

# Théorèmes de Cauchy et applications

François DE MARÇAY  
Département de Mathématiques d'Orsay  
Université Paris-Saclay, France

## 1. Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les concepts de base pour la topologie sur  $\mathbb{C}$ , nous avons défini les fonctions holomorphes et nous avons montré comment les intégrer le long de courbes  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ . Le premier résultat remarquable de la *Théorie de Cauchy* exhibe des connexions profondes entre ces notions.

En effet, le *Théorème de Cauchy* énonce que si une fonction  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  est holomorphe dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , et si  $\gamma \subset \Omega$  est une courbe fermée simple dont la région intérieure  $\gamma_{\text{int}} \subset \Omega$  est contenue dans  $\Omega$ , alors :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

De très nombreux résultats découleront de cette formule, et notamment la clé de voûte de tout l'édifice, le *Théorème des résidus* — véritable magie de l'holomorphie ! — qui va nous inviter à sa pêche interstellaire miraculeuse, nous, glaneurs de belles singularités résiduelles...

Un théorème célèbre de Jordan stipule en effet que le complémentaire  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  consiste en exactement *deux* composantes connexes ouvertes  $\gamma_{\text{int}}$  et  $\gamma_{\text{ext}}$  avec la décomposition disjointe :

$$\mathbb{C} = \gamma_{\text{int}} \cup \gamma \cup \gamma_{\text{ext}},$$

celle qu'on nomme *intérieure* étant la seule dont l'adhérence dans  $\mathbb{C}$  est compacte. Le théorème de Cauchy suppose donc, et c'est important, que cette adhérence compacte est entièrement contenue dans le domaine de définition :

$$\gamma_{\text{int}} \cup \gamma \subset \Omega.$$

Toutefois, puisque la visualisation intuitive instantanée du théorème de Jordan est en décalage complet avec sa démonstration mathématique rigoureuse complète, laquelle est passablement longue et difficile, nous en admettrons l'énoncé, et ne le démontrerons que dans un chapitre spécialement dédié. En tout cas, pour toutes les courbes auxquelles nous aurons affaire dans ce chapitre, la détermination de l'intérieur et de l'extérieur de  $\gamma$  ne poseront aucun problème.

Une version initiale élémentaire de ce théorème de Cauchy suppose que la fonction possède une primitive dans  $\Omega$ , au sens où cela a été défini dans le chapitre précédent. En fait, nous démontrerons que pour des contours élémentaires  $\gamma$  dont l'intérieur  $\gamma_{\text{int}}$  est contenu

dans  $\Omega$ , les fonctions holomorphes ont des primitives, et alors le théorème de Cauchy deviendra tout aussi translucide que la formule fondamentale du calcul intégral réel :

$$\int_0^1 g'(x) dx = g(1) - g(0).$$

Dans la Nature (mathématique !), le contour essentiellement le plus simple possible est celui qui borde un triangle fermé  $T \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ . L'existence de primitives pour les fonctions holomorphes découlera du *Théorème de Goursat*, lequel énonce que pour toute fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ , on a l'annulation :

$$0 = \int_{\partial T} f(z) dz.$$

Il est absolument remarquable que ce sous-cas du théorème de Cauchy est le germe de tous les autres résultats plus avancés de la théorie de Cauchy. En plaçant des triangles orientés blottis les uns à côté des autres, nous allons en déduire, à la manière de carrelers, l'existence de primitives dans un voisinage de  $\gamma_{\text{int}}$ , ainsi qu'une démonstration directe du théorème fondamental de Cauchy susmentionné.

Toutes ces idées séduisantes vont nous conduire par la main au résultat central de ce chapitre, la *Formule intégrale de Cauchy*. Sa version prototypique énonce que si une fonction  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  est holomorphe dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , alors pour tout disque fermé  $\bar{\Delta} \subset \Omega$ , on retrouve les valeurs de la fonction en chaque point intérieur  $z \in \Delta$  par l'intégration :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Ensuite, des différentiations successives de cette identité nous fourniront une collection infinie de formules intégrales, dont découlera un théorème absolument fantastique montrant que les fonctions holomorphes sont *indéfiniment différentiables* — alors qu'elles n'étaient supposées qu'une seule fois  $\mathbb{C}$ -différentiables en tout point, même pas  $\mathcal{C}^1$  au départ ! Ah oui certes, pour les fonctions de variable *réelle*, l'énoncé analogue est radicalement faux !

Pourquoi, alors, tout est si vrai, si beau, et si bon, dans le monde holomorphe ? Parce que la Magie, c'est, en Mathématique, l'Unité : tout, dans la théorie des fonctions holomorphes, s'entrelace : Analyse, Géométrie, Topologie, Algèbre, Calcul !

## 2. Théorème de Goursat

À la fin du chapitre précédent, nous avons démontré que si une fonction holomorphe  $f$  dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$  y admet une primitive  $F$ , à savoir une fonction  $F$  telle que  $F' = f$ , alors :

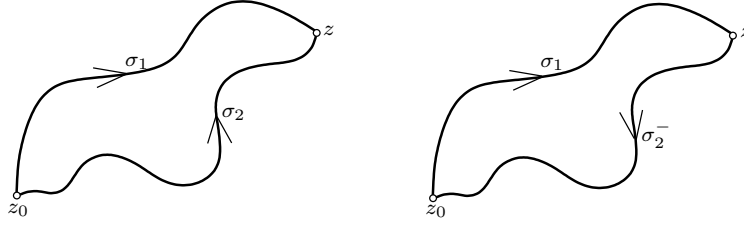
$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz,$$

pour toute courbe fermée  $\gamma \subset \Omega$ .

Réciproquement, si de telles annulations sont toujours satisfaites, une primitive existe pour  $f$ , car il suffit en effet de fixer un point  $z_0 \in \Omega$ , et de définir :

$$F_{\sigma}(z) := \int_{\sigma: z_0 \rightarrow z} f(z) dz,$$

cette intégrale étant prise le long de n'importe quelle courbe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux  $\sigma: z_0 \rightarrow z$  allant de  $z_0$  à  $z$  contenue dans  $\Omega$ , puisque la valeur *ne dépend alors pas de la courbe* !

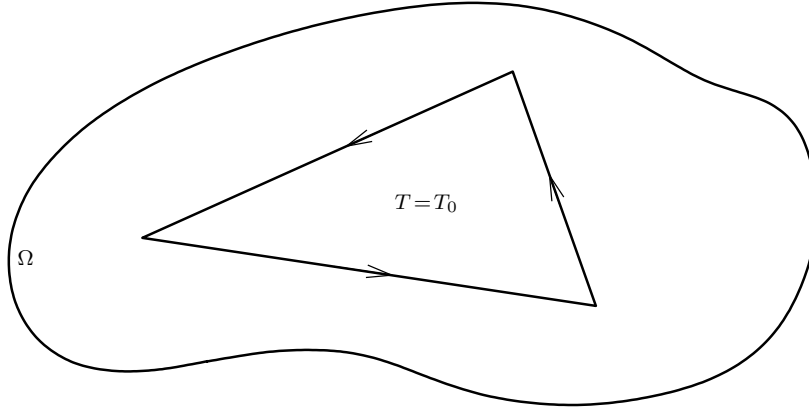


Effectivement, la différence entre deux valeurs :

$$\begin{aligned}
 F_{\sigma_2}(z) - F_{\sigma_1}(z) &= \int_{\sigma_1: z_0 \rightarrow z} f(z) dz - \int_{\sigma_2: z_0 \rightarrow z} f(z) dz \\
 &= \int_{\sigma_1 \sigma_2^-} f(z) dz \\
 &= \int_{\text{courbe fermée}} f(z) dz \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

s'annule par hypothèse !

Notre point de départ sera le théorème suivant, dans lequel on ne suppose pas l'existence d'une primitive, mais où l'on se restreint d'abord à des figures géométriques simples. Classiquement, on note  $\mathcal{O}(\Omega)$  l'algèbre des fonctions holomorphes dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ .



**Théorème 2.1. [de Goursat]** Si  $\Omega \subset \mathbb{C}$  est un sous-ensemble ouvert, et si  $T = \overline{T} \subset \Omega$  est un triangle euclidien fermé 2-dimensionnel entièrement contenu dans  $\Omega$  dont le bord  $\partial T$  est constitué de trois segments orientés, alors :

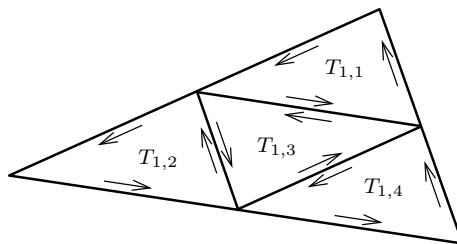
$$0 = \int_{\partial T} f(z) dz,$$

pour toute fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ .

Constamment, nous choisirons l'orientation trigonométrique directe.

*Démonstration.* Appelons  $T_0 := T$  notre triangle. Lorsqu'il est aplati, l'énoncé est trivial — pourquoi ? Lorsqu'il n'est pas aplati, nous allons le disséquer indéfiniment — oui, sans pitié !

Notons  $d_0$  le diamètre de  $T_0$  et  $p_0$  son périmètre. Relions les trois milieux de ses trois côtés.



Quatre triangles en similitude apparaissent — notons-les  $T_{1,1}, T_{1,2}, T_{1,3}, T_{1,4}$ . Orientons-les dans le sens trigonométrique direct. Deux côtés adjacents appartenant à deux triangles distincts sont orientés de manière opposée.

Par conséquent, des annihilations d'intégrales sur paires de segments orientés inverses permettent d'écrire (exercice) :

$$\int_{\partial T_0} f(z) dz = \int_{\partial T_{1,1}} f(z) dz + \int_{\partial T_{1,2}} f(z) dz + \int_{\partial T_{1,3}} f(z) dz + \int_{\partial T_{1,4}} f(z) dz,$$

ce qu'on peut abréger en :

$$I_0 = I_{1,1} + I_{1,2} + I_{1,3} + I_{1,4}.$$

**Affirmation 2.2.** *Il existe un indice  $1 \leq i \leq 4$  tel que :*

$$\left| \int_{\partial T_0} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T_{1,i}} f(z) dz \right|.$$

*Preuve.* Sinon, si on avait pour tous  $i = 1, 2, 3, 4$  :

$$\frac{1}{4} \left| \int_{\partial T_0} f(z) dz \right| > \left| \int_{\partial T_{1,i}} f(z) dz \right|,$$

une inégalité triangulaire à 4 termes conduirait à l'absurdité :

$$4 \cdot \frac{1}{4} |I_0| > |I_{1,1}| + |I_{1,2}| + |I_{1,3}| + |I_{1,4}|$$

[Inégalité triangulaire]

$$\geq |I_0|.$$

□

Sélectionnons un triangle  $T_{1,i}$  qui satisfait cette inégalité, puis renommons-le  $T_1$ . Puisqu'il est homothétique de rapport  $\frac{1}{2}$  à partir de  $T_0$ , son diamètre  $d_1$  et son périmètre  $p_1$  valent :

$$d_1 = \frac{1}{2} d_0 \quad \text{et} \quad p_1 = \frac{1}{2} p_0.$$

Itérons ce procédé en décomposant  $T_1$  en quatre triangles  $T_{2,1}, T_{2,2}, T_{2,3}, T_{2,4}$ , sélectionnons l'un d'entre eux, redécomposons-le, resélectionnons, et ainsi de suite. Nous construisons ainsi une suite infinie de triangles fermés emboîtés les uns dans les autres :

$$T_0 \supset T_1 \supset \cdots \supset T_n \supset \cdots$$

de diamètres et de périmètres tendant vers 0 comme :

$$d_n = \frac{1}{2^n} d_0 \quad \text{et} \quad p_n = \frac{1}{2^n} p_0,$$

de telle sorte qu'ils satisfont les inégalités :

$$\left| \int_{\partial T_0} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial T_n} f(z) dz \right|.$$

Alors d'après un théorème connu de topologie, cette suite de compacts emboîtés  $T_{n+1} \subset T_n \subset \mathbb{C}$  de diamètres tendant vers 0 converge vers un unique point du plan :

$$z_0 := \bigcap_{n \geq 0} T_n.$$

Maintenant — enfin vient l'hypothèse principale ! —, comme  $f$  est holomorphe en  $z_0$ , nous pouvons écrire :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0),$$

avec une fonction-reste satisfaisant  $\psi(z) \rightarrow 0$  lorsque  $z \rightarrow z_0$ . Or comme les premiers termes affines  $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$  possèdent la primitive holomorphe évidente :

$$f(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2} f'(z_0)(z - z_0)^2,$$

un énoncé vu au chapitre précédent et rappelé dans l'introduction nous offre, pour tout  $n \geq 0$ , l'annulation de leur intégrale sur  $\partial T_n$ , donc il ne reste plus que :

$$\int_{\partial T_n} f(z) dz = 0 + 0 + \int_{\partial T_n} \psi(z)(z - z_0) dz \quad (n \geq 0).$$

Dans ces intégrales,  $z_0$  appartient au triangle fermé  $T_n$  et  $z$  se promène sur son bord  $\partial T_n$ , d'où :

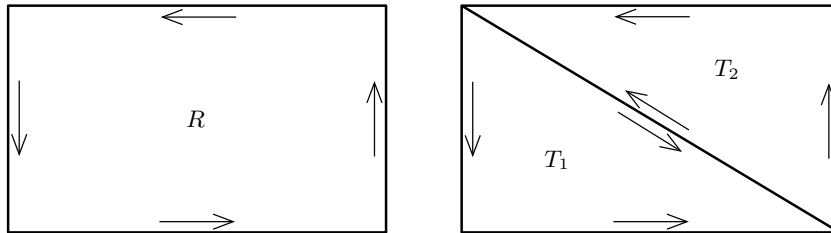
$$|z - z_0| \leq d_n = \frac{1}{2^n} d_0.$$

Comme le diamètre de  $T_n$  tend vers zéro :

$$\varepsilon_n := \sup_{z \in T_n} |\psi(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Toutes ces estimations nous permettent enfin d'exprimer la synthèse terminale sous la forme d'un calcul vertical conclusif :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial T_0} f(z) dz \right| &\leq 4^n \left| \int_{\partial T_n} f(z) dz \right| \\ &= 4^n \left| \int_{\partial T_n} \psi(z)(z - z_0) dz \right| \\ &\leq 4^n \varepsilon_n d_n p_n \\ &= 4^n \varepsilon_n \frac{d_0}{2^n} \frac{p_0}{2^n} \\ &= \varepsilon_n d_0 p_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad \square$$



**Corollaire 2.3.** Si une fonction  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  est holomorphe dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$  qui contient un rectangle fermé  $R = \overline{R} \subset \Omega$ , alors :

$$0 = \int_{\partial R} f(z) dz.$$

*Preuve.* C'est immédiat, puisque nous pouvons découper en deux triangles ce rectangle le long d'une de ses diagonales, et constater que :

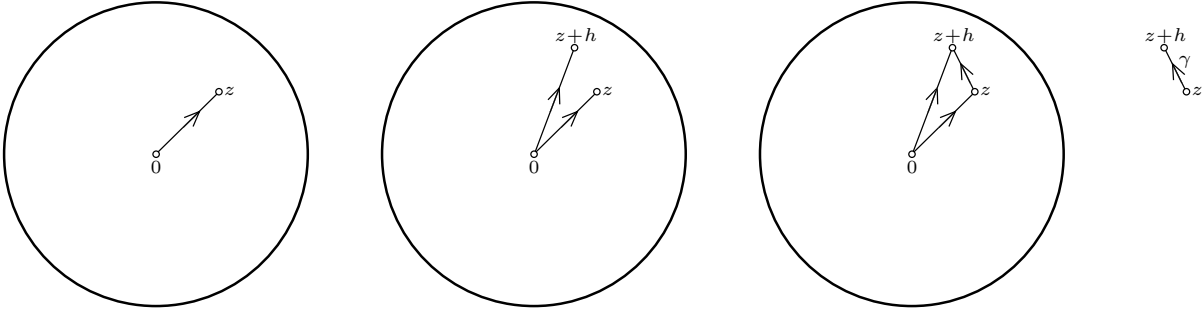
$$\int_{\partial R} f(z) dz = \int_{\partial T_1} f(z) dz + \int_{\partial T_2} f(z) dz = 0 + 0. \quad \square$$

### 3. Existence locale de primitives et théorèmes de Cauchy dans des disques

Une première conséquence du théorème de Goursat est l'existence de primitives dans la situation géométrique la plus simple possible.

**Théorème 3.1. [Cauchy 1]** *Une fonction  $f \in \mathcal{O}(\Delta)$  holomorphe dans un disque ouvert  $\Delta \subset \mathbb{C}$  y possède toujours une primitive holomorphe  $F \in \mathcal{O}(\Delta)$  avec  $F' = f$ .*

*Démonstration.* Après une translation, nous pouvons supposer que ce disque  $\Delta \ni 0$  est centré à l'origine.



Pour  $z \in \Delta$  quelconque, en notant  $[0, z]$  le segment fermé allant de 0 à  $z$ , lequel est visiblement contenu dans  $\Delta$ , intégrons :

$$F(z) := \int_{[0, z]} f(\zeta) d\zeta,$$

pour définir de manière inambiguë une fonction  $F: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ , et vérifions que  $F$  est  $\mathbb{C}$ -différentiable en tout point, de dérivée  $F' = f$ .

Avec  $h \in \mathbb{C}$  assez petit pour que  $z + h \in \Delta$ , exprimons donc la différence :

$$F(z + h) - F(z) = \int_{[0, z+h]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[0, z]} f(\zeta) d\zeta.$$

Mais n'y aurait-il pas un triangle à la Goursat pour simplifier tout cela ?

Oui, car par convexité de  $\Delta$ , le troisième segment  $[z, z + h]$  est contenu dans  $\Delta$ , tout aussi bien que le triangle fermé de sommets  $0, z, z + h$ , et alors grâce à Goursat (exercice visuel) :

$$F(z + h) - F(z) = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta,$$

où l'on a, pour désalourdir, abrégé  $\gamma := [z, z + h]$ .

Or puisque  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  est  $\mathbb{C}$ -différentiable, donc continue, nous pouvons écrire :

$$f(\zeta) = f(z) + \psi(\zeta),$$

avec une fonction-reste  $\psi(\zeta) \rightarrow 0$  lorsque  $\zeta \rightarrow z$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= \int_{\gamma} f(z) d\zeta + \int_{\gamma} \psi(\zeta) d\zeta \\ &= f(z) \int_{\gamma} 1 d\zeta + \int_{\gamma} \psi(\zeta) d\zeta \\ &= f(z) h + \int_{\gamma} \psi(\zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

et comme la fonction constante 1 possède la primitive holomorphe évidente  $\zeta$ , un théorème vu au chapitre qui précède montre que la première intégrale vaut  $h$ .

Mais alors en majorant le deuxième terme par :

$$\left| \int_{\gamma} \psi(\zeta) d\zeta \right| \leq \sup_{\zeta \in \gamma} |\psi(\zeta)| |h|,$$

nous concluons sans effort :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= f(z) + \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\gamma} |\psi(\zeta)| \\ &= f(z). \end{aligned}$$

□

Ce Théorème 3.1 implique donc que les fonctions holomorphes dans un ouvert quelconque  $\Omega \subset \mathbb{C}$  possèdent toujours des primitives *locales*, c'est-à-dire définies dans des disques  $\Delta \subset \Omega$ . La suite des événements mathématiques va montrer que ce théorème est non seulement vrai pour des disques, mais aussi pour beaucoup de régions ayant d'autres formes, et c'est là que Géométrie et Topologie vont s'inviter sans prévenir chez Dame Analyse.

**Théorème 3.2. [Cauchy 2]** *Si une fonction  $f \in \mathcal{O}(\Delta)$  est holomorphe dans un disque ouvert  $\Delta \subset \mathbb{C}$ , alors :*

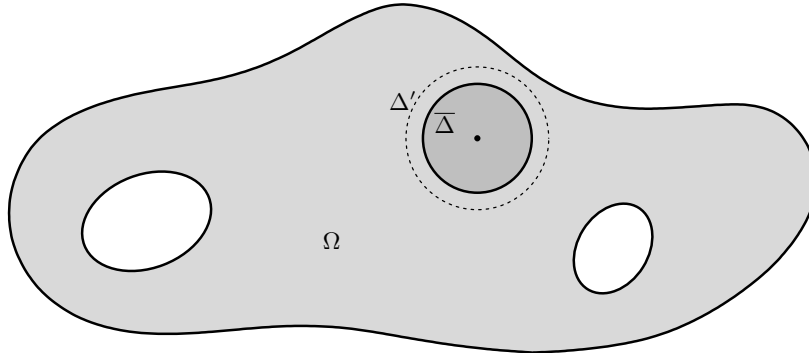
$$0 = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta,$$

*pour toute courbe fermée  $\gamma \subset \Delta$ .*

*Preuve.* Puisque  $f$  possède une primitive  $F \in \mathcal{O}(\Delta)$ , avec  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$  satisfaisant  $\gamma(0) = \gamma(1)$ , un théorème du chapitre qui précède — mobilisation mentale ! — s'applique directement :

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0.$$

□



**Théorème 3.3. [Cauchy 3]** *Si une fonction  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  est holomorphe dans un ouvert  $\Omega \supset C \cup \Delta$  contenant un cercle  $C$  ainsi que son disque intérieur  $\Delta$ , alors :*

$$0 = \int_C f(\zeta) d\zeta.$$

*Preuve.* Puisqu'il existe un disque ouvert intercalé :

$$C \cup \Delta = \overline{\Delta} \subset \Delta' \subset \Omega,$$

le théorème précédent s'applique immédiatement à la courbe  $\gamma := C$  — trop facile !  $\square$

#### 4. Contours élémentaires

Au-delà des cercles, nous commençons à avoir l'intuition que pour des fonctions holomorphes  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  définies dans des voisinages ouverts de contours élémentaires fermés simples  $\Gamma$  :

$$\Omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\text{int}},$$

lesquels bordent un ouvert borné  $\Gamma_{\text{int}}$  d'après le théorème de Jordan (admis temporairement), on doit encore avoir :

$$0 = \int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta.$$

Mais attention ! Il est important de supposer que :

- $\Gamma$  est une courbe fermée simple (au moins  $\mathcal{C}^1$  par morceaux) ;
- $\Omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\text{int}}$  ;

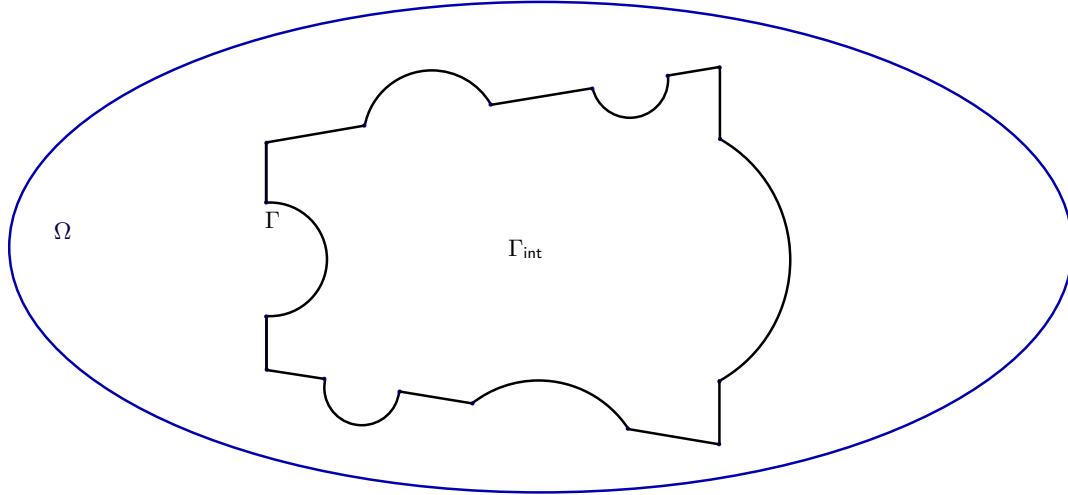
car sinon, l'intégrale en question peut être *non* nulle, à cause de singularités éventuelles de  $f$  dans  $\Gamma_{\text{int}}$ .

