g - \frac{c\,f}{a} = 0$, la deuxième équation devient tautologique :

$$0 \cdot x_2 = 0 \overset{\text{OUI}}{=} 0 = g - \tfrac{c\,f}{a},$$

car $0 = 0$ est une équation que même les publicités mensongères sont obligées d'admettre comme étant vraie. Donc on peut supprimer cette équation, et il ne reste alors plus que la première équation :

$$a\,\boxed{x_1} + b\,x_2 = f,$$

que l'on peut résoudre par rapport à x_1, *parce que* l'on suppose $a \neq 0$ tout au long de cet exercice. Ainsi :

$$x_1 = \tfrac{f}{a} - \tfrac{b}{a}\,x_2,$$

avec une variable libre x_2, et en conclusion, on a bien obtenu dans ce dernier cas l'espace des solutions :

$$\mathsf{Sol} = \Big\{\big(\tfrac{f}{a} - \tfrac{b}{a}\,x_2,\ x_2\big) \colon\ x_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\Big\}.$$

Exercice 8. **(a)** D'après le principe de conservation de la matière (Lavoisier), il doit y avoir autant d'atomes d'une substance X quelconque à gauche du signe $\longmapsto$ qu'il y en a à droite.

Vérifions donc cela, par le calcul mental :

$$\begin{array}{lrcll}
\mathsf{Pb}: & 15 & \stackrel{?}{=} & 5 \cdot 3 & \text{OUI,} \\
\mathsf{N}: & 15 \cdot 6 & \stackrel{?}{=} & 90 & \text{OUI,} \\
\mathsf{Cr}: & 44 & \stackrel{?}{=} & 22 \cdot 2 & \text{OUI,} \\
\mathsf{Mn}: & 44 \cdot 2 & \stackrel{?}{=} & 88 & \text{OUI,} \\
\mathsf{O}: & 44 \cdot 8 & \stackrel{?}{=} & 5 \cdot 4 + 22 \cdot 3 + 88 \cdot 2 + 90 & \text{OUI.}
\end{array}$$

9. Examen 5

Exercice 1. **(a)** Équilibrer la réaction chimique suivante :

$$x \cdot \mathsf{Pb\,N_6} + y \cdot \mathsf{Cr\,Mn_2\,O_8} \quad \longmapsto \quad s \cdot \mathsf{Pb_3\,O_4} + t \cdot \mathsf{Cr_2\,O_3} + u \cdot \mathsf{Mn\,O_2} + v \cdot \mathsf{N\,O},$$

où x, y et s, t, u, v sont des inconnues. Indication: Malgré le fait qu'une solution ait déjà été « offerte » dans le DM-1, il s'agit ici de raisonner comme si on ne connaissait rien, et donc, il s'agit d'élaborer un système linéaire, puis de le résoudre. Un exercice similaire existera dans l'un des deux examens, partiel ou terminal.

Exercice 2. **(a)** Résoudre en variables $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ le système linéaire dont la matrice complète est :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Indication: La solution générale dépend de $x_3 \in \mathbb{R}$ quelconque et de $x_5 \in \mathbb{R}$ quelconque.

Exercice 3. **(a)** Écrire deux systèmes d'équations équivalents aux deux équations vectorielles suivantes :

$$x_1 \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix},$$

$$x_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Inversement, écrire une équation vectorielle équivalente aux deux systèmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned} x_2 + 5\,x_3 &= 0 \\ 4\,x_1 + 6\,x_2 - x_3 &= 0 \\ -\,x_1 + 3\,x_2 - 8\,x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} 4\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 &= 9 \\ x_1 - 7\,x_2 - 2\,x_3 &= 2 \\ 8\,x_1 + 6\,x_2 - 5\,x_3 &= 15 \end{aligned}$$

Exercice 4. On considère une économie constituée de trois secteurs : énergie et carburants, produits manufacturés, services. Le secteur de l'énergie et des carburants vend 80% de sa production au secteur manufacturier, 10% aux services, et conserve le reste. Le secteur manufacturier vend 10% de sa production au secteur de l'énergie et des carburants, 80% aux services, et conserve le reste. Les services vendent 20% au secteur de l'énergie et des carburants, 40% au secteur manufacturier, et conservent le reste.

(a) Consuire un tableau des échanges pour cette économie-bébé.

(b) Écrire un système d'équations permettant de déterminer les prix auxquels les secteurs doivent vendre leurs produits pour que les recettes équilibrent les dépenses.

(c) Trouver un ensemble de prix d'équilibre, en supposant que les services vendent leur production 100 unités.
Indication: S'aider du corrigé résumé suivant, ainsi que d'une calculatrice, si besoin est.

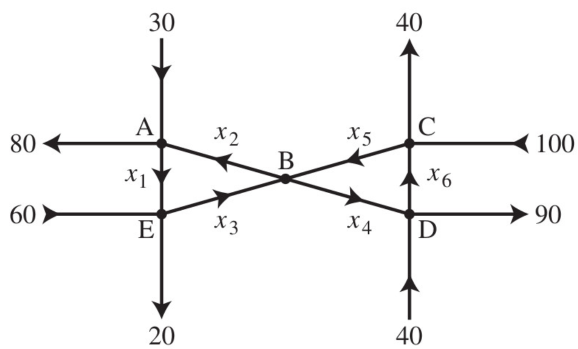
3. a.

	Répartition de la production de :				
	Én. & C	Man.	Serv.		
Sortie	↓	↓	↓	Entrée	Acheté par :
	0,1	0,1	0,2	→	Én. & C.
	0,8	0,1	0,4	→	Man.
	0,1	0,8	0,4	→	Serv.

b. $\begin{bmatrix} 0{,}9 & -0{,}1 & -0{,}2 & 0 \\ -0{,}8 & 0{,}9 & -0{,}4 & 0 \\ -0{,}1 & -0{,}8 & 0{,}6 & 0 \end{bmatrix}$

c. [M] $p_{\text{É\&C}} \approx 30$, $p_{\text{M}} \approx 71$, $p_{\text{S}} = 100$.

Exercice 5. **(a)** Déterminer la répartition des flux dans le réseau de la figure ci-dessous.
Indication: Raisonner aux 5 points 'névralgiques' A, B, C, D, E.



(b) En supposant que les flux s'écoulent bien dans la direction indiquée, déterminer les flux minimaux, c'est-à-dire les valeurs minimales possibles pour x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6.

Exercice 6. Soit $k \in \mathbb{R}$ un paramètre et soit le système linéaire :

$$\begin{aligned} x + \ \ y + 2\,z - \ \ t - \ \ u &= 1, \\ x + \ \ y + \ \ z \qquad\qquad &= 3, \\ 2\,x + 2\,y - \ \ z + 4\,t + 4\,u &= 2, \\ 3\,x + 3\,y + \ \ z - 6\,t - 6\,u &= 93, \\ x + \ \ y \qquad\qquad\qquad &= k. \end{aligned}$$

(a) Montrer qu'il n'y a aucune solution lorsque $k \neq 15$.

(b) Quand $k = 15$, montrer que la solution générale dépend de 2 inconnues réelles libres quelconques, et déterminer explicitement cette solution.

Exercice 7. **(a)** On remarque que $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$. Avec cette relation, et sans effectuer d'opérations sur les lignes, sans calculer, trouver des scalaires c_1, c_2, c_3 vérifiant l'égalité :

$$\begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 8. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les deux points $A := (1, 2, 3)$ et $B := (3, 2, 1)$. On note P le plan d'équation cartésienne $2\,x + y + z = 3$.

(a) Déterminer un paramétrage $M(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ de la droite (AB), avec $t \in \mathbb{R}$ quelconque.

(b) À quelle condition sur $t \in \mathbb{R}$ le point $M(t) \in P$ appartient-il au plan P ? On demande de déterminer la ou les valeurs éventuelles de t telles que $M(t) \in P$.

(c) Déterminer complètement l'intersection $(AB) \cap P$.

Exercice 9. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on note P_1 le plan d'équation $x - y + 2\,z = -\,2$, et on note P_2 le plan d'équation $3\,x + y + 2\,z = 6$. Enfin, on note $D := P_1 \cap P_2$.

(a) Déterminer un paramétrage $M(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ de D, avec $t \in \mathbb{R}$ quelconque.

(b) Donner explicitement les coordonnées de deux points *distincts* situés sur D.

10. Corrigé de l'examen 5

Exercice 1. (a) D'après le principe de conservation de la matière (Lavoisier), il doit y avoir autant d'atomes d'une substance X quelconque à gauche du signe $\longmapsto$ qu'il y en a à droite, ce qui nous donne 5 équations linéaires à 6 variables :

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Pb}: && x = 3\,s\\
&\mathsf{N}: && 6\,x = v,\\
&\mathsf{Cr}: && y = 2\,t,\\
&\mathsf{Mn}: && 2\,y = u,\\
&\mathsf{O}: && 8\,y = 4\,s + 3\,t + 2\,u + v.
\end{aligned}$$

Utilisons les équations 1 et 3 afin de résoudre x et y pour les remplacer dans les équations 2, 4, 5 :

$$\begin{aligned}
18\,s &= v,\\
4\,t &= u,\\
16\,t &= 4\,s + 3\,t + 2\,u + v,
\end{aligned}$$

ce qui nous donne un système de 3 équations linéaires en les 4 variables *qui sont situées exclusivement à gauche* s, t, u, v, que nous préférons écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
-\,18\,s \qquad\qquad\qquad + v &= 0\\
-\;\;4\,t + \;\;u \qquad &= 0\\
4\,s - 13\,t + 2\,u + \;v &= 0
\end{aligned}$$

On résout à partir des deux premières équations :

$$\begin{aligned}
v &= 18\,s,\\
u &= 4\,t,
\end{aligned}$$

puis on remplace ces valeurs dans la troisième équation :

$$\begin{aligned}
0 &= 4\,s - 13\,t + 2\,(4\,t) + 18\,s\\
&= 22\,s - 5\,t.
\end{aligned}$$

Cette dernière équation en les deux variables s, t a pour solution générale :

$$s = 5\,\lambda, \qquad\qquad t = 22\,\lambda,$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un nombre réel quelconque.

En remplaçant dans les équations qui précèdent, on trouve que la solution générale pour l'équilibrage chimique est :

$$x = 15\,\lambda, \qquad y = 44\,\lambda, \qquad s = 5\,\lambda, \qquad t = 22\,\lambda, \qquad u = 88\,\lambda, \qquad v = 90\,\lambda.$$

Pour $\lambda = 1$, on retrouve la solution qui a été « offerte » lors du dernier exercice du DM-1.

Exercice 2. **(a)** Ce système s'écrit :

$$\begin{aligned} x_1 - 3\,x_2 \qquad - \quad x_4 \qquad\quad &= -2 \\ x_2 \qquad\qquad\quad - 4\,x_5 &= 1 \\ x_4 + 9\,x_5 &= 4 \\ 0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5 &= 0 \end{aligned}$$

et la dernière ligne $0 = 0$, étant tautologique, peut être effacée :

$$\begin{aligned} \boxed{x_1} - 3\,x_2 - \quad x_4 \qquad\quad &= -2 \\ \boxed{x_2} \qquad\quad - 4\,x_5 &= 1 \\ \boxed{x_4} + 9\,x_5 &= 4 \end{aligned}$$

En partant du bas, on peut donc résoudre :

$$\begin{aligned} x_4 &= 4 - 9\,x_5, \\ x_2 &= 1 + 4\,x_5, \end{aligned}$$

puis remplacer dans la ligne 1 :

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 + 3\,x_2 + x_4 \\ &= -2 + 3\,\big(1 + 4\,x_5\big) + 4 - 9\,x_5 \\ &= -2 + 3 + 12\,x_5 + 4 - 9\,x_5 \\ &= 5 + 3\,x_5. \end{aligned}$$

Le point subtil de cet exercice, c'est que la variable x_3 n'apparaît dans aucune des équations manipulées, et pourtant, l'inconnue x_3 est bel et bien présente dans le système linéaire à résoudre. La raison de cela, c'est que dans la matrice du système, *il n'y a que des* 0 *dans la colonne correspondant à* x_3.

Par conséquent, l'espace des solutions :

$$\begin{aligned} \mathsf{Sol} = \Big\{ \Big(5 + 3\,x_3,\;\; 1 + 4\,x_5,\;\; x_3,\;\; 4 - 9\,x_5,\;\; x_5 \Big) : \\ x_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\;\; x_5 \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \Big\}, \end{aligned}$$

dépend bien de *deux* paramètres libres, x_3 et x_5.

Exercice 3. **(a)** Les deux systèmes sont :

$$\begin{aligned} 6\,x_1 - 3\,x_2 &= 1 \\ -\,x_1 + 4\,x_2 &= -7 \\ 5\,x_1 \qquad\; &= -5 \end{aligned} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \begin{aligned} -\,2\,x_1 + 8\,x_2 + \quad x_3 &= 0 \\ 3\,x_1 + 5\,x_2 - 6\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Les deux équations vectorielles sont :

$$\begin{aligned} x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ x_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 4. (a) Voici le tableau des échanges, avec E pour Énergies et Carburants, avec M pour Produits Manufacturés, et avec S pour Services :

	E	M	S
E	$0,1$	$0,8$	$0,1$
M	$0,1$	$0,1$	$0,8$
S	$0,2$	$0,4$	$0,4$

(b) On nomme x_1 le prix des Énergies et Carburants ; x_2 le prix des Produits Manufacturés ; x_3 le prix des Services. Le système d'équations exprimant que les recettes équilibrent les dépenses est :

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1\,x_1 + 0,1\,x_2 + 0,2\,x_3, \\ x_2 &= 0,8\,x_1 + 0,1\,x_2 + 0,4\,x_3, \\ x_3 &= 0,1\,x_1 + 0,8\,x_2 + 0,4\,x_3, \end{aligned}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} 0,9\,x_1 - 0,1\,x_2 - 0,2\,x_3 &= 0, \\ -0,8\,x_1 + 0,9\,x_2 - 0,4\,x_3 &= 0, \\ -0,1\,x_1 - 0,8\,x_2 + 0,6\,x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Pour résoudre ce système, appliquons la méthode du pivot, en prenant un pivot tout en bas de la première colonne, sans changer les lignes de place (ce qui implique de créer des zéros vers le haut) :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0,9 & -0,1 & -0,2 & 0 \\ -0,8 & 0,9 & -0,4 & 0 \\ \boxed{-0,1} & -0,8 & 0,6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -7,3 & 5,2 & 0 \\ 0 & 7,3 & -5,2 & 0 \\ -0,1 & -0,8 & 0,6 & 0 \end{array}\right]$$

Les deux première lignes sont égales, au signe près, donc on peut supprimer la première. La seconde ligne donne :

$$x_2 = \frac{5,2}{7,3}\,x_3,$$

puis, après remplacement, la troisième ligne donne :

$$x_1 = \frac{-0,8\,\frac{5,2}{7,3} + 0,6}{0,1}\,x_3 = \frac{22}{73}\,x_3.$$

3. a.

	Répartition de la production de : Én. & C	Man.	Serv.		
Sortie	↓	↓	↓	Entrée	Acheté par :
	0,1	0,1	0,2	→	Én. & C.
	0,8	0,1	0,4	→	Man.
	0,1	0,8	0,4	→	Serv.

b. $\begin{bmatrix} 0,9 & -0,1 & -0,2 & 0 \\ -0,8 & 0,9 & -0,4 & 0 \\ -0,1 & -0,8 & 0,6 & 0 \end{bmatrix}$

c. [M] $p_{\text{É\&C}} \approx 30$, $p_{\text{M}} \approx 71$, $p_{\text{S}} = 100$.