**Exemple 4.1.** En revenant à un exemple discuté à la fin du chapitre précédent, soit la fonction  $f(z) := \frac{1}{z}$ , holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , soit le disque unité  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  à bord le cercle unité  $\partial\mathbb{D} := \{|z| = 1\}$ . Ici évidemment,  $[\partial\mathbb{D}]_{\text{int}} = \mathbb{D}$ , mais  $f$  n'est *pas* holomorphe dans un voisinage ouvert de  $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$ , et d'ailleurs, son intégrale sur  $\partial\mathbb{D}$  ne vaut *pas* zéro :

$$0 \neq 2i\pi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{z} dz = \int_{\partial\mathbb{D}} f(z) dz. \quad \square$$

Ainsi, dans le théorème de Cauchy, il est crucial que  $\Gamma_{\text{int}}$  ne contienne aucune singularité de  $f$ . À l'avance, énonçons-en une version très générale, que nous ne démontrerons que dans un chapitre spécialement dédié. Rappelons que l'image d'un compact par une application continue est toujours un compact, donc une courbe de la forme  $\Gamma = z([0, 1])$  avec  $z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  continue, est toujours compacte.





**Théorème 4.2. [Jordan, Cauchy 4]** Si  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  est une courbe fermée simple  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ , alors :

$\mathbb{C} \setminus \Gamma = \Gamma_{\text{int}} \cup \Gamma_{\text{ext}}$  consiste en exactement deux composantes connexes ouvertes ;

$\overline{\Gamma_{\text{int}}} = \Gamma_{\text{int}} \cup \Gamma = \text{compact} = \text{fermé-borné}$  ;

$\overline{\Gamma_{\text{ext}}} = \Gamma_{\text{ext}} \cup \Gamma = \text{non compact}$ .

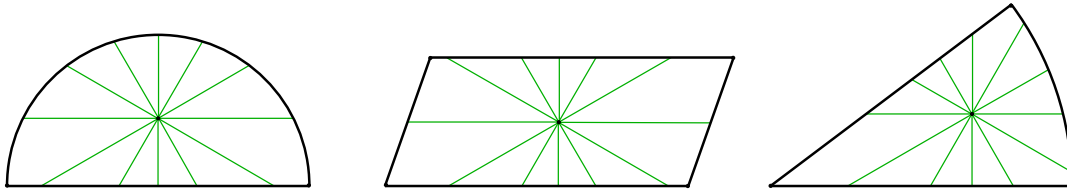
De plus, pour toute fonction  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  holomorphe dans un ouvert  $\Omega \supset \Gamma_{\text{int}} \cup \Gamma$  qui contient l'adhérence de la composante relativement compacte  $\Gamma_{\text{int}}$ , on a :

$$0 = \int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta.$$

Contentons-nous, ici, de vérifier ce théorème pour des contours élémentaires, « peu compliqués » sur le plan géométrique.

**Définition 4.3.** Un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$  est dit *étoilé* en l'un de ses points  $z_0 \in \Omega$  si, pour tout point  $z \in \Omega$ , le segment  $[z_0, z] \subset \Omega$  est contenu en lui. On dira que  $\Omega$  est *étoilé* s'il est étoilé en au moins un point.

Dans ce cas, la topologie est assez simple. Donnons trois exemples d'ouverts étoilés, qui sont en fait convexes.



**Définition 4.4.** Un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$  est dit *convexe* si, pour tous  $z_1, z_2 \in \Omega$ , le segment  $[z_1, z_2] \subset \Omega$  est contenu en lui.

On vérifie (exercice) qu'un ouvert convexe est étoilé en chacun de ses points.

**Théorème 4.5. [Cauchy étoilé]** Dans un ouvert étoilé  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , les deux propriétés suivantes sont vraies.

(1) Toute fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  possède une primitive holomorphe  $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ , c'est-à-dire avec  $F' = f$ .

(2) Pour toute courbe fermée  $\gamma \subset \Omega$  qui est  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ , on a :

$$0 = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta \quad (\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)).$$

En particulier, si  $\Gamma \subset \Omega$  est un contour fermé simple  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  avec  $\Gamma_{\text{int}} \subset \Omega$ , alors  $0 = \int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta$ .

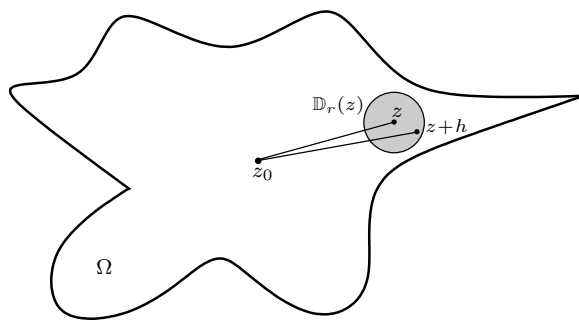
*Démonstration.* Soit  $z_0 \in \Omega$  un point en lequel  $\Omega$  est étoilé. En un point quelconque  $z \in \Omega$ , définissons en intégrant sur un segment :

$$F(z) := \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta,$$

cette intégrale ayant un sens, puisque  $[z_0, z] \subset \Omega$ . Fixons  $z \in \Omega$ , prenons  $r > 0$  assez petit pour que  $\mathbb{D}_r(z) \subset \Omega$ , et regardons les quotients différentiels :

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h},$$

pour  $z+h \in \mathbb{D}_r(z)$ , c'est-à-dire pour  $|h| < r$ .



Comme  $\Omega$  est étoilé,  $[z_0, z+h] \subset \Omega$ , et même, le triangle fermé tout entier de sommets  $z_0, z, z+h$  est contenu dans  $\Omega$  (exercice mental). Le théorème de Goursat donne alors :

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta,$$

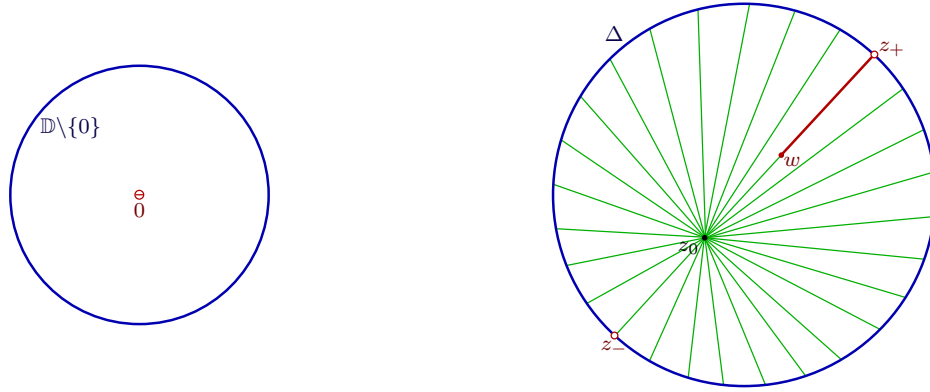
et ensuite, le même argument que dans la démonstration du Théorème 3.1 montre l'existence de :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

Enfin, nous avons déjà vu que l'existence d'une primitive donnait gratuitement (2).  $\square$

Le plan complexe épointé  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  n'est étoilé en aucun de ses points, sinon, s'il l'était, le Théorème 4.5 (2) précédent, appliqué à la fonction  $f(\zeta) := \frac{1}{\zeta}$ , intégrée sur le cercle unité  $z(t) := e^{2i\pi t}$ , contredirait l'Exemple 4.1.

Mieux encore, il est préférable de se convaincre visuellement que ni  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , ni  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$  ne sont étoilés. Pour les rendre étoilés, il faut en fait retrancher (beaucoup) plus qu'un seul point.



**Exemple 4.6.** Soit  $\Delta \subset \mathbb{C}$  un disque ouvert non vide, soit un diamètre :

$$[z_-, z_+] \subset \overline{\Delta},$$

avec  $z_-, z_+ \in \partial\Delta$ , et soit un point quelconque :

$$w \in ]z_-, z_+[.$$

Alors l'ouvert :

$$\Omega := \Delta \setminus [w, z_+[$$

est étoilé (exercice visuel) en chaque point :

$$z_0 \in ]z_-, w[$$

et n'est étoilé en aucun autre point (exercice supplémentaire).

Dans la suite, nous aurons besoin d'une version-clé du théorème de Cauchy :

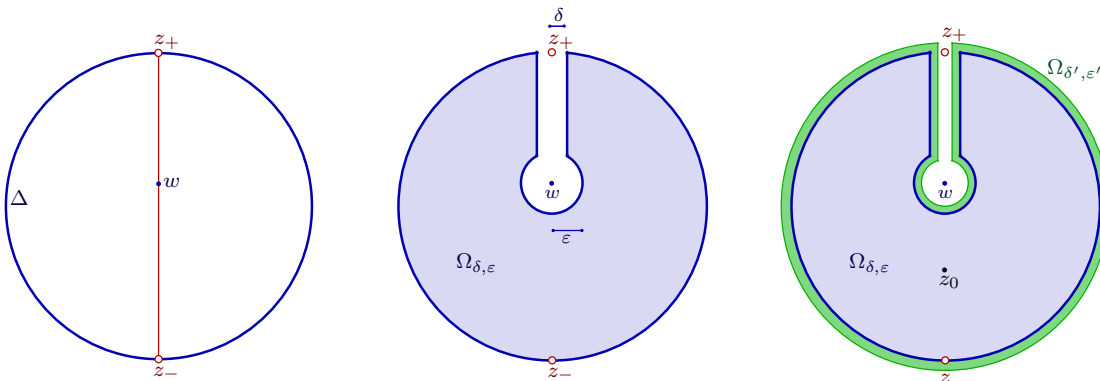
$$0 = \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} f(\zeta) d\zeta,$$

pour une sorte d'« épaisseur » d'un tel segment  $[w, z_+[ \subset \Delta$ , le long d'un contour  $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$  qui ressemble à la section d'un trou de serrure, que nous allons commencer à définir comme suit.

Soit donc  $\Delta \subset \mathbb{C}$  un disque ouvert non vide, soit un point quelconque  $w \in \Delta$  distinct du centre, et soit le diamètre unique  $]z_-, z_+[ \ni w$  de  $\Delta$  avec  $z_-, z_+ \in \partial\Delta$  ; quand  $w$  est le centre de  $\Delta$ , on choisit un diamètre quelconque de  $\Delta$ .

Soient aussi deux nombres réels :

$$0 < \delta < \varepsilon \ll \text{rayon}(\Delta).$$



Comme sur la figure, soit  $\mathbb{D}_\varepsilon(w)$  le disque ouvert de rayon  $\varepsilon > 0$  centré en  $w$ , et soit le tunnel ou canal de largeur étroite  $2\delta$  autour du segment  $[w, z_+]$ . Nous construisons ainsi un certain ouvert  $\Omega_{\delta,\varepsilon}$  qui est l'intérieur de Jordan évident de son bord :

$$\Gamma_{\delta,\varepsilon} := \partial\Omega_{\delta,\varepsilon},$$

lequel consiste en une courbe fermée simple  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ . Pour la suite, il ne sera pas nécessaire de préciser explicitement une paramétrisation de cette courbe  $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ , donc nous nous en dispenserons.

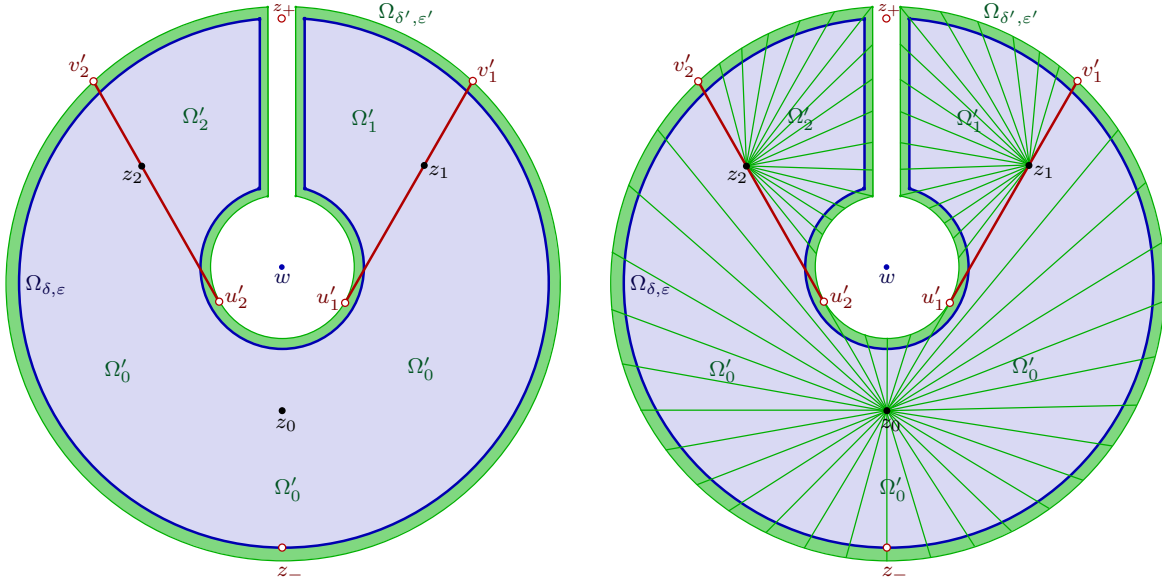
Ensuite, soit  $\Omega \supset \overline{\Omega_{\delta,\varepsilon}}$  un ouvert quelconque, non dessiné. Comme sur la figure, nous pouvons « épaissir légèrement » l'ouvert  $\Omega_{\delta,\varepsilon}$  en un sur-ouvert  $\Omega_{\delta',\varepsilon'}$  toujours contenu dans  $\Omega$  :

$$\Omega \supset \overline{\Omega_{\delta',\varepsilon'}} \supset \Omega_{\delta',\varepsilon'} \supset \overline{\Omega_{\delta,\varepsilon}} \supset \Omega_{\delta,\varepsilon},$$

associé, par exemple, à des quantités toujours très petites :

$$0 < \delta' < \delta < \varepsilon' < \varepsilon \ll \text{rayon}(\Delta),$$

avec  $\delta' \approx \delta$  très proche de  $\delta$ , et avec  $\varepsilon' \approx \varepsilon$  également.



**Théorème 4.7. [Cauchy 5, Trou de Serrure, Clé du Ciel]** Pour toute fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  dans un ouvert  $\Omega \supset \overline{\Omega_{\delta,\varepsilon}}$ , on a :

$$0 = \int_{\partial\Omega_{\delta,\varepsilon}} f(\zeta) d\zeta.$$

En première lecture, il est conseillé d'admettre cet énoncé, et de passer directement à la Section 5 suivante.

*Démonstration.* Il suffit de trouver une primitive holomorphe  $F' = f$  dans  $\Omega_{\delta',\varepsilon'} \supset \partial\Omega_{\delta,\varepsilon}$ .

Ainsi, choisissons un léger épaississement  $\Omega_{\delta',\varepsilon'}$  de  $\Omega_{\delta,\varepsilon}$ . Prenons un point :

$$z_0 \in ]z_-, w[ \setminus \mathbb{D}_\varepsilon(w),$$

proche du milieu de ce segment. À cause du disque excisé autour de  $w$ , l'ouvert  $\Omega_{\delta,\varepsilon}$  n'est pas étoilé en  $z_0$ , mais soyons astucieux !

Soit le sous-disque fermé  $\overline{\mathbb{D}}_{\varepsilon'}(w) \subset \mathbb{D}_\varepsilon(w)$ . En partant de  $z_0$ , traçons les deux demi-droites qui lui sont tangentes, et pointons les deux points de tangence :

$$u'_1 \in \partial \mathbb{D}_{\varepsilon'}(w) \quad \text{et} \quad u'_2 \in \partial \mathbb{D}_{\varepsilon'}(w),$$

ainsi que les deux points d'intersection avec le bord de l'ouvert trou de serrure épaissi, qui sont situés au-delà :

$$v'_1 \in \partial \Omega_{\delta', \varepsilon'} \quad \text{et} \quad v'_2 \in \partial \Omega_{\delta', \varepsilon'}.$$

Les deux segments ouverts correspondants sont alors contenus dans cet ouvert :

$$]u'_1, v'_1[ \subset \Omega_{\delta', \varepsilon'} \quad \text{et} \quad ]u'_2, v'_2[ \subset \Omega_{\delta', \varepsilon'}.$$

Prenons aussi deux points :

$$z_1 \in ]u'_1, v'_1[ \quad \text{et} \quad z_2 \in ]u'_2, v'_2[,$$

proches des milieux de ces segments. Visiblement, ces deux segments décomposent  $\Omega_{\delta', \varepsilon'}$  en trois composantes connexes ouvertes :

$$\Omega'_0 \ni z_0, \quad \Omega'_1 \ni z_1, \quad \Omega'_2 \ni z_2,$$

à savoir :

$$\Omega_{\delta', \varepsilon'} = \Omega'_0 \cup \Omega'_1 \cup \Omega'_2 \cup ]u'_1, v'_1[ \cup ]u'_2, v'_2[.$$

Maintenant, définissons les valeurs de la primitive recherchée  $F$  de  $f$  en tous les points  $z \in \Omega_{\delta', \varepsilon'}$ , donc en particulier, en tous les points  $z \in \Gamma_{\delta, \varepsilon} \subset \Omega_{\delta', \varepsilon'}$  du contour d'intégration qui nous intéresse, comme suit.

- Pour  $z \in \Omega'_0 \cup ]u'_1, v'_1[ \cup ]u'_2, v'_2[$ , intégrons simplement le long d'un segment droit :

$$F(z) := \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta.$$

Observons que pour  $z \in ]u'_1, v'_1[$  ou pour  $z \in ]u'_2, v'_2[$ , le segment sur lequel on intègre passe par le point  $u'_1 \notin \Omega_{\delta', \varepsilon'}$  ou par le point  $u'_2 \notin \Omega_{\delta', \varepsilon'}$ , mais en ces points,  $f$  est quand même définie, puisque  $\Omega \supset \overline{\Omega}_{\delta', \varepsilon'}$ , par hypothèse. Observons aussi que  $\Omega'_0$  est, intentionnellement, étoilé en  $z_0$ .

- Pour  $z \in \Omega'_1$ , passons d'abord par  $z_1$  :

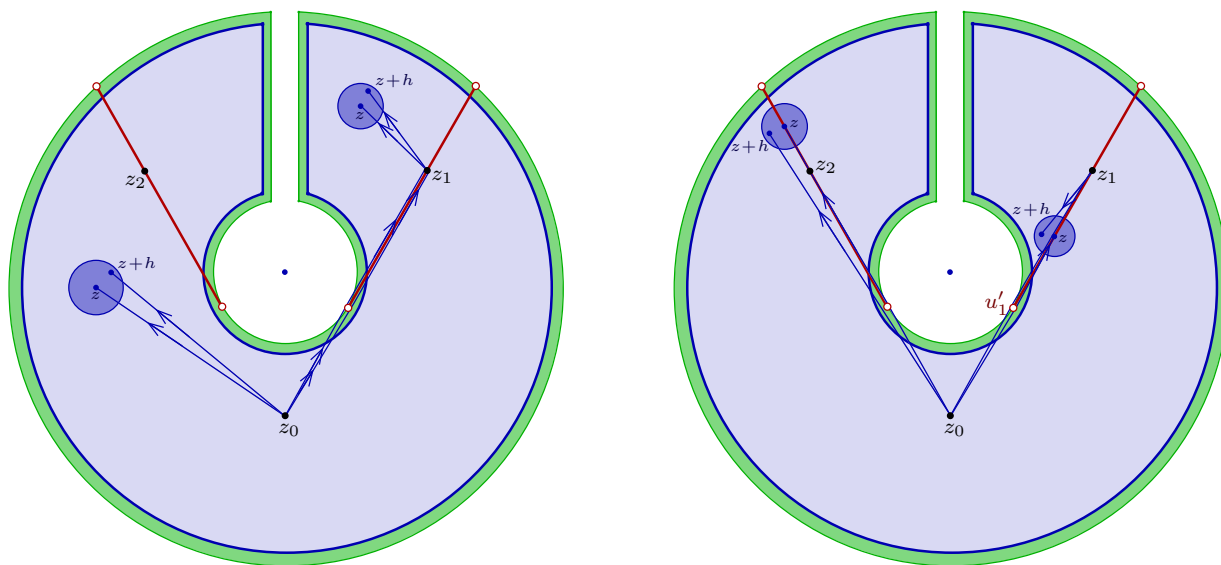
$$F(z) := \int_{[z_0, z_1]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z_1, z]} f(\zeta) d\zeta.$$

Observons que pour tout  $z \in \Omega'_1$ , le segment  $]z_1, z[ \subset \Omega'_1$  est contenu dans  $\Omega'_1$ , puisque  $z_1$  n'a pas été choisi trop proche du disque  $\overline{\mathbb{D}}_{\varepsilon'}(w)$ .

- Symétriquement, pour  $z \in \Omega'_2$ , passons d'abord par  $z_2$  :

$$F(z) := \int_{[z_0, z_2]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z_2, z]} f(\zeta) d\zeta.$$

Ainsi,  $F$  est définie partout dans  $\Omega_{\delta', \varepsilon'}$ , uniquement et sans ambiguïté.



**Assertion 4.8.** En tout point  $z \in \Omega_{\delta', \varepsilon'}$ , on a pour tous  $h \in \mathbb{C}$  assez petits avec  $[z, z+h] \subset \Omega_{\delta', \varepsilon'}$  :

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta.$$

*Démonstration.* Quand  $z \in \Omega'_0$ , pour tout  $h \in \mathbb{C}$  suffisamment petit, i.e. pour  $|h| < r$  avec  $r > 0$  petit, on a  $z+h \in \Omega'_0$ , et même, tout le triangle fermé de sommets  $z_0, z, z+h$  est contenu dans  $\Omega'_0$ , donc le Théorème 2.1 de Goursat donne bien :

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z_0, z+h]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta = \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta.$$

Quand  $z \in \Omega'_1$  — et symétriquement aussi quand  $z \in \Omega'_2$  —, pour  $|h| < r$  avec  $r > 0$  assez petit, d'où  $z+h \in \Omega'_1$  encore, on calcule :

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= \underbrace{\int_{[z_0, z_1]} f(\zeta) d\zeta}_{\text{[Goursat!]}} + \int_{[z_1, z+h]} f(\zeta) d\zeta - \underbrace{\int_{[z_0, z_1]} f(\zeta) d\zeta}_{\text{[Goursat!]}} - \int_{[z_1, z]} f(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

puisque le triangle de sommets  $z_1, z, z+h$  est toujours contenu dans  $\Omega'_1 \cup \{z_1\}$ .

Mais que se passe-t-il lorsque  $z \in ]u'_1, v'_1[$  — et symétriquement aussi lorsque  $z \in ]u'_2, v'_2[$  — ?

Visiblement,  $z+h$  peut se trouver de l'un, ou de l'autre côté de la « frontière rouge » (mexicaine ?).

• **Premier cas :** si  $z+h \in \Omega'_0 \cup ]u'_2, v'_2[$  avec  $|h| < r$  petit, alors le triangle fermé de sommets  $z_0, z, z+h$  est encore contenu dans  $\overline{\Omega_{\delta', \varepsilon'}} \subset \Omega$  où  $f$  est holomorphe, donc :

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= \int_{[z_0, z+h]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta \\ \text{[Goursat !]} \quad &= \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

- Deuxième cas : si  $z + h \in \Omega'_1$  avec  $|h| < r$  petit, alors on calcule :

$$\begin{aligned}
 F(z+h) - F(z) &= \int_{[z_0, z_1]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z_1, z+h]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta \\
 &= \underbrace{\int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta}_{\text{[Goursat !]}} + \int_{[z, z_1]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z_1, z+h]} f(\zeta) d\zeta - \underbrace{\int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta}_{\text{[Goursat !]}} \\
 &= \int_{[z, z_1]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z_1, z+h]} f(\zeta) d\zeta \\
 &= \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta,
 \end{aligned}$$

parce que le triangle fermé de sommets  $z, z_1, z+h$  est toujours contenu dans  $\Omega'_1 \cup ]u'_1, v'_1[$  où  $f$  est holomorphe.  $\square$

Grâce à cette formule intégrale pour la différence, nous concluons comme précédemment que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z). \quad \square$$

Avant d'appliquer ce Théorème 4.7, illustrons la méthode de calcul d'intégrales complexes dans quelques cas spectaculaires.

## 5. Exemples de calculs d'intégrales réelles par la méthode complexe

Commençons par démontrer la formule sympathique :

$$e^{-\pi \xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi \xi x} dx,$$

valable pour tout nombre réel  $\xi \in \mathbb{R}$ . Ceci nous fournira une nouvelle démonstration du fait remarquable, déjà vu dans le cours d'*Analyse de Fourier*, que la fonction gaussienne  $e^{-\pi x^2}$  est égale à sa transformée de Fourier.

Pour  $\xi = 0$ , cette formule est précisément l'intégrale connue :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx,$$

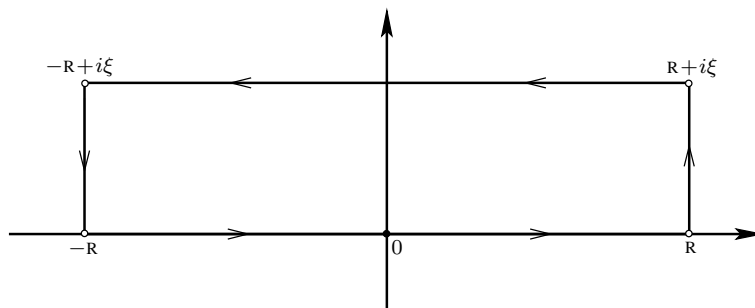
qui se démontre fort astucieusement en en prenant le carré et en passant aux coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
 \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx \right)^2 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} dy \right) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r dr d\theta \\
 &= \int_0^{\infty} 2\pi e^{-\pi r^2} r dr \\
 &= \left[ -e^{-\pi r^2} \right]_0^{\infty} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Pour fixer les idées, supposons maintenant que  $\xi > 0$ , et introduisons la fonction de variable complexe :

$$f(z) := e^{-\pi z^2},$$

qui est holomorphe *entière*, c'est-à-dire holomorphe dans le plan complexe  $\mathbb{C}$  tout entier.



En particulier, pour tout  $R > 0$ , cette fonction est holomorphe dans le voisinage ouvert  $\mathbb{C}$  du rectangle fermé ayant pour quatre sommets  $-R$ ,  $R$ ,  $R + i\xi$ ,  $-R + i\xi$ . Notons  $\gamma_R$  son bord, orienté dans le sens trigonométrique direct. Le Théorème 4.5 de Cauchy étoilé donne :

$$0 = \int_{\gamma_R} f(z) dz.$$

Des quatre morceaux en lesquels se découpe cette intégrale, le premier est simplement :

$$\int_{-R}^R e^{-\pi x^2} dx,$$

et il converge donc vers 1 lorsque  $R \rightarrow \infty$ .

Le deuxième morceau est l'intégrale sur le segment vertical à droite :

$$I_R := \int_0^{\xi} f(R + iy) i dy = \int_0^{\xi} e^{-\pi(R^2 + 2iRy - y^2)} i dy.$$

Or par chance cette intégrale tend vers 0 lorsque  $R \rightarrow \infty$ , puisque nous pouvons l'estimer (exercice visuel) par :

$$|I_R| \leq \xi e^{-\pi R^2 + \pi \xi^2},$$



sachant que  $\xi$ , ici, est fixé. De manière similaire, l'intégrale sur le segment vertical à gauche tend aussi vers 0 lorsque  $R \rightarrow \infty$ .

Enfin, l'intégrale sur le segment horizontal surélevé ressemble fort à celle qui nous intéresse :

$$\int_R^{-R} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx = -e^{\pi\xi^2} \int_{-R}^R e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi\xi x} dx.$$

Finalement, en prenant donc la limite pour  $R \rightarrow \infty$  dans l'identité de Cauchy écrite plus haut, nous obtenons :

$$0 = 1 + 0 - e^{\pi\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi\xi x} dx + 0,$$

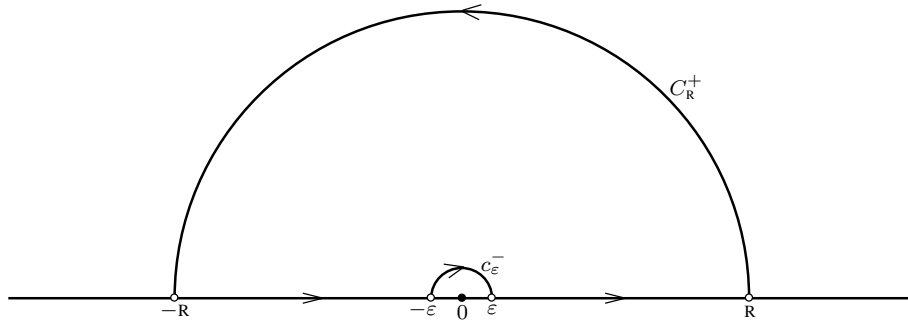
ce qui est la formule annoncée dans le cas où  $\xi > 0$  — évidemment, le cas  $\xi < 0$  se traite de la même manière avec des rectangles situés en-dessous de l'axe des abscisses.

Cette technique de déplacement et de création de contours qui tendent en partie vers l'infini possède de très nombreuses applications. Observons que nous avons surélevé, dans le plan complexe, le lieu d'intégration réelle  $] -\infty, \infty[$ , utilisé ensuite le théorème de Cauchy, et fait voir que certaines contributions s'évanouissaient.

Les plus beaux exercices d'Analyse Complexe font découvrir de multiples exemples d'intégrales qu'il semble impossible de calculer en recherchant des changements de variables astucieux, mais qui deviennent simples et transparentes quand on s'autorise à prendre son envol vers l'imaginaire.

Voici alors un autre exemple, classique :

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$



Pour atteindre cette formule, introduisons la fonction de variable complexe holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  :

$$f(z) := \frac{1 - e^{iz}}{z^2},$$

et intégrons-la sur le bord d'un grand demi-disque posé à plat sur l'axe des abscisses, tout en le perforant un peu en son centre afin d'éviter la singularité  $z = 0$  de  $f(z)$ . Notons donc  $C_\varepsilon^-$  le petit demi-cercle de rayon  $\varepsilon > 0$  orienté négativement, ainsi que  $C_R^+$  celui de grand rayon  $R > 0$  orienté positivement.

Dans ce contexte, une adaptation du Théorème 4.7 de Cauchy discuté dans les précédents paragraphes offre alors aussi l'annulation de l'intégrale de  $f$  le long de ce contour :

$$0 = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx + \int_{c_\varepsilon^-} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz + \int_{\varepsilon}^R \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx + \underbrace{\int_{C_R^+} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz}_{\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0}.$$

Commençons ici, via l'estimée :

$$\left| \frac{1 - e^{iz}}{z^2} \right| \leq \frac{2}{|z|^2},$$

par observer que la dernière intégrale, majorée en module par  $\frac{2}{R^2} \pi R$ , s'évanouit lorsque  $R \rightarrow \infty$ . Par conséquent :

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx = - \int_{c_\varepsilon^-} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz.$$

Ensuite par développement limité, nous avons :

$$f(z) = \frac{-i}{z} + g(z),$$

avec une fonction-reste  $g(z)$  lisse, donc bornée près de l'origine. Paramétrons ensuite  $c_\varepsilon^-$  par  $z = \varepsilon e^{i\theta}$  avec  $\theta$  décroissant de  $\pi$  vers 0, prenons la différentielle  $dz = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$ , calculons :

$$\begin{aligned} \int_{c_\varepsilon^-} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz &= \int_{\pi}^0 \frac{-i}{\varepsilon e^{i\theta}} i \varepsilon e^{i\theta} d\theta + \int_{\pi}^0 g(\varepsilon e^{i\theta}) i \varepsilon e^{i\theta} d\theta \\ &= -\pi + O(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\pi, \end{aligned}$$

et revenons à l'identité abandonnée en chemin plus haut :

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx = \pi.$$

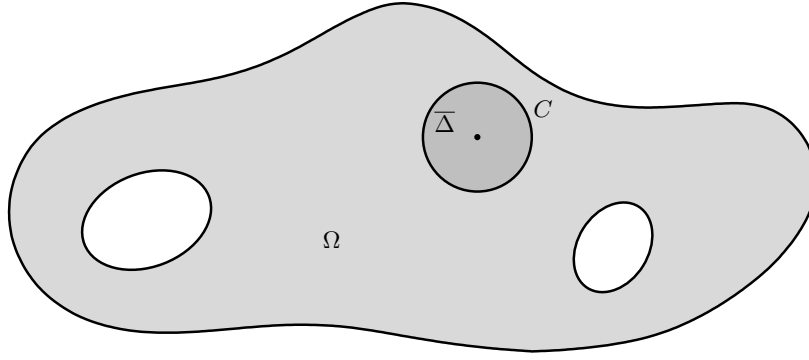
Un exercice visuel (ou un calcul à la sauvette, autorisé !) convainc que cette somme d'intégrales est en fait réelle et vaut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \pi.$$

Par parité de la fonction réelle intégrée ici, nous atteignons la formule annoncée.

## 6. Formule de représentation intégrale de Cauchy

Les formules de représentation intégrale jouent un rôle important en mathématiques, car elles permettent de retrouver les valeurs d'une fonction sur un grand ensemble, souvent ouvert, à partir de la seule connaissance de ses valeurs sur un plus petit ensemble, en général le bord de l'ouvert. Dans le cours d'*Analyse de Fourier*, nous avons vu que le noyau de Poisson sur le cercle unité était un bon noyau qui approxime l'identité pour la convolution. Ce noyau de Poisson est aussi intimement lié aux fonctions holomorphes, comme le montrent l'Exercice 17 et l'Exercice 18.



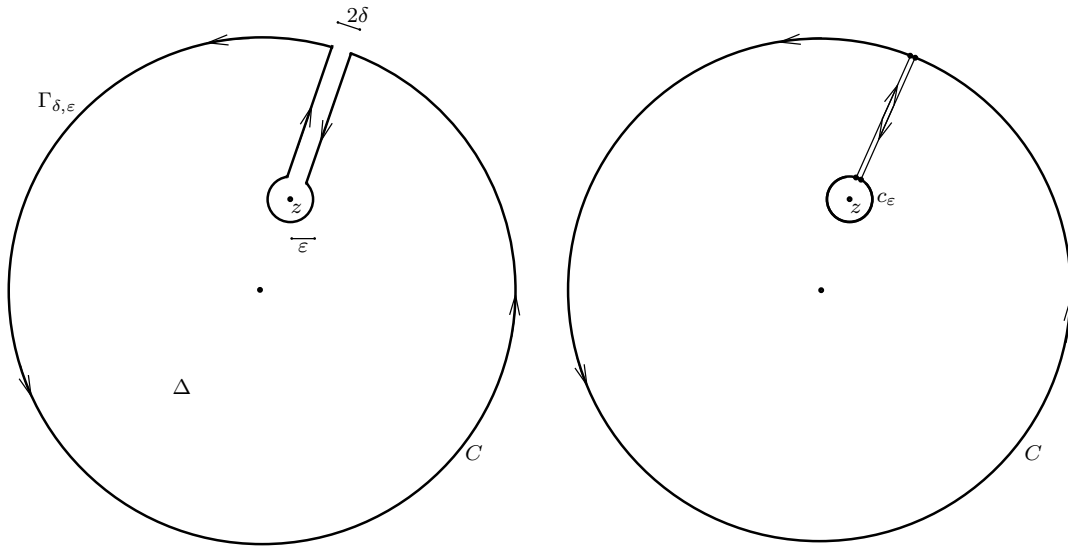
**Théorème 6.1. [Formule de Cauchy 6]** Soit  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  une fonction holomorphe dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Alors pour tout disque fermé  $\overline{\Delta} \subset \Omega$  qui est contenu dans l'ouvert, les valeurs de  $f$  dans  $\Delta$  s'expriment par l'intégrale suivante sur le cercle-bord  $C := \partial\Delta$  :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\forall z \in \Delta).$$

La fonction-poids  $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$  qui dépend du point  $z$  en lequel on souhaite retrouver la valeur de  $f$ , est souvent appelée *noyau de Cauchy*.

Le Théorème 4.7 un peu « technique » a été préparé à l'avance pour obtenir cette formule.

*Démonstration.* Fixons  $z \in \Delta$  et introduisons, pour  $0 < \delta < \varepsilon$  petits, le contour suivant  $\Gamma_{\delta, \varepsilon}$ , en forme de trou de serrure.



Ici,  $\delta$  est la largeur d'un couloir tracé en direction de  $z$ , et  $\varepsilon$  est le rayon d'un cercle centré en  $z$ . Puisque la fonction  $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  est holomorphe en-dehors du point  $\zeta = z$ , la formule Cauchy discutée dans la Section 4 — voir le Théorème 4.7 spécialement préparé à cette fin — donne l'annulation :

$$0 = \int_{\Gamma_{\delta, \varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Maintenant, faisons  $\delta \rightarrow 0$ , ce qui écrase le couloir jusqu'à ce que ses deux murs coïncident, et en utilisant la continuité de  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ , nous voyons que la somme des intégrales sur les deux murs égaux s'annule puisque l'orientation est opposée, et donc il ne reste plus que :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\delta, \varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{c_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \end{aligned}$$

où  $c_\varepsilon$  est le tout petit cercle de centre  $z$  et de rayon  $\varepsilon > 0$ , orienté positivement.

Ensuite, écrivons :

$$f(\zeta) = f(\zeta) - f(z) + f(z),$$

et prenons — juste pour le plaisir des yeux ! — la limite de tout cela lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$0 = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Or comme  $f$  est holomorphe au point  $z$ , ce quotient différentiel, qui possède donc une limite, reste nécessairement borné :

$$\left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| \leq M \quad (\exists M < \infty),$$

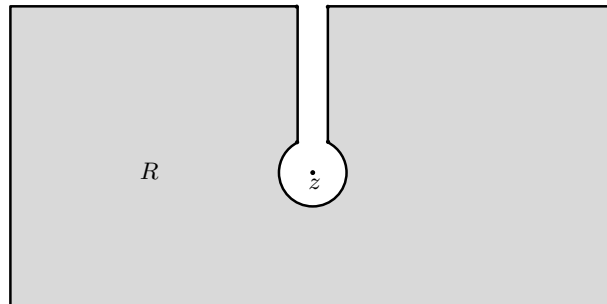
donc la deuxième intégrale au centre tend vers 0 lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , simplement parce qu'elle est majorée par  $M 2\pi \varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \left| \int_{c_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| &\leq M \int_{c_\varepsilon} |d\zeta| \\ &= M \text{ longueur}(c_\varepsilon) = M 2\pi \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour terminer la démonstration, il ne reste plus qu'à calculer la troisième intégrale. À cette fin, paramétrons le petit cercle  $c_\varepsilon$  par  $\zeta = z + \varepsilon e^{it}$  avec  $0 \leq t \leq 2\pi$ , d'où  $d\zeta = i\varepsilon e^{it} dt$ , ce qui offre la formule annoncée :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 0 - f(z) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}} dt \\ &= \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) i 2\pi. \end{aligned}$$

□



Cette formule de Cauchy dans un disque fermé se généralise aisément au cas d'un rectangle fermé  $\bar{R} \subset \Omega$ , avec des points  $z$  à l'intérieur  $R$  du rectangle en intégrant sur le bord  $\partial R$  du rectangle, car il suffit de percer un trou de serrure similaire dans le rectangle :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Eu égard au Théorème 4.2 non encore démontré, énonçons le résultat analogue qui constitue la forme la plus générale du théorème de représentation intégrale de Cauchy.

**Théorème 6.2. [Jordan, Cauchy]** *Si  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  est une courbe fermée simple  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ , et si  $\Omega \supset \Gamma_{\text{int}} \cup \Gamma$  est un ouvert la contenant ainsi que son intérieur de Jordan, alors pour toute fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ , on a en tout point intérieur :*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\forall z \in \Gamma_{\text{int}}),$$

tandis que pour les points extérieurs :

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\forall z \in \Omega \setminus (\Gamma \cup \Gamma_{\text{int}})).$$

Ce dernier cas où  $z \notin \bar{\Gamma}_{\text{int}}$  est en fait un corollaire direct dudit Théorème 4.2, puisqu'alors la fonction  $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  est holomorphe dans un certain voisinage ouvert  $\omega \supset \bar{\Gamma}_{\text{int}}$  assez 'resserré' pour que  $z \notin \omega$ . Nous démontrerons ce résultat ultérieurement.

**Corollaire 6.3.** *Pour tout disque fermé ou rectangle fermé contenu dans un ouvert du plan complexe  $\bar{\Delta}, \bar{R} \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ , et pour tout point extérieur  $z \in \Omega \setminus \bar{\Delta}, \bar{R}$ , on a :*

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad \square$$

## 7. Analyticité des fonctions holomorphes et principe d'unicité

Comme conséquence de la formule intégrale de Cauchy, nous parvenons à une des caractéristiques les plus frappantes des fonctions holomorphes, à savoir qu'elle sont indéfiniment dérivables, alors que leur définition requerrait seulement une dérivée (complexe) d'ordre 1, sans même demander la continuité de la dérivée, d'ailleurs.

**Théorème 7.1. [de régularité, Cauchy 7]** *Les fonctions holomorphes  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$  possèdent toujours une infinité de dérivées complexes. De plus, pour tout disque fermé  $\bar{\Delta} \subset \Omega$  contenu dans l'ouvert de bord le cercle  $C := \partial \Delta$ , on a en tout point intérieur  $z \in \Delta$  :*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Rappelons que nous orientons toujours les courbes — telles que le cercle  $C$  ici — dans le sens trigonométrique direct, c'est-à-dire que l'intérieur  $\Delta$  de la courbe  $C$  doit se situer du côté de la main gauche quand on se promène le long de  $C$ .

*Démonstration.* Pour  $n = 0$ , c'est la formule de Cauchy que nous venons d'établir.

Avec  $n \geq 1$  quelconque, supposons donc par récurrence que la formule est vraie pour une dérivée complexe d'ordre  $(n - 1)$  :

$$f^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2i\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta.$$

Pour  $h \in \mathbb{C}^*$  petit, nous devons alors estimer le quotient différentiel infinitésimal de  $f^{(n-1)}(z)$  et montrer qu'il possède une limite lorsque  $h \rightarrow 0$ .

Avec  $A := \frac{1}{\zeta - z - h}$  et  $B := \frac{1}{\zeta - z}$ , en utilisant la factorisation élémentaire :

$$A^n - B^n = (A - B) [A^{n-1} + A^{n-2} B + \dots + A B^{n-2} + B^{n-1}],$$

nous pouvons calculer en éliminant  $h$  au dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} &= \frac{(n-1)!}{2i\pi} \int_C f(\zeta) \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{(\zeta - z - h)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n} \right] d\zeta \\ &= \frac{(n-1)!}{2i\pi} \int_C f(\zeta) \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z} \right] \left( \sum_{0 \leq k \leq n-1} \frac{1}{(\zeta - z - h)^{n-1-k}} \frac{1}{(\zeta - z)^k} \right) d\zeta. \end{aligned}$$

Alors le point crucial est que  $\frac{1}{h}$  au dénominateur disparaît dans la simplification :

$$\frac{1}{h} \left[ \frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z} \right] = \frac{1}{h} \frac{\zeta - z - \zeta + z + h}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} = \frac{1}{\underline{h}_o} \frac{\underline{h}_o}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)},$$

ce qui conduit à l'intégration d'une fonction qui dépend maintenant continûment du paramètre  $h$  :

$$\frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} = \frac{(n-1)!}{2i\pi} \int_C f(\zeta) \frac{1}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} \left( \sum_{0 \leq k \leq n-1} \frac{1}{(\zeta - z - h)^{n-1-k}} \frac{1}{(\zeta - z)^k} \right) d\zeta,$$

et donc, lorsque  $h \rightarrow 0$ , nous obtenons bien grâce au théorème de continuité des intégrales à paramètre :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} &= \frac{(n-1)!}{2i\pi} \int_C f(\zeta) \frac{1}{(\zeta - z)^2} \left( \frac{n}{(\zeta - z)^{n-1}} \right) d\zeta \\ &= \frac{n!}{2i\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad \square \end{aligned}$$

Dans la suite, nous appellerons les formules de représentation que nous venons d'obtenir *formules intégrales de Cauchy*.