(c) Avec $x_3 = 100$, on trouve approximativement :

$$x_1 \,=\, \frac{2200}{73} \,\approx\, 30, \qquad\qquad x_2 \,=\, \frac{5200}{73} \,\approx\, 71, \qquad\qquad x_3 \,=\, 100.$$

Exercice 5. (a) Les bilans des flux entrants égaux aux flux sortants, au 5 nœuds A, B, C, D, E du réseau sont :

$$\begin{aligned}
30 + x_2 \,&=\, 80 + x_1 &&\overset{\text{A}}{\Longleftrightarrow} & -x_1 + x_2 \,&=\, 50,\\
x_3 + x_5 \,&=\, x_2 + x_4 &&\overset{\text{B}}{\Longleftrightarrow} & -x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \,&=\, 0,\\
100 + x_6 \,&=\, 40 + x_5 &&\overset{\text{C}}{\Longleftrightarrow} & -x_5 + x_6 \,&=\, -60,\\
40 + x_4 \,&=\, 90 + x_6 &&\overset{\text{D}}{\Longleftrightarrow} & x_4 - x_6 \,&=\, 50,\\
60 + x_1 \,&=\, 20 + x_3 &&\overset{\text{E}}{\Longleftrightarrow} & x_1 - x_3 \,&=\, -40.
\end{aligned}$$

On résout x_1, x_4, x_5 depuis le bas :

$$\begin{aligned}
x_1 \,&=\, -40 + x_3,\\
x_4 \,&=\, 50 + x_6,\\
x_5 \,&=\, 60 + x_6,
\end{aligned}$$

et on remplace dans la première équation :

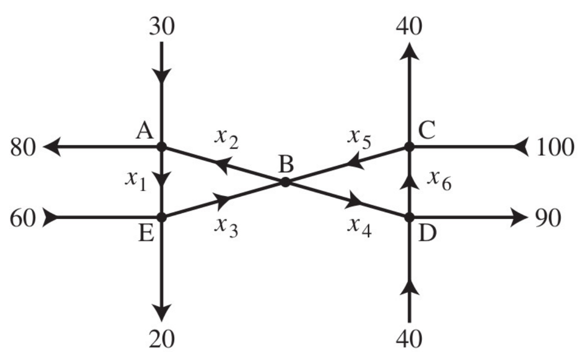
$$40 - x_3 + x_2 \,=\, 50 \qquad\qquad \text{pour résoudre :} \qquad\qquad x_2 \,=\, 10 + x_3,$$

et enfin, on remplace dans la deuxième équation qui devient tautologique :

$$-10 - x_3 + x_3 - 50 - x_6 + 60 + x_6 \,=\, 0 \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad 0 \,=\, 0.$$

En définitive :

$$\mathsf{Sol} \,=\, \Big\{\big(-40+x_3,\ 10+x_3,\ x_3,\ 50+x_6,\ 60+x_6,\ x_6\big) \colon\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_6 \in \mathbb{R} \text{ quelconques}\Big\}.$$



(b) Dire que les flux s'écoulent bien dans le sens indiqué, c'est dire que $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_5 \geqslant 0$, $x_6 \geqslant 0$, simultanément, c'est-à-dire en lisant Sol :

$$x_3 \,\geqslant\, 40, \qquad x_3 \,\geqslant\, -10, \qquad x_3 \,\geqslant\, 0, \qquad x_6 \,\geqslant\, -50, \qquad x_6 \,\geqslant\, -60, \qquad x_6 \,\geqslant\, 0,$$

ce qui équivaut à :

$$x_3 \,\geqslant\, 40, \qquad x_6 \,\geqslant\, 0.$$

La solution minimale est donc atteinte pour le choix de $x_3 := 40$ et $x_6 := 0$, et elle vaut :

$$\mathsf{Sol}_{\mathsf{min}} \,:=\, \big(0,\ 50,\ 40,\ 50,\ 60,\ 0\big).$$

Exercice 6. (a) Soumettons la matrice complète de ce système à l'algorithme du pivot :

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
\boxed{1} & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
2 & 2 & -1 & 4 & 4 & 2 \\
3 & 3 & 1 & -6 & -6 & 93 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & k
\end{array}\right]
\longmapsto
\left[\begin{array}{ccccc|c}
\boxed{1} & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & -5 & 6 & 6 & 0 \\
0 & 0 & -5 & -3 & -3 & 90 \\
0 & 0 & -2 & 1 & 1 & k-1
\end{array}\right]
$$

$$
\longmapsto
\left[\begin{array}{ccccc|c}
\boxed{1} & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -10 \\
0 & 0 & 0 & -8 & -8 & 80 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & k-5
\end{array}\right]
$$

$$
\longmapsto
\left[\begin{array}{ccccc|c}
\boxed{1} & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k-15
\end{array}\right].
$$

La ligne 4 peut être supprimée, et nous obtenons un système échelonné :

$$
\begin{aligned}
\boxed{1}\,x + y + \quad 2\,z - \quad t - u &= 1 \\
\boxed{-1}\,z + \quad t + u &= 2 \\
\boxed{1}\,t + u &= -10 \\
0 &= k - 15.
\end{aligned}
$$

Clairement, le système est incompatible lorsque $k \neq 15$.

(b) Quand $k = 15$, après suppression de la dernière ligne, ré-écrivons le système sous la forme d'une matrice, et continuons à appliquer la méthode du pivot jusqu'à atteindre une forme échelonnée réduite :

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -10
\end{array}\right]
\longmapsto
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 2 & 0 & 0 & -9 \\
0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 12 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10
\end{array}\right]
$$

$$
\longmapsto
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 12 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10
\end{array}\right]
$$

$$
\longmapsto
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc|c}
\boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\
0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -12 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -10
\end{array}\right],
\end{array}
$$

d'où :

$$
\mathsf{Sol} \;=\; \Big\{\big(15 - y,\ y,\ -12,\ -10 - u,\ u\big) :\ y \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\ u \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\Big\}.
$$

Exercice 7. **(a)** Il suffit de lire la multiplication matricielle :

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix},$$

comme signifiant :

$$-3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on trouve :

$$c_1 := -3, \qquad c_2 := -1, \qquad c_3 := 2.$$

Exercice 8. **(a)** Calculons le vecteur :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{puis} \qquad M(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

ce qui donne :

$$x(t) = 1 + 2\,t, \qquad y(t) = 2, \qquad z(t) = 3 - 2\,t.$$

(b) On cherche tous les paramètre $t \in \mathbb{R}$ sur la droite (AB) tels que le point $M(t)$ appartienne aussi au plan P. Donc on injecte l'équation paramétrique dans l'équation cartésienne, ce qui donnera tous les points d'intersection possibles :

$$\begin{aligned} 0 &= 2\,x(t) + y(t) + z(t) - 3 \\ &= 2 + 4\,t + 2 + 3 - 2\,t - 3 \\ &= 4 + 2\,t. \end{aligned}$$

Il est clair alors qu'il y a une solution unique : $t = -\,2$.

(c) Donc il y a un unique point d'intersection, dont les coordonnées sont obtenues en posant $t := -\,2$ dans $M(t)$:

$$(AB) \cap P = \big\{(-3,\, 2,\, 7)\big\}.$$

Évidemment, on doit vérifier sur du brouillon qu'on ne s'est pas trompé. Nous sommes donc dans le cas le plus fréquent, où une droite et un plan dans l'espace s'intersectent en un point unique.

Exercice 9. **(a)** L'intersection $P_1 \cap P_2$ est représentée par le système linéaire :

$$\begin{aligned} x - y + 2\,z &= -\,2 \\ 3\,x + y + 2\,z &= 6 \end{aligned} \qquad \text{équivalent à} \qquad \begin{aligned} x - y + 2\,z &= -\,2 \\ 4\,y - 4\,z &= 12 \end{aligned}$$

Ainsi, x et y sont deux variables dépendantes, et z est une variable dépendante. On résout :

$$y = 3 + z \qquad \text{puis} \qquad x = 1 - z.$$

Ainsi :

$$\mathsf{Sol} = \big\{(1 - z,\ 3 + z,\ z) \colon\ z \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\},$$

puis en notant $t := z$, on obtient la paramétrisation de la droite $D = P_1 \cap P_2$:

$$x(t) = 1 - t, \qquad y(t) = 3 + t, \qquad z(t) = t.$$

(b) Pour $t = 0$ et $t = 1$, on obtient les deux points distincts :

$$A := (1, 3, 0) \qquad \text{et} \qquad B := (0, 4, 1).$$

11. Examen 6

ALGORITHME DE CALCUL DE A^{-1}

Appliquer la méthode du pivot à la matrice $[\,A \quad I\,]$. Si A est équivalente selon les lignes à I, alors $[\,A \quad I\,]$ est équivalente selon les lignes à $[\,I \quad A^{-1}\,]$. Sinon, A n'a pas d'inverse.

EXEMPLE 7 Déterminer, si elle existe, l'inverse de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$.

SOLUTION

$$[\,A \quad I\,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right]$$

D'après le théorème 7 et puisque $A \sim I$, A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Il est recommandé de vérifier la valeur de l'inverse :

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puisque l'on a montré que A était inversible, il est inutile de vérifier que $A^{-1}A = I$. ■

Exercice 1. **(a)**, **(b)** À l'aide de l'algorithme $\big(A\colon I\big)$ expliqué dans le scan ci-dessus, déterminer, lorsqu'elle existe, la matrice inverse de chacune des deux matrices :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -7 & 3 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On pose $A := \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. L'objectif est de calculer $A^8 = A{\cdot}A{\cdot}A{\cdot}A{\cdot}A{\cdot}A{\cdot}A{\cdot}A$, le produit de la matrice A par elle-même, huit fois.

(a) On introduit la matrice $P := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice inverse P^{-1}. Indication: Résoudre le système :

$$\begin{aligned} 3\,x_1 + x_2 &= y_1, \\ 2\,x_1 + x_2 &= y_2, \end{aligned}$$

en déduire la matrice P^{-1}, et surtout, vérifier que $P^{-1} \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Soit la matrice diagonale $D := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

(c) Calculer $D^2 = D \cdot D$, puis $D^3 = D \cdot D^2$, et trouver matrice D^8.

(d) Calculer A^8. Indication: Utiliser le fait que $P^{-1} \cdot P$ est la matrice identité.

(e) Que vaut A^{25} ?

Exercice 3. Soit la matrice :

$$A := \begin{bmatrix} -2 & -7 & -9 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Trouver la 3$^{\text{ième}}$ colonne de A^{-1} sans calculer les autres colonnes.

Exercice 4. Soit $A := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Par essais et par erreurs, construire une matrice C de taille 2×3 ne contenant que -1, 0, 1 dans ses composantes, telle que $C \cdot A = I_{2\times 2}$.

(b) Ensuite, calculer $A \cdot C$. A-t-on $A \cdot C = I_{3\times 3}$?

(c) Plus généralement, soit $C = \left[\begin{smallmatrix} j & k & l \\ p & q & r \end{smallmatrix}\right]$. Déterminer 4 équations linéaires qui garantissent que $C \cdot A = I_{2\times 2}$.

(d) Déterminer 9 équations linéaires qui pourraient garantir que $A \cdot C = I_{3\times 3}$.

(e) Est-il parfois possible d'avoir $A \cdot C = I_{3\times 3}$ quand on suppose $C \cdot A = I_{2\times 2}$?

Exercice 5. **(a)** Calculer l'inverse de $A_2 := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) Calculer l'inverse de $A_3 := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right]$.

(c) Calculer l'inverse de $A_4 := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right]$.

(d) Pour tout $n \geqslant 2$, deviner l'inverse de :

$$A_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix}.$$

(e) Vérifier qu'on a bien $A_n^{-1} \cdot A_n = I_{n\times n} = A_n \cdot A_n^{-1}$.

Exercice 6. **(a)*** Déterminer l'inverse de la matrice :

$$B := \begin{bmatrix} -25 & -9 & -27 \\ 546 & 180 & 537 \\ 154 & 50 & 149 \end{bmatrix}.$$

Indication: Attention ! Exercice délicat ! Nombreuses possibilités de faire des erreurs de calculs lorsqu'on manipule des fractions compliquées. Donc il est nécessaire de détailler chaque étape pour se relire et trouver ses erreurs.

Réussir cet exercice serait une preuve de grande maîtrise du calcul ! Petite aide : la composante $(2, 2)$ de B^{-1} (au centre) vaut $-\frac{433}{6}$, et il reste donc 8 entrées à calculer.

12. Corrigé de l'examen 6

Exercice 1. **(a)** On place la matrice identité $I_{3\times 3}$ à droite de la matrice A après une barre verticale, et on démarre la machine-pivot :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{array}\right],$$

pour trouver après une ultime division de la ligne 3 par le nombre 2 :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(b) En procédant de la même manière avec cette autre matrice B :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

nous constatons que la ligne 3 se réduit à un désert de $\mathbf{0}$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{0}$, donc aucun pivot ne reste disponible en position $(3, 3)$ pour poursuive les calculs. Or un théorème (admis) du cours stipule que ceci est la manifestation du fait que la matrice B n'est *pas* inversible.

Exercice 2. **(a)** Soit donc la matrice $A := \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, et soit la matrice $P := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Le déterminant $3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 1$ de cette dernière est non nul, donc P est inversible. Une formule d'un théorème du cours donne alors directement sans transpirer :

$$P^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 1 - 2 \cdot 1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dans ce corrigé imprimé, nous ne vérifons pas que $P^{-1} \cdot P = I_{2\times 2}$, car nous l'avons fait à la main sur un bout de mouchoir, comme nous devons toujours le faire en DM et en examen. En fait, nous n'avons pas non plus suivi l'indication donnée dans l'exercice !

Ého ! Ohé ! Oui vous, le petit malin là-bas, vous qui prenez tous vos raccourcis de prof en douce : Stop ! Amende de 135 euros !

(b) Soit donc la matrice diagonale $D := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nous pouvons vérifier que :

$$
\begin{aligned}
P \cdot D \cdot P^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 & -3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 & -2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = A.
\end{aligned}
$$

(c) Puisque la matrice D est diagonale, il est facile de calculer :

$$
D^2 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1^2 \end{pmatrix}, \qquad D^3 = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 1^3 \end{pmatrix},
$$

$$
D^4 = \begin{pmatrix} 2^4 & 0 \\ 0 & 1^4 \end{pmatrix}, \qquad D^8 = \begin{pmatrix} 2^8 & 0 \\ 0 & 1^8 \end{pmatrix},
$$

et en fait, généralement, pour tout entier $r \geqslant 1$:

$$
D^r = \begin{pmatrix} 2^r & 0 \\ 0 & 1^r \end{pmatrix}.
$$

(d) En utilisant le fait que $P^{-1} \cdot P$ est la matrice identité, calculons :

$$
A^2 = P \cdot D \cdot \underline{P^{-1} \cdot P} \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^2 \cdot P^{-1},
$$

puis :

$$
A^3 = A \cdot A^2 = P \cdot D \cdot \underline{P^{-1} \cdot P} \cdot D^2 \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot D^2 \cdot P^{-1} = P \cdot D^3 \cdot P^{-1}.
$$

En supposant par récurrence sur un entier $r \geqslant 3$ que l'on a donc :

$$
A^r = P \cdot D^r \cdot P^{-1},
$$

il vient la même formule au niveau $r + 1$:

$$
A^{r+1} = A \cdot A^r = P \cdot D \cdot \underline{P^{-1} \cdot P} \cdot D^r \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot D^r \cdot P^{-1} = P \cdot D^{r+1} \cdot P^{-1}.
$$

Ainsi, nous pouvons répondre une question plus générale :

$$
\begin{aligned}
A^r = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^r & 0 \\ 0 & 1^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^r & -2^r \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^r - 2 & -3 \cdot 2^r + 3 \\ 2 \cdot 2^r - 2 & -2 \cdot 2^r + 3 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

d'où pour $r = 8$:

$$
A^8 = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^8 - 2 & -3 \cdot 2^8 + 3 \\ 2 \cdot 2^8 - 2 & -2 \cdot 2^8 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 766 & -765 \\ 510 & -509 \end{pmatrix}.
$$

(e) De même :

$$
A^{25} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{25} - 2 & -3 \cdot 2^{25} + 3 \\ 2 \cdot 2^{25} - 2 & -2 \cdot 2^{25} + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\,663\,294 & -100\,663\,293 \\ 67\,108\,862 & -67\,108\,869 \end{pmatrix}.
$$

Exercice 3. **(a)** Il s'agit de résoudre le système linéaire correspondant à la matrice A augmenté de la dernière et troisième colonne de la matrice identité

$$I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire le système :

$$\begin{aligned} -2x - 7y - 9z &= 0 \\ 2x + 5y + 6z &= 0 \\ x + 3y + 4z &= 1 \end{aligned} \qquad \rightsquigarrow \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -7 & -9 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 0 \\ \boxed{1} & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Petite variation amusante de la méthode du pivot de Gauss ! Petite espièglerie !

Nous n'allons pas permuter les lignes, et travailler directement avec le pivot $\boxed{1}$ situé tout en bas à gauche, afin de créer des **0** *au-dessus* de lui. Ensuite, nous nous autoriserons même d'utiliser des pivots égaux à -1 ! Et tout va fonctionner comme sur des roulettes ! Car les calculs, en mathématiques, sont toujours beaucoup plus flexibles et beaucoup plus adaptables qu'on ne pourrait le croire !

Le calcul, en mathématiques, est un immense espace de liberté !

Sans détailler toutes les opérations intermédiaires d'additions de lignes, et en nous autorisant encore à choisir des pivots là où cela semble le plus avantageux sans nous imposer de permuter les lignes, voici une description des gaussifications utiles :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -7 & -9 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 0 \\ \boxed{1} & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & \boxed{-1} & -1 & 2 \\ \mathbf{0} & -1 & -2 & -2 \\ \boxed{1} & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & \boxed{-1} & -1 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{-1} & -4 \\ \boxed{1} & \mathbf{0} & 1 & 7 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & -1 & \mathbf{0} & 6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 & -4 \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3 \end{array}\right] \end{array}$$

ce qui nous permet de lire la solution, unique :

$$x = 3, \qquad y = -6, \qquad z = 4.$$

En conclusion, la dernière colonne de l'inverse de la matrice A est :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & 3 \\ * & * & -6 \\ * & * & 4 \end{pmatrix},$$

ce que l'étudiant astucieux et scrupuleux aurait pu confirmer en calculant, de manière indépendante, la matrice inverse complète :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

et en vérifiant, bien sûr, que le résultat $A \cdot A^{-1} = I_{3\times 3}$ est correct — ce que le professeur est capable de faire d'un seul coup d'œil !