**Corollaire 7.2.** Si  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  est une fonction holomorphe dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , alors toutes ses  $\mathbb{C}$ -dérivées successives :

$$f', f'', \dots, f^{(n)}, \dots \in \mathcal{O}(\Omega)$$

sont aussi holomorphes dans  $\Omega$ . □

La conséquence la plus frappante de la formule intégrale de Cauchy est l'équivalence entre le fait d'être holomorphe, et le fait d'être localement développable en série entière convergente, équivalence promise dans le chapitre qui précède.

**Théorème 7.3. [d'analyticité, Cauchy 8]** Si  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  est une fonction holomorphe dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , alors en tout point  $z_0 \in \Omega$  et pour tout rayon  $r > 0$  tel que :

$$\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega,$$

la fonction  $f$  possède un développement en série infinie de Taylor entière :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

qui converge en tout point  $z \in \mathbb{D}_r(z_0)$ .

Si donc nous introduisons la distance de  $z_0$  au complémentaire  $\mathbb{C} \setminus \Omega := \mathbb{C} \setminus \Omega$  de l'ouvert :

$$\text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega) := \inf \{|z_0 - w| : w \in \mathbb{C} \setminus \Omega\},$$

la convergence a lieu quel que soit :

$$0 < r < \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega),$$

d'où en faisant tendre  $r \xrightarrow{<} \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ , on déduit que la convergence a lieu dans le plus grand disque ouvert centré en  $z_0$  et contenu dans  $\Omega$ .

*Démonstration.* Fixons  $z \in \mathbb{D}_r(z_0)$ , et rappelons que  $C_r(z_0)$  désigne le cercle de centre  $z_0$  de rayon  $r > 0$ . La formule intégrale de Cauchy donne :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

L'idée est d'écrire pour  $|\zeta - z_0| = r$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}. \end{aligned}$$

Comme  $|z - z_0| < r$  est fixe et comme  $|\zeta - z_0| = r$  est constant, on a une majoration uniforme :

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1 \quad (\forall \zeta \in C_r(z_0)),$$

qui nous permet de développer en série convergente normalement :

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n,$$

donc uniformément, quel que soit  $\zeta \in C_r(z_0)$ . En revenant alors à la formule de Cauchy, cette convergence contrôlée nous autorise à intervertir intégration et sommation infinie :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \right) d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left( \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right)}_{\text{reconnaître } \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}} (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

tout en reconnaissant la formule du Théorème 7.1 pour  $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ . □

Observons que puisque nous avons déjà démontré qu'une série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  est indéfiniment dérivable, ce théorème confirme le fait qu'une fonction holomorphe est indéfiniment dérivable.

Dans le chapitre précédent, nous avons formulé et démontré le *Principe du prolongement analytique* ainsi que le *Principe d'unicité* pour les fonctions localement développables en série entière convergente, et ces résultats s'appliquent dorénavant à toutes les fonctions holomorphes. Par souci de complétude théorique, reformulons-les.

**Théorème 7.4. [Principes d'unicité]** Dans un ouvert connexe  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , si une fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  satisfait l'une des trois conditions suivantes :

- il existe  $z_0 \in \Omega$  en lequel  $f^{(n)}(z_0) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ;
  - il existe  $z_0 \in \Omega$  au voisinage duquel  $f \equiv 0$ ;
  - il existe une suite  $(w_\nu)_{\nu=1}^\infty$  de points distincts deux à deux convergeant vers un point  $w_\infty = \lim_{\nu \rightarrow \infty} w_\nu \in \Omega$  dans l'ouvert en lesquels  $f(w_\nu) = 0$  pour tout  $\nu \in \mathbb{N}$ ;
- alors  $f \equiv 0$  est identiquement nulle dans  $\Omega$ .

Souvent, ce principe d'unicité est appliqué à la différence  $f = g - h$  de deux fonctions holomorphes.

*Démonstration.* Redémontrons seulement le premier cas, d'une manière légèrement différente.

Grâce au Théorème 7.3 d'analyticité, pour tout rayon  $r$  avec  $0 \leq r < \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ , on a en tout point  $z$  avec  $|z - z_0| < r$  une représentation :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \frac{(z - z_0)^n}{n!},$$

qui montre que  $f \equiv 0$  dans  $\mathbb{D}_r(z_0)$ , et donc, l'ensemble :

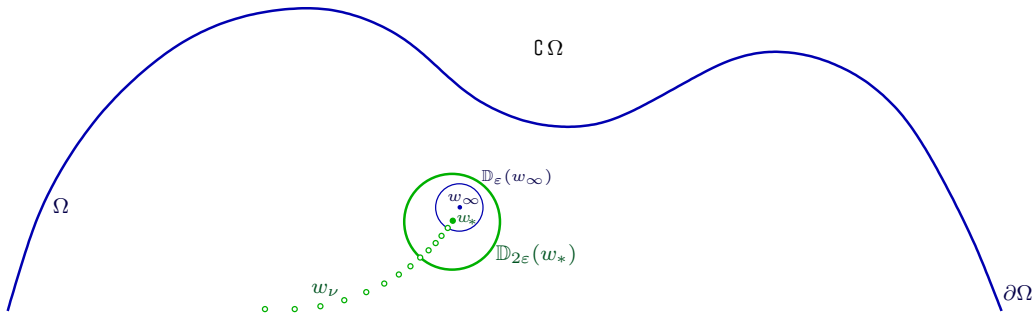
$$\mathcal{W} := \{w \in \Omega : \text{il existe } \omega \ni w \text{ ouvert avec } f|_{\omega} \equiv 0\}$$

est non vide. Pour conclure, il nous faudrait avoir  $\mathcal{W} = \Omega$ .

En tout cas,  $\mathcal{W}$  est clairement ouvert (exercice mental).

**Assertion 7.5.** Cet ensemble  $\mathcal{W}$  est aussi fermé, relativement dans  $\Omega$ .

*Démonstration.* Étant donné une suite  $(w_\nu)_{\nu=1}^\infty$  quelconque de points  $w_\nu \in \mathcal{W} \subset \Omega$  qui converge vers un point  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} w_\nu =: w_\infty \in \Omega$  dans l'ouvert, l'objectif est de faire voir que  $w_\infty \in \mathcal{W}$ .



Avec  $\varepsilon > 0$  satisfaisant :

$$4\varepsilon < \text{dist}(w_\infty, \mathbb{C} \setminus \Omega),$$

prenons un  $\nu \gg 1$  assez grand pour que  $|w_\nu - w_\infty| \leq \varepsilon$ , fixons ce point, et notons-le :

$$w_\nu =: w_* \in \mathcal{W}.$$

Premièrement, nous avons  $\overline{\mathbb{D}_{2\varepsilon}(w_*)} \subset \Omega$ , car pour  $z \in \overline{\mathbb{D}_{2\varepsilon}(w_*)}$  quelconque, l'inégalité  $|z - w_*| \leq 2\varepsilon$  entraîne :

$$|z - w_\infty| \leq |z - w_*| + |w_* - w_\infty| \leq 2\varepsilon + \varepsilon < 4\varepsilon.$$



Par conséquent, le Théorème 7.3 d'analyticité s'applique et donne, puisque  $f \equiv 0$  au voisinage de  $w_*$ , l'annulation :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w_*)}{n!} \frac{(z - w_*)^n}{n!} = 0 \quad (\forall z \in \mathbb{D}_{2\varepsilon}(w_*)).$$

Deuxièmement, ce disque d'annulation contient un voisinage de  $w_\infty$ , à savoir plus précisément on a  $\mathbb{D}_{2\varepsilon}(w_*) \supset \mathbb{D}_\varepsilon(w_\infty)$ , car  $|z - w_\infty| < \varepsilon$  entraîne :

$$|z - w_*| \leq |z - w_\infty| + |w_\infty - w_*| \leq |z - w_\infty| + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon.$$

Donc  $f(z) \equiv 0$  dans le voisinage ouvert  $\mathbb{D}_\varepsilon(w_\infty)$ , ce qui montre bien  $w_\infty \in \mathcal{W}$ .  $\square$

En conclusion, le sous-ensemble non vide  $\mathcal{W} \subset \Omega$ , ouvert et fermé, ne peut que coïncider avec  $\Omega$ , puisque ce dernier a été supposé connexe.  $\square$

**Corollaire 7.6.** *Dans un ouvert non vide connexe  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , l'anneau  $\mathcal{O}(\Omega)$  des fonctions holomorphes est intègre.*

*Démonstration.* En effet, si deux fonctions  $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$  satisfont  $f g \equiv 0$  et si l'une d'entre elle, disons  $g(z_0) \neq 0$ , ne s'annule pas en un point  $z_0 \in \Omega$ , alors par continuité, il existe un disque ouvert non vide  $\mathbb{D}_r(z_0) \subset \Omega$  en restriction auquel  $g \neq 0$ , donc  $f|_{\mathbb{D}_r(z_0)} \equiv 0$ , et ensuite, grâce au principe d'unicité,  $f \equiv 0$  partout dans  $\Omega$ .  $\square$

## 8. Inégalités de Cauchy et principes du maximum

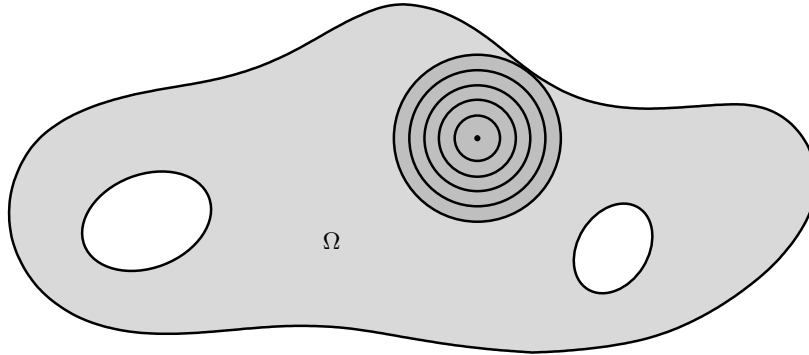
Pour  $z_0 \in \mathbb{C}$  et pour un rayon  $R > 0$ , rappelons que nous notons les disques ouverts et fermés de centre  $z_0$  et de rayon  $R$  comme suit :

$$\mathbb{D}_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\},$$

$$\overline{\mathbb{D}}_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}.$$

Nous noterons aussi le cercle de rayon  $R > 0$  centré en  $z_0$  :

$$C_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}.$$



**Théorème 8.1. [Inégalités de Cauchy 9]** *Si  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  est une fonction holomorphe dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , alors en tout point  $z_0 \in \Omega$ , et pour tout rayon  $R > 0$  tel que :*

$$\overline{\mathbb{D}}_R(z_0) \subset \Omega,$$

*on a les inégalités :*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} \sup_{|z - z_0| = R} |f(z)| \quad (\forall n \geq 0).$$

Ici, l'intérêt est souvent de faire  $R$  le plus grand possible de manière à rendre le majorant à droite le plus petit possible, et donc, de faire « gonfler » les disques fermés centrés en  $z_0$  jusqu'à ce qu'ils « touchent » le bord de  $\Omega$ .

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer la formule intégrale de Cauchy pour  $f^{(n)}(z_0)$  et de majorer :

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \left| \frac{n!}{2i\pi} \int_{C_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \\ &= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + R e^{i\theta})}{(R e^{i\theta})^{n+1}} R i e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{\sup_{\theta \in \mathbb{R}} |f(z_0 + R e^{i\theta})|}{R^{n+1}} R 2\pi \\ &= \frac{n!}{R^n} \sup_{z \in C_R(z_0)} |f(z)|. \quad \square \end{aligned}$$

**Théorème 8.2. [Liouville]** Si  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  est holomorphe entière définie sur l'intégralité du plan complexe et si elle est bornée :

$$\exists M < \infty \quad |f(z)| \leq M \quad (\forall z \in \mathbb{C}),$$

alors  $f = \text{constante}$ .

*Démonstration.* Il suffit de faire voir que  $f' \equiv 0$ , car sur  $\mathbb{C}$  qui est étoilé, une formule vue plus haut :

$$f(z) = f(0) + \int_{[0,z]} \underline{f'(\zeta)}_{\circ} d\zeta$$

fera voir que  $f(z) \equiv f(0)$  est constante.

En tout point  $z_0 \in \mathbb{C}$ , pour tout rayon  $R > 0$ , les inégalités de Cauchy donnent sans effort :

$$\begin{aligned} |f'(z_0)| &\leq \frac{1!}{R^1} \sup_{|z-z_0|=R} |f(z)| \\ &\leq \frac{M}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad \square \end{aligned}$$

Une autre application merveilleuse de la théorie des fonctions holomorphes est une preuve extrêmement simple du théorème fondamental de l'algèbre.

**Théorème 8.3. [D'Alembert-Gauss]** Tout polynôme non constant  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  avec  $n \geq 1$  et  $a_n \neq 0$  à coefficients complexes  $a_i \in \mathbb{C}$  possède toujours au moins une racine  $z_0 \in \mathbb{C}$  avec  $P(z_0) = 0$ .

*Démonstration.* Par l'absurde, supposons que  $P(z) \neq 0$  en tout point  $z \in \mathbb{C}$ . Alors la fonction  $\frac{1}{P(z)}$  est holomorphe entière sur  $\mathbb{C}$ .

L'idée est de constater que  $\frac{1}{P(z)}$  est alors aussi *bornée*, car le Théorème 8.2 de Liouville vu à l'instant la forcera à être *constante*, ce qui sera très faux (contradictoire), car  $\deg P = n \geq 1$ .

Tout d'abord, quel que soit  $R > 0$ , il existe une constante  $c = c(R) > 0$  telle que sur le disque compact  $\overline{\mathbb{D}}_R$  où  $P$  ne s'annule pas :

$$|P(z)| \geq c > 0 \quad (\forall |z| \leq R).$$

Ensuite, en dehors de ce disque, c'est-à-dire pour  $|z| > R$ , factorisons :

$$P(z) = z^n \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right),$$

et minorons :

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |z|^n \left( |a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right) \\ &\geq R^n \left( |a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{R} - \cdots - \frac{|a_0|}{R^n} \right) \\ &\geq R^n \frac{|a_n|}{2}. \end{aligned}$$

[Si  $R \gg 1$  est grand]

Enfin, synthétisons une majoration conclusive sur la réunion  $\overline{\mathbb{D}}_R \cup \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_R$  :

$$\frac{1}{|P(z)|} \leq \max \left( \frac{1}{c}, \frac{2}{R^n |a_n|} \right) < \infty. \quad \square$$

**Théorème 8.4.** *Tout polynôme  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$  à coefficients  $a_i \in \mathbb{C}$ ,  $a_n \neq 0$ , de degré  $n \geq 1$  admet exactement  $n$  racines complexes  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ , comptées avec multiplicité, et se factorise comme :*

$$P(z) = a_n (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n).$$

*Preuve.* Grâce au théorème qui précède,  $P$  possède au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ , disons  $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ . Comme soustraire par  $0 = P(\alpha_1)$  ne change rien, écrivons, factorisons, et réorganisons :

$$\begin{aligned} P(z) &= P(z) - \underline{P(\alpha_1)}_{\circ} \\ &= a_n (z^n - \alpha_1^n) + a_{n-1} (z^{n-1} - \alpha_1^{n-1}) + \cdots + a_1 (z - \alpha_1) + \underline{a_0 - a_0}_{\circ} \\ &= (z - \alpha_1) \left[ a_n (z^{n-1} + \cdots + \alpha_1^{n-1}) + a_{n-1} (z^{n-2} + \cdots + \alpha_1^{n-2}) + \cdots + a_1 \right] \\ &= (z - \alpha_1) \left[ a_n z^{n-1} + (a_n \alpha_1 + a_{n-1}) z^{n-2} + \cdots + (a_n \alpha_1^{n-1} + a_{n-1} \alpha_1^{n-2} + \cdots + a_1) \right] \\ &=: (z - \alpha_1) Q(z), \end{aligned}$$

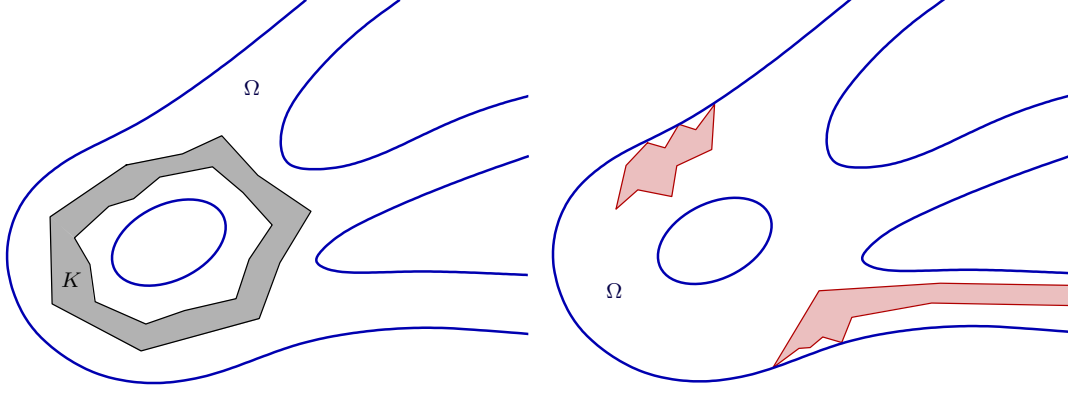
avec un nouveau polynôme  $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$  à coefficients complexes et de degré  $n-1$ , puisque  $a_n \neq 0$ .

Une récurrence élémentaire sur le degré  $n$  des polynômes offre à la fin, pour un certain nombre complexe  $b \in \mathbb{C}$ , une factorisation de type conclusif :

$$\begin{aligned} P(z) &= (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_{n-1}) [a_n z + b] \\ &=: a_n (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_{n-1}) (z - \alpha_n). \end{aligned} \quad \square$$

Revenons maintenant aux inégalités de Cauchy, afin de généraliser le Théorème 8.1 à des situations plus sophistiquées que des disques.

Tout d'abord, un exercice de topologie générale convainc de la véracité du critère suivant.



**Critère de compacité 8.5.** *Un sous-ensemble  $K \subset \Omega$  d'un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$  est compact si et seulement si :*

- ①  $K$  est borné dans  $\mathbb{C}$  ;
- ②  $K$  est fermé dans  $\Omega$ , i.e. tous les points-limites de suites de Cauchy d'éléments de  $K$  qui convergent dans  $\Omega$  appartiennent encore à  $K$  ;
- ③  $\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) = \text{dist}(K, \partial\Omega) > 0$ . □

Soit donc  $K \subset \Omega$  un compact contenu dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . La distance à  $K$  d'un point quelconque  $w \in \mathbb{C}$  est :

$$\text{dist}(w, K) := \inf_{z \in K} |w - z|,$$

et puisque  $K$  est compact, en raisonnant avec une suite minimisante puis convergente après extraction de sous-suite, cette distance est atteinte en au moins un point  $z_w \in K$ , c'est-à-dire :

$$\text{dist}(w, K) = |w - z_w|.$$

Ensuite, pour  $\varepsilon > 0$ , introduisons le  $\varepsilon$ -épaississement de  $K$  :

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &:= \{w \in \mathbb{C} : \text{dist}(w, K) \leq \varepsilon\} \\ &= \{w \in \mathbb{C} : \exists z \in K, |w - z| \leq \varepsilon\} \supset K. \end{aligned}$$

Pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, on est certain grâce au critère qui précède que  $K_\varepsilon \subset \Omega$ .

La version générale des inégalités de Cauchy s'applique à des compacts quelconques, et elle permet de contrôler toutes les dérivées des fonctions holomorphes par leur norme du supremum — sans aucune dérivée ! — sur un compact légèrement plus grand.

**Théorème 8.6.** *Soit  $K \subset L \subset \Omega$  une paire emboîtée de sous-ensembles compacts d'un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , avec :*

$$K \subset \text{Int } L.$$

*Alors pour tout entier  $n \geq 0$ , il existe une constante positive  $C = C_{K,L,n} < \infty$  telle que :*

$$\max_{z \in K} |f^{(n)}(z)| \leq C \max_{w \in L} |f(w)| \quad (\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)).$$

*Démonstration.* Choisissons  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que :

$$K \subset K_\varepsilon \subset L,$$

d'où  $\varepsilon = \varepsilon_{K,L}$ . Alors en un point quelconque  $z \in K$  et pour toute  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ , le Théorème 8.1 donne un contrôle sur le cercle correspondant :

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z)| &\leq \frac{n!}{\varepsilon^n} \max_{|w-z|=\varepsilon} |f(w)| \\ &\leq \frac{n!}{\varepsilon^n} \max_{w \in K_\varepsilon} |f(w)| \\ &\leq C_{K,L,n} \max_{w \in L} |f(w)|, \end{aligned}$$

et il suffit de prendre à gauche le maximum sur  $z \in K$  pour conclure.  $\square$

Par ailleurs, les inégalités originales de Cauchy dans un disque fournies par le Théorème 8.1 admettent une version beaucoup plus précise qui prend la forme d'une *égalité*.

**Théorème 8.7.** *Si  $\overline{\mathbb{D}}_R(z_0) \subset \Omega$  est un disque fermé de rayon  $R \geq 0$  centré en un point  $z_0 \in \Omega$  d'un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , alors :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right|^2 R^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + R e^{i\theta})|^2 d\theta \quad (\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)).$$

En effet, tous les termes à gauche étant positifs, chacun d'entre eux est inférieur ou égal à leur somme infinie, d'où on re-déduit le Théorème 8.1 :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right|^2 R^{2n} &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{1}{m!} f^{(m)}(z_0) \right|^2 R^{2m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + R e^{i\theta})|^2 d\theta \\ &\leq \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(z_0 + R e^{i\theta})|^2 \quad (\forall n \geq 0). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Comme  $\overline{\mathbb{D}}_R(z_0) \subset \Omega$ , le Théorème 7.3 assure que le rayon de convergence de la série de Taylor infinie de  $f$  en  $z_0$  est  $> R$ , donc cette série converge normalement sur le cercle de rayon  $R$  :

$$f(z_0 + R e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) R^n e^{in\theta}.$$

Lorsqu'on prend le module au carré de cela, on a encore convergence normale, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} |f(z_0 + R e^{i\theta})|^2 &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) R^n e^{in\theta} \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \overline{f^{(m)}(z_0)} R^m e^{-im\theta} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} f^{(n)}(z_0) \overline{f^{(m)}(z_0)} R^n R^m e^{in\theta} e^{-im\theta}. \end{aligned}$$

Pour intégrer tout ce beau monde, utilisons (exercice) :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } n = m, \\ 0 & \text{lorsque } n \neq m, \end{cases}$$

ce qui élimine énormément de prétendants et nous conduit en douceur à la conclusion :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + R e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \overline{f^{(n)}(z_0)} R^n R^n \cdot 1. \quad \square$$

Voici une autre conséquence remarquable des inégalités de Cauchy : si le module  $|f|$  d'une fonction holomorphe admet un maximum global, ou même local, en un point *intérieur* d'un ouvert connexe  $\Omega$ , alors elle est partout constante.