Exercice 4. **(a)** Introduisons une matrice générale de taille 2×3 :

$$C := \begin{bmatrix} j & k & l \\ p & q & r \end{bmatrix},$$

avec des nombres réels quelconques j, k, l, p, q, r, dont le produit avec A est :

$$C \cdot A = \begin{bmatrix} j & k & l \\ p & q & r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j+k+l & 2j+3k+5l \\ p+q+r & 2p+3q+5r \end{bmatrix}$$
$$\overset{?}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si donc nous nous contraignons à choisir :

$$j,\, k,\, l,\, p,\, q,\, r \ \in \big\{ -1, 0, 1 \big\},$$

par tatônnements intellectuels, on finit par trouver un exemple :

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 1 - 1 & \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{qui donne bien} \qquad C \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{2\times 2}.$$

(b) Mais avec la matrice C que nous venons de trouver, un simple calcul montre que le produit *dans l'autre sens :*

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -4 & 6 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

n'est *pas du tout* égal à la matrice identité $I_{3\times 3}$!

(c) D'ailleurs, le calcul général effectué à la Question **(a)** montre que $C \cdot A = I_{2\times 2}$ si et seulement si les quatre équations linéaires suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} j+k+l &= 1, & \qquad 2\,j+3\,k+5\,l &= 0, \\ p+q+r &= 0, & \qquad 2\,p+3\,q+5\,r &= 1. \end{aligned}$$

(d) D'un autre côté, un calcul complet de l'autre produit :

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j & k & l \\ p & q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j+2p & k+2q & l+2r \\ j+3p & k+3q & l+3r \\ j+5p & k+5q & l+5r \end{bmatrix}$$
$$\overset{?}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

montre, que l'on aurait $A \cdot C = I_{3\times 3}$ si et seulement les 9 équations linéaires suivantes étaient satisfaites :

$$\begin{aligned} j+2\,p &= 1, & \qquad k+2\,q &= 0, & \qquad l+2\,r &= 0, \\ j+3\,p &= 0, & \qquad k+3\,q &= 1, & \qquad l+3\,r &= 0, \\ j+5\,p &= 0, & \qquad k+5\,q &= 0, & \qquad l+5\,r &= 1. \end{aligned}$$

(e) Mais — même sans supposer que l'égalité $C \cdot A = I_{2\times 2}$ est satisfaite —, en identifiant seulement la première colonne de $A \cdot C$ avec la première colonne de $I_{3\times 3}$, on constate que les trois équations nécessaires :

$$\begin{aligned} j + 2\,p &= \mathbf{1}, \\ j + 3\,p &= 0, \\ j + 5\,p &= 0, \end{aligned}$$

sont déjà contradictoires, puisque les deux dernières forcent les valeurs de :

$$j = p = \mathbf{0},$$

qui, remplacées ensuite dans la première équation, conduisent à l'absurdité :

$$\mathbf{0} \overset{!!}{=} \mathbf{1},$$

la plus *méphistophélique* de toutes les mathématiques !

Exercice 5. (a) On trouve aisément :

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(b) Pour déterminer A_3^{-1}, l'idée qui vient en premier à l'esprit est d'appliquer la technique enseignée en cours, qui consiste à appliquer la méthode du pivot à la matrice A_3 augmentée de la matrice identité $I_{3\times 3}$.

Sans détailler toutes les combinaisons linéaires entre lignes, voici les étapes principales de mise sous forme échelonnée *réduite* de la matrice augmentée $\big[A_3 \,\big|\, I_{3\times 3}\big]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right],$$

donc A_3 est inversible, et nous avons :

$$A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Mais une autre méthode se prêtera mieux à la généralisation. Il s'agit tout simplement de partir du système linéaire :

$$\begin{aligned} &x_1 && = y_1, \\ &x_1 + 2\,x_2 && = y_2, \\ &x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 && = y_3, \end{aligned}$$

dont les seconds membres y_1, y_2, y_3 sont quelconques. En partant du haut, on résout aisément :

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}\big(y_2 - x_1\big) \,=\, -\tfrac{1}{2}\,y_1 + \tfrac{1}{2}\,y_2, \\ x_3 &= \tfrac{1}{3}\big(y_3 - x_1 - 2\,x_2\big) \,=\, \tfrac{1}{3}\Big(y_3 - y_1 - 2\big(-\tfrac{1}{2}\,y_1 + \tfrac{1}{2}\,y_2\big)\Big) \,=\, -\tfrac{1}{3}\,y_2 + \tfrac{1}{3}\,y_3, \end{aligned}$$

et donc nous trouvons à nouveau, en lisant les coefficients de x_1, x_2, x_3 dans ces formules inverses :

$$A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(c) Afin de déterminer la matrice inverse A_4^{-1} — si elle existe —, résolvons le système général :

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &= y_1, \\ x_1 + 2\,x_2 \qquad\qquad\qquad &= y_2, \\ x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 \qquad\quad &= y_3, \\ x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 &= y_4. \end{aligned}$$

Grâce à ce que nous venons de faire en dimension $n = 3$, nous savons que les trois premières équations se résolvent en :

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_2 &= -\tfrac{1}{2}\,y_1 + \tfrac{1}{2}\,y_2, \\ x_3 &= -\tfrac{1}{3}\,y_2 + \tfrac{1}{3}\,y_3, \end{aligned}$$

et il ne reste plus qu'à résoudre x_4 depuis la dernière équation.

Mais ici, il ne serait pas très « malin » de remplacer ces valeurs de x_1, x_2, x_3, c'est-à-dire d'écrire :

$$x_4 = \tfrac{1}{4}\Big(y_4 - y_1 - 2\big(-\tfrac{1}{2}\,y_1 + \tfrac{1}{2}\,y_2\big) - 3\big(-\tfrac{1}{3}\,y_2 + \tfrac{1}{3}\,y_3\big)\Big),$$

puis de développer patiemment les calculs de fractions, car en regardant les *deux dernières lignes :*

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 \qquad\quad &= y_3, \\ x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 &= y_4, \end{aligned}$$

on voit qu'on peut obtenir par soustraction délectable :

$$4\,x_4 = y_4 - y_3,$$

et donc sans aucun effort :

$$x_4 = -\tfrac{1}{4}\,y_3 + \tfrac{1}{4}\,y_4.$$

Ainsi :

$$A_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

(d) Écrivons le système à résoudre :

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1, \\
x_1 + 2\,x_2 &= y_2, \\
x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 &= y_3, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &, \\
x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + \cdots + (n-1)\,x_{n-1} &= y_{n-1}, \\
x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + \cdots + (n-1)\,x_{n-1} + n\,x_n &= y_n,
\end{aligned}$$

supposons par récurrence que les $(n-1)$ première lignes se résolvent en :

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1, \\
x_2 &= -\tfrac{1}{2}\,y_1 + \tfrac{1}{2}\,y_2, \\
x_3 &= -\tfrac{1}{2}\,y_2 + \tfrac{1}{3}\,y_3, \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
y_{n-1} &= -\tfrac{1}{n-1}\,y_{n-2} + \tfrac{1}{n-1}\,y_{n-1},
\end{aligned}$$

et regardons encore plus haut les deux dernières lignes de notre système à résoudre afin que jaillisse à nouveau l'idée de raccourci de calcul :

$$n\,x_n = y_n - y_{n-1},$$

qui nous donne également sans efforts :

$$x_n = -\tfrac{1}{n}\,y_{n-1} + \tfrac{1}{n}\,y_n.$$

En conclusion, nous avons trouvé la matrice inverse que nous avions intuitivement devinée :

$$\begin{aligned}
A_n^{-1} &= \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 \\
1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n
\end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{n} & \frac{1}{n}
\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(e) Ceci se fait directement sur des feuilles de papier auxiliaires.

Exercice 6. **(a)** Proposons-nous d'appliquer la méthode vue en cours. Commençons par adjoindre, à la droite de notre matrice A, la matrice identité :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -25 & -9 & -27 & 1 & 0 & 0 \\ 546 & 180 & 537 & 0 & 1 & 0 \\ 154 & 50 & 149 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Afin d'avoir un pivot égal à 1 en haut à gauche, c'est-à-dire en position $(1,1)$, il fait multiplier la première ligne par $\frac{1}{-25}$ — rien que ça ! et ce n'est que le début de nos ennuis ! —, ce qui donne :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & \frac{9}{25} & \frac{27}{25} & -\frac{1}{25} & 0 & 0 \\ 546 & 180 & 537 & 0 & 1 & 0 \\ 154 & 50 & 149 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Ensuite, il faut créer deux zéros en-dessous du pivot $\boxed{1}$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & \frac{9}{25} & \frac{27}{25} & -\frac{1}{25} & 0 & 0 \\ -546 & -546\,\frac{9}{25} & -546\,\frac{27}{25} & 546\,\frac{1}{25} & 0 & 0 \\ 546 & 180 & 537 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & -\frac{414}{25} & -\frac{1\,317}{25} & \frac{546}{25} & 1 & 0 \\ -154 & -154\,\frac{9}{25} & -154\,\frac{27}{25} & 154\,\frac{1}{25} & 0 & 0 \\ 154 & 50 & 149 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & -\frac{136}{25} & -\frac{433}{25} & \frac{154}{25} & 0 & 1 \end{array} \longmapsto \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & \frac{9}{25} & \frac{27}{25} & -\frac{1}{25} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & -\frac{414}{25} & -\frac{1\,317}{25} & \frac{546}{25} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & -\frac{136}{25} & -\frac{433}{25} & \frac{154}{25} & 0 & 1 \end{array}$$

et par souci masochiste de complétude, nous détaillons les calculs d'additions des lignes concernées comme suit :

$$\begin{aligned} 180 - 546\,\frac{9}{25} &= \frac{180\cdot 25 - 546\cdot 9}{25} = \frac{4\,500 - 4\,914}{25} = -\frac{414}{25}, \\ 537 - 546\,\frac{27}{25} &= \frac{537\cdot 25 - 546\cdot 27}{25} = \frac{13\,425 - 14\,742}{25} = -\frac{1\,317}{25}, \\ 50 - 154\,\frac{9}{25} &= \frac{50\cdot 25 - 154\cdot 9}{25} = \frac{1\,250 - 1\,386}{25} = -\frac{136}{25}, \\ 149 - 154\,\frac{27}{25} &= \frac{149\cdot 25 - 154\cdot 27}{25} = \frac{3\,725 - 4\,158}{25} = -\frac{433}{25}. \end{aligned}$$

Vous aimez le café-calcul corsé ? Alors vous allez être servis ! Maintenant, il faut diviser la deuxième ligne par $-\frac{414}{25}$, ce qui, en observant que :

$$\frac{1\,317}{414} = \frac{3\cdot 439}{3\cdot 138} = \frac{439}{138}, \qquad\qquad -\frac{546}{414} = -\frac{6\cdot 91}{6\cdot 69} = -\frac{91}{69},$$

donne :

$$\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & \frac{9}{25} & \frac{27}{25} & -\frac{1}{25} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & -\frac{414}{25} & -\frac{1\,317}{25} & \frac{546}{25} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & -\frac{136}{25} & -\frac{433}{25} & \frac{154}{25} & 0 & 1 \end{array} \longmapsto \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & \frac{9}{25} & \frac{27}{25} & -\frac{1}{25} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \boxed{1} & \frac{439}{138} & -\frac{91}{69} & -\frac{25}{414} & 0 \\ \mathbf{0} & -\frac{136}{25} & -\frac{433}{25} & \frac{154}{25} & 0 & 1 \end{array}$$

Ensuite, il faut exploiter le nouveau pivot $\boxed{1}$ en position $(2,2)$ pour créer un vassal $\mathbf{0}$ se prosternant sous ses pieds, et simultanément aussi, un ange $\mathbf{0}$ au-dessus de lui :

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
\boxed{1} & \mathbf{0} & -\frac{3}{46} & \frac{10}{23} & \frac{1}{46} & 0 \\
\boxed{1} & \frac{9}{25} & \frac{27}{25} & -\frac{1}{25} & 0 & 0 \\
\mathbf{0} & -\frac{9}{25} & -\frac{9}{25}\frac{439}{138} & \frac{9}{25}\frac{91}{69} & \frac{9}{25}\frac{25}{414} & 0 \\
\mathbf{0} & \boxed{1} & \frac{439}{138} & -\frac{91}{69} & -\frac{25}{414} & 0 \\
\mathbf{0} & \frac{136}{25} & \frac{136}{25}\frac{439}{138} & -\frac{136}{25}\frac{91}{69} & -\frac{136}{25}\frac{25}{414} & 0 \\
\mathbf{0} & -\frac{136}{25} & -\frac{433}{25} & \frac{154}{25} & 0 & 1 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{69} & -\frac{70}{69} & -\frac{68}{207} & 1
\end{array}
\longmapsto
\begin{array}{ccc|ccc}
\boxed{1} & \mathbf{0} & -\frac{3}{46} & \frac{10}{23} & \frac{1}{46} & 0 \\
\mathbf{0} & \boxed{1} & \frac{439}{138} & -\frac{91}{69} & -\frac{25}{414} & 0 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{69} & -\frac{70}{69} & -\frac{68}{207} & 1
\end{array}
$$

tandis que par amour de la douleur, nous détaillons encore tous les calculs intemédiaires nécessaires :

$$
\begin{aligned}
\frac{27}{25}-\frac{9}{25}\frac{439}{138} &= \frac{1}{25}\left(\frac{27\cdot 138-9\cdot 439}{138}\right) = \frac{1}{25}\left(\frac{3\,726-3\,951}{138}\right) = \frac{-225}{25\cdot 138} = -\frac{9}{138} = -\frac{3}{46}, \\
-\frac{1}{25}+\frac{9}{25}\frac{91}{69} &= \frac{-69+9\cdot 91}{25\cdot 69} = \frac{750}{25\cdot 69} = \frac{10}{23}, \\
\frac{9}{25}\frac{25}{414} &= \frac{1}{46}, \\
-\frac{433}{25}+\frac{136}{25}\frac{439}{138} &= \frac{-433\cdot 138+136\cdot 439}{25\cdot 138} = \frac{-59\,754+59\,704}{138\cdot 25} = \frac{-50}{25\cdot 138} = -\frac{1}{69}, \\
\frac{154}{25}-\frac{136}{25}\frac{91}{69} &= \frac{154\cdot 69-136\cdot 91}{25\cdot 69} = \frac{10\,626-12\,376}{25\cdot 69} = \frac{-1\,750}{25\cdot 69} = -\frac{70}{69}, \\
-\frac{136}{414} &= -\frac{68}{207}.
\end{aligned}
$$

Évidemment, il faut maitenant diviser la dernière ligne par $-\frac{1}{69}$, ce qui donne :

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
\boxed{1} & \mathbf{0} & -\frac{3}{46} & \frac{10}{23} & \frac{1}{46} & 0 \\
\mathbf{0} & \boxed{1} & \frac{439}{138} & -\frac{91}{69} & -\frac{25}{414} & 0 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{69} & -\frac{70}{69} & -\frac{68}{207} & 1
\end{array}
\longmapsto
\begin{array}{ccc|ccc}
\boxed{1} & \mathbf{0} & -\frac{3}{46} & \frac{10}{23} & \frac{1}{46} & 0 \\
\mathbf{0} & \boxed{1} & \frac{439}{138} & -\frac{91}{69} & -\frac{25}{414} & 0 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{1} & 70 & \frac{68}{3} & -69
\end{array}
$$

puis exploiter le nouveau pivot $\boxed{1}$ en position $(3,3)$ afin de créer deux belles auréoles $\mathbf{0}$ *made in France* au-dessus de lui :

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
\boxed{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 5 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \\
\boxed{1} & \mathbf{0} & -\frac{3}{46} & \frac{10}{23} & \frac{1}{46} & 0 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{3}{46} & \frac{3}{46}\,70 & \frac{3}{46}\,\frac{68}{3} & -\frac{3}{46}\,69 \\
\mathbf{0} & \boxed{1} & \mathbf{0} & -224 & -\frac{433}{6} & \frac{439}{2} \\
\mathbf{0} & \boxed{1} & \frac{439}{138} & -\frac{91}{69} & -\frac{25}{414} & 0 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{439}{138} & -\frac{439}{138}\,70 & -\frac{439}{138}\,\frac{68}{3} & -\frac{439}{138}\,69 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{1} & 70 & \frac{68}{3} & -69
\end{array}
\longmapsto
\begin{array}{ccc|ccc}
\boxed{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 5 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \\
\mathbf{0} & \boxed{1} & \mathbf{0} & -224 & -\frac{433}{6} & \frac{439}{2} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{1} & 70 & \frac{68}{3} & -69
\end{array}
$$

tout en nous imposant une dernière fois par devoir d'auto-flagellation de détailler complètement les calculs rationnels impliqués :

$$\begin{aligned}
\frac{10}{23}+\frac{3}{46}\,70 &= \frac{20+210}{46} = \frac{230}{46} = 5,\\
\frac{1}{46}+\frac{68}{46} &= \frac{69}{46} = \frac{3}{2},\\
-\frac{91}{69}-\frac{439}{138}\,70 &= \frac{-91\cdot 2-439\cdot 70}{138} = \frac{-182-30\,730}{138} = \frac{-30\,912}{138} = -224,\\
-\frac{25}{414}-\frac{439}{138}\,\frac{68}{3} &= \frac{-25-439\cdot 68}{414} = \frac{-25-29\,852}{414} = \frac{-29\,877}{414} = -\frac{433}{6}.
\end{aligned}$$

En conclusion, après tant d'efforts psychédéliques, nous avons enfin trouvé la matrice inverse :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \\ -224 & -\frac{433}{6} & \frac{439}{2} \\ 70 & \frac{68}{3} & -69 \end{bmatrix}.$$

13. Examen 7

Exercice 1. (a) On pose :

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -5 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sans calculer, trouver un vecteur non nul $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ qui est solution de $A\,\vec{x} = \vec{0}$.
Indication: Regarder les colonnes 1, 2, et 3.