**Théorème 8.8. [Principe du maximum, 1]** Soit  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  avec  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ouvert connexe. S'il existe un point  $a \in \Omega$  et  $r > 0$  avec  $\overline{\mathbb{D}}_r(a) \subset \Omega$  tels que :

$$|f(a)| \geq |f(z)| \quad (\forall z \in \overline{\mathbb{D}}_r(a)),$$

alors  $f \equiv f(a)$  est constante dans  $\Omega$ .

*Démonstration.* En revenant au paragraphe qui suit le Théorème 8.7 mais en conservant deux termes à gauche au lieu d'un, pour tout entier  $n \geq 1$  fixé, nous construisons un jeu d'inégalités oppressantes :

$$\begin{aligned} |f(a)|^2 + \left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \right|^2 r^{2n} &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{1}{m!} f^{(m)}(a) \right|^2 r^{2m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + r e^{i\theta})|^2 d\theta \\ &\leq \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a + r e^{i\theta})|^2 \\ &\leq \max_{|z-a| \leq r} |f(z)|^2 \\ &\stackrel{[\text{Hypothèse !}]}{\leq} |f(a)|^2 \end{aligned}$$

qui forcent l'annulation  $f^{(n)}(a) = 0$  de toutes ces dérivées, donc le Principe d'unicité 7.4 appliqué à  $f - f(a)$  conclut.  $\square$

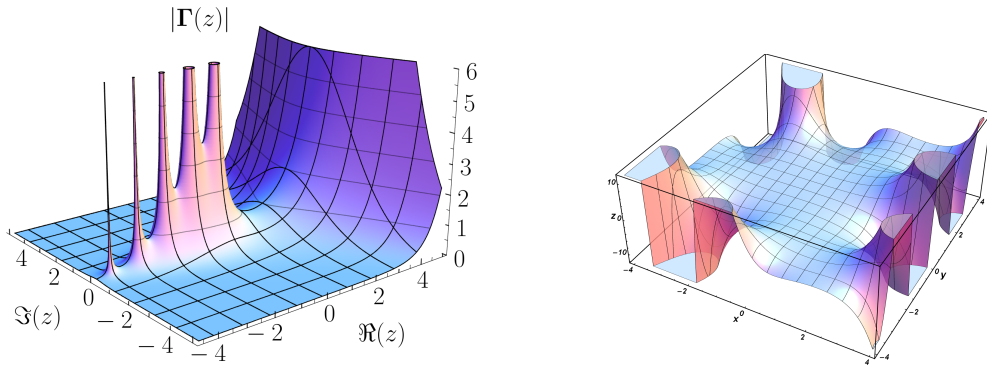
Puisque les fonctions holomorphes  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  sont définies dans un espace 2-dimensionnel réel et prennent aussi leurs valeurs dans un espace 2-dimensionnel, et puisque  $2 + 2 = 4$  (certes !), il n'est pas vraiment aisé de représenter ou de visualiser leurs graphes :

$$\text{Graphe}(f) := \{(z, f(z)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : z \in \Omega\}.$$

C'est pourquoi on se contente souvent de représenter le graphe de leurs modules, vu dans un demi-espace 3-dimensionnel :

$$\text{Graphe}(|f|) := \{(z, |f(z)|) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ : z \in \Omega\},$$

et là par chance, tout semble devenir visualisable.



Si donc nous appelons *paysage analytique* de  $f$  le graphe de  $|f|$  dans l'espace à trois dimensions — comme s'il était constitué de montagnes et de vallées photographiables —,

alors le principe du maximum affirme qu'il n'y a aucun sommet intérieur, et donc, que les points les plus hauts sont à rechercher au bord.

Une conséquence plus importante des inégalités de Cauchy demande donc d'examiner le comportement au bord des fonctions holomorphes. L'ouvert n'étant pas forcément borné, on doit tenir compte aussi de ce qui se passe quand on s'évade vers l'infini.

**Théorème 8.9. [Principe du Maximum, 2]** *Si une fonction  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  holomorphe dans un ouvert connexe  $\Omega \subset \mathbb{C}$  satisfait, pour une constante finie  $0 \leq M < \infty$ , les inégalités en tout point  $\zeta \in \partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$  du bord :*

$$\limsup_{\substack{z \in \Omega \\ z \rightarrow \zeta}} |f(z)| \leq M,$$

ainsi que l'inégalité à l'infini :

$$\limsup_{\substack{z \in \Omega \\ |z| \rightarrow \infty}} |f(z)| \leq M,$$

alors la même inégalité est satisfaite partout dans  $\Omega$  :

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leq M.$$

Quand  $\Omega \subset \mathbb{C}$  est borné, c'est-à-dire contenu dans un disque assez grand, la deuxième condition à l'infini n'est évidemment pas requise. Inversement, quand  $\Omega = \mathbb{C}$ , d'où  $\partial\Omega = \emptyset$ , c'est la première condition qui saute !

Par ailleurs, l'hypothèse concernant la limite supérieure quand  $|z| \rightarrow \infty$  est essentielle, comme le montre l'exemple  $f(z) = e^z$  sur  $\Omega := \{\operatorname{Re} z > 0\}$  avec  $|f(iy)| = |e^{iy}| = 1$  sur  $\partial\Omega = \{x = 0\}$ , tandis que  $f(x) = e^x \rightarrow \infty$  est non bornée sur  $\mathbb{R}_+^* \subset \Omega$ .

*Démonstration.* Donnons-nous  $M' > M$  arbitrairement proche de  $M$ , et introduisons l'ensemble :

$$K_{M'} := \{z \in \Omega : |f(z)| \geq M'\}.$$

Comme  $f$  est continue,  $K_{M'}$  est relativement fermé dans  $\Omega$ . Les deux hypothèses garantissent aussi (exercice) que  $K_{M'}$  possède une fermeture dans  $\mathbb{C}$  ne rencontrant pas  $\overline{\Omega} \setminus \Omega$ , et qu'il est borné dans  $\mathbb{C}$ . Le Critère de compacité 8.5 assure alors que  $K_{M'}$  est un *compact*.

**Assertion 8.10.** *En fait,  $K_{M'} = \emptyset$ .*

*Preuve.* Si  $K_{M'} \neq \emptyset$  était non vide, la borne supérieure de  $|f|$  sur  $K_{M'}$  serait atteinte en un certain point  $a \in K_{M'}$  de ce compact :

$$|f(z)| \leq |f(a)| \quad (\forall z \in K_{M'}),$$

mais par ailleurs, comme  $|f(a)| \geq M'$ , on aurait en tout autre point  $z \in \Omega \setminus K_{M'}$  par définition :

$$|f(z)| < M' \leq |f(a)|,$$

et donc l'inégalité serait satisfaite partout :

$$|f(z)| \leq |f(a)| \quad (\forall z \in \Omega).$$

Par conséquent,  $|f|$  atteindrait son maximum sur  $\Omega$  au point intérieur  $a \in \Omega$ , donc  $f \equiv f(a)$  serait constante dans  $\Omega$  à cause du Principe du Maximum 8.8, et comme  $|f(a)| \geq M'$ , cela contredirait l'hypothèse que  $|f|$  est  $\leq M$  au bord et à l'infini.  $\square$

Puisque  $\Omega \setminus K_{M'} = \Omega$ , nous avons donc :

$$|f(z)| < M' \quad (\forall z \in \Omega),$$

et comme  $M' > M$  pouvait être choisi arbitrairement proche de  $M$ , c'est terminé !  $\square$

Ce théorème général admet une variante simplifiée mais plus utile dans de nombreuses circonstances.

**Théorème 8.11. [Principe du Maximum, 3]** *Sur la fermeture  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  d'un ouvert connexe borné  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , si une fonction continue :*

$$f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\Omega \cup \partial\Omega),$$

*est holomorphe à l'intérieur, alors :*

$$|f(z)| \leq \sup_{\zeta \in \partial\Omega} |f(\zeta)| < \infty \quad (\forall z \in \overline{\Omega}).$$

Autrement dit, sur le compact  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , le maximum du module est toujours atteint au bord.

*Démonstration.* S'il existait un point  $z \in \Omega$  en lequel :

$$(8.12) \quad |f(z)| > \sup_{\zeta \in \partial\Omega} |f(\zeta)|,$$

le maximum du module de  $f$ , atteint sur le compact  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , le serait alors en un certain point  $a \in \overline{\Omega}$  devant satisfaire :

$$|f(a)| \geq |f(z)| > \sup_{\zeta \in \partial\Omega} |f(\zeta)|,$$

donc  $a \in \Omega$  devrait être à l'intérieur, ce qui forcerait  $f$  à être constante à cause du Théorème 8.8, en contradiction affligeante avec (8.12).  $\square$

## 9. Théorème de Morera et convergence uniforme sur des compacts

Une application directe de ce qui précède offre une réciproque particulièrement utile du théorème de Cauchy.

**Théorème 9.1. [de Morera]** *Si une fonction  $f \in \mathcal{C}^0(\Delta)$  continue dans un disque ouvert non vide  $\Delta \subset \mathbb{C}$  satisfait, pour tout triangle fermé plein  $T = \overline{T} \subset \Delta$  :*

$$0 = \int_{\partial T} f(z) dz,$$

*alors  $f \in \mathcal{O}(\Delta)$  est holomorphe.*

*Démonstration.* Notons  $z_0$  le centre de  $\Delta$ . Une répétition de la preuve du Théorème 3.1 de Cauchy convainc que la fonction :

$$F(z) := \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta \quad (z \in \Delta)$$

est  $\mathbb{C}$ -dérivable (holomorphe), de dérivée  $F' = f$ .

Maintenant, grâce au Théorème 7.1 de régularité et à son Corollaire 7.2,  $F$  est indéfiniment  $\mathbb{C}$ -dérivable, donc  $f' = (F')'$  existe, i.e.  $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ .  $\square$



Prochain théorème « magique » : Si une suite de fonctions holomorphes converge uniformément sur (tous) les compacts d'un ouvert, alors la fonction-limite est non seulement continue — théorème classique —, mais aussi holomorphe, donc lisse. On dirait de la prestidigitation !

Contraste déroutant avec la théorie des fonctions de variables réelles ! Par exemple, le cours d'Analyse de Fourier a fait voir que la fonction de Weierstrass :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(2\pi b^n x)$$

avec  $0 < a < 1$  et  $ab \geq 1$ , est continue mais n'est dérivable en *aucun* point : dans le monde réel la convergence uniforme n'assure nullement la dérivabilité, mais dans le monde imaginaire, si !

**Théorème 9.2. [Cauchy 10]** Dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , soit une suite  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  de fonctions holomorphes  $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$  qui converge en tout point vers une certaine fonction-limite  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , uniformément sur chaque compact de  $\Omega$  :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \quad (\forall K \subset \Omega \text{ compact}).$$

Alors la fonction-limite  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  est holomorphe.

*Démonstration.* L'idée, splendide, consiste à déduire cela du Théorème 9.1 de Morera.

Soit  $\Delta$  un disque ouvert non vide quelconque avec  $\Delta \subset \Omega$ . Pour vérifier que  $f$  est holomorphe dans  $\Delta$ , soit  $T = \bar{T} \subset \Delta$  un triangle fermé quelconque. Comme les  $f_n \in \mathcal{O}(\Delta)$  y sont holomorphes, Goursat offre :

$$\int_{\partial T} f_n(z) dz = 0 \quad (\forall n \geq 1).$$

Comme  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  uniformément sur le compact  $\bar{T} \subset \Delta \subset \Omega$ , donc sur  $\partial T$ , nous avons le droit d'intervertir  $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ , ce qui nous donne :

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0,$$

et comme cela est vrai pour *tous* les triangles fermés pleins contenus dans  $\Delta$ , Morera nous garantit que  $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ . Enfin,  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ , car l'holomorphic est une condition locale, et en tout point  $z_0 \in \Omega$ , on peut centrer un disque  $\Delta \ni z_0$  avec  $\Delta \subset \Omega$ .  $\square$

Maintenant, qu'en est-il de la suite des fonctions dérivées  $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$  ? Dans le monde réel, tout le monde sait que la convergence uniforme n'entraîne presque jamais celle des fonctions dérivées. Et dans le monde holomorphe ?

En fait, étant donné une série entière  $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$  ayant un rayon de convergence  $R > 0$ , nous avons déjà vu dans le chapitre précédent que la série dérivée terme à terme  $\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) a_{\nu+1} z^{\nu}$  possède le même rayon de convergence  $R > 0$ , et par conséquent, les sommes partielles :

$$f_n(z) := \sum_{0 \leq \nu \leq n} a_{\nu} z^{\nu} \quad \text{de dérivées} \quad f'_n(z) = \sum_{0 \leq \nu \leq n-1} (\nu+1) a_{\nu+1} z^{\nu},$$

satisfont simultanément la convergence uniforme sur tout sous-disque fermé  $\overline{\mathbb{D}}_r \subset \mathbb{D}_{\mathbb{R}}$  avec  $0 < r < \mathbb{R}$  :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{|z| \leq r} |f_n(z) - f(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{|z| \leq r} |f'_n(z) - f'(z)|.$$

Le théorème suivant montre que ceci reste vrai dans la situation la plus générale possible.

**Théorème 9.3. [Cauchy 11]** *Dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , si une suite  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  de fonctions holomorphes  $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$  converge, uniformément sur chaque compact de  $\Omega$ , vers une fonction-limite  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  — holomorphe d'après le Théorème 9.2 —, alors il en va de même pour la suite  $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$  de ses dérivées :*

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{z \in K} |f'_n(z) - f'(z)| \quad (\forall K \subset \Omega \text{ compact}).$$

Le même Théorème 9.2 refait voir que  $f' \in \mathcal{O}(\Omega)$ , ce que l'on savait déjà.

*Démonstration.* Soit donc  $K \subset \Omega$  un compact quelconque. Pour  $\delta > 0$  assez petit, l'ensemble :

$$K_{\delta} := \{z \in \Omega : \text{dist}(z, K) \leq \delta\}$$

est aussi compact, avec (exercice de topologie) :

$$K \subset \text{Int } K_{\delta} \subset K_{\delta} \subset \Omega.$$

La version générale des inégalités de Cauchy du Théorème 8.6 appliquée à une seule dérivée de la suite  $\{f_n - f\}_{n=1}^{\infty}$  et au compact élargi  $L := K_{\delta}$ , fournit alors une constante positive  $C = C_{K,\delta} < \infty$  qui contrôle la convergence uniforme sur  $K$  :

$$\begin{aligned} \max_{z \in K} |(f_n - f)'(z)| &\leq C \max_{w \in K_{\delta}} |(f_n - f)(w)| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad \square$$

Évidemment, ce que nous venons de faire pour une seule dérivée fonctionne pour les dérivées de tous ordres, soit en itérant (sans retenue !) l'énoncé par pure logique directe, soit en nous souvenant que le Théorème 8.6 était profilé pour des dérivées d'ordre quelconque.

**Théorème 9.4.** *Sous les mêmes hypothèses :*

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{z \in K} |f_n^{(\kappa)}(z) - f^{(\kappa)}(z)| \quad (\forall \kappa \geq 1, \forall K \subset \Omega \text{ compact}). \quad \square$$

En pratique, on utilise ces théorèmes de convergence uniforme pour construire certaines fonctions holomorphes nouvelles qui jouissent de propriétés intéressantes, très souvent définies comme séries infinies :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z),$$

de fonctions holomorphes  $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$  dans une région donnée  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . La plupart du temps, il est assez facile de vérifier qu'il y a convergence uniforme, et donc, les théorèmes qui précèdent garantissent que cette somme infinie est elle-même holomorphe, et qu'on peut la dériver terme à terme indéfiniment — ce qui est fort pratique !

Par exemple, de nombreuses fonctions spéciales sont définies sous forme de série infinie d'une variable réelle  $x$  ; on remplace alors  $x$  par une variable complexe  $z$ , et on recherche les

lieux où il y a convergence (uniforme). Spécifiquement, nous étudierons dans un chapitre ultérieur la célèbre *fonction zêta de Riemann* :

$$\zeta(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Une variante des séries de fonctions holomorphes, tout aussi fréquente et utile, consiste en les fonctions qui sont définies par des intégrales sur un segment réel du type :

$$f(z) := \int_a^b F(z, s) ds,$$

ou encore, des limites de telles intégrales. Ici, la fonction  $F$  est supposée holomorphe en son premier argument, et continue en son second. Pour simplifier, l'intégrale est prise au sens de Riemann sur l'intervalle borné  $[a, b]$ . Le problème est d'établir que  $f$  est holomorphe. Par exemple, nous étudierons dans un prochain chapitre la *fonction Gamma d'Euler*, définie pour  $z \in \mathbb{C}$  avec  $\operatorname{Re} z > 0$  par :

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Dans le théorème qui suit, nous imposons une condition suffisante sur  $F$  qui est souvent vérifiée en pratique, et qui implique facilement que  $f$  est holomorphe. Après un changement affine de variable réelle, nous pouvons supposer que  $a = 0$  et  $b = 1$ .

**Théorème 9.5.** *Soit  $F = F(z, s)$  une fonction définie pour  $(z, s) \in \Omega \times [0, 1]$ , où  $\Omega \subset \mathbb{C}$  est un ouvert, qui satisfait les deux propriétés suivantes :*

- $F(z, s)$  est holomorphe en  $z$  pour tout  $s \in [0, 1]$  fixé ;
- $F$  est continue sur  $\Omega \times [0, 1]$ .

Alors la fonction définie dans  $\Omega$  par :

$$f(z) := \int_0^1 F(z, s) ds,$$

est holomorphe dans  $\Omega$ .

La continuité supposée est une continuité par rapport aux *trois* variables  $(x, y, s)$  avec  $x + iy \in \Omega$  et  $s \in [0, 1]$ .

*Démonstration.* Pour obtenir ce résultat fondamental, il suffit de montrer que  $f$  est holomorphe dans tout disque ouvert  $\Delta$  avec  $\Delta \subset \Omega$ , et grâce au Théorème 9.1 de Morera, il suffit même de faire voir que pour tout triangle fermé  $T = \overline{T} \subset \Delta$ , on a :

$$0 \stackrel{?}{=} \int_{\partial T} \int_0^1 F(z, s) ds dz.$$

Ici, un simple échange de l'ordre d'intégration conduirait au résultat, puisque  $F$  est holomorphe en  $z$ , donc satisfait la condition de Morera. Le théorème de type Fubini dans la théorie de l'intégration de Riemann justifie d'ailleurs immédiatement cela (exercice de révision).

Toutefois, nous pouvons contourner l'emploi du théorème de Fubini, en approximant l'intégrale par des sommes de Riemann :

$$f_n(z) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F\left(z, \frac{k}{n}\right) \quad (n \geq 1).$$

Ici, toutes ces sommes finies  $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$  de fonctions holomorphes  $\frac{1}{n} F\left(z, \frac{k}{n}\right)$  sont holomorphes.

**Affirmation 9.6.** *Sur tout disque fermé  $\overline{\Delta} \subset \Omega$ , les  $f_n$  convergent uniformément vers  $f(z) = \int_0^1 F(z, s) ds$ .*

*Preuve.* La fonction  $F$  étant continue sur le compact  $\overline{\Delta} \times [0, 1]$ , elle y est uniformément continue, ce qui entraîne (exercice) :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \left( |s_1 - s_2| \leq \delta \implies \max_{z \in \overline{\Delta}} |F(z, s_1) - F(z, s_2)| \leq \varepsilon \right).$$

Maintenant, en choisissant  $n \geq \frac{1}{\delta}$  assez grand, nous pouvons effectuer une estimation uniforme valable pour tout  $z \in \overline{\Delta}$  qui prouve l'affirmation :

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f(z)| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}} \left( F\left(z, \frac{k}{n}\right) - F(z, s) \right) ds \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| F\left(z, \frac{k}{n}\right) - F(z, s) \right| ds \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}} \varepsilon ds \\ &= \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

Ainsi, on a convergence uniforme  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  sur le disque fermé  $\overline{\Delta} \subset \Omega$ , et le Théorème 9.2 conclut que  $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ .  $\square$

## 10. Principe de symétrie de Schwarz

En Analyse réelle, il se produit de nombreuses circonstances où l'on désire étendre à un domaine plus grand des fonctions initialement définies dans une certaine région bien visible. Des techniques diverses existent afin de produire de telles extensions, notamment pour des fonctions qui sont continues ou qui jouissent de propriétés de différentiabilité variées. Bien entendu, les difficultés s'accroissent avec les exigences de lissité, mais tant qu'on reste dans l'univers des fonctions non développables en série entière, l'existence *e.g.* de fonctions-plateau — vues dans le cours d'Analyse de Fourier — permet de jouer avec elles presque comme avec de la pâte à modeler.

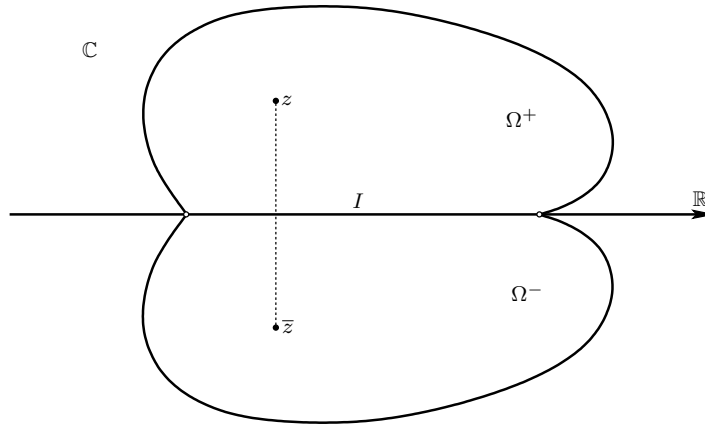
À l'inverse, la situation est très différente pour les fonctions holomorphes, car non seulement ces fonctions sont indéfiniment différentiables dans leur région initiale de définition, mais aussi, elles sont localement développables en série entière convergente, ce qui est une rigidité additionnelle vraiment caractéristique et limitante. Par exemple, il existe des fonctions holomorphes dans un disque ouvert qui sont continues dans la fermeture de ce disque, mais qu'il est impossible de prolonger holomorphiquement au-delà du cercle-bord, comme le montre l'Exercice 29.

Une autre contrainte à respecter quand on cherche à prolonger des fonctions holomorphes est le principe d'identité : une fonction holomorphe devient identiquement nulle si elle vaut zéro sur un sous-ouvert non vide, ou même sur un segment réel non réduit à un point. Ainsi, les fonctions-plateau, nulles en-dehors d'un compact, sont à proscrire !