Exercice 2. (a) Résoudre le système linéaire suivant de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{aligned} 0 &= x - 3\,y + 1, \\ 0 &= 2\,x + 3\,y - 7. \end{aligned}$$

On notera A le point obtenu dans le plan $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$.

(b) On considère la droite D_1 paramétrée par $M_1(t) := \big(-1+3\,t,\ t\big)$ avec $t \in \mathbb{R}$ arbitraire. Construire une équation cartésienne de D_1.

(c) On considère aussi la droite D_2 paramétrée par $M_2(t) := \big(-1+3\,t,\ 3-2\,t\big)$ avec $t \in \mathbb{R}$ arbitraire. Construire de même une équation cartésienne de D_2.

(d) Déterminer l'intersection $D_1 \cap D_2$.

(e) Sur une figure soignée, représenter les droites D_1 et D_2, ainsi que le point A.

(f) Donner deux vecteurs directeurs $\vec{v}_{D_1}$ et $\vec{v}_{D_2}$ des deux droites D_1 et D_2, ainsi que deux points $P_1 \in D_1$ et $P_2 \in D_2$ tels que $P_1 \neq A \neq P_2$.

Exercice 3. (a) Résoudre le système linéaire :

$$\begin{aligned} x + 2\,y + 4\,z &= -2 \\ y + 5\,z &= 2 \\ -2\,x - 4\,y - 3\,z &= 9 \end{aligned}$$

(b) Déterminer toutes les solutions du système linéaire $B\,\vec{y} = \vec{y_0}$, où :

$$B := \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \qquad \vec{y} := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{y_0} := \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

(c) Mettre sous forme échelonnée la matrice :

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Entourer les pivots dans la matrice échelonnée obtenue.

(d) Mettre sous forme échelonnée *réduite* la matrice :

$$D := \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(e) Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} x + \ y + 2\,z &= -\,1, \\ 2\,x - \ y + 2\,z &= -\,4, \\ 4\,x + \ y + 4\,z &= -\,2. \end{aligned}$$

Exercice 4. Dans l'espace $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$, on considère le plan P_1 d'équation cartésienne $5\,x + y - 2\,z = 2$, ainsi que le plan P_2 d'équation cartésienne $2\,x - y + z = -\,7$.

(a) Résoudre le système linéaire qui décrit l'intersection $P_1 \cap P_2$:

$$\begin{aligned} 5\,x + \ y - 2\,z &= \quad 2, \\ 2\,x - \ y + \quad z &= -\,7, \end{aligned}$$

en exprimant y et z en fonction de la variable x (libre), puis, vérifier le résultat obtenu.

(b) Représenter la droite $D := P_1 \cap P_2$ sous forme paramétrique $M(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ avec $t \in \mathbb{R}$ quelconque. Indication: Renommer t au lieu de x la variable libre de la question précédente.

Ensuite, donner un vecteur directeur de D, ainsi que deux points distincts appartenant à D dont les trois coordonnées appartiennent à $\mathbb{Z}$.

(c) On considère une autre droite $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ paramétrée par une autre variable réelle $u \in \mathbb{R}$:

$$\Delta := \big\{\big(-\,1 + u,\ 2 + u,\ -3 - u\big) \colon\ u \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

Montrer que l'intersection $\Delta \cap P_1$ consiste en un point unique que l'on notera A, et dont on déterminera les trois coordonnées. Indication: Attention aux erreurs de calcul ! Avant de passer à la question suivante, *vérifier sur la copie d'examen que les coordonnées obtenues pour A appartiennent bien à au plan P_1 d'équation* $5\,x + y - 2\,z = 2$.

(d) Déterminer l'intersection $\Delta \cap P_2$.

(e) Déterminer les trois coordonnées de l'intersection $D \cap \Delta$ entre les deux droites considérées.

(f) Comparer les résultats obtenus aux deux Questions **(c)** et **(e)**.

(g) Élaborer une figure soignée accompagnée d'explications écrites claires et rigoureuses.

Exercice 5. On considère deux familles $(D_m)_{m \in \mathbb{R}}$ et $(D'_m)_{m \in \mathbb{R}}$ de droites dépendant d'un paramètre réel quelconque $m \in \mathbb{R}$, définies comme suit :

- D_m passe par le point $(2, -1, 1)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u}_m := \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m-1 \end{pmatrix}$;
- D'_m passe par le point $(-1, 1, -1)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u}'_m := \begin{pmatrix} 2-m \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de $m \in \mathbb{R}$ les droites D_m et D'_m sont-elles *parallèles ?*

14. Corrigé de l'examen 7

Exercice 1. **(a)** Visuellement, on remarque que la colonne 3 est la somme des colonnes 1 et 2. On peut donc prendre par exemple $\vec{x} := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. **(a)** Résolvons $x := 3\,y - 1$ de l'équation 1 et remplaçons-le dans l'équation 2, ce qui donne :

$$0 \,=\, 2\,(3\,y - 1) + 3\,y - 7 \qquad\qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad\qquad 0 \,=\, 9\,y - 9,$$

d'où :

$$y \,:=\, 1, \qquad\qquad \text{puis :} \qquad\qquad x \,:=\, 3 \cdot 1 - 1 \,=\, 2.$$

Ainsi :

$$A \,:=\, (2, 1).$$

(b) Rappelons que pour une paramétrisation d'une droite de la forme $M(t) = \big(x_0 + \lambda\,t,\ y_0 + \mu\,t\big)$ avec des constantes $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, une équation cartésienne associée naturelle est de la forme :

$$-\,\mu\,x + \lambda\,y + c \,=\, 0,$$

où la constante c doit être ensuite simplement déterminée par l'équation :

$$-\,\mu\,(x_0 + \lambda\,t) + \lambda\,(y_0 + \mu\,t) + c \,=\, -\,\mu\,x_0 + \lambda\,y_0 + c,$$

dans laquelle la variable t a disparu, c'est-à-dire :

$$c \,:=\, \mu\,x_0 - \lambda\,y_0.$$

Ici, avec $M_1(t) = (-1 + 3\,t,\ t)$, on trouve comme équation cartésienne pour D_1 :

$$-\,x + 3\,y - 1 \,=\, 0.$$

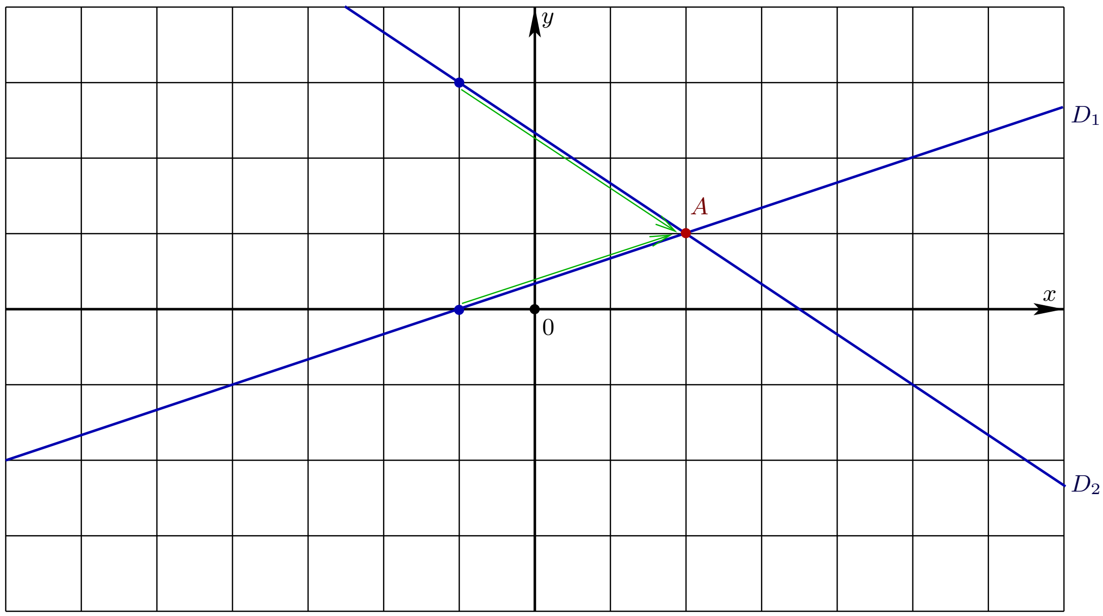
(c) La même recette s'applique, et donne pour équation cartésienne de D_2 :

$$2\,x + 3\,y - 7 \,=\, 0.$$

(d) Nous constatons que les deux équations de D_1 et de D_2 sont, au signe près, égales à celles de la Question **(a)**, donc sans aucun calcul supplémentaire, la réponse est :

$$D_1 \cap D_2 \,=\, \{A\} \,=\, \{(2, 1)\}.$$

(e) Voici la figure demandée :



(f) Par exemple :

$$\vec{v}_{D_1} := \left(\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}\right), \qquad \vec{v}_{D_2} := \left(\begin{smallmatrix}3\\-2\end{smallmatrix}\right), \qquad P_1 := (-1,0), \qquad P_2 := (-1,3).$$

Exercice 3. (a) L'équation 2 permet de résoudre $y := 2 - 5\,z$, ce que nous remplaçons dans les équations 1 et 3 :

$$\begin{aligned} x + 2\,(2-5\,z) + 4\,z &= -2 \\ -2\,x - 4\,(2-5\,z) - 3\,z &= 9 \end{aligned} \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad \begin{aligned} x - 6\,z &= -6, \\ -2\,x + 17\,z &= 17. \end{aligned}$$

Résolvons $x := -6 + 6\,z$, puis remplaçons :

$$-2\,(-6+6\,z) + 17\,z = 17 \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad 5\,z = 5,$$

d'où :

$$z := 1, \qquad y := 2 - 5\cdot 1 = -3, \qquad x := -6 + 6\cdot 1 = 0.$$

Ainsi, le système a une unique solution :

$$\mathsf{Sol} := \big\{(0,\,-3,\,1)\big\}.$$

(b) Commençons par écrire la matrice complète du système linéaire associé :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{array}\right] \end{array},$$

puis, appliquons-lui la méthode du pivot :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 5 & -4 & 7 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & -18 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 5 & -4 & 7 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

La dernière ligne du système linéaire, intégralement constituée de zéros, s'estompe, et il ne reste que deux équations :

$$\begin{aligned} 3\,y_1 + 5\,y_2 - 4\,y_3 &= 7, \\ 3\,y_2 \qquad\quad &= 6, \end{aligned}$$

qui se résolvent en :

$y_2 := 2,$ puis : $3\,y_1 + 5\cdot 2 - 4\,y_3 = 7,$

c'est-à-dire : $y_1 := \frac{7-10}{3} + \frac{4}{3}\,y_3.$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\mathsf{Sol} := \Big\{\big(-1 + \tfrac{4}{3}\,y_3,\; 2,\; y_3\big) :\; y_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\Big\}.$$

(c) Évidemment, le terme à la place $(1,1)$ sert de pivot :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ensuite, la deuxième colonne étant constituée seulement de zéros, elle ne peut contenir aucun pivot. Il faut donc passer à la colonne d'après, où l'on trouve à la deuxième ligne $-13 \neq 0$, qui peut servir de pivot.

On multiplie alors cette deuxième ligne par $\frac{1}{13}$ et on ajoute le résultat à la troisième ligne, afin de faire disparaître le 1 en-dessous du -13, ce qui fournit la forme échelonnée (non réduite) de la matrice de départ :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{-13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Commençons par multiplier la première ligne par -1, utilisons le pivot à la place $(1,1)$, et divisons la deuxième ligne obtenue par -4 :

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ensuite, utilisons le pivot à la place $(2,2)$, puis divisons la troisième ligne par 3 :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}.$$

Pour terminer, remontons avec la méthode du pivot en partant du dernier terme en bas à droite :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}.$$

La matrice échelonnée réduite recherchée est dont la matrice identité $I_{4\times 4}$, comme c'est le cas pour toute matrice inversible $D \in \mathscr{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

(e) Soumettons la matrice complète de ce système à l'algorithme du pivot, jusqu'à obtenir une forme échelonnée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{-3} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 4 \end{array}\right].$$

Puisque la forme obtenue est du type :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * \end{array}\right],$$

nous savons que ce système a nécessairement une solution unique.

Pour déterminer cette solution, poursuivons les calculs jusqu'à obtenir une forme échelonnée *réduite :*

$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$
$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \end{array}.$$

En définitive, la solution unique se lit de manière instantanée comme étant :

$$x := 1, \qquad y := 2, \qquad z := -2.$$

Exercice 4. (a) En additionnant ces deux équations, la variable y disparaît :

$$7x + 0y - z = -5,$$

ce qui nous permet d'exprimer z en fonction de x :

$$z := 7x + 5,$$

que nous remplaçons alors dans la première équation :

$$\begin{aligned} y &= -5x + 2z + 2 \\ &= -5x + 14x + 10 + 2 \\ &= 9x + 12. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathsf{Sol} = \big\{ \big(x,\ 9x+12,\ 7x+5\big) :\ x \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \big\}.$$

Enfin, vérifions que ces solutions infinies paramétrées par la variable libre $x \in \mathbb{R}$ satisfont bien les deux équations initiales du système :

$$\begin{aligned} 5x + 9x + 12 - 14x - 10 &= 2 && \text{OUI !}, \\ 2x - 9x - 12 + 7x + 5 &= -7 && \text{OUI !}. \end{aligned}$$

(b) Nous venons de voir que :

$$D = P_1 \cap P_2 = \big\{ \big(t,\ 9t+12,\ 7t+5\big) :\ t \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \big\}.$$

Il est alors clair que les trois coordonnées d'un vecteur directeur de D sont les trois coefficients de t :

$$\vec{v}_D := \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

En prenant $t := 0$ puis $t := 1$, nous trouvons deux points à coordonnées entières qui appartiennent à D :

$$\big(0,\ 12,\ 5\big) \qquad \text{et} \qquad \big(1,\ 21,\ 12\big).$$

(c) D'après un raisonnement logique élémentaire vu en cours, un point général $A = A_u = \big(-1+u,\ 2+u,\ -3-u\big)$ de la droite Δ appartient éventuellement aussi au plan P_1 si et seulement si :

$$\begin{aligned} & 5(-1+u) + (2+u) - 2(-3-u) \overset{?}{=} 2 \\ \Longleftrightarrow\quad & -5 + 5u + 2 + u + 6 + 2u \overset{?}{=} 2 \\ \Longleftrightarrow\quad & 8u + 3 \overset{?}{=} 2 \\ \Longleftrightarrow\quad & 8u \overset{?}{=} -1, \end{aligned}$$

et comme il y a la solution unique :

$$u := -\tfrac{1}{8},$$

ceci montre que l'intersection $\Delta \cap P_1$ consiste en un point unique, noté A.

Ainsi, les trois coordonnées de A s'obtiennent en faisant $u := -\frac{1}{8}$ dans la représentation paramétrique de Δ, ce qui donne :

$$\begin{aligned} A &= \big(-1 - \tfrac{1}{8},\ 2 - \tfrac{1}{8},\ -3 + \tfrac{1}{8}\big) \\ &= \big(-\tfrac{9}{8},\ \tfrac{15}{8},\ -\tfrac{23}{8}\big). \end{aligned}$$

Enfin, comme demandé par le sujet d'examen, vérifions que A appartient bien au plan P_1 :

$$\begin{aligned} & 5\big(-\tfrac{9}{8}\big) + \tfrac{15}{8} - 2\big(-\tfrac{23}{8}\big) \overset{?}{=} 2 \\ \Longleftrightarrow\quad & -\tfrac{45}{8} + \tfrac{15}{8} + \tfrac{46}{8} \overset{?}{=} 2 && \text{OUI !}. \end{aligned}$$

(d) De même, un point général $B = B_u = \big(-1+u,\, 2+u,\, -3-u\big)$ de la droite Δ appartient éventuellement aussi au plan P_2 d'équation $2\,x - y + z = -7$ si et seulement si :

$$
\begin{aligned}
& & 2\,(-1+u) - (2+u) + (-3-u) &\overset{?}{=} -7 \\
\Longleftrightarrow & & -7 + \mathbf{0}\cdot u &\overset{?}{=} -7.
\end{aligned}
$$

On observe que la variable u disparaît complètement ! Et que la belle équation-espionnne $-7 = -7$ de James Bond est trivialement satisfaite !

Ainsi, *tous* les points $B = B_u \in \Delta$ appartiennent à P_2. Autrement dit, la droite Δ *complète* est contenue dans $P_2 \supset \Delta$, d'où :

$$\Delta \cap P_2 = \Delta.$$

(e) Comme D et Δ sont données sous forme paramétrique, il s'agit de résoudre le système suivant de trois équations aux deux inconnues t et u qui paramètrent les points arbitraires $A_t \in D$ et $B_u \in \Delta$:

$$
\begin{aligned}
t &= -1+u, \\
9\,t+12 &= 2+u, \\
7\,t+5 &= -3-u.
\end{aligned}
$$

La première équation permet de résoudre $u := 1+t$, que l'on remplace dans toutes les équations qui suivent, ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
9\,t+12 &= 3+t, \\
7\,t+5 &= -4-t,
\end{aligned}
\qquad \Longleftrightarrow \qquad
\begin{aligned}
9 &= -8\,t, \\
9 &= -8\,t.
\end{aligned}
$$

Chouette ! Ces deux équations identiques ont une unique solution commune :

$$t = -\tfrac{9}{8}.$$

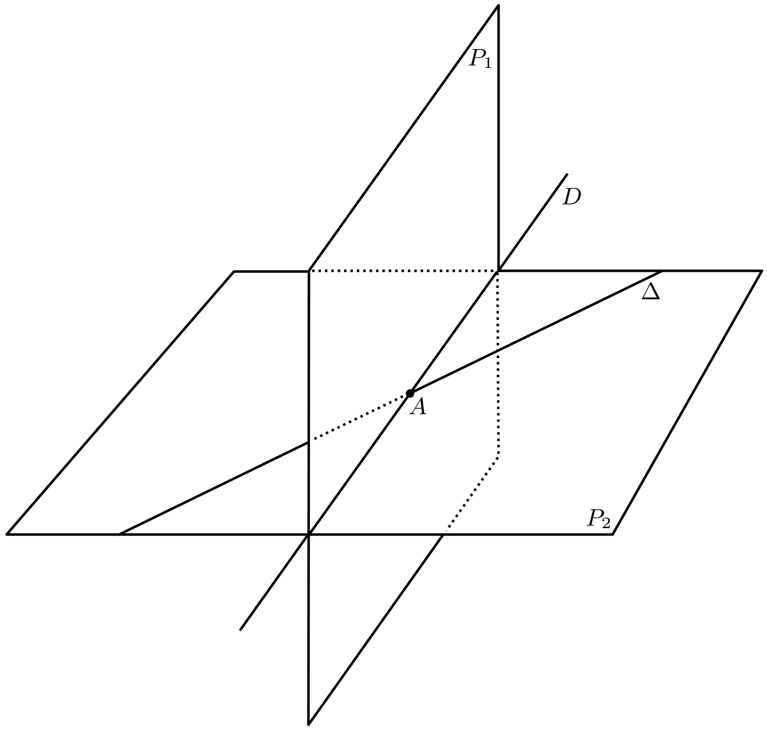
Ceci démontre que l'intersection $D \cap \Delta$ consiste en un point unique, dont les trois coordonnées sont :

$$
\begin{aligned}
\Big(-\tfrac{9}{8},\ 9\,(-\tfrac{9}{8})+12,\ 7\,(-\tfrac{9}{8})+5\Big) &= \big(-\tfrac{9}{8},\ \tfrac{-81+96}{8},\ \tfrac{-63+40}{8}\big) \\
&= \big(-\tfrac{9}{8},\ \tfrac{15}{8},\ -\tfrac{23}{8}\big) \\
&= A.
\end{aligned}
$$

(f) Tiens ! On retrouve le point A ! Étonnant ! Ainsi, nous constatons l'égalité :

$$\Delta \cap P_1 = \{A\} = D \cap \Delta.$$

(g) La situation de départ est celle de deux plans P_1 et P_2 non parallèles qui s'intersectent en une droite $D = P_1 \cap P_2$.



Rien de plus classique ! Ensuite, une autre droite Δ est introduite, qui intersecte le plan P_1 en un point unique, $A = \Delta \cap P_1$.

Mais on constate que cette droite Δ est en fait entièrement contenue dans le plan $P_2 \supset \Delta$. Comme D est aussi naturellement contenue dans P_2, les deux droites D et Δ sont *coplanaires* dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

La disposition relative possible de D et de Δ est alors la même que celle de deux droites dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Question. *Mais alors, pourquoi ces deux droites sont-elles sécantes* $D \cap \Delta = \{A\}$ *précisément en le point trouvé à la Question* **(c)** **?**

Tout simplement parce que, comme $\Delta \subset P_2$, on a :

$$\begin{aligned} \{A\} \,=\, P_1 \cap \Delta \,\subset\, & P_1 \cap P_2 \cap \Delta \\ =\, & D \cap \Delta. \end{aligned}$$

Donc l'intersection $D \cap \Delta$ est non vide, car elle contient le singleton $\{A\}$.

Enfin, cette intersection $D \cap \Delta$ se réduit nécessairement au singleton $\{A\}$, car D et Δ ne peuvent pas être confondues, puisque leurs vecteurs directeurs respectifs :

$$\vec{v}_D \,=\, \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_\Delta \,=\, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas multiples l'un de l'autre (ne sont pas colinéaires). Ceci termine les explications !

Exercice 5. **(a)** Les deux points dont sont issues D_m et D'_m « comptent pour du beurre » (petit "piège" au passage), car il suffit de demander que les deux vecteurs directeurs $\vec{u}_m$ et $\vec{u}'_m$ soient *colinéaires*, autrement dit, qu'il existe un nombre réel non nul $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que

$\vec{u}_m = \lambda\,\vec{u}'_m$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda\,(2-m), \\ m &= \lambda\,(-3), \\ m-1 &= \lambda\,(-2). \end{aligned}$$

La ligne 2 garantit que $m \neq 0$ puisque $\lambda \neq 0$. Additionner les lignes 1 et 3 donne :

$$m = -\,\lambda\,m,$$

et comme $m \neq 0$, on peut diviser par m pour trouver $1 = -\lambda$, d'où en revenant à la ligne 2 la résolution $m = (-1)\,(-3) = 3$.

Ainsi, seule la valeur $m = 3$ peut convenir, et on vérifie, pour $m = 3$, qu'on a bien la colinéarité :

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -\,\vec{u}'_3.$$

15. Examen 8

Exercice 1. **(a)** Résoudre le système linéaire :

$$\begin{aligned} x + 4\,y + 4\,z &= -\,4 \\ 2\,y + 5\,z &= \,4 \\ -\,2\,x - 8\,y - 3\,z &= \,18 \end{aligned}$$

puis, vérifier que la solution obtenue est bien solution du système initial.

(b) Mettre sous forme échelonnée la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 17 \end{bmatrix},$$

et entourer les pivots dans la matrice échelonnée obtenue.

Exercice 2. Dans l'espace vectoriel $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$, soient les 4 vecteurs :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &:= \big(1,\ -1,\ 0,\ 2\big), \\ \vec{v}_2 &:= \big(1,\ 0,\ 1,\ 2\big), \\ \vec{v}_3 &:= \big(1,\ 3,\ 5,\ 7\big), \\ \vec{v}_4 &:= \big(0,\ 2,\ 3,\ a\big), \end{aligned}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Échelonner la matrice à 4 lignes et à 5 colonnes :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & 2 & u_1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & u_2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & u_3 \\ 0 & 2 & 3 & a & u_4 \end{array}$$

où u_1, u_2, u_3, u_4 sont 4 variables réelles. Indication: On demande une forme échelonnée tout court, pas réduite. Ne pas faire d'erreur pour les éléments de la cinquième colonne, qui doivent être des combinaisons linéaires de u_1, u_2, u_3, u_4. Bien vérifier ses calculs avant de poursuivre.

(b) Montrer que les 3 vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ sont linéairement indépendants.

(c) Lorsque $a = 5$, exprimer explicitement $\vec{v}_4$ linéairement en fonction de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$. Indication: On pourra utiliser ce qui précède.

(d) Lorsque $a \neq 5$, montrer que :

$$\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4} = \mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3,\ \vec{v}_4\big).$$

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $2 \leqslant n < \infty$, et soit $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ une *base* de E. On suppose que B est *partitionnée* (décomposée) en 2 sous-ensembles non vides $B' \subset B$ et $B'' \subset B$ avec :

$$B = B' \cup B'', \qquad\qquad \emptyset = B' \cap B'',$$

de cardinaux (nombre d'éléments) :

$$\mathsf{Card}\, B' =: p \geqslant 1 \qquad\qquad \mathsf{Card}\, B'' =: q \geqslant 1,$$

$$n = p + q.$$

On pose :

$$E' := \mathsf{Vect}\, B' \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad E'' := \mathsf{Vect}\, B''.$$

(a) Montrer que :

$$E' + E'' = E.$$

Indication: Après renumérotation éventuelle, on pourra supposer que $B' = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p\}$ et que $B'' = \{\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_{p+q}\}$.

(b) Montrer que :

$$E' \cap E'' = \{\vec{0}\}.$$

(c) En déduire que E' et E'' sont *supplémentaires* dans E, à savoir que :

$$E' \oplus E'' = E.$$

Exercice 4. Soit $u\colon \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4} \longrightarrow \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$ l'application linéaire définie, pour tout vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, par :

$$u(\vec{x}) := \big(x_1 - x_2 + x_3,\ 0,\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4,\ x_4\big).$$

On pose :

$$E := \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4} \colon\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\big\}.$$

Dans les raisonnements, on pourra utiliser la base canonique $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$.

(a) Déterminer une base de $\mathsf{Ker}\, u$. Que vaut $\dim \mathsf{Ker}\, u$? Que vaut $\dim \mathsf{Im}\, u$?

(b) Déterminer une base de $\mathsf{Im}\, u$, exprimée en fonction de $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$. Indication: Il y a une base très simple !

(c) A-t-on la somme directe :

$$\mathsf{Ker}\, u \oplus \mathsf{Im}\, u = \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}\ \textbf{?}$$

(d) Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$.

(e) Déterminer une base de E. Que vaut $\dim E$?

(f) A-t-on la somme directe :

$$\mathsf{Ker}\, u \oplus E = \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}\ \textbf{?}$$

16. Corrigé de l'examen 8

Exercice 1. (a) L'équation 2 permet de résoudre $y := 2 - \frac{5}{2}\,z$, ce que nous remplaçons dans les équations 1 et 3 :

$$\begin{aligned} x + 4\left(2 - \tfrac{5}{2}\,z\right) + 4\,z &= -4 \\ -2\,x - 8\left(2 - \tfrac{5}{2}\,z\right) - 3\,z &= 18 \end{aligned} \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad \begin{aligned} x - 6\,z &= -12, \\ -2\,x + 17\,z &= 34. \end{aligned}$$

Résolvons $x := -12 + 6\,z$, puis remplaçons :

$$-2\,(-12 + 6\,z) + 17\,z = 34 \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad 5\,z = 10,$$

d'où :

$$z := 2, \qquad y := 2 - \tfrac{5}{2} \cdot 2 = -3, \qquad x := -12 + 6 \cdot 2 = 0.$$

Ainsi, le système a une unique solution :

$$\mathsf{Sol} := \big\{(0,\, -3,\, 2)\big\}.$$

Enfin, vérifions que la solution trouvée est bien solution du système linéaire de départ :

$$\begin{aligned} 0 + 4(-3) + \quad 4(2) &\overset{?}{=} -4 && \text{OUI,} \\ 2(-3) + \quad 5(2) &\overset{?}{=} \quad 4 && \text{OUI,} \\ -2(0) - 8(-3) + -3(2) &\overset{?}{=} \quad 18 && \text{OUI.} \end{aligned}$$

(b) Évidemment, le terme à la place $(1, 1)$ sert de pivot :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 17 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ensuite, la deuxième colonne étant constituée seulement de zéros, elle ne peut contenir aucun pivot. Il faut donc passer à la colonne d'après, où l'on trouve à la deuxième ligne $-13 \neq 0$, qui peut servir de pivot.

On multiplie alors cette deuxième ligne par $\frac{9}{13}$ et on ajoute le résultat à la troisième ligne, afin de faire disparaître le 9 en-dessous du -13, ce qui fournit une forme échelonnée (non réduite) de la matrice de départ :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{-13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2. **(a)** On trouve :

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & -1 & 0 & 2 & u_1 \\
1 & 0 & 1 & 2 & u_2 \\
1 & 3 & 5 & 7 & u_3 \\
0 & 2 & 3 & a & u_4
\end{array}
\quad\rightsquigarrow\quad
\begin{array}{ccccc}
1 & -1 & 0 & 2 & u_1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & u_2-u_1 \\
0 & 4 & 5 & 5 & u_3-u_1 \\
0 & 2 & 3 & a & u_4
\end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow\quad
\begin{array}{ccccc}
1 & -1 & 0 & 2 & u_1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & u_2-u_1 \\
0 & 0 & 1 & 5 & u_3-4u_2+3u_1 \\
0 & 0 & 1 & a & u_4-2u_2+2u_1
\end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow\quad
\begin{array}{ccccc}
1 & -1 & 0 & 2 & u_1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & u_2-u_1 \\
0 & 0 & 1 & 5 & u_3-4u_2+3u_1 \\
0 & 0 & 0 & a-5 & u_4-u_3+2u_2-u_1
\end{array}
$$

(b) Évidemment, il y a une correspondance directe entre les vecteurs $\vec{v}_i$ et les variables u_i, de telle sorte que :

$$
\begin{aligned}
\big(1,\ -1,\ 0,\ 2\big) &= \vec{v}_1, \\
\big(0,\ 1,\ 1,\ 0\big) &= \vec{v}_2-\vec{v}_1, \\
\big(0,\ 0,\ 1,\ 5\big) &= \vec{v}_3-4\vec{v}_2+3\vec{v}_1.
\end{aligned}
$$

Les 3 opérations vues en cours qui sont autorisées dans la méthode du pivot pour des *équations linéaires disposées ligne à ligne* sont réversibles. De même, lorsqu'on dispose les coordonnées des vecteurs selon des lignes (et non pas selon des colonnes), les trois opérations en question sont réversibles, ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\big) &= \mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2-\vec{v}_1,\ \vec{v}_3-4\vec{v}_2+3\vec{v}_1\big) \\
&=: \mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1',\ \vec{v}_2',\ \vec{v}_3'\big).
\end{aligned}
$$

Maintenant, les trois vecteurs $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$, $\vec{v}_3'$ sont manifestement linéairement indépendants, puisque la matrice de leurs coordonnées dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$:

$$
\begin{array}{cccc}
\boxed{1} & -1 & 0 & 2 \\
0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\
0 & 0 & \boxed{1} & 5
\end{array}
$$

comporte 3 pivots, autant qu'il y a de vecteurs.

Un moyen direct (et pédagogiquede) de se convaincre de leur indépendance linéaire est de tester s'il existe des scalaires λ_1, λ_2, λ_3 *non tous nuls* tels que :

$$
\begin{aligned}
\big(0,\ 0,\ 0,\ 0\big) &= \lambda_1\,\vec{v}_1'+\lambda_2\,\vec{v}_2'+\lambda_3\,\vec{v}_3' \\
&= \lambda_1\big(1,\ -1,\ 0,\ 2\big)+\lambda_2\big(0,\ 1,\ 1,\ 0\big)+\lambda_3\big(0,\ 0,\ 1,\ 5\big) \\
&= \Big(\lambda_1,\ \ -\lambda_1+\lambda_2,\ \ \lambda_2+\lambda_3,\ \ *\Big),
\end{aligned}
$$

la valeur de $*$ n'important guère, d'où $0=\lambda_1$, puis $0=\lambda_2$, et enfin $0=\lambda_3$, ce qui montre bien l'indépendance linéaire affirmée.

Donc :

$$
\begin{aligned}
3 &= \dim \mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1',\ \vec{v}_2',\ \vec{v}_3'\big) \\
&= \dim \mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\big),
\end{aligned}
$$

ce qui, d'après un théorème du cours, que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ sont bien linéairement indépendants.

(c) Effectivement, il suffit de constater que, pour la valeur spéciale $a = 5$ (années pour valider la LDD1 ?), la dernière ligne de la matrice calculé à la Question **(a)** est identiquement nulle (on vous l'avait dit, il lui faudra au moins 5 ans d'études à cette ligne nulle) :

$$\begin{array}{cccc c}
1 & -1 & 0 & 2 & u_1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & u_2 - u_1 \\
0 & 0 & 1 & 5 & u_3 - 4u_2 + 2u_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & u_4 - u_3 + 2u_2 - u_1
\end{array}$$

et de lire l'élément en colonne 5 de la ligne 4 pour constater que :

$$\vec{0} \,=\, \vec{v}_4 - \vec{v}_3 + 2\,\vec{v}_2 - \vec{v}_1,$$

ce que l'on peut vérifier en privé sur du papier de brouillon.