Nonobstant ces obstacles, cette section présente un phénomène de prolongement assez simple et très utile dans les applications à la théorie des applications conformes : le *Principe de réflexion de Schwarz*. Sa démonstration consiste en deux parties : définir le prolongement, puis vérifier qu'il est holomorphe. Commençons par le second point.

Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un ouvert qui est symétrique par conjugaison complexe, à savoir qui satisfait :

$$z \in \Omega \iff \bar{z} \in \Omega.$$



Soit  $\Omega^+$  la partie de  $\Omega$  située au-dessus de l'axe réel, et soit  $\Omega^-$  celle en-dessous. Aussi, soit  $I := \Omega \cap \mathbb{R}$ , de telle sorte que :

$$\Omega^- \cup I \cup \Omega^+ = \Omega.$$

On suppose implicitement que  $I \neq \emptyset$ , sinon, le théorème suivant n'a pas d'intérêt.

**Théorème 10.1. [Principe de symétrie]** Si  $f^- \in \mathcal{O}(\Omega^-)$  et  $f^+ \in \mathcal{O}(\Omega^+)$  sont deux fonctions holomorphes qui se prolongent continûment à  $I$  :

$$f^- \in \mathcal{C}^0(\Omega^- \cup I) \quad \text{et} \quad f^+ \in \mathcal{C}^0(\Omega^+ \cup I),$$

avec des valeurs coïncidentes :

$$f^-(x) = f^+(x) \quad (\forall x \in I),$$

alors la fonction continue définie dans  $\Omega$  tout entier par :

$$f(z) := \begin{cases} f^-(z) & \text{lorsque } z \in \Omega^-, \\ f^-(z) = f^+(z) & \text{lorsque } z \in I, \\ f^+(z) & \text{lorsque } z \in \Omega^+, \end{cases}$$

est holomorphe dans  $\Omega$ .

*Démonstration.* Effectivement, on vérifie (exercice) que  $f$  est continue dans  $\Omega$ .

Pour établir l'holomorphie, faisons appel au Théorème 9.1 Morera. Soit  $\Delta$  un disque centré en un point de  $I$  avec  $\bar{\Delta} \subset \Omega$ . Soit  $T = \bar{T} \subset \Delta$  un triangle plein fermé contenu dans le disque.

Quand  $T$  n'intersecte pas  $I$ , d'où  $T \subset \Omega^-$  ou  $T \subset \Omega^+$ , on a gratuitement :

$$0 = \int_{\partial T} f(z) dz,$$

puisque  $f$  est supposée holomorphe dans  $\Omega^- \cup \Omega^+$ .



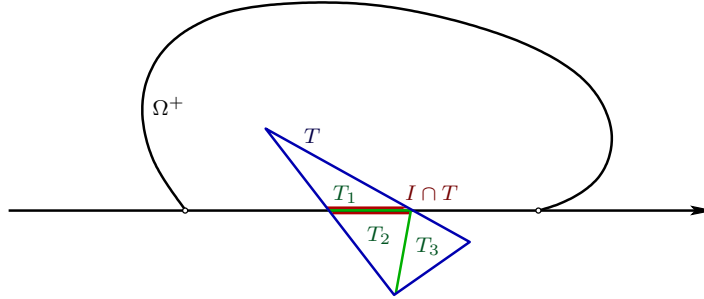
Ensuite, supposons premièrement qu'un côté ou un sommet de  $T$  rencontre  $I$ , tandis que le reste se trouve entièrement, disons, dans le demi-plan supérieur :

$$T \subset I \cup \Omega^+.$$

Dans ce cas, le triangle  $T_\varepsilon := T + i\varepsilon$  poussé vers le haut d'une hauteur 'infinitésimale'  $\varepsilon > 0$  est entièrement contenu dans la zone où  $f = f^+$  est holomorphe, donc on a :

$$0 = \int_{\partial T_\varepsilon} f(z) dz,$$

et en faisant tendre  $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$ , la continuité de  $f$  donne bien  $0 = \int_{\partial T} f(z) dz$ . Le cas où  $T \subset I \cup \Omega^-$  est similaire.



Enfin, supposons deuxièmement que le triangle  $T$  en question intersecte  $I$  en son intérieur. Une découpe de  $T$  en trois triangles  $T_1, T_2, T_3$  par le couteau  $I \cap T$  nous ramène à la situation que nous venons de traiter.  $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer le

**Théorème 10.2. [Principe de réflexion de Schwarz]** Si  $\Omega \subset \mathbb{C}$  est un ouvert invariant par conjugaison complexe  $z \mapsto \bar{z}$  tel que l'intersection  $I := \Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$  soit non vide, et si :

$$\Omega^- := \Omega \cap \{\operatorname{Im} z < 0\},$$

$$\Omega^+ := \Omega \cap \{\operatorname{Im} z > 0\},$$

alors toute fonction holomorphe définie au-dessus et continue jusqu'à  $I$  :

$$f^+ \in \mathcal{O}(\Omega^+) \cap \mathcal{C}^0(I \cap \Omega^+),$$

et qui prend des valeurs réelles sur  $I$  :

$$f^+(x) \in \mathbb{R} \quad (\forall x \in I),$$

admet un prolongement holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  unique à l'ouvert  $\Omega = \Omega^- \cup I \cup \Omega^+$ , dont les valeurs sont définies en-dessous par :

$$f^-(z) := \overline{f^+(\bar{z})} \quad (\forall z \in \Omega^-).$$

*Démonstration.* Au voisinage d'un point  $z_0 \in \Omega^-$ , disons dans un disque  $\mathbb{D}_r(z_0)$  de rayon  $r > 0$  assez petit pour que  $\overline{\mathbb{D}_r(z_0)} \subset \Omega^-$ , les valeurs  $\bar{z}$  pour  $z \in \mathbb{D}_r(z_0)$  appartiennent au symétrique de ce disque, donc sont contenues dans  $\Omega^+$  où  $f^+$  est holomorphe :

$$f^+(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\bar{z} - \bar{z}_0)^n,$$

avec  $a_n := \frac{1}{n!} (f^+)^{(n)}(\bar{z}_0)$  et un rayon de convergence  $\geq r$ . Une simple conjugaison :

$$\overline{f^+(\bar{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n (z - z_0)^n,$$

— qui n'altère en rien le rayon de convergence ! — montre clairement le caractère *holomorphe* de  $f^-$  dans  $\mathbb{D}_r(z_0)$ , donc partout dans  $\Omega^-$ .

Ensuite, en un point  $x_0 \in I$ , puisque  $f^+(x) \in \mathbb{R}$  pour  $x \in I$  proche de  $x_0$ , la continuité de  $f^+$  sur  $I \cup \Omega^+$  garantit, pour la fonction  $f^-$  ainsi définie, que  $f^-(x_0 + h) \rightarrow f^+(x_0)$  quand  $h \in \mathbb{C}$  avec  $\text{Im } h < 0$  tend vers 0, donc le prolongement  $f$  est continu partout dans  $\Omega^- \cup I \cup \Omega^+$ .

Enfin, en notant que  $f^-(x) = f^+(x)$  pour tout  $x \in I$ , le Principe de symétrie 10.1, spécialement concocté à l'avance, conclut en beauté l'argumentation.  $\square$

## 11. Théorème d'approximation de Weierstrass complexe dans un disque

Sur un intervalle compact  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  avec  $-\infty < a < b < \infty$ , le célèbre *Théorème de Weierstrass* stipule que toute fonction continue  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$  peut être approximée à volonté en norme uniforme par de simples polynômes :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P = P_\varepsilon(x) \in \mathbb{R}[x] \quad \text{tel que} \quad \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon.$$

**Question 11.1.** *Existe-t-il un résultat similaire en Analyse Complexe ?*

Attention : tout devient 2-dimensionnel !

Nous allons regarder un compact quelconque  $K \subset \mathbb{C}$ , éventuellement d'intérieur non vide, et des fonctions qui sont holomorphes dans un voisinage ouvert  $\Omega \supset K$ , éventuellement très « resserré » autour de  $K$ . Dans ces circonstances, a-t-on :

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists P(z) = P_\varepsilon(z) \in \mathbb{C}[z] \quad \text{tel que} \quad \max_{z \in K} |f(z) - P(z)| \leq \varepsilon ?$$

Cela serait un résultat remarquable, car les polynômes sont des objets globaux, définis pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .

Commençons par examiner le cas simple où  $\Omega = \mathbb{D}_R(z_0)$  est un disque ouvert de rayon :

$$0 < R \leq \infty,$$

centré en un certain point fixé  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Le cas  $R = \infty$  correspond à  $\Omega = \mathbb{C}$ .

**Théorème 11.2.** *Les fonctions holomorphes dans un disque  $\mathbb{D}_R = \mathbb{D}_R(z_0)$  de rayon  $0 < R \leq \infty$  sont approximables uniformément sur les compacts  $K \subset \mathbb{D}_R$  par des polynômes :*

$$\forall f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_R) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists P(z) = P_\varepsilon(z) \in \mathbb{C}[z] \quad \text{tel que} \quad \max_{z \in K} |f(z) - P(z)| \leq \varepsilon.$$

*Démonstration.* Après translation, on se ramène à  $z_0 = 0$ . En vertu d'un théorème vu dans le chapitre qui précède, toute fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_R)$  a une série de Taylor en tout point  $w \in \mathbb{D}_R$  qui converge au moins dans le plus grand disque centré en  $w$  qui est contenu dans  $\mathbb{D}_R$ . Au point  $w = 0$ , ce plus grand disque coïncide avec  $\mathbb{D}_R$ , et donc en vertu de ce résultat, la fonction  $f$  est représentée par une série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  qui converge dans  $\mathbb{D}_R$ .

Soit donc une série entière  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  à coefficients complexes  $a_n \in \mathbb{C}$ , dont le rayon de convergence  $R$  satisfait :

$$0 < R \leq \infty.$$

D'après le chapitre qui précède, le rayon de convergence de  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  est défini par :

$$\frac{1}{R} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Par conséquent, la définition de la limite supérieure fournit, pour tout  $\delta > 0$ , un entier  $N(\delta) \gg 1$  tel que :

$$n \geq N(\delta) \quad \implies \quad \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{R} + \delta.$$

Maintenant, soit un compact  $K \subset \mathbb{D}_R$  contenu dans le disque ouvert  $\mathbb{D}_R$  centré en l'origine de  $\mathbb{C}$ . D'après un théorème topologique qui a déjà été vu, la distance entre  $K$  et le complémentaire fermé  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_R$  est strictement positive, et si on prend  $0 < r < R$  satisfaisant :

$$0 < R - r < \text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_R),$$

alors on assure que :

$$K \subset \overline{\mathbb{D}_r}.$$

Choisissons maintenant  $\delta > 0$  assez petit pour que :

$$q := \left( \frac{1}{R} + \delta \right) r < 1.$$

L'inégalité triangulaire suivie de la sommation d'une série géométrique offre pour tout  $z \in K$  :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n \right| &\leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| |z|^n \\ [z \in K \implies |z| \leq r] \quad &\leq \sum_{n=N}^{\infty} \left( \frac{1}{R} + \delta \right)^n r^n \\ &= q^N \sum_{m=0}^{\infty} q^m \\ &\leq q^N \frac{1}{1-q}. \end{aligned}$$



Soit maintenant  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit. Toujours avec  $K \subset \overline{\mathbb{D}}_r \subset \mathbb{D}_R$ , et avec  $\delta$  assez petit pour que  $(\frac{1}{R} + \delta)r = q < 1$ , choisissons  $N(\delta) \gg 1$  et  $N(\varepsilon) \gg 1$  assez grands pour qu'on ait :

$$\begin{aligned} n \geq N(\delta) &\implies |a_n| \leq \left(\frac{1}{R} + \delta\right)^n, \\ N \geq N(\varepsilon) &\implies q^N \frac{1}{1-q} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui est possible car  $q^N \rightarrow 0$  quand  $N \rightarrow \infty$ . En prenant :

$$N := \max(N(\delta), N(\varepsilon)),$$

si on découpe alors la série qui représente  $f(z)$  en deux morceaux :

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n}_{=: P(z)} + \sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n,$$

dont le premier est visiblement un polynôme de degré  $\leq N-1$ , on atteint l'inégalité conclusive :

$$\begin{aligned} \max_{z \in K} |f(z) - P(z)| &= \max_{z \in K} \left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n \right| \\ &\leq q^N \frac{1}{1-q} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

□

## 12. Théorème de Runge rationnel

Approfondissons maintenant les réflexions de la Section 11 précédente. Soit donc  $K \subset \mathbb{C}$  un compact, et soit  $\Omega \supset K$  un ouvert. On ne suppose pas que  $\mathbb{C} \setminus K$  est connexe : seule la Section 13 suivante fera cette hypothèse topologique significative.

Tout d'abord, si  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  est le cercle unité, nous affirmons que la fonction  $f(z) := \frac{1}{z}$  définie dans un anneau  $\Omega := \{\frac{1}{r} < |z| < r\}$  avec  $r > 1$  ne satisfait *pas* la propriété d'approximation polynomiale :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P(z) \in \mathbb{C}[z] \quad \text{tel que} \quad \max_{z \in K} \left| \frac{1}{z} - P(z) \right| \leq \varepsilon.$$

En effet, observons que l'intégrale bien connue suivante est non nulle :

$$\int_K \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = 2i\pi,$$

tandis que, pour tout polynôme  $P(z) \in \mathbb{C}[z]$  qui est holomorphe dans l'ouvert  $\mathbb{C}$  qui contient l'intérieur de Jordan  $\mathbb{D}$  (disque unité) de  $K = C$  (cercle unité), le premier théorème de Cauchy donne :

$$0 = \int_K P(z) dz.$$

Maintenant, soit  $0 < \varepsilon < 1$  quelconque. S'il existait un polynôme  $P(z)$  satisfaisant la propriété d'approximation en question, alors par un jeu taquin d'inégalités taquines :

$$\begin{aligned} 2\pi &= |2i\pi| = \left| \int_K \left( \frac{1}{z} - P(z) \right) dz \right| \\ &\leq \int_K \left| \frac{1}{z} - P(z) \right| |dz| \\ &\leq \varepsilon \int_C |dz| \\ &= \varepsilon 2\pi, \end{aligned}$$

on en déduirait  $2\pi \leq \varepsilon 2\pi$  qui équivaudrait à l'absurdité fatale  $1 \leq \varepsilon$ . Moralité :

**Observation 12.1.** *Quand  $K$  a un, voire plusieurs, « trous », les fonctions holomorphes au voisinage de  $K$  ne sont en général pas approximables sur  $K$  par des polynômes.*

Dans la Section 13 suivante, nous verrons qu'il existe un théorème positif d'approximation polynomiale quand  $\mathbb{C} \setminus K$  est connexe. Pour l'instant, continuons à nous interroger sur le cas où le compact  $K \subset \mathbb{C}$  est quelconque.

La fonction  $\frac{1}{z}$  a un pôle en  $z = 0$ , à l'intérieur (hors) de  $K = C$ . En tout cas, ce contre-exemple  $\frac{1}{z}$  suggère d'utiliser pour l'approximation uniforme non pas des polynômes, mais des fractions rationnelles à pôles hors de  $K$ .

**Théorème 12.2. [de Runge rationnel]** *Pour tout compact  $K \subset \mathbb{C}$  et pour tout voisinage ouvert  $\Omega \supset K$ , les fonctions holomorphes dans  $\Omega$  peuvent être approximées à volonté sur  $K$  par des fractions rationnelles sans pôles sur  $K$ , c'est-à-dire :*

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists P \in \mathbb{C}[z] \quad \exists Q \in \mathbb{C}[z] \text{ avec } Q|_K \neq 0 \\ \text{tels que} \quad \max_{z \in K} \left| f(z) - \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Dans un chapitre qui précède, on a vu que pour  $K \subset \Omega$  compact contenu dans un ouvert, on a toujours :

$$\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0.$$

Avec un réel  $0 < \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , on pose alors et on fixe définitivement :

$$\delta := \alpha \text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0.$$

On considère le réseau  $\delta$ -renormalisé de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{C}$ , à savoir :

$$(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})\delta := \{(k + i\ell)\delta : k, \ell \in \mathbb{Z}\},$$

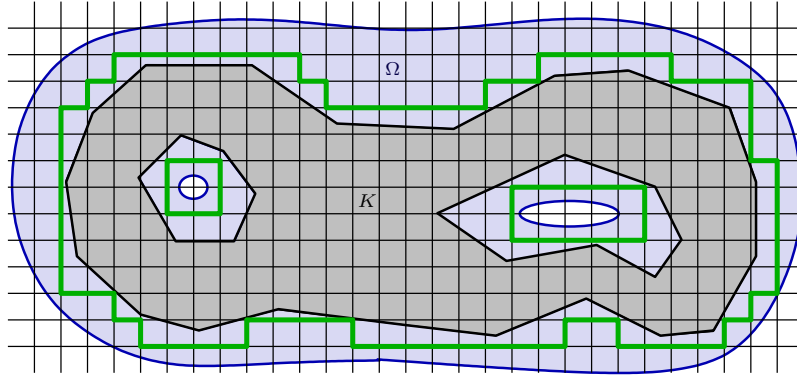
et on regarde tous les carrés pleins fermés de côté  $\delta$  que ce réseau découpe :

$$\overline{\Pi}_{k,\ell} := \{x + iy \in \mathbb{C} : k\delta \leq x \leq (k+1)\delta, \ell\delta \leq y \leq (\ell+1)\delta\} \quad (k, \ell \in \mathbb{Z}),$$

dont la réunion pave le plan tout entier de manière presque disjointe :

$$\mathbb{C} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}} \overline{\Pi}_{k,\ell}.$$

Leur intérieur, défini par des inégalités strictes, sera noté  $\Pi_{k,\ell}$ , et leur bord, consistant en 4 segments de longueur  $\delta (> 0)$  parallèles aux axes  $0x$  et  $0y$ , sera noté  $\partial\Pi_{k,\ell} = \partial\overline{\Pi}_{k,\ell}$ .



Maintenant, on note  $\bar{\Pi}_1, \dots, \bar{\Pi}_J$  avec  $J \geq 1$  entier la collection de *tous* les  $\bar{\Pi}_{k,\ell}$  qui *intersectent*  $K \neq \emptyset$ . Enfin, on note  $\gamma_1, \dots, \gamma_H$  avec  $H \geq 1$  entier les segments de longueur  $\delta$  qui appartiennent au bord d'un unique carré  $\bar{\Pi}_j$ , *sans appartenir à deux bords de deux carrés adjacents*. Autrement dit, on *supprime* tous les bords adjacents, comme sur la figure. Quitte à réajuster légèrement le côté  $\delta > 0$  de la grille, ou à traduire légèrement  $K$ , on peut supposer que  $K$  contient au moins un point qui n'est pas sur la grille, c'est-à-dire au moins un point à l'intérieur d'un carré.

Sur la figure, le compact  $K$  est en foncé, avec des bords anguleux. Le complémentaire  $\mathbb{C} \setminus K$  contient trois composantes connexes. L'ouvert  $\Omega \supset K$  est d'une forme analogue, mais son bord est représenté de manière courbée et lisse. La grille est bien visible. Les traits très épais représentent les segments  $\gamma_1, \dots, \gamma_H$ . Les carrés  $\bar{\Pi}_j$  qui intersectent et recouvrent  $K$  ne sont pas explicitement représentés.

Si un point  $z \in \bar{\Pi}_j \cap K$  est donné, alors pour tout autre point  $w \in \bar{\Pi}_j$ , puisqu'il est bien connu que le diamètre d'un carré de côté  $\delta > 0$  vaut  $\sqrt{2}\delta$ , il vient :

$$|z - w| \leq \text{diam } \bar{\Pi}_j \leq \sqrt{2}\delta.$$

Par hypothèse, chaque  $\bar{\Pi}_j$  possède au moins un point en commun avec le compact  $K$ , disons  $z_j \in \bar{\Pi}_j \cap K$ . Or nous venons de voir que :

$$\bar{\Pi}_j \subset \bar{\mathbb{D}}_{\sqrt{2}\delta}(z_j).$$

Mais grâce à l'hypothèse  $\sqrt{2}\alpha < 1$ , tout se situe à distance *strictement inférieure* à la distance au complémentaire  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  de l'ouvert :

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\delta &= \sqrt{2}\alpha \text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) \\ &< \text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega), \end{aligned}$$

donc chaque disque fermé  $\bar{\mathbb{D}}_{\sqrt{2}\delta}(z_j) \subset \Omega$  est contenu dans l'ouvert, puis par inclusion  $\bar{\Pi}_j \subset \Omega$ , et enfin :

$$\bigcup_{1 \leq j \leq J} \bar{\Pi}_j \subset \Omega.$$

Évidemment, puisque chaque segment  $\gamma_h$  est côté d'un (unique)  $\bar{\Pi}_j$ , il en découle sans effort :

$$\bigcup_{1 \leq h \leq H} \gamma_h \subset \Omega.$$

**Assertion 12.3.** *Pour tout  $1 \leq h \leq H$ , on a  $\gamma_h \cap K = \emptyset$ .*

*Preuve.* Si, au contraire,  $\gamma_h \cap K \ni z$  contenait un point du compact, comme chaque segment de longueur  $\delta$  dans le réseau est toujours bord commun entre deux carrés distincts adjacents :

$$\gamma_h = \overline{\Pi}_{k(h), \ell(h)} \cap \overline{\Pi}_{k(h)', \ell(h)'},$$

ces deux carrés adjacents intersecteraient alors tous deux  $K$  à cause du point  $z$  qu'ils ont en commun, mais alors, cela impliquerait que les deux carrés en question appartiendraient à la collection  $\overline{\Pi}_1, \dots, \overline{\Pi}_J$ , et donc que  $\gamma_h$  serait adjacent à deux carrés distincts de cette collection, et justement, on a *supprimé à l'avance* tous ces bords adjacents — contradiction !  $\square$

Ensuite, pour un carré  $\overline{\Pi}_j$  avec  $1 \leq j \leq J$  quelconque, la formule de Cauchy donne :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \Pi_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & \text{lorsque } z \in \Pi_j, \\ 0 & \text{lorsque } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Pi}_j, \end{cases}$$

sachant qu'au niveau de ce cours, nous ne sommes pas en mesure de présenter ce qui se passe lorsque  $z \in \partial \Pi_j$ .

Soit maintenant  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que le compact :

$$K_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, K) \leq \varepsilon\},$$

qui contient l'ouvert  $\mathcal{O}_\varepsilon$  contenant  $K$  défini par :

$$\mathcal{O}_\varepsilon := \{\text{dist}(z, K) < \varepsilon\} \supset K,$$

satisfasse encore :

$$\emptyset = \gamma_h \cap K_\varepsilon \quad (1 \leq h \leq H),$$

donc soit encore recouvert par la même collection de carrés fermés :

$$K_\varepsilon \subset \overline{\Pi}_1 \cup \dots \cup \overline{\Pi}_J.$$

Ici,  $K_\varepsilon$  et  $\mathcal{O}_\varepsilon$  sont introduits pour des raisons techniques, utiles à la fin de la démonstration du Lemme 12.5.