(d) Lorsque $a \neq 5$, l'élément situé en ligne 4 colonne 4 :

$$\begin{array}{cccc c}
\boxed{1} & -1 & 0 & 2 & u_1 \\
0 & \boxed{1} & 1 & 0 & u_2 - u_1 \\
0 & 0 & \boxed{1} & 5 & u_3 - 4u_2 + 2u_1 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{a-5} & u_4 - u_3 + 2u_2 - u_1
\end{array}$$

est aussi un pivot. Si l'on pose :

$$\big(0,\ 0,\ 0,\ a-5\big) \;=:\; \vec{v}_4' \,=\, \vec{v}_4 - \vec{v}_3 + 2\,\vec{v}_2 - \vec{v}_1,$$

l'argument utilisé à la Question **(b)** montre de manière similaire que :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4} &\overset{\text{pivots}}{=} \mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3', \vec{v}_4',\big) \\
&= \mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\big).
\end{aligned}$$

Exercice 3. **(a)** Clairement :

$$\begin{aligned}
E' + E'' &= \mathsf{Vect}\, B' + \mathsf{Vect}\, B'' \\
&= \Big\{\lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_p\vec{e}_p \in E\colon\ \lambda_1, \dots, \lambda_p \,\in \mathbb{R} \text{ quelconques}\Big\} \\
&\quad + \Big\{\mu_1\vec{e}_{p+1} + \cdots + \mu_p\vec{e}_{p+q} \in E\colon\ \mu_1, \dots, \mu_q \in \mathbb{R} \text{ quelconques}\Big\} \\
&= \Big\{\lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_p\vec{e}_p + \mu_1\vec{e}_{p+1} + \cdots + \mu_p\vec{e}_{p+q} \in E\colon\ \lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q \in \mathbb{R}\ \Big\} \\
&= \Big\{\nu_1\vec{e}_1 + \cdots + \nu_n\vec{e}_n \in E\colon\ \nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{R}\Big\} \\
&= E.
\end{aligned}$$

(b) Si nous prenons un vecteur de E' qui appartient aussi à E'', il est de la forme :

$$\underbrace{\lambda_1^o\,\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_p^o\,\vec{e}_p}_{\in E'} \,=\, \underbrace{\mu_1^o\,\vec{e}_{p+1} + \cdots + \mu_{p+q}^o\,\vec{e}_{p+q}}_{\in E''},$$

pour certaines constantes spécifiques $\lambda_i^o, \mu_j^o \in \mathbb{R}$.

Là-dessus, le Capitaine (Fracasse) du Navire nous ordonne « *À droite, toute !* » :

$$\vec{0} \,=\, \big(-\lambda_1^o\big)\,\vec{e}_1 + \cdots + \big(-\lambda_p^o\big)\,\vec{e}_p + \mu_1^o\,\vec{e}_{p+1} + \cdots + \mu_{p+q}^o\,\vec{e}_n,$$

ce qui est une relation de dépendance linéaire entre les n vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$.

Mais comme par hypothèse $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ est une *base* de E, et donc en particulier, une famille *libre* de n vecteurs de E, il devrait naturellement être absolument incontournable que tous ces coefficients spécifiques s'annulassent :

$$0 = -\lambda_1^o = \cdots = -\lambda_p^o = \mu_1^o = \cdots = \mu_{p+q}^o,$$

et donc au final, les deux vecteurs dont nous somme partis il y a quelques secondes sont en fait tous les deux égaux à :

$$\vec{0} = \vec{0}.$$

Comme nous avions pris n'importe quel vecteur de E' appartenant simultanément à E'', nous concluons bien que :

$$\{\vec{0}\} = E' \cap E''.$$

(c) D'après la définition vue en cours d'une paire de sous-espaces vectoriels $E' \subset E$ et $E'' \subset E$ qui soient en *somme directe* dans $E = E' \oplus E''$:

$$E' \cap E'' = \{\vec{0}\} \qquad \text{et} \qquad E' + E'' = E,$$

nous venons exactement de démontrer dans les Question **(a)** et **(b)** que tel est bien le cas de $E' = \mathsf{Vect}\, B'$ et $E'' = \mathsf{Vect}\, B''$, ce qui démontre que pour toute base d'un espace vectoriel, et pour tout partition non triviale de cette base, on peut gratuitement produire *plein de décompositions de E et sous-espaces vectoriels supplémenaires*.

Exercice 4. **(a)** On a $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathsf{Ker}\, u$ si et seulement si les 4 coordonnées de $u(\vec{x})$ s'annulent, d'où le système linéaire :

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} 2\,x_1 &= 0 \\ \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

donc :

$$\vec{x} = (0, x_3, x_3, 0) = x_3\,(0,1,1,0).$$

Dans la base canonique $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$, en introduisant alors le vecteur :

$$\vec{a} := \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

nous trouvons :

$$\mathsf{Ker}\, u = \mathsf{Vect}\,(\vec{a}),$$

et donc :

$$\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\, u = 1.$$

Enfin, un théorème vu en cours donne :

$$\mathsf{dim}\,\mathsf{Im}\, u = \mathsf{dim}\,\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4} - \mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\, u = 4 - 1 = 3.$$

(b) L'image de u est engendrée — linéairement ! — par les 4 vecteurs :

$$\begin{aligned} u(\vec{e}_1) &= (1,0,1,0) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \\ u(\vec{e}_2) &= (-1,0,1,0) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \\ u(\vec{e}_3) &= (1,0,-1,0) = \vec{e}_1 - \vec{e}_3, \\ u(\vec{e}_4) &= (0,0,1,1) = \vec{e}_3 + \vec{e}_4. \end{aligned}$$

Or, puisqu'il est visible que $u\big(\vec{e}_2\big) = -\,u\big(\vec{e}_3\big)$, il vient grâce aux 3 opérations élémentaires vues en cours :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Vect}\Big(u\big(\vec{e}_1\big),\, u\big(\vec{e}_2\big),\, u\big(\vec{e}_3\big),\, u\big(\vec{e}_4\big)\Big) &= \mathsf{Vect}\Big(u\big(\vec{e}_1\big),\, u\big(\vec{e}_3\big),\, u\big(\vec{e}_4\big)\Big) \\
&= \mathsf{Vect}\Big(\vec{e}_1+\vec{e}_3,\ \vec{e}_1-\vec{e}_3,\ \vec{e}_3+\vec{e}_4\Big) \\
&= \mathsf{Vect}\Big(\vec{e}_1+\vec{e}_3,\ 2\,\vec{e}_1,\ \vec{e}_3+\vec{e}_4\Big) \\
&= \mathsf{Vect}\Big(\vec{e}_1+\vec{e}_3,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_3+\vec{e}_4\Big) \\
&= \mathsf{Vect}\Big(\vec{e}_3,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_3+\vec{e}_4\Big) \\
&= \mathsf{Vect}\Big(\vec{e}_1,\ \vec{e}_3,\ \vec{e}_4\Big).
\end{aligned}$$

(c) Dans un espace vectoriel E de dimension $2 \leqslant n < \infty$, soient deux sous-espaces vectoriels $F \subset E$ et $G \subset E$ de dimensions respectives $1 \leqslant p \leqslant n-1$ et $1 \leqslant q \leqslant n-1$ qui sont *complémentaires* au sens où :

$$p + q \,=\, n.$$

Alors d'après le cours, $F \oplus G = E$ sont en *somme directe* dans E si et seulement si :

$$F \cap G \,=\, \big\{\vec{0}\big\},$$

puisque cette intersection nulle *force* $E + F \,=\, G$. Et en fait, dans le cas de dimensions *complémentaires*, on a les deux équivalences :

$$\begin{aligned}
F \oplus G \,=\, E \qquad &\Longleftrightarrow \qquad F \cap G \,=\, \big\{\vec{0}\big\} \\
&\Longleftrightarrow \qquad F + G \,=\, E.
\end{aligned}$$

Qui plus est, lorsque E est de dimension $p = 1$, d'où $q = n-1$, on a $F \cap G = \big\{\vec{0}\big\}$ si et seulement si $F \not\subset G$ n'est *pas* contenu dans G.

Or ici précisément, d'après un théorème du cours :

$$1 + 3 \,=\, \mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\,u + \mathsf{dim}\,\mathsf{Im}\,u \overset{\mathsf{Thm}}{=} \mathsf{dim}\,\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4} \,=\, 4.$$

Donc pour déterminer si l'on a :

$$\mathsf{Ker}\,u \oplus \mathsf{Im}\,u \overset{?}{=} \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4},$$

il suffirait de savoir si $\mathsf{Ker}\,u \not\subset \mathsf{Im}\,u$, c'est-à-dire si $\vec{a} \notin \mathsf{Im}\,u$.

De manière encore équivalente, il suffit de déterminer si :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4} &\overset{?}{=} \mathsf{Ker}\,u + \mathsf{Im}\,u \\
&= \mathsf{Vect}\,\big(\vec{a}\big) + \mathsf{Vect}\,\big(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big) \\
&= \mathsf{Vect}\,\big(\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ \vec{e}_1,\, \vec{e}_3,\, \vec{e}_4\big) \\
&= \mathsf{Vect}\,\big(\vec{e}_2,\, \vec{e}_1,\, \vec{e}_3,\, \vec{e}_4\big) \qquad\qquad \text{OUI}.
\end{aligned}$$

(d) Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tous vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in E$, c'est-à-dire dont les coordonnées satisfont :

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \,=\, 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \,=\, 0,$$

il est clair que $\lambda\,\vec{x}+\mu\,\vec{y}\in E$ aussi, puisque l'on a bien :

$$\begin{aligned}&\lambda\,x_1+\mu\,y_1+\lambda\,x_2+\mu\,y_2-\lambda\,x_3-\mu\,y_3+\lambda\,x_3+\mu\,y_3\\=\;&\lambda\,\big(x_1+x_2-x_3+x_4\big)+\mu\,\big(y_1+y_2-y_3+y_4\big)\\=\;&0+0.\end{aligned}$$

(e) Pour tout $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E$, c'est-à-dire avec $x_1+x_2-x_3+x_4=0$, on résout :

$$x_1\;:=\;-\,x_2+x_3-x_4,$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\vec{x}\;&=\;\big(-\;x_2+x_3-x_4,\;\;x_2,\;\;x_3,\;\;x_4\big)\\&=\;x_2\;\underbrace{(-1,1,0,0)}_{=:\,\vec{b}}+x_3\;\underbrace{(1,0,1,0)}_{=:\,\vec{c}}+x_4\;\underbrace{(-1,0,0,1)}_{=:\,\vec{d}},\end{aligned}$$

d'où en introduisant les 3 vecteurs soulignés :

$$\vec{x}\;=\;x_2\,\vec{b}+x_3\,\vec{c}+x_4\,\vec{d},$$

ce qui montre que $\big\{\vec{b},\vec{c},\vec{d}\big\}$ *engendre* E.

Mais sont-ils linéairement indépendants ? Oui, car on voit immédiatement que le système linéaire correspondant :

$$\begin{aligned}\vec{0}\;=\;\beta\,\vec{b}+\gamma\,\vec{c}+\delta\,\vec{d}\qquad&\Longleftrightarrow\qquad(0,0,0,0)\;=\;\big(-\beta,\beta,0,0\big)+\big(\gamma,0,\gamma,0\big)+\big(-\delta,0,0,\delta\big)\\&\Longleftrightarrow\qquad\begin{cases}0\;=\;-\beta+\gamma-\delta,\\0\;=\;\beta,\\0\;=\;\gamma,\\0\;=\;\delta,\end{cases}\end{aligned}$$

n'a que la solution nulle-triviale !

En définitive, $\big\{\vec{b},\vec{c},\vec{d}\big\}$ constitue une *base* du sous-espace vectoriel $E\subset\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$.

(f) Rappelons que $\mathsf{Ker}\,u=\mathsf{Vect}\,\big(\vec{a}\big)$, avec $\vec{a}=\vec{e}_2+\vec{e}_3=(0,1,1,0)$. Mais comme les 4 coordonnées de $\vec{a}$ satisfont l'équation définissante de E :

$$0+1-1+0\;=\;0,$$

nous constatons que :

$$\vec{a}\;\in\;E,\qquad\qquad\text{d'où}\qquad\qquad\mathsf{Ker}\,u\;\subset\;E,$$

ce qui rend *impossible*, d'après les résultats du cours revus à la Question **(c)**, le fait que $\mathsf{Ker}\,u$, de dimension 1, soit en somme directe avec E, de dimension $3=4-1$, dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$, de dimension 4.

17. Examen 9

Exercice 1. Soit la matrice :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix},$$

où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre quelconque.

(a) En appliquant l'algorithme du pivot à la matrice augmentée $\big(A \big| I_3\big)$, montrer que A est inversible si et seulement si $m \neq 0$.

(b) Calculer $\det A$. Que cela confirme-t-il ?

(c) Lorsque $m \neq 0$, déterminer explicitement la matrice inverse A^{-1}.

(d) Vérifier par un calcul que la matrice trouvée est bien l'inverse de A. Indication: D'après le cours, il suffit de vérifier que $A\, A^{-1} = I_3$.

Exercice 2. Soit le déterminant :

$$\Delta := \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sont quatre constantes réelles.

(a) Montrer que si :

$$\big(\, a = 0 \,\big) \qquad \text{ou} \qquad \big(\, b = a \,\big) \qquad \text{ou} \qquad \big(\, c = b \,\big) \qquad \text{ou} \qquad \big(\, d = c \,\big),$$

alors $\Delta = 0$.

(b) Montrer que :

$$\Delta = a\,\big(b-a\big)\,\big(c-b\big)\,\big(d-c\big).$$

(c) Sans démonstration, et en n'écrivant qu'une ou deux lignes sur la copie d'examen, deviner la valeur du déterminant :

$$\square := \begin{vmatrix} a & a & a & a & a \\ a & b & b & b & b \\ a & b & c & c & c \\ a & b & c & d & d \\ a & b & c & d & e \end{vmatrix}.$$

Proposer également, sans démonstration, un énoncé généralisant ce résultat au déterminant d'une matrice de $\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ de structure analogue.

Exercice 3. Dans $\mathscr{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$, on appelle *matrice circulante* d'ordre 3 une matrice de la forme générale :

$$M := \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ sont des nombres complexes arbitraires. On désigne par 1, j, j^2 les trois racines cubiques de l'unité, où :

$$j := e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{d'où :} \qquad j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2},$$

et évidemment $j^3 = e^{\frac{6i\pi}{3}} = 1$ d'où $j^4 = j$. On introduit la matrice :

$$U := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j^4 \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$f(z) := \alpha + \beta\, z + \gamma\, z^2.$$

(a) Montrer que le produit matriciel $M\,U$ vaut :

$$M\,U = \begin{pmatrix} f(1) & f(j) & f(j^2) \\ f(1) & j\,f(j) & j^2 f(j^2) \\ f(1) & j^2 f(j) & j\,f(j^2) \end{pmatrix}.$$

(b) Montrer que :

$$\det M\,U = f(1)\,f(j)\,f(j^2)\,\big[3\,j^2 - 3\,j\big].$$

(c) En déduire que :

$$\det M = f(1)\,f(j)\,f(j^2).$$

(d) Établir l'identité algébrique :

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\,\alpha\beta\gamma = \big(\alpha + \beta + \gamma\big)\,\big(\alpha + \beta\,j + \gamma\,j^2\big)\,\big(\alpha + \beta\,j^2 + \gamma\,j\big).$$

Exercice 4. Soit $g \colon \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ un endomorphisme linéaire. On note $g^2 := g \circ g$ et $g^3 := g \circ g^2$.

(a) Montrer que :

$$\mathsf{Ker}\, g \subset \mathsf{Ker}\, g^2 \subset \mathsf{Ker}\, g^3.$$

(b) On suppose dorénavant que :

$$g^3 = 0,$$

où le « 0 » désigne l'endomorphisme identiquement nul, et on suppose surtout que :

$$\{\vec{0}\} \subsetneqq \mathsf{Ker}\, g \subsetneqq \mathsf{Ker}\, g^2 \subsetneqq \mathsf{Ker}\, g^3,$$

où le symbole $\subsetneqq$ signifie « contenu dans et différent (non égal) ».

Montrer que :

$$\dim \mathsf{Ker}\, g = 1 \qquad \text{et} \qquad \dim \mathsf{Ker}\, g^2 = 2.$$

(c) Montrer que :

$$\mathsf{Im}\, g \subset \mathsf{Ker}\, g^2.$$

(d) Montrer que :

$$\mathsf{Im}\, g \;=\; \mathsf{Ker}\, g^2.$$

(e) Soit un vecteur *non nul* $\vec{a} \in \mathsf{Ker}\, g \backslash \{\vec{0}\}$. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{b} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ tel que $g(\vec{b}) = \vec{a}$.

(f) Vérifier que $\vec{b} \in \mathsf{Ker}\, g^2$.

(g) Montrer que la famille $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ est libre.

(h) Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{c} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ tel que $g(\vec{c}) = \vec{b}$.

(i) Établir que $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ est une *base* de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$.

(j) Déterminer la matrice de l'endomorphisme linéaire g dans la base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

Exercice 5. Soient deux matrices quelconques $A \in \mathscr{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. On suppose que leur produit satisfait :

$$A\, B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a)* Déterminer la valeur du rang de A, ainsi que la valeur du rang de B.

(b)* Établir que $B\, A = I_2$. Indication: On pourra partir de l'observation que $\big(A\, B\big)^2 = A\, B$.

18. Corrigé de l'examen 9

Exercice 1. (a) Appliquons donc l'algorithme du pivot à :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Effectivement, lorsque $m = 0$, la troisième ligne à gauche vaut $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui bloque la poursuite des calculs, et montre, d'après un théorème du cours, que A n'est *pas* inversible dans ce cas $m = 0$.

Heureusement, quand $m \neq 0$, la matrice 3×3 à gauche est *échelonnée*, et on voit clairement que l'algorithme peut se poursuivre jusqu'à obtenir une matrice échelonnée *réduite* à gauche, de taille 3×3, nécessairement égale à l'identité I_3.

Ainsi, A est inversible lorsque $m \neq 0$.