**Lemme 12.4.** *Pour tout  $z \in K_\varepsilon$  qui n'appartient à aucun bord des carrés  $\overline{\Pi}_j$  (il existe au moins un tel point  $z$ ), on a :*

$$f(z) = \sum_{j=1}^J \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \Pi_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Notons que l'intégrale peut être calculée parce que  $\partial \Pi_j \subset \Omega$  d'après ce qui précède.

*Preuve.* Puisque la réunion de ces carrés recouvre :

$$K_\varepsilon \subset \bigcup_{1 \leq j \leq J} \overline{\Pi}_j,$$

si un point  $z$  est dans  $K_\varepsilon$  mais dans aucun bord, il appartient alors à un unique carré ouvert  $\Pi_{j(z)}$  avec un certain indice  $1 \leq j(z) \leq J$ , d'où grâce à ce qu'on vient de voir :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \Pi_{j(z)}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

tandis que pour *tout* autre indice  $j' \neq j(z)$  :

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \Pi_{j'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

En sommant bêtement tout cela, la conclusion tombe comme une prune pulpeuse, flasque, juteuse :

$$\begin{aligned} f(z) + \underbrace{(J-1) \cdot 0}_\circ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Pi_{j(z)}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \sum_{\substack{1 \leq j' \leq J \\ j' \neq j(z)}} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Pi_{j'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \sum_{j=1}^J \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Pi_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned} \quad \square$$

Ensuite, revenons à des points  $z \in K$ , y compris sur les bords des carrés  $\overline{\Pi}_j$ .

**Lemme 12.5.** *On a, pour tout  $z \in K$ , la formule de représentation :*

$$f(z) = \sum_{h=1}^H \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_h} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

*Démonstration.* Tout d'abord, lorsque  $z \in K_\varepsilon$ , en supposant toujours que  $z$  n'appartienne à aucun bord  $\partial\overline{\Pi}_1, \dots, \partial\overline{\Pi}_J$ , dans la formule que nous venons de démontrer, toutes les intégrales sur des bords de deux carrés adjacents s'annulent par paires, puisque les orientations des segments d'intégration sont opposées, et il ne reste alors plus que les intégrales sur les bords *non-adjacents*, que nous avons notés  $\gamma_1, \dots, \gamma_H$  :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{j=1}^J \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Pi_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \sum_{h=1}^H \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_h} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned} \quad (\forall z \in K_\varepsilon \setminus (\partial\overline{\Pi}_1 \cup \dots \cup \partial\overline{\Pi}_J)).$$

Ensuite, dans cette somme finie, chaque intégrale s'effectue sur un segment compact  $\gamma_h \subset \Omega$  qui n'a aucune intersection avec  $K_\varepsilon$ , donc se situe à distance strictement positive de  $K_\varepsilon$ , et par conséquent, l'intégrande  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  de ces intégrales  $\int_{\gamma_h}$  à paramètre  $z \in K$  est *continu* par rapport à :

$$(z, \zeta) \in K_\varepsilon \times \gamma_h,$$

donc un théorème vu en cours d'Intégration (de Riemann) garantit la *continuité* par rapport à  $z \in K_\varepsilon$  de ces intégrales  $\int_{\gamma_h}$ .

Par conséquent, la formule reste vraie par continuité en faisant tendre des points  $z \in \mathcal{O}_\varepsilon$  non situés sur la réunion des bords des  $\overline{\Pi}_j$  vers les points quelconques de  $K$  qui ont le malheur de rôtir sur la grille de côté  $\delta$ .  $\square$

Soit maintenant  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega \setminus K$  une courbe de classe  $\mathcal{C}^1$ , par exemple  $\gamma = \gamma_h$  pour un indice  $1 \leq h \leq H$ . Par convention, on identifie l'application  $\gamma$  et sa courbe-image  $\gamma([0, 1]) \subset \Omega \setminus K$ . On introduit :

$$F_\gamma(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in K).$$

**Lemme 12.6.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $P(z) \in \mathbb{C}[z]$  et  $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$  avec  $Q|_K \neq 0$  tels que :*

$$\max_{z \in K} \left| F_\gamma(z) - \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \varepsilon.$$

*Démonstration.* Pour  $g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$ , les sommes de Riemann, associées à la subdivision équitale (mais non commerciale) par segments de longueur  $\frac{1}{n}$  de l'intervalle compact  $[0, 1]$ , convergent vers l'intégrale (de Riemann) de  $g$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_0^1 g(t) dt.$$

Ensuite, par définition :

$$F_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) dt,$$

ce qui conduit à examiner la fonction de  $t \in [0, 1]$  dépendant du paramètre  $z \in K$  :

$$H(z, t) := \frac{1}{2i\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t).$$

Sur le compact  $K \times [0, 1] \ni (z, t)$ , cette fonction est continue, puisque  $\gamma([0, 1]) \cap K = \emptyset$ . Grâce au théorème de Heine-Borel, elle y est donc uniformément continue.

Or la continuité uniforme implique en particulier (exercice mental), pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'existence de  $\delta(\varepsilon) > 0$  tel que :

$$|t_1 - t_2| \leq \delta(\varepsilon) \implies \left| H(z, t_1) - H(z, t_2) \right| \leq \varepsilon \quad \forall z \in K,$$

ce, uniformément sur  $K$ .

Alors dès que  $n \gg 1$  est choisi assez grand pour que  $\frac{1}{n} \leq \delta(\varepsilon)$ , la somme de Riemann associée à l'intégrale considérée :

$$F_\gamma(z) = \int_0^1 H(z, t) dt,$$

peut être soumise à un traitement de choc qui établit à grands coups d'inégalités triangulaires sa proximité à son intégrale-mère :

$$\begin{aligned} \left| F_\gamma(z) - \sum_{k=0}^{n-1} H\left(z, \frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} H(z, t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} H\left(z, \frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \underbrace{\left| H(z, t) - H\left(z, \frac{k}{n}\right) \right|}_{\leq \varepsilon} dt \\ &\leq \int_0^1 \varepsilon dt \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de prendre conscience que cette somme de Riemann :

$$\sum_{k=0}^{n-1} H\left(z, \frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2i\pi} \underbrace{\frac{f(\gamma(\frac{k}{n}))}{\gamma(\frac{k}{n}) - z}}_{\text{pôle en } z=\gamma(\frac{k}{n})} \gamma'\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}$$

est une somme finie de fractions rationnelles simples à coefficients complexes, donc peut être écrite, après réduction au même dénominateur, sous la forme  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  avec deux polynômes

$P, Q \in \mathbb{C}[z]$ . Comme les pôles  $\gamma(\frac{0}{n}), \gamma(\frac{1}{n}), \dots, \gamma(\frac{n-1}{n})$  se situent tous sur  $\gamma$ , on a bien  $Q|_K \neq 0$  avec le dénominateur commun :

$$\frac{1}{Q} := \frac{1}{(\gamma(\frac{0}{n}) - z)(\gamma(\frac{1}{n}) - z) \cdots (\gamma(\frac{n-1}{n}) - z)}. \quad \square$$

Nous pouvons enfin effectuer la synthèse mathématique de tout ce qui précède, et détailler rigoureusement tous les arguments manquants qui terminent la démonstration du Théorème 12.2 de Runge rationnel.

D'après ce qui précède, à chaque courbe  $\gamma = \gamma_1, \dots, \gamma_H$  qui survit lorsqu'on élimine les frontières communes entre les  $\bar{\Pi}_j$  recouvrant  $K$ , on peut associer la transformée de Cauchy :

$$F_{\gamma_h}(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_h} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (1 \leq h \leq H),$$

et puisque nous avons démontré par construction que :

$$f(z) = F_{\gamma_1}(z) + \cdots + F_{\gamma_H}(z),$$

il suffirait, pour conclure, de montrer que *chacune* de ces fonctions  $F_{\gamma_h}(z)$  possède la propriété d'approximation à volonté — mais nous venons de le faire il y a un instant !

Afin d'être parfaitement rigoureux et complet, comme cela est exigé par Dame Mathématique, il faut partir, pour tout  $1 \leq h \leq H$ , avec  $\varepsilon$  astucieusement remplacé à l'avance par  $\frac{\varepsilon}{H}$ , de tous les résultats d'approximation :

$$\exists \frac{P_h(z)}{Q_h(z)} \in \text{Frac } \mathbb{C}[z] \quad \text{avec } Q_h|_K \neq 0 \quad \text{tel que} \quad \max_{z \in K} \left| F_{\gamma_h}(z) - \frac{P_h(z)}{Q_h(z)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{H},$$

puis définir :

$$\begin{aligned} Q_1(z) \cdots Q_H(z) &=: Q(z) \quad \text{jamais nul sur } K, \\ \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} + \cdots + \frac{P_H(z)}{Q_H(z)} &=: \frac{P(z)}{Q(z)}, \end{aligned}$$

somme qui est une fraction rationnelle — car les fraction rationnelles, c'est comme les gènes, cela ne peut se mélanger qu'en produisant *aussi* des gènes —, puis effectuer une majoration classique par inégalités triangulaires :

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \frac{P(z)}{Q(z)} \right| &= \left| F_{\gamma_1}(z) + \cdots + F_{\gamma_H}(z) - \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} - \cdots - \frac{P_H(z)}{Q_H(z)} \right| \\ &= \left| F_{\gamma_1}(z) - \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} + \cdots + F_{\gamma_H}(z) - \frac{P_H(z)}{Q_H(z)} \right| \\ &\leq \left| F_{\gamma_1}(z) - \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} \right| + \cdots + \left| F_{\gamma_H}(z) - \frac{P_H(z)}{Q_H(z)} \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{H} + \cdots + \frac{\varepsilon}{H} \\ &= \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

### 13. Théorème de Runge polynomial

En partant d'une approximation rationnelle  $|f(z) - \frac{P(z)}{Q(z)}| \leq \varepsilon$  comme dans le Théorème 12.2 dont nous venons d'achever la démonstration, nous allons mettre au point un procédé final qui consiste à « pousser vers l'infini » les pôles de  $\frac{P(z)}{Q(z)}$ , procédé qui ne pourra être accompli que sous l'hypothèse que  $\mathbb{C} \setminus K$  soit connexe. Nous 'transformerons' ainsi une fraction rationnelle en un polynôme.

**Théorème 13.1. [de Runge polynomial]** *Soit  $K \subset \mathbb{C}$  un compact dont le complémentaire  $\mathbb{C} \setminus K$  est connexe. Alors pour tout ouvert  $\Omega \supset K$ , les fonctions holomorphes dans  $\Omega$  sont approximables uniformément sur  $K$  par des polynômes :*

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists P(z) = P_\varepsilon(z) \in \mathbb{C}[z] \quad \text{tel que} \quad \max_{z \in K} |f(z) - P(z)| \leq \varepsilon.$$

Ce résultat est remarquable, car les fonctions polynomiales sont holomorphes *globalement*, définies sur  $\mathbb{C}$  tout entier, tandis que les  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  ne sont définies que dans un voisinage ouvert de  $K$ .

*Démonstration.* Comme toute fonction rationnelle ayant pour unique pôle un point donné  $z_0 \in \mathbb{C}$  peut s'écrire comme *polynôme* en la fonction-type  $\frac{1}{z-z_0}$  à coefficients dans  $\mathbb{C}[z]$ , il suffit d'établir le lemme suivant pour conclure la démonstration de ce Théorème 13.1.

**Lemme 13.2.** *Si un compact  $K \subset \mathbb{C}$  a un complémentaire  $\mathbb{C} \setminus K$  connexe, alors pour tout point  $z_0 \notin K$ , la fonction rationnelle  $\frac{1}{z-z_0}$  peut être approximée uniformément sur  $K$  par des polynômes de  $\mathbb{C}[z]$ .*

*Démonstration.* Soit un rayon  $R \gg 1$  assez grand pour que  $K \subset \mathbb{D}_R(0)$ . Choisissons un point hors de ce grand disque ouvert  $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_R$ , et développons :

$$\frac{1}{z-z_1} = -\frac{1}{z_1} \frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{z^n}{z_1^{n+1}},$$

où cette série converge uniformément pour tout  $z \in K$ , comme on s'en convainc en utilisant le fait (exercice de rappel) qu'il existe un rayon  $0 < r < R$  strictement inférieur tel que  $K \subset \overline{\mathbb{D}_r(0)}$ .

Grâce à cette convergence, les sommes partielles  $\sum_{n=0}^N$ , avec  $N \geq 0$  entier quelconque, de cette série géométrique sont alors des polynômes qui approximent uniformément  $\frac{1}{z-z_1}$  sur  $K$ . Ensuite, cela implique que toute puissance  $\frac{1}{(z-z_1)^k}$  peut aussi être approximée uniformément sur  $K$  par des polynômes.

Il suffit maintenant d'établir que la fraction  $\frac{1}{z-z_0}$  peut être approximée uniformément sur  $K$  par des polynômes en  $\frac{1}{z-z_1}$ , avec certains  $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_R$ .

À cette fin, utilisons l'hypothèse que  $\mathbb{C} \setminus K$  est connexe, et prenons une courbe continue  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus K$  partant de  $z_0 = \gamma(0)$  et aboutissant à  $\gamma(1) = z_1$ . Comme  $\gamma \equiv \gamma([0, 1]) \subset \mathbb{C} \setminus K$  est un compact disjoint de  $K$ , le nombre réel :

$$\rho := \frac{1}{2} \text{dist}(\gamma, K) > 0$$

est strictement positif.

Choisissons alors une suite de points  $\{w_0, w_1, \dots, w_L\}$  sur  $\gamma$  avec  $z_0 = w_1$  et  $w_L = z_1$  assez nombreux pour que :

$$|w_\ell - w_{\ell+1}| \leq \rho \quad (0 \leq \ell \leq L-1)$$



**Assertion 13.3.** *Pour toute paire de points  $w, w' \in \gamma$  situés à distance :*

$$|w - w'| \leq \rho,$$

*la fraction rationnelle  $z \mapsto \frac{1}{z-w}$  peut être approximée uniformément sur  $K$  par des polynômes en  $z \mapsto \frac{1}{z-w'}$ .*

*Preuve.* En effet, avec  $z \in K$ , nous pouvons développer :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-w} &= \frac{1}{z-w'} \frac{1}{1 - \frac{w-w'}{z-w'}} \\ &= \frac{1}{z-w'} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{w-w'}{z-w'} \right)^n, \end{aligned}$$

et comme cette somme converge uniformément pour  $z \in K$  grâce à :

$$\left| \frac{w-w'}{z-w'} \right| \leq \frac{\rho}{\text{dist}(\gamma, K)} = \frac{1}{2},$$

de simples approximations par des sommes partielles  $\sum_{n=0}^N$  fonctionnent.  $\square$

Ce résultat nous permet donc de voyager de  $z_0$  vers  $z_1$  en effectuant un nombre fini d'arrêts « approximatifs » aux point-auberges  $\{w_\ell\}_{0 \leq \ell \leq L}$ , et pas à pas, de conclure à dos de cheval que  $\frac{1}{z-z_0}$  peut être approximée uniformément sur  $K$  par des polynômes en  $\frac{1}{z-z_1}$ .

Ceci conclut la démonstration du Lemme 13.2, et simultanément aussi, celle du Théorème 13.1.  $\square$

#### 14. Approximation polynomiale sur des ouverts à complémentaire connexe

Le Théorème 13.1 vient de faire voir que les compacts  $K \subset \mathbb{C}$  dont le complémentaire  $\mathbb{C} \setminus K$  est connexe permettent aux fonctions qui sont holomorphes dans leur voisinage d'être approximées à volonté par des polynômes. L'énoncé est vrai quel que soit l'ouvert  $\Omega \supset K$ , même lorsque  $\Omega$  n'est qu'un « épaississement infinitésimal » de  $K$ .

En faisant « tendre »  $\Omega \rightarrow K$ , on pourrait alors s'imaginer que la connexité de  $\mathbb{C} \setminus K$  est essentiellement équivalente à la connexité de  $\mathbb{C} \setminus \Omega$ .

Soit donc un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$  dont le complémentaire  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  est connexe. Nous allons voir que certains compacts bien choisis  $L \subset \Omega$  ont eux aussi un complémentaire  $\mathbb{C} \setminus L$  connexe. Commençons par un préliminaire.

**Lemme 14.1.** *Étant donné deux ouverts  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \mathbb{C}$  non vides disjoints, quels que soient  $z_1 \in \mathcal{O}_1$  et  $z_2 \in \mathcal{O}_2$ , il est impossible que le segment  $[z_1, z_2]$  soit contenu dans leur réunion :*

$$[z_1, z_2] \not\subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2.$$

*Démonstration.* Sinon, si  $[z_1, z_2] \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ , alors le segment d'intérieur non vide  $[z_1, z_2] = I_1 \cup I_2$  est réunion des deux ouverts (relatifs) non vides :

$$I_1 := \mathcal{O}_1 \cap [z_1, z_2] \quad \text{et} \quad I_2 := \mathcal{O}_2 \cap [z_1, z_2],$$

ce qui contredit la connexité de  $[z_1, z_2]$ .  $\square$

**Proposition 14.2.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un ouvert borné dont le complémentaire  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  est connexe. Alors pour tout  $\delta > 0$ , le sous-ensemble compact de  $\Omega$  :*

$$L_\delta := \{z \in \Omega : \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \delta\}$$

a un complémentaire  $\mathbb{C} \setminus L_\delta$  qui est lui aussi connexe.

En particulier, il y a une homologie entre le fait que le fermé  $\mathbb{C} \setminus \Omega =: F_\infty$  consiste une unique composante connexe  $F_\infty$  qui s'échappe vers l'infini, et le fait que l'ouvert  $\mathbb{C} \setminus K =: \mathcal{O}_\infty$  est lui aussi connexe allant vers l'infini.

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $\mathbb{C} \setminus L_\delta$  est réunion de deux ouverts *non vides* disjoints :

$$\mathbb{C} \setminus L_\delta = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2, \quad \emptyset = \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2.$$

Comme  $L_\delta \subset \Omega$ , on a  $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset \mathbb{C} \setminus L_\delta$ , d'où :

$$(14.3) \quad \mathbb{C} \setminus \Omega \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2.$$

Introduisons alors les deux ensembles :

$$F_1 := \mathcal{O}_1 \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega) \quad \text{et} \quad F_2 := \mathcal{O}_2 \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega).$$

Puisqu'on a alors  $\mathbb{C} \setminus \Omega = F_1 \cup F_2$ , afin d'atteindre une contradiction, nous allons montrer que  $F_1$  et  $F_2$  sont non vides, disjoints, fermés.

**Assertion 14.4.**  $F_1 \neq \emptyset$  et  $F_2 \neq \emptyset$ .

*Preuve.* Sinon  $F_1 = \emptyset$  — le cas  $F_2 = \emptyset$  étant symétrique —, et cherchons une contradiction. Autrement dit,  $\mathcal{O}_1 \subset \Omega$ , d'où via (14.3) :

$$\mathbb{C} \setminus \Omega \subset \mathcal{O}_2.$$

Prenons un point quelconque  $w \in \mathcal{O}_1$ , donc  $w \in \mathbb{C} \setminus L_\delta$ . Alors par définition de  $L_\delta$ , on a  $\text{dist}(w, \mathbb{C} \setminus \Omega) < \delta$ , donc il existe un point  $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$  avec  $|w - z| < \delta$ . Ensuite, tout point  $\zeta \in [z, w]$  sur le segment satisfait :

$$|\zeta - z| \leq |w - z| < \delta,$$

donc  $\text{dist}(\zeta, \mathbb{C} \setminus \Omega) < \delta$ , et ainsi  $\zeta \notin L_\delta$ , c'est-à-dire :

$$[z, w] \subset \mathbb{C} \setminus L_\delta.$$

Nous sommes alors parvenus à une situation :

- $w \in \mathcal{O}_1$ ,
- $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega \subset \mathcal{O}_2$ ,
- $[z, w] \subset \mathbb{C} \setminus L_\delta = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ ,

que nous savons déjà impossible, grâce au Lemme 14.1, ce qui est l'absurdité recherchée.  $\square$

**Assertion 14.5.**  $F_1$  et  $F_2$  sont disjoints.

*Preuve.* Comme  $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ , il est clair que  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  aussi.  $\square$

**Assertion 14.6.**  $F_1$  et  $F_2$  sont fermés.

*Preuve.* Pour voir que  $F_1$  est fermé (*idem* par symétrie pour  $F_2$ ), soit une suite de Cauchy quelconque  $\{z_n\}_{n=1}^\infty$  de points  $z_n \in F_1$  qui converge vers un point  $z_\infty \in \mathbb{C}$ .

Comme  $F_1 \subset \mathcal{O}_1$ , on a  $z_n \in \mathcal{O}_1$ . Comme  $F_1 \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$  qui est fermé, ce point-limite satisfait :

$$z_\infty \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Comme  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  est à distance finie  $\delta > 0$  de  $L_\delta$ , on en déduit que :

$$z_\infty \notin L_\delta, \quad \text{donc} \quad z_\infty \in \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2.$$

Ensuite, il est impossible que  $z_\infty \in \mathcal{O}_2$ , car par ouverture de  $\mathcal{O}_2$ , les  $z_n$  pour  $n$  grand appartiendraient aussi à  $\mathcal{O}_2$ , mais on vient de voir que tous les  $z_n \in \mathcal{O}_1$ . Ainsi :

$$z_\infty \in \mathcal{O}_1,$$

et enfin  $z_\infty \in \mathcal{O}_1 \cap \mathbb{C} \setminus \Omega = F_1$ . □

En conclusion, on a représenté le complémentaire fermé  $\mathbb{C} \setminus \Omega = F_1 \cup F_2$  comme réunion disjointe de deux fermés non vides, en contradiction avec l'hypothèse qu'il est connexe. □

Pour terminer, voici une application importante du Théorème 13.1 de Runge polynomial qui s'avérera utile dans les chapitres subséquents.

**Théorème 14.7.** *Dans tout ouvert borné  $\Omega \subset \mathbb{C}$  dont le complémentaire  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  est connexe, on a la propriété d'approximation uniforme des fonctions holomorphes par des polynômes sur les compacts :*

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \forall K \subset \Omega \text{ compact} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists P(z) \in \mathbb{C}[z] \quad \text{tel que} \quad \max_{z \in K} |f(z) - P(z)| \leq \varepsilon.$$

De plus, pour toute courbe  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  fermée  $\gamma \subset \Omega$ , on a :

$$0 = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta.$$

Nous allons démontrer cette dernière propriété *sans* construire de primitive pour les fonctions  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ . Ce n'est qu'à un stade beaucoup plus avancé de la théorie que nous serons en mesure d'établir que dans les ouverts bornés  $\Omega \subset \mathbb{C}$  à complémentaire  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  connexe, toutes les fonctions holomorphes ont des primitives.