(b) En développant le déterminant de A selon la $1^{\text{ère}}$ colonnne, on trouve :

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} &= +1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} + 0 \\ &= 2\,m - 1 - (m-1) \\ &= m. \end{aligned}$$

Nous avons appris en (basse) cours (de ferme) qu'une matrice carrée (en terre agrisaclaycole) est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, ce qui confirme ici le critère $m \neq 0$ d'existence de A^{-1} que nous venons de découvrir (déplumer) à la Question **(a)**.

(c) Lorsque $m \neq 0$, terminons les calculs de l'algorithme du pivot *réduit* appliqué à $\big(A \big| I_3\big)$:

$$
\begin{aligned}
\cdots \;\rightsquigarrow\; & \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{array}\right) \\
\rightsquigarrow\; & \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 1-\frac{1}{m} & \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{array}\right) \\
\rightsquigarrow\; & \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 2-\frac{1}{m} & \frac{1}{m}-1 & -\frac{1}{m} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{array}\right),
\end{aligned}
$$

d'où :

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 2-\frac{1}{m} & \frac{1}{m}-1 & -\frac{1}{m} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{pmatrix},
$$

(d) Puisque, d'après le cours, les deux identités $A\,A^{-1} = I_3$ et $A^{-1}\,A = I_3$ sont équivalentes, vérifions seulement la première d'entre elles :

$$
\begin{aligned}
I_3 &\overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-\frac{1}{m} & \frac{1}{m}-1 & -\frac{1}{m} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2-\frac{1}{m}-1+\frac{1}{m} & \frac{1}{m}-1+1-\frac{1}{m} & -\frac{1}{m}+0+\frac{1}{m} \\ 2-\frac{1}{m}-2+\frac{1}{m} & \frac{1}{m}-1+2-\frac{1}{m} & -\frac{1}{m}+0+\frac{1}{m} \\ -1+\frac{m}{m} & 1-\frac{m}{m} & 0+0+\frac{m}{m} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{OUI.}
\end{aligned}
$$

Exercice 2. (a) Si $a = 0$, la première ligne est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\Delta = 0$.
Si $b = a$, la deuxième ligne est égale à la première, donc $\Delta = 0$.
Si $c = b$, la troisième ligne est égale à la deuxième, donc $\Delta = 0$.
Si $d = c$, la quatrième ligne est égale à la troisième, donc $\Delta = 0$.

(b) Par combinaisons linéaire sur lignes ou sur colonnes, et par développements selon lignes ou selon colonnes, calculons :

$$\begin{aligned}
\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \\
&= a \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \\
&= a\,\big(b-a\big) \begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 1 & c-a & c-a \\ 1 & c-a & d-a \end{vmatrix} \\
&= a\,\big(b-a\big) \begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & c-b & d-b \end{vmatrix} \\
&= a\,\big(b-a\big)\,\big(c-b\big) \begin{vmatrix} 1 & c-b \\ 1 & d-b \end{vmatrix} \\
&= a\,\big(b-a\big)\,\big(c-b\big)\,\big(d-c-(c-b)\big) \\
&= a\,\big(b-a\big)\,\big(c-b\big)\,\big(d-b-(c-b)\big) \\
&= a\,\big(b-a\big)\,\big(c-b\big)\,\big(d-c\big).
\end{aligned}$$

(c) Évidemment, on devine que :

$$\square = a\,\big(b-a\big)\,\big(c-b\big)\,\big(d-c\big)\,\big(e-d\big).$$

Oui-Da !, Madame *de la Déterminantale*, votre humble valet le petit François devine que, généralement :

$$\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a & a \\ a & b & b & \cdots & b & b \\ a & b & c & \cdots & c & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & b & c & \cdots & y & y \\ a & b & c & \cdots & y & z \end{vmatrix} = a\,\big(b-a\big)\,\big(c-b\big)\,\cdots\,\big(z-y\big).$$

Exercice 3. **(a)** Effectivement, puisque $j^3 = j$ et $j^4 = j$:

$$
\begin{aligned}
M\,U &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta j+\gamma j^2 & \alpha+\beta j^2+\gamma j \\ \gamma+\alpha+\beta & \gamma+\alpha j+\beta j^2 & \gamma+\alpha j^2+\beta j \\ \beta+\gamma+\alpha & \beta+\gamma j+\alpha j^2 & \beta+\gamma j^2+\alpha j \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f(1) & f(j) & f(j^2) \\ f(1) & j f(j) & j^2 f(j^2) \\ f(1) & j^2 f(j) & j f(j^2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(b) Comme les colonnes 1, 2, 3 de cette matrice-produit $M\,U$ sont, respectivement, multiples de $f(1)$, de $f(j)$, de $f(j^2)$, nous trouvons :

$$
\begin{aligned}
\det M\,U &= \begin{vmatrix} f(1) & f(j) & f(j^2) \\ f(1) & j f(j) & j^2 f(j^2) \\ f(1) & j^2 f(j) & j f(j^2) \end{vmatrix} \\
&= f(1)\,f(j)\,f(j^2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} \\
&= f(1)\,f(j)\,f(j^2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & j-1 & j^2-1 \\ 0 & j^2-1 & j-1 \end{vmatrix} \\
&= f(1)\,f(j)\,f(j^2) \Big[(j-1)^2 - (j^2-1)^2\Big] \\
&= f(1)\,f(j)\,f(j^2) \Big[j^2 - 2j + 1 - \big(j^4 - 2j^2 + 1\big)\Big] \\
&= f(1)\,f(j)\,f(j^2) \Big[j^2 - 2j + \underline{1}_{\circ} - j + 2j^2 - \underline{1}_{\circ}\Big] \\
&= f(1)\,f(j)\,f(j^2) \big[3\,j^2 - 3\,j\big].
\end{aligned}
$$

(c) En appliquant la règle/formule de Sarrus, commençons par calculer :

$$
\begin{aligned}
\det U &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} \\
&= j^2 + j^2 + j^2 - j - j^4 - j \\
&= 3\,j^2 - 3\,j.
\end{aligned}
$$

Tiens ! Une (re)connaissance !

Donc comme d'après le cours, nous avons l'identité :

$$
\det M\,U = \det M \cdot \det U,
$$

qui s'écrit ici grâce à la Question **(b)** :

$$
f(1)\,f(j)\,f(j^2)\,\big[3\,j^2 - 3\,j\big] = \big[3\,j^2 - 3\,j\big] \cdot \det M,
$$

et comme ce facteur :

$$3\,j^2 - 3\,j \;=\; 3\,j\,\big(j-1\big) \;=\; 3\,e^{\frac{2i\pi}{3}}\,\big(e^{\frac{2i\pi}{3}}-1\big),$$

est clairement non nul, nous pouvons le pulvériser pour obtenir :

$$f(1)\,f(j)\,f(j^2) \;=\; \det M.$$

(d) Puisque nous reconnaissons à droite le produit $f(1)\,f(j)\,f(j^2)$, il ne reste plus qu'à calculer « brutalement à la Sarrus » le déterminant de la matrice M :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \;=\; \alpha^3+\beta^3+\gamma^3-\beta\alpha\gamma-\gamma\beta\alpha-\alpha\gamma\beta,$$

pour terminer en finesse cet exercice attrayant :

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\,\alpha\beta\gamma \;=\; \det M \;=\; \big(\alpha+\beta+\gamma\big)\,\big(\alpha+\beta\,j+\gamma\,j^2\big)\,\big(\alpha+\beta\,j^2+\gamma\,j\big).$$

Exercice 4. (a) Si $\vec{u} \in \operatorname{Ker} g$, c'est-à-dire si $g(\vec{u}) = \vec{0}$, alors :

$$g^2\big(\vec{u}\big) \;=\; g\big(\underline{g(\vec{u})}\big) \;=\; g(\vec{0}) \;=\; \vec{0},$$

ce qui montre que $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} g^2$.

Si $\vec{v} \in \operatorname{Ker} g^2$, c'est-à-dire si $g^2(\vec{v}) = \vec{0}$, alors :

$$g^3\big(\vec{v}\big) \;=\; g\big(\underline{g^2(\vec{v})}\big) \;=\; g(\vec{0}) \;=\; \vec{0},$$

ce qui montre que $\operatorname{Ker} g^2 \subset \operatorname{Ker} g^3$.

(b) Comme $g^3 = 0$, pour tout vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$, on a $g^3(\vec{u}) = \vec{0}$, c'est-à-dire que le noyau :

$$\operatorname{Ker} g^3 \;=\; \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3},$$

de g^3 est égal à l'espace vectoriel ambiant tout entier, et donc :

$$\dim \operatorname{Ker} g^3 \;=\; \dim \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3} \;=\; 3.$$

Ensuite, en prenant les dimensions des sous-espaces vectoriels strictement emboîtés les uns dans les autres :

$$\big\{\vec{0}\big\} \;\underset{\neq}{\subsetneq}\; \operatorname{Ker} g \;\underset{\neq}{\subsetneq}\; \operatorname{Ker} g^2 \;\underset{\neq}{\subsetneq}\; \operatorname{Ker} g^3,$$

il est clair [3] que les inégalités doivent être strictes :

$$0 \;<\; \dim \operatorname{Ker} g \;<\; \dim \operatorname{Ker} g^2 \;<\; 3 \;=\; \dim \operatorname{Ker} g^3,$$

ce qui les force, puisque ces dimensions sont des nombres entiers, à valoir :

$$0 \;<\; \dim \operatorname{Ker} g \;=\; 1 \;<\; \dim \operatorname{Ker} g^2 \;=\; 2 \;<\; 3.$$

(c) Soit $\vec{v} \in \operatorname{Im} g$ quelconque, c'est-à-dire qu'il existe $\vec{u} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ avec $g(\vec{u}) = \vec{v}$. Alors par hypothèse :

$$g^2\big(\vec{v}\big) \;=\; g^3\big(\vec{u}\big) \;=\; \vec{0},$$

ce qui montre l'inclusion $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} g^2$.

3. On sait, d'après le cours, que pour deux sous-espaces vectoriels emboîtés $G \subset F \subset E$ dans un espace vectoriel ambiant E de dimension $\dim E < \infty$ finie, on a $G = F$ si et seulement si $\dim G = \dim F$, et on se souvient aisément de la démonstration en prenant une base de F que l'on complète — grâce au théorème de la base incomplète — si nécessaire en une base de G.

(d) Puisque nous venons de voir que $\mathsf{Im}\, g$ est contenu dans $\mathsf{Ker}\, g^2$, il suffit d'argumenter que les dimensions de ces deux sous-espaces vectoriels sont égales.

Mais comme le théorème du rang nous donne :

$$\underbrace{\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\, g}_{=1} + \mathsf{dim}\,\mathsf{Im}\, g \;=\; 3,$$

il vient aisément, grâce à la Question **(b)** :

$$\mathsf{dim}\,\mathsf{Im}\, g \;=\; 3 - 1 \;=\; \mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\, g^2,$$

d'où l'égalité désirée $\mathsf{Im}\, g = \mathsf{Ker}\, g^2$.

(e) Comme :

$$\vec{a} \;\in\; \mathsf{Ker}\, g \;\subset\; \mathsf{Ker}\, g^2 \;=\; \mathsf{Im}\, g \qquad \text{(Question } \mathbf{(c)}\text{)},$$

il est clair que $\vec{a} = g(\vec{b})$ pour (au moins) un vecteur $\vec{b}$.

(f) Effectivement, puisque $\vec{a} \in \mathsf{Ker}\, g$, nous avons :

$$g^2\big(\vec{b}\big) \;=\; g\big(\underline{g(\vec{a})}\big) \;=\; g(\vec{0}) \;=\; \vec{0},$$

(g) Supposons qu'il existe une combinaison linéaire :

$$\vec{0} \;=\; \lambda\, \vec{a} + \mu\, \vec{b},$$

avec des scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\vec{0} \;=\; g(\vec{0}) \;&=\; g\big(\lambda\, \vec{a} + \mu\, \vec{b}\big) \\
&=\; \lambda\, \underline{g(\vec{a})} + \mu\, g(\vec{b}) \\
&=\; \vec{0} + \mu\, \vec{a},
\end{aligned}$$

et comme $\vec{a} \neq \vec{0}$, il vient :

$$0 \;=\; \mu,$$

puis :

$$\vec{0} \;=\; \lambda\, \vec{a} + \vec{0},$$

et à nouveau par non-nullité de l'assistant $\vec{a}$, il vient :

$$0 \;=\; \mu,$$

ce qui montre bien la liberté de cette sympathique famille alphabétabéique $\big\{\vec{a}, \vec{b}\big\}$.

(h) Comme $g^3(\vec{c}\,) = g^2(\vec{b}\,) = \vec{0}$, c'est-à-dire grâce à la Question **(d)** :

$$\vec{b} \;\in\; \mathsf{Ker}\, g^2 \;=\; \mathsf{Im}\, g,$$

l'existence d'un vecteur $\vec{c}$ avec $g(\vec{c}) = \vec{b}$ est claire.

(i) Comme :

$$g^2\big(\vec{c}\,\big) \;=\; g\big(\vec{b}\,\big) \;=\; \vec{a} \;\neq\; \vec{0},$$

nous constatons que :

$$\vec{c} \;\notin\; \mathsf{Ker}\, g^2.$$

Or puisque la Question **(f)** nous a fait voir que déjà la sous-famille $\big\{\vec{a}, \vec{b}\big\}$ est libre, et donc constitue une base du sous-espace vectoriel $\mathsf{Ker}\, g^2$, le fait que $\vec{c}$ ne lui appartienne *pas* garantit, d'après une propriété vue en cours, que la famille des trois vecteurs $\big\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\big\}$ est *libre* dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$.

Enfin, puisque $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ est de dimension 3, nous concluons bien que $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ en constitue une (belle) base.

(j) Pourquoi la base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ est-elle belle ? Parce que toutes les relations que nous avons récoltées :

$$\begin{aligned} g(\vec{a}) &= \vec{0}, \\ g(\vec{b}) &= \vec{a}, \\ g(\vec{c}) &= \vec{b}, \end{aligned}$$

montrent que la matrice de g dans cette base est très simple, donc [4] très belle :

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ g(\vec{a}) \; g(\vec{b}) \; g(\vec{c}) \end{array}.$$

Exercice 5. **(a)** D'après le cours, le rang d'une matrice est égal au rang de l'application linéaire associée, dans une paire de bases.

Ici, il est naturel de prendre les bases canoniques de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^2}$ et de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$. Soit $f\colon \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ l'application linéaire associée à A, et soit $g\colon \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^2}$ l'application linéaire associée à B. On a donc que $A\,B$ est la matrice de $f \circ g$. Or le rang d'une application est égal par définition à la dimension de son image :

$$\mathsf{rang}\,(f \circ g) = \mathsf{dim}\,\mathsf{Im}\, f \circ g.$$

Ensuite, puisque :

$$\begin{aligned} \mathsf{Im}\, f \circ g &\subset \mathsf{Im}\, f, \\ &\subset f(\mathsf{Im}\, g), \end{aligned}$$

il vient :

$$\mathsf{rang}\,(f \circ g) = \mathsf{min}\,\{\mathsf{rang}\, f,\ \mathsf{rang}\, g\}$$

et donc :

$$\mathsf{rang}\, A\,B \leqslant \mathsf{min}\,\{\mathsf{rang}\, A,\ \mathsf{rang}\, B\}.$$

Enfin, grâce à des inégalités citron-pressées :

$$2 = \mathsf{rang}\, A\,B \leqslant \mathsf{min}\,\{\mathsf{rang}\, A,\ \mathsf{rang}\, B\} = 2,$$

qui se *transforcent* (néologisme) en égalités, nous concluons que :

$$2 = \mathsf{rang}\, A = \mathsf{rang}\, B.$$

(b) Observons effectivement que :

$$A\,B\,A\,B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A\,B.$$

4. Théorème de Jean Racine, Britannicus, Acte II, Scène 2, Néron, au sujet de Junie :

« *Belle, sans ornements, dans le simple appareil*
D'une beauté qu'on vient d'arracher au sommeil. »

Autrement dit :

$$A\left(B\,A - I_2\right)B \;=\; 0_3,$$

où 0_3 est la matrice carrée nulle de taille 3×3.

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}\mathsf{Im}\left[\left(B\,A - I_2\right)B\right] \;&\subset\; \mathsf{Ker}\,A \\ &=\; \{\vec{0}\},\end{aligned}$$

et donc :

$$\left(B\,A - I_2\right)B \;=\; 0_{2\times 3},$$

où $0_{2\times 3}$ est la matrice nulle de taille 2×3.

Par suite :

$$\mathsf{Im}\,B \;\subset\; \mathsf{Ker}\left(B\,A - I_2\right).$$

Or B est surjective, donc :

$$B\,A - I_2 \;=\; 0_2,$$

et enfin :

$$B\,A \;=\; I_2.$$

19. Examen 10

Exercice 1. Soit $\boldsymbol{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canonique de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$. Soit $f \colon \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ l'endomorphisme linéaire dont la matrice dans cette base $\boldsymbol{B}$ est :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On introduit les 3 vecteurs :

$$\vec{a} := \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \qquad \vec{b} := 2\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \qquad \vec{c} := 2\,\vec{e}_1 - 2\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

(a) Montrer que $\boldsymbol{B}' := \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ est aussi une base de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$. Indication: On pourra calculer un déterminant.

(b) Écrire la matrice de passage P de la base $\boldsymbol{B}$ vers la base $\boldsymbol{B}'$.