*Démonstration.* Clairement, puisque  $\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$ , il existe  $\delta > 0$  assez petit pour que :

$$K \subset L_\delta = \{z \in \Omega : \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \delta\}.$$

Nous venons de dire que  $\mathbb{C} \setminus L_\delta$  est connexe. Donc le Théorème 13.1 s'applique, et fournit, pour tout  $\varepsilon > 0$ , un polynôme  $P(z)$  tel que :

$$\begin{aligned} \max_{z \in K} |f(z) - P(z)| &\leq \max_{z \in L_\delta} |f(z) - P(z)| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ensuite, soit  $\gamma \subset \Omega$ , fermée,  $\mathcal{C}_{\pm}^1$ . Alors il existe  $\delta > 0$  tel que  $\gamma \subset L_\delta$ . Avec  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  où  $n \geq 1$  est un entier quelconque, il existe une suite  $\{P_n(\zeta)\}_{n=1}^\infty$  de polynômes satisfaisant :

$$\begin{aligned} \max_{\zeta \in \gamma} |f(\zeta) - P_n(\zeta)| &\leq \max_{\zeta \in L_\delta} |f(\zeta) - P_n(\zeta)| \\ &\leq \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

d'où par intégration :

$$\left| \int_{\gamma} (f(\zeta) - P_n(\zeta)) d\zeta \right| \leq \frac{1}{n} \text{longueur}(\gamma).$$

Mais comme les  $P_n(\zeta) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  sont holomorphes dans l'ouvert étoilé  $\mathbb{C}$ , le Théorème 4.5 de Cauchy étoilé donne :

$$0 = \int_{\gamma} P_n(\zeta) d\zeta \quad (\forall n \geq 1),$$

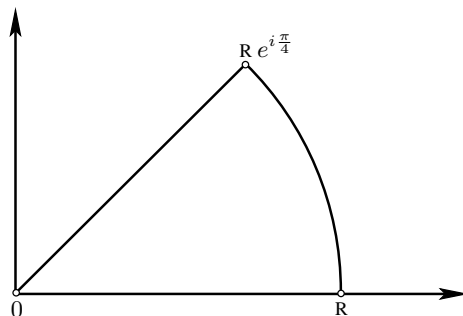
et enfin :

$$(14.8) \quad \left| \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \left| \int_{\gamma} (f(\zeta) - P_n(\zeta)) d\zeta \right| + \underbrace{\left| \int_{\gamma} P_n(\zeta) d\zeta \right|}_0 \\ \leq \frac{1}{n} \text{longueur}(\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

## 15. Exercices

**Exercice 1.** En interprétant  $\int_0^\infty$  comme  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R$ , trouver la valeur des *intégrales de Fresnel* :

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx = \int_0^\infty \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$



**Indication:** Intégrer la fonction  $e^{-z^2}$  sur le contour représenté, en utilisant  $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

**Exercice 2.** Montrer que  $\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ . **Indication:** Écrire l'intégrale comme  $\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}-1}{x} dx$  et effectuer une intégration complexe sur le bord d'un certain demi-disque édenté.

**Exercice 3.** Pour deux réels  $a > 0$  et  $b$ , calculer les deux intégrales :

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos(bx) dx \quad \text{et} \quad \int_0^\infty e^{-ax} \sin(bx) dx.$$

**Indication:** Intégrer  $e^{-z\sqrt{a^2+b^2}}$  sur le bord d'un secteur angulaire approprié d'angle  $\omega$  satisfaisant  $\cos \omega = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .

**Exercice 4.** Montrer qu'on a pour tout  $\xi \in \mathbb{C}$  (pas seulement pour  $\xi$  réel) la formule :

$$e^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^\infty e^{-\pi x^2} e^{2i\pi\xi x} dx.$$

**Exercice 5.** Pour chacun des 5 ouverts suivants, déterminer s'il est étoilé (ou non) par rapport à l'un de ses points :

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad \mathbb{C} \setminus [2, 5], \quad \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup \{-i\}), \quad \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_+ \cup i\mathbb{R}_+), \quad \mathbb{C} \setminus \{|z| \leq 1\}.$$

**Exercice 6. (a)** Pour  $r, s > 0$  réels, on considère le rectangle :

$$R := \{z \in \mathbb{C} : -r < x < r, -s < y < s\},$$

parcouru dans le sens trigonométrique. Calculer les deux intégrales :

$$\int_{\partial R} \frac{dz}{z}, \quad \int_{\partial R} \frac{dz}{z^2}.$$

(b) Pour confirmer que  $\operatorname{Re} z$  n'est pas holomorphe, calculer, sur le bord du carré  $\square$  de côtés 0, 1,  $1+i$ ,  $i$  :

$$\int_{\partial \square} \operatorname{Re} z \, dz.$$

**Exercice 7.** Pour un ouvert connexe  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , montrer que l'ensemble :

$$E = \{z \in \Omega : \Omega \text{ est étoilé en } z\}$$

est convexe.

**Exercice 8.** Soit  $\Omega \supset \overline{\mathbb{D}}$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  contenant le disque unité fermé  $\overline{\mathbb{D}} = \{|z| \leq 1\}$  de bord le cercle unité  $C = \{|z| = 1\}$ , paramétré par  $\theta \mapsto e^{i\theta}$ .

(a) Pour toute fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ , calculer les deux intégrales :

$$\int_C \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z} \, dz, \quad \int_C \left(2 - z - \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z} \, dz.$$

(b) En déduire que :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \frac{\theta}{2} f(e^{i\theta}) \, d\theta = 2f(0) + f'(0).$$

(c) De manière similaire, déterminer la valeur de :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{\theta}{2} f(e^{i\theta}) \, d\theta.$$

**Exercice 9.** Dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , soit une fonction holomorphe  $f$  qui est *continûment* différentiable, i.e.  $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et  $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  sont continues — ce qui n'est pas demandé dans la définition de l'holomorphie. Soit aussi  $T = \overline{T} \subset \Omega$  un triangle fermé non aplati.

(a) Pour deux fonctions réelles  $P, Q \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ , montrer que l'intégrale suivante sur le bord du triangle est égale à une intégrale dans l'intérieur :

$$\int_{\partial T} (P \, dx + Q \, dy) = \int_T \left( -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \, dx \, dy.$$

**Indication:** Étudier d'abord ce cas spécial du théorème général de Riemann-Green en supposant  $Q \equiv 0$  :

$$\int_{\partial G} (P \, dx) = \int_G \left( -\frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy,$$

et en supposant le domaine  $G$  où l'on intègre de la forme « sandwich entre deux graphes » :

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f_-(x) < y < f_+(x)\},$$

avec  $-\infty < a < b < \infty$ , avec deux fonctions  $f_-, f_+$  continues  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  définies sur  $[a, b]$  satisfaisant  $f_- < f_+$  sur  $]a, b[$ .

(b) Ré-obtenir le théorème de Goursat :

$$0 = \int_{\partial T} f(z) \, dz,$$

avec cette hypothèse supplémentaire que  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$ .

**Exercice 10.** Soit  $\Delta \subset \mathbb{C}$  un disque ouvert non vide. Montrer que pour tout  $z \in \Delta$ , on a :

$$2i\pi = \int_{\partial \Delta} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

**Indication:** Supposer  $\Delta = \mathbb{D}_r(0)$  avec  $r > 0$  centré à l'origine, puis, pour  $0 \leq t \leq 1$  réel, étudier la fonction :

$$\Phi(t) := \int_0^{2\pi} \frac{r i e^{i\theta}}{r e^{i\theta} - t z} \, d\theta.$$

**Exercice 11.** Soit  $T = \overline{T} \subset \Omega \subset \mathbb{C}$  un triangle fermé contenu dans un ouvert du plan complexe, et soit  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction qui est  $\mathbb{C}$ -différentiable excepté en unique point  $z_* \in T$ . Montrer que si  $f$  est bornée au voisinage de  $z_*$ , alors le théorème de Goursat est encore vrai :

$$0 = \int_{\partial T} f(z) dz.$$

**Exercice 12.** Soit un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , soit  $z_0 \in \Omega$ , soit  $r > 0$  avec  $\overline{\Delta} := \overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$ , soit  $z \in \Delta$  à l'intérieur, et soit  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ .

Avec  $0 < \delta < \varepsilon \ll \text{rayon}(\Delta)$ , soit le contour « trou de serrure »  $\Gamma_{\delta, \varepsilon} = \partial\Omega_{\delta, \varepsilon}$  évitant  $z$  qui a été utilisé dans la démonstration du Théorème 6.1.

(a) Montrer que :

$$0 = \int_{\Gamma_{\delta, \varepsilon}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

**Indication:** Vérifier que  $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$  est holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \{z\}$  et continue dans  $\mathbb{C}$ , puis montrer qu'elle a une primitive dans  $\mathbb{C}$ .

(b) Soit le grand cercle  $C := \partial\Delta$  et soit le petit cercle  $c_\varepsilon := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| = \varepsilon\}$ , tous deux orientés dans le sens trigonométrique. Montrer que :

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{c_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \left\{ \int_C \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_{c_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right\}.$$

(c) En utilisant le résultat de l'Exercice 10, démontrer la *formule de représentation intégrale de Cauchy* :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\forall z \in \Delta).$$

**Exercice 13.** Soit une fonction holomorphe  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  définie dans le disque unité  $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ .

(a) Montrer que le diamètre de son image :

$$\text{diam } f(\mathbb{D}) := \sup_{z, w \in \mathbb{D}} |f(z) - f(w)|$$

est minoré par :

$$2|f'(0)| \leq \text{diam } f(\mathbb{D}).$$

**Indication:** Pour  $0 < r < 1$  arbitrairement proche de 1, utiliser, après l'avoir justifiée, la formule :

$$2f'(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta) - f(-\zeta)}{\zeta^2} d\zeta.$$

(b) Montrer que l'inégalité est une égalité précisément lorsque  $f(z) = az + b$  est affine.

**Exercice 14.** Si  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  est une fonction holomorphe dans la bande ouverte  $\Omega := \{x + \sqrt{-1}y : -1 < y < 1\}$  qui satisfait, pour deux constantes  $C \geq 0$  et  $\kappa \in \mathbb{R}$  :

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|)^\kappa \quad (\forall z \in \Omega),$$

montrer que pour tout entier  $n \geq 0$ , il existe une constante  $C_n \geq 0$  telle que :

$$|f^{(n)}(x)| \leq C_n(1 + |x|)^\kappa \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

**Exercice 15.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un ouvert borné, et soit  $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega$  une fonction holomorphe à valeurs dans  $\Omega$  lui-même. S'il existe un point  $z_0 \in \Omega$  en lequel :

$$\varphi(z_0) = z_0 \quad \text{et} \quad \varphi'(z_0) = 1,$$

montrer que  $\varphi(z) \equiv z$  est l'identité. **Indication:** Se ramener à  $z_0 = 0$ , écrire  $\varphi(z) = z + a_n z^n + O(z^{n+1})$ , composer un nombre  $k \geq 1$  arbitraire de fois :

$$\varphi^{\circ k} := \varphi \circ \dots \circ \varphi,$$

vérifier que  $\varphi^{\circ k}(z) = z + k a_n z^n + O(z^{n+1})$ , et appliquer les inégalités de Cauchy.

**Exercice 16.** Un théorème de Weierstrass énonce qu'une fonction continue sur  $[0, 1]$  peut être uniformément approximée à volonté par des polynômes réels. Montrer que les fonctions continues sur le disque unité fermé  $\mathbb{D}$  ne sont pas toutes uniformément approximables par des polynômes holomorphes  $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ .

**Exercice 17.** Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un voisinage ouvert d'un disque fermé  $\overline{\mathbb{D}}_R = \overline{\mathbb{D}}_R(0)$  centré à l'origine de rayon  $R > 0$ .

(a) Montrer que pour tout rayon intermédiaire  $0 < r \leq R$ , pour tout  $|z| < r$ , on a la représentation intégrale :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \operatorname{Re} \left( \frac{re^{i\varphi} + z}{re^{i\varphi} - z} \right) d\varphi.$$

**Indication:** En prenant  $w := \frac{R^2}{\bar{z}}$ , observer que l'intégrale de  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - w}$  sur le cercle de rayon  $R$  vaut 0, puis utiliser la formule de Cauchy.

(b) Vérifier, pour  $0 < s < r$  et  $\varphi \in \mathbb{R}$ , que :

$$\operatorname{Re} \left( \frac{re^{i\varphi} + s}{re^{i\varphi} - s} \right) = \frac{r^2 - s^2}{r^2 - 2rs \cos \varphi + s^2}.$$

**Exercice 18.** Soit  $u: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle définie dans le disque unité ouvert  $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$  qui est de classe  $\mathcal{C}^2$ . On dit que  $u$  est *harmonique* si elle est annulée par l'opérateur de Laplace :

$$\Delta u(x, y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (\forall (x, y) \in \mathbb{D}).$$

(a) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$  telle que :

$$\operatorname{Re} f = u.$$

**Indication:** Si  $f$  existe, vérifier que l'on doit avoir  $f'(z) = 2 \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ . Montrer alors que la fonction  $g(z) := 2 \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$  est holomorphe, puis en trouver une primitive  $F'(z) = g(z)$ , et enfin, montrer que  $\operatorname{Re} F - u = \text{constante}$ .

(b) Montrer que la partie imaginaire de  $f$  est déterminée de manière unique, à l'addition près d'une constante (réelle).

(c) Dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , montrer que la fonction  $\log |z|$  est harmonique, mais n'est la partie réelle d'aucune fonction holomorphe.

(d) En utilisant l'Exercice 17, en déduire la *formule intégrale de Poisson*, qui s'énonce comme suit. Si une fonction  $\mathcal{C}^2$  sur le disque unité fermé  $u \in \operatorname{Harm}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{D})$  est harmonique dans le disque unité ouvert, alors sa valeur en un point intérieur quelconque  $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$  avec  $0 \leq r < 1$  est donnée par l'intégrale de convolution :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \varphi) u(e^{i\varphi}) d\varphi,$$

avec le *noyau de Poisson* :

$$P_r(\gamma) := \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \gamma + r^2} \quad (\gamma \in \mathbb{R}).$$

**Exercice 19.** Si une fonction  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  holomorphe entière a la propriété qu'en tout point  $z_0 \in \mathbb{C}$ , son développement en série entière :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

possède au moins un coefficient nul  $f^{(n_{z_0})}(z_0) = 0$ , montrer que  $f$  est un polynôme. **Indication:** Employer un argument de dénombrabilité.

**Exercice 20.** Soit  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  une série entière à coefficients  $a_n \in \mathbb{C}$  dont le rayon de convergence  $R > 0$  est strictement positif. Son *étoile de Mittag-Leffler* est le plus grand ouvert  $\Omega \ni 0$  étoilé en 0 tel qu'il existe une fonction holomorphe  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  avec  $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$  pour tout  $n \geq 0$ .

Déterminer l'étoile de Mittag-Leffler des trois séries entières suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{3n}.$$

**Exercice 21.** Soit  $f$  une fonction continue sur le disque unité fermé  $\overline{\mathbb{D}}$  qui est holomorphe dans  $\mathbb{D}$  et prend la valeur 0 en tout point du demi-cercle unité supérieur :

$$\partial^+ \mathbb{D} := \{z \in \partial \mathbb{D} : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Montrer que  $f$  est identiquement nulle dans  $\overline{\mathbb{D}}$ . **Indication:** Construire une fonction qui est holomorphe dans un voisinage ouvert de  $\{|z| = 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ .

**Exercice 22.** Soit  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_{\mathbb{R}})$  une fonction holomorphe dans le disque ouvert  $\mathbb{D}_{\mathbb{R}} = \mathbb{D}_{\mathbb{R}}(0)$ . Pour  $0 \leq r < \mathbb{R}$ , on introduit :

$$M_f(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

(a) Montrer que  $r \mapsto M_f(r)$  est une fonction continue et croissante sur  $[0, \mathbb{R}[$ .

(b) Montrer qu'elle est strictement croissante si et seulement si  $f$  n'est pas constante.

**Exercice 23.** Soit  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  une fonction holomorphe entière telle qu'il existe des constantes réelles  $A, B, a \geq 0$  avec :

$$|f(z)| \leq A + B |z|^a \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Montrer que  $f$  est un polynôme.

**Exercice 24.** (a) Montrer que l'application :

$$z \mapsto \frac{z}{\sqrt{1 - |z|^2}}$$

établit un difféomorphisme  $\mathcal{C}^\infty$  du disque unité  $\mathbb{D}$  sur  $\mathbb{C}$ .

(b) Montrer qu'il n'existe *pas* de *biholomorphisme* de  $\mathbb{D}$  sur  $\mathbb{C}$ , à savoir un difféomorphisme holomorphe dont l'inverse est aussi holomorphe.

**Exercice 25.** Soit  $\Omega \supset \overline{\mathbb{D}}$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  contenant le disque unité fermé, et soit une fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ . Si  $f(0) = 1$  tandis que  $|f(z)| > 1$  pour tout  $|z| = 1$ , montrer que  $f$  s'annule en au moins un point de  $\mathbb{D}$ .

**Exercice 26.** Soit  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  une fonction holomorphe entière *non* bornée. Montrer que son image  $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$  est un sous-ensemble dense de  $\mathbb{C}$ . **Indication:** S'il existe un disque ouvert  $\mathbb{D}_{s_0}(w_0)$  de rayon  $s_0 > 0$  centré en un point  $w_0 \in \mathbb{C}$  ne rencontrant pas  $f(\mathbb{C})$ , regarder la fonction  $1/(f(z) - w_0)$ .

**Exercice 27.** Soit  $\Omega := ]-1, 1[ \times ]-1, 1[$  le carré unité ouvert dans  $\mathbb{C}$ . On note ses 4 côtés orientés :

$$\gamma_1 := \{1\} \times [-1, 1], \quad \gamma_2 := [1, -1] \times \{1\}, \quad \gamma_3 := \{-1\} \times [1, -1], \quad \gamma_4 := [-1, 1] \times \{-1\}.$$

On suppose que  $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$  vérifie, pour des constantes  $0 \leq c_i < \infty$  :

$$|f(\zeta)| \leq c_i \quad (\forall \zeta \in \gamma_i, \forall 1 \leq i \leq 4).$$

Montrer que :

$$|f(0)| \leq \sqrt[4]{c_1 c_2 c_3 c_4}.$$

**Indication:** Introduire  $g(z) := f(z) f(iz) f(-z) f(-iz)$ .

**Exercice 28.** Pour une fonction holomorphe entière  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ , à savoir une série entière  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$  de rayon de convergence infini, on introduit comme dans l'Exercice 22 :

$$M_f(r) := \max_{|z|=r} |f(z)| \quad (r \in \mathbb{R}_+).$$

(a) Montrer que  $r \mapsto M_f(r)$  est une fonction croissante.

(b) Soit  $P = P(z) \in \mathbb{C}[z]$  un polynôme de degré  $n \geq 1$ , et soit  $Q$  le *polynôme réciproque* défini par  $Q(z) := z^n P(\frac{1}{z})$ . Montrer que :

$$M_Q(r) := r^n M_P\left(\frac{1}{r}\right) \quad (\forall r \geq 0).$$

(c) Montrer que la fonction  $r \mapsto \frac{1}{r^n} M_P(r)$  est décroissante.

(d) Pour toute paire de rayons  $0 < r < \mathbb{R}$ , établir l'*inégalité de Bernstein-Walsh* :

$$\max_{|z|=\mathbb{R}} |P(z)| \leq \left(\frac{\mathbb{R}}{r}\right)^n \max_{|z|=r} |Q(z)|.$$



**Exercice 29.** Une fonction  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$  holomorphe dans le disque unité  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  est dite *prolongeable holomorphiquement* en un point  $\zeta \in \partial\mathbb{D}$  du cercle-bord unité s'il existe une fonction holomorphe  $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_\varepsilon(\zeta))$  définie dans un disque de rayon  $\varepsilon > 0$  telle que :

$$g|_{\mathbb{D} \cap \mathbb{D}_\varepsilon(\zeta)} = f|_{\mathbb{D} \cap \mathbb{D}_\varepsilon(\zeta)}.$$

(a) Montrer que si une série entière  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  a un rayon de convergence  $R > 0$ , alors il existe au moins un point  $\zeta_* \in \mathbb{D}_R(0)$  en lequel  $f$  n'est pas prolongeable holomorphiquement :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \nexists \quad g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_\varepsilon(\zeta_*)) \quad g|_{\mathbb{D}_R(0) \cap \mathbb{D}_\varepsilon(\zeta_*)} = f|_{\mathbb{D}_R(0) \cap \mathbb{D}_\varepsilon(\zeta_*)}.$$

**Indication:** Raisonner par l'absurde, et utiliser la compacité de  $\partial\mathbb{D}_R$ .

(b) Vérifier que le rayon de convergence de la série lacunaire :

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

vaut 1.

(c) Montrer que  $f(z)$  n'est prolongeable holomorphiquement en aucun point du bord  $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ . **Indication:** Pour des angles de la forme  $\theta := \frac{2\pi p}{2^k}$  où  $p \geq 1$  et  $k \geq 1$  sont entiers, montrer que :

$$\infty = \lim_{r \rightarrow 1^-} \left| f(r e^{i \frac{2\pi p}{2^k}}) \right|.$$

(d) Pour un paramètre réel quelconque  $0 < \alpha < \infty$ , montrer plus généralement que la fonction holomorphe :

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} z^{2^n} \quad (|z| < 1),$$

n'est prolongeable holomorphiquement en aucun point  $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ . **Indication:** Le cours d'Analyse de Fourier a fait voir que la fonction de variable réelle :

$$g(\theta) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} e^{i 2^n \theta},$$

est continue, mais n'admet de dérivée en *aucun* point  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 30.** On note  $d(n)$  le nombre de diviseurs d'un entier  $n \geq 1$ . Soit la série entière :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) z^n.$$

(a) Vérifier que son rayon de convergence vaut 1.

(b) Montrer l'identité :

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(z) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}.$$

(c) Montrer, pour  $z = r$  réel avec  $0 < r < 1$  proche de 1, qu'il y a une minoration :

$$|f(r)| \geq c \frac{1}{1-r} \log \left( \frac{1}{1-r} \right)$$

au moyen d'une certaine constante  $0 < c < \infty$ .

(d) Plus généralement, pour  $z = r e^{i \frac{2\pi p}{q}}$  avec  $0 < r < 1$  proche de 1 et avec  $p, q \geq 1$  entiers, montrer qu'il y a une minoration :

$$|f(r e^{i \frac{2\pi p}{q}})| \geq c_{p,q} \frac{1}{1-r} \log \left( \frac{1}{1-r} \right)$$

au moyen d'une certaine constante  $0 < c_{p,q} < \infty$ .

(e) Montrer que  $f$  n'est prolongeable holomorphiquement (cf. l'Exercice 29) en aucun point du bord  $\zeta \in \partial\mathbb{D}$  du disque unité.