(c) Avec la méthode de son choix, calculer l'inverse P^{-1}, puis, vérifier que $P^{-1}\,P = I$.

(d) Déterminer la matrice B de l'endomorphisme linéaire f dans la base $\boldsymbol{B}' = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

(e) Calculer B^4.

(f) En déduire les valeurs de A^{4n} pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Dans $\mathscr{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, soit la matrice :

$$E := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer E^2 et E^3.

(b) En déduire que E est inversible, et trouver son inverse E^{-1}.

(c) Maintenant, toujours dans $\mathscr{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, soit la matrice :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer (pareillement) A^2 et A^3.

(d) Déterminer trois constantes réelles $a, b, c \in \mathbb{R}$ telles que :

$$0 = A^3 + a\,A^2 + b\,A + c\,I.$$

(e) En déduire que A est inversible, et trouver son inverse A^{-1}.

(f) Vérifier que l'expression trouvée satisfait bien $A^{-1}\,A = I$.

Exercice 3. Soient deux variables réelles $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) On considère le déterminant :

$$\Delta := \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ b^2 & ab & a^2 \end{vmatrix}.$$

Montrer que :

$$\Delta = \big(a^2 + b^2 + ab\big)^2 \big(a - b\big)^2.$$

(b) On considère le déterminant :

$$\square := \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

Montrer que :

$$\square = \big(a + b + c\big)^3.$$

Exercice 4. Soit $\boldsymbol{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ la base canonique de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$. Soit $f\colon \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4} \longrightarrow \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$ l'application linéaire dont la matrice dans la base $\boldsymbol{B}$ est :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer un vecteur non nul $\vec{x}$ qui engendre $\mathsf{Ker}\, f$, tout en montrant que $1 = \mathsf{dim}\, \mathsf{Ker}\, f$.

(b) Pour une constante fixée quelconque $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$E_\lambda := \big\{\vec{x} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4} \colon\ f\big(\vec{x}\big) = \lambda \vec{x}\big\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$.

(c) Déterminer un vecteur non nul $\vec{b} \in E_{-1}$, tout en montrant que $1 = \mathsf{dim}\, E_{-1}$.

(d) Déterminer deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{c}, \vec{d} \in E_1$, tout en montrant que $2 = \mathsf{dim}\, E_1$.

(e) Montrer que les 4 vecteurs trouvés $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$ sont linéairement indépendants.

(f) Déterminer la matrice de l'endomorphisme linéaire f dans la base $\boldsymbol{B}' := \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $\mathsf{dim}\, E < \infty$ finie. Soient deux sous-espaces vectoriels quelconques $F \subset E$ et $G \subset E$.

(a)* Établir la formule :

$$\mathsf{dim}\,\big(F + G\big) = \mathsf{dim}\, F + \mathsf{dim}\, G - \mathsf{dim}\,\big(F \cap G\big).$$

Indication: On pourra introduire l'application :

$$\begin{aligned} \varphi\colon \quad F \times G &\longrightarrow E \\ \big(\vec{x}, \vec{y}\big) &\longmapsto \vec{x} + \vec{y}. \end{aligned}$$

20. Corrigé de l'examen 10

Exercice 1. **(a)** La matrice, dans la base canonique $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, de ces 3 vecteurs étant :

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{array}{ccc} \;\;\vec{a} & \;\;\;\vec{b} & \;\;\;\vec{c} \end{array} \end{array}$$

il suffit, d'après un théorème du cours, de vérifier que son déterminant est *non nul*, pour obtenir le fait que $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} = \boldsymbol{B}'$ est une base de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$.

En développant selon la 1ère colonne, calculons donc :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -1 + 2 + \underline{2-2}_{\circ} - 4 + 2 \\ &= -1 \neq 0 \qquad\qquad \text{OUI.} \end{aligned}$$

(b) Nous venons d'écrire cette matrice de passage P (et il fallait vérifier qu'elle était bien inversible) :

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Appliquons la méthode du pivot à :

$$\begin{aligned} (P|I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right), \end{aligned}$$

d'où :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

ce que nous vérifions :

$$P^{-1}\,P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & -2+2 & -2+2 \\ 1-1 & 2-1 & 2-2 \\ 1-1 & 1-1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) D'après le cours :

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}\,A\,P \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(e) Puisque :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

il vient rapidement :

$$B^4 = B^2\,B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

(f) Ainsi, puisque :

$$P^{-1}\,A\,P = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = P\,B\,P^{-1},$$

il vient :

$$
\begin{aligned}
A^{4n} &= \big(PBP^{-1}\big)^{4n} \\
&= PBP^{-1}\,PBP^{-1}\cdots\cdots PBP^{-1}\,PBP^{-1} && \text{(}4n\text{ fois)} \\
&= PB\underline{P^{-1}\,P}BP^{-1}\cdots\cdots PB\underline{P^{-1}\,P}BP^{-1} \\
&= P\,B\,B\,\cdots\cdots\,B\,B\,P^{-1} \\
&= P\,B^{4n}\,P^{-1} \\
&= P\,\big(B^4\big)^n\,P^{-1} \\
&= P\,(I)^n\,P^{-1} \\
&= P\,I\,P^{-1} \\
&= I.
\end{aligned}
$$

Exercice 2. (a) Nous trouvons :

$$
E^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},
$$

puis :

$$
E^3 = E^2\,E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.
$$

(b) Puisque :

$$
E^2 \cdot E = I = E \cdot E^2,
$$

l'unicité de l'inverse d'une matrice (quand celui-ci existe), lequel satisfait par définition :

$$
E^{-1} \cdot E = I = E \cdot E^{-1},
$$

nous fournit :

$$
E^{-1} = E^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(déjà calculée !)},
$$

sans avoir à effectuer un calcul ingrat de pivot appliqué à la matrice $\big(E\big|I\big)$!

(c) Nous trouvons :

$$
A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},
$$

puis :

$$
A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.
$$

(d) En notation déployée, cette équation matricielle s'écrit :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1&0&3\\3&1&9\\0&3&1\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}0&1&0\\0&3&1\\1&0&3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&3\\0&1&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1+c & a & 3+b\\ 3+b & 1+3a+c & 9+a+3b\\ a & 3+b & 1+3a+c\end{pmatrix},\end{aligned}$$

ce qui correspond à un système de $3\times 3 = 9$ de Pâques équations aux 3 inconnues a, b, c.

Or les trois (premières) équations imposées par la première ligne :

$$0 = 1+c, \qquad\qquad 0 = a, \qquad\qquad 0 = 3+b,$$

se résolvent instantanément comme :

$$a := 0, \qquad\qquad b := -3, \qquad\qquad c := -1,$$

et l'on voit d'un seul coup d'œil que ces trois valeurs déterminées de manière unique satisfont « par chance » aussi les 6 équations restantes.

Ainsi :

$$0 = A^3 - 3\,A^2 - I.$$

(e) Si nous ré-écrivons cette belle identité comme :

$$\big(A^2 - 3\,I\big)\cdot A = I = A\cdot\big(A^2 - 3\,I\big),$$

le même argument que celui détaillé à la Question **(b)** nous permet de conclure (sans avoir à pressuriser nos glandes sudoripares) que A est bel est bien inversible, d'inverse :

$$\begin{aligned}A^{-1} &= A^2 - 3\,I\\ &= \begin{pmatrix}0&1&0\\0&3&1\\1&0&3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-3&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(f) Effectivement :

$$\begin{pmatrix}-3&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&3\\0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 3. (a) Après remplacement de la colonne C_1 par $C_1+C_2+C_3$, une factorisabilité se révèle :

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix}a^2 & b^2 & ab\\ ab & a^2 & b^2\\ b^2 & ab & a^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a^2+b^2+ab & b^2 & ab\\ ab+a^2+b^2 & a^2 & b^2\\ b^2+ab+a^2 & ab & a^2\end{vmatrix}\\ &= \big(a^2+b^2+ab\big)\begin{vmatrix}1 & b^2 & ab\\ 1 & a^2 & b^2\\ 1 & ab & a^2\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Ensuite, en remplaçant $L_2 \longleftrightarrow L_2 - L1$ ainsi que $L_3 \longleftrightarrow L_3 - L1$, il vient :

$$\begin{aligned}
\Delta \;=\; \big(a^2+b^2+ab\big)\begin{vmatrix} 1 & b^2 & ab \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & ab & a^2 \end{vmatrix} &= \big(a^2+b^2+ab\big)\begin{vmatrix} 1 & b^2 & ab \\ 0 & a^2-b^2 & b^2-ab \\ 0 & ab-b^2 & a^2-ab \end{vmatrix} \\
&= \big(a^2+b^2+ab\big)\begin{vmatrix} a^2-b^2 & b^2-ab \\ ab-b^2 & a^2-ab \end{vmatrix} \\
&= \big(a^2+b^2+ab\big)\begin{vmatrix} (a-b)(a+b) & b(b-a) \\ (a-b)b & a(a-b) \end{vmatrix} \\
&= \big(a^2+b^2+ab\big)\big(a-b\big)^2\begin{vmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{vmatrix} \\
&= \big(a^2+b^2+ab\big)\big(a-b\big)^2\big(a^2+ab+b^2\big) \\
&= \big(a^2+b^2+ab\big)^2\big(a-b\big)^2.
\end{aligned}$$

(b) Remplaçons $L_1 \longleftarrow L_1 + L_2 + L_3$, factorisons, puis remplaçons $C_2 \longleftarrow C_2 - C_1$ ainsi que $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1$, et enfin, développons selon la première colonne :

$$\begin{aligned}
\square \;=\; \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \\
&= \big(a+b+c\big)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \\
&= \big(a+b+c\big)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} \\
&= \big(a+b+c\big)\begin{vmatrix} -b-c-a & 0 \\ 0 & -c-a-b \end{vmatrix} \\
&= \big(a+b+c\big)\big(-a-b-c\big)\big(-a-b-c\big) \\
&= \big(a+b+c\big)^3.
\end{aligned}$$

Exercice 4. (a) Par définition, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ appartient à $\mathrm{Ker}\, f$ si et seulement si $A\,\vec{x} = \vec{0}$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne le système linéaire :

$$\begin{aligned}
2\,x_1 - x_2 \quad + \quad x_4 &= 0 \\
x_1 \qquad\qquad x_4 &= 0 \\
x_3 \qquad &= 0 \\
-3\,x_1 + x_2 \quad - 2\,x_4 &= 0
\end{aligned}$$

Clairement, les équations L_3 et L_2 donnent :

$$x_3 := 0, \qquad\qquad x_4 := -x_1,$$

et après remplacement dans les équations 1 et 4, nous trouvons :

$$x_2 := x_1,$$

ce qui donne :

$$\mathsf{Ker}\, f = \big\{ \big(x_1, x_1, 0, -x_1\big) \colon \ x_1 \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \big\},$$

et ainsi, Ker f est bien de dimension 1, engendré par le vecteur :

$$\vec{a} := \big(1, 1, 0, -1\big).$$

(b) Il est clair que :

$$f\big(\vec{0}\big) = \vec{0} = \lambda\,\vec{0}.$$

Ensuite, pour deux vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in E_\lambda$, c'est-à-dire avec $f(\vec{x}\,) = \lambda\,\vec{x}$ et $f(\vec{y}\,) = \lambda\,\vec{y}$, et pour deux scalaires quelconques $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$f\big(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}\,\big) = \alpha\, f(\vec{x}\,) + \beta\, f(\vec{y}\,) = \alpha\,\lambda\,\vec{x} + \beta\,\lambda\,\vec{y} = \lambda\,\big(\alpha\,\vec{x} + \beta\,\vec{y}\big),$$

d'où $\alpha\,\vec{x} + \beta\,\vec{y} \in E_\lambda$ aussi, ce qui montre que E_λ est bien un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$.

(c) Par définition, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ appartient à E_{-1} si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne le système linéaire :

$$\begin{aligned} 3\,x_1 - x_2 \qquad + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 &= 0 \\ 2\,x_3 \qquad &= 0 \\ -\,3\,x_1 + x_2 \qquad - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Clairement, l'équation L_3 donne :

$$x_3 := 0.$$

L'équation $L_4 = -\,L_1$ peut être supprimée. Ensuite, $L_1 + L_2$ et $-L_1 + L_2$ donnent :

$$x_4 := -\,2\,x_1 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad x_2 := x_1,$$

ce qui donne :

$$E_{-1} = \big\{ \big(x_1, x_1, 0, -2x_1\big) \colon \ x_1 \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \big\},$$

et ainsi, E_{-1} est bien de dimension 1, engendré par le vecteur :

$$\vec{b} := \big(1, 1, 0, -2\big).$$

(d) Par définition, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ appartient à E_{-1} si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne le système linéaire :

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \ + \ x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 \ + \ x_4 &= 0 \\ 0 \qquad &= 0 \\ -3\,x_1 + x_2 \ -3\,x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Clairement, les équations L_2 et L_3 peuvent être supprimées. Ensuite, les équations L_1 et L_4 permettent de résoudre :

$$x_1 := -x_4 \qquad \text{et} \qquad x_2 := 0,$$

ce qui donne :

$$E_1 = \big\{(0,0,x_3,0) + (-x_4,0,0,x_4) : \ x_3, x_4 \in \mathbb{R} \text{ quelconques}\big\},$$

et ainsi, E_{-1} est bien de dimension 2, engendré par les deux vecteurs visiblement linéairement indépendants :

$$\vec{c} := (0,0,1,0) \qquad \text{et} \qquad (-1,0,0,1).$$

(e) Grâce à un théorème du cours, il suffit de vérifier la non-nullité du déterminant formé par les coordonnées de ces 4 vecteurs, en le développant successivement par rapport à des lignes ou des colonnes bien choisies :

$$0 \overset{?}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \underline{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\circ} = -1 \neq 0.$$

(f) D'après les questions précédentes, nous avons :

$$f(\vec{a}) = \vec{0}, \qquad f(\vec{b}) = -\vec{b}, \qquad f(\vec{c}) = \vec{c}, \qquad f(\vec{d}) = \vec{d},$$

et donc en conclusion, dans cette nouvelle base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$, la matrice de f :

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ f(\vec{a}) \ \ f(\vec{b}) \ \ f(\vec{c}) \ \ f(\vec{d}) \end{array}$$

est plus simple que dans la base canonique, puisqu'elle *diagonale*.

Exercice 5. (a) Tout d'abord, φ est *linéaire* de l'espace vectoriel *produit* $F \times G$ à valeurs dans l'espace vectoriel E, car :

$$\begin{aligned} \varphi\Big(\lambda\,(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda'\,(\vec{x}\,', \vec{y}\,')\Big) &= \varphi\Big(\big(\lambda\,\vec{x} + \lambda'\vec{x}\,', \ \lambda\,\vec{y} + \lambda'\vec{y}\,'\big)\Big) \\ &= \lambda\,\vec{x} + \lambda'\vec{x}\,' + \lambda\,\vec{y} + \lambda'\vec{y}\,' \\ &= \lambda\,(\vec{x} + \vec{y}) + \lambda'\,(\vec{x}\,' + \vec{y}\,') \\ &= \lambda\,\varphi(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda'\,\varphi(\vec{x}\,', \vec{y}\,'). \end{aligned}$$

Ensuite, l'image de φ est clairement :

$$\begin{aligned}\mathsf{Im}\,\varphi &= F+G \ \subset\ E\\ &\overset{\text{déf}}{=} \Big\{\vec{x}+\vec{y}\colon\ \vec{x}\in F \text{ quelconque},\ \vec{y}\in G \text{ quelconque}\Big\},\end{aligned}$$

d'où :

$$\mathsf{dim}\,\mathsf{Im}\,\varphi \;=\; \mathsf{dim}\,\big(F+G\big).$$

Par ailleurs, un élément arbitraire $\big(\vec{x},\vec{y}\big)\in\mathsf{Ker}\,\varphi$ du noyau de φ satisfait :

$$\begin{aligned}\vec{x}+\vec{y} \;=\; \vec{0} \qquad &\Longrightarrow \qquad \underset{\in F}{\vec{x}} \;=\; -\underset{\in G}{\vec{y}},\\ &\Longrightarrow \qquad F\cap G \,\ni\, \vec{x} \;=\; -\vec{y} \,\in\, G\cap F.\end{aligned}$$

Enfin, comme :

$$\vec{z}\,\in\, F\cap G \text{ quelconque} \qquad\Longrightarrow\qquad \big(\vec{z},-\vec{z}\big)\,\in\,\mathsf{Ker}\,\varphi,$$

puisque $\vec{z}-\vec{z}=\vec{0}$ trivialement, ceci montre que :

$$\mathsf{Ker}\,\varphi \;=\; \Big\{\big(\vec{z},-\vec{z}\big)\in F\times G\colon\ \vec{z}\in F\cap G\Big\},$$

et donc :

$$\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\,\varphi \;=\; \mathsf{dim}\,F\cap G.$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer la formule de la dimension à l'application linéaire $\varphi\colon F\times G\longrightarrow E$:

$$\mathsf{dim}\,\big(F\times G\big) \;=\; \mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\,\varphi+\mathsf{dim}\,\mathsf{Im}\,\varphi,$$

ce qui nous donne bien une égalité :

$$\mathsf{dim}\,F+\mathsf{dim}\,G \;=\; \mathsf{dim}\,F\cap G+\mathsf{dim}\,\big(F+G\big),$$

qui est équivalente à celle qui était demandée.