Théorème de la progression arithmétique de Dirichlet

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Introduction

2. Arithmétique élémentaire et formule d'Euler

Avant d'entamer les raisonnements, des préliminaires s'imposent. Soit :

$$\mathbb{N}^* = \big\{1, 2, 3, \dots\big\} = \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

l'ensemble des entiers naturels $\geqslant 1$. Soient deux entiers $a, b \geqslant 1$. On dit que a *divise* b s'il existe $c \in \mathbb{N}$, $c \geqslant 1$, tel que $b = ac$, ce qu'on note :

$$a \,|\, b.$$

Ainsi, $1 \,|\, a$ et $a \,|\, a$, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$.

Définition 2.1. Un nombre entier $p \geqslant 2$ n'ayant aucun autre diviseur que 1 et lui-même est appelé (nombre) *premier*.

On notera :

$$\begin{aligned}\mathscr{P} &:= \big\{p \geqslant 2 \colon \ p \text{ est premier}\big\}\\ &= \big\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ \dots\big\}.\end{aligned}$$

Définition 2.2. Le *plus grand commun diviseur* de deux entiers $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$, noté :

$$\mathsf{pgcd}\,(a, b),$$

est le plus grand entier c qui divise simultanément a et b.

Le *Théorème Fondamental de l'Arithmétique* s'énonce alors comme suit.

Théorème 2.3. *Tout entier $n \geqslant 1$ se factorise de manière unique comme produit de nombres premiers :*

$$n = \big(p_1\big)^{\alpha_1} \cdots \big(p_r\big)^{\alpha_r},$$

avec $p_1 < \cdots < p_r \in \mathscr{P}$ et des puissances entières $\alpha_1, \dots, \alpha_r \geqslant 1$. □

Sa démonstration, non remobilisée ici, repose sur le lemme de division d'Euclide, et sur le théorème de Gauss.

Théorème 2.4. *Il y a une infinité de nombres premiers :*

$$\infty = \mathsf{Card}\,\mathscr{P}.$$

Puisque l'objectif est d'établir le Théorème de Dirichlet, qui en est une généralisation non-élémentaire, il est avisé de se remémorer les arguments, faciles, qui remontent au moins à Euclide.

Démonstration. Par l'absurde, s'il n'y avait qu'un nombre fini $\text{K} < \infty$ d'entiers premiers :

$$\mathscr{P} \overset{?}{=} \{p_1, \dots, p_{\text{K}}\},$$

avec $2 = p_1 < \cdots < p_{\text{K}}$, alors l'entier astucieusement formé :

$$1 + p_1 \cdots p_{\text{K}},$$

visiblement divisible par *aucun* des p_k, $1 \leqslant k \leqslant \text{K}$, devrait toutefois, à cause du théorème qui précède, *être* produit fini d'entiers appartenant à $\mathscr{P} = \{p_1, \dots, p_{\text{K}}\}$, contradiction. □

Une démonstration élémentaire d'un résultat plus précis mérite d'être détaillée.

Théorème 2.5. *La série :*

$$\sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p} = \infty$$

diverge.

Il en découle instantanément que $\mathsf{Card}\, \mathscr{P} = \infty$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que cette série, à termes > 0, converge. En numérotant par ordre croissant :

$$\mathscr{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_k, \dots\},$$

il existe alors un entier $\text{K} \gg 1$ assez grand pour que :

$$\sum_{k=\text{K}+1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{2.6}$$

Introduisons alors le produit :

$$Q := p_1 \cdots p_{\text{K}}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'entier $1 + n\,Q$ n'est pas divisible par $p_1, \dots, p_{\text{K}}$, donc a ses facteurs premiers parmi $\{p_{\text{K}+1}, p_{\text{K}+2}, \dots\}$.

Assertion 2.7. *Pour tout* $\text{N} \geqslant 1$ *on a :*

$$\sum_{n=1}^{\text{N}} \frac{1}{1 + n\,Q} \leqslant \sum_{a=1}^{\infty} \bigg(\sum_{k=\text{K}+1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \bigg)^a.$$

Preuve. Chaque $\frac{1}{1+n\,Q}$ à gauche se décompose en :

$$\frac{1}{1 + n\,Q} = \frac{1}{\prod\limits_{k \geqslant \text{K}+1} (p_k)^{\alpha_{n,k}}} \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

avec des exposants $\alpha_{n,k} \geqslant 0$, le produit étant fini. De plus :

$$n_1 \neq n_2 \implies \{\alpha_{n_1,k}\}_{k \geqslant \text{K}+1} \neq \{\alpha_{n_2,k}\}_{k \geqslant \text{K}+1},$$

simplement parce que $\frac{1}{1+n_1 Q} \neq \frac{1}{1+n_2 Q}$, donc lorsque n varie, tous ces termes $\frac{1}{\prod_{k \geqslant \text{K}+1} (p_k)^{\alpha_{n,k}}}$ sont mutuellement distincts, donc ne se rassemblent jamais à la manière de $\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T} = 2\,\boldsymbol{T}$.

Or un développement multinomial à coefficients entiers du membre de droite :

$$\sum_{a=1}^{\infty} \sum_{\alpha_{K+1}^a+\alpha_{K+2}^a+\cdots=a} \frac{a!}{\alpha_{K+1}^a!\,\alpha_{K+2}^a!\,\cdots} \frac{1}{\prod\limits_{k\geqslant K+1} (p_k)^{\alpha_k^a}}$$

fait voir que *chaque* terme à gauche dans $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+n\,Q}$ (sans rassemblement) apparaît à droite toujours avec un coefficient multinomial $\geqslant 1$, souvent $\geqslant 2$ (à cause de rassemblements), donc l'inégalité est vraie, et même stricte. □

Or (2.6) conduit alors à la majoration *uniforme :*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+n\,Q} \leqslant \sum_{a=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^a = 1 < \infty,$$

quel que soit $N \longrightarrow \infty$, mais cela est faux, puisque l'équivalence évidente :

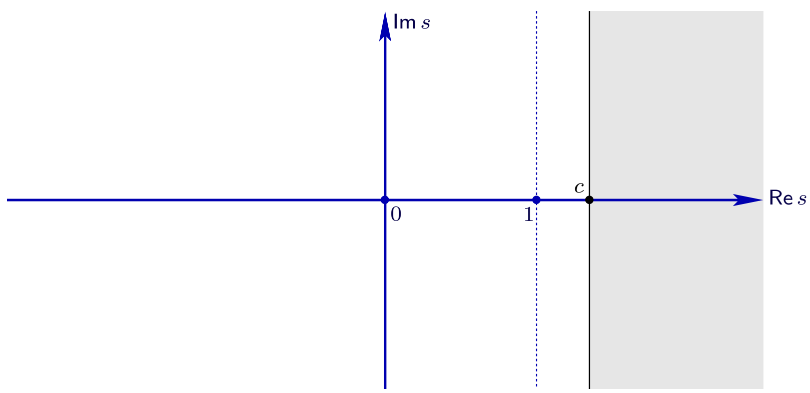
$$\frac{1}{1+n\,Q} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{Q}\,\frac{1}{n},$$

fait voir, à cause de la divergence de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, que $\sum \frac{1}{1+n\,Q} = \infty$, en fait ! □

Une troisième démonstration de l'infinitude des nombres premiers utilise la *fonction zêta* de Riemann :

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

où $s \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe.



Lemme 2.8. *Pour tout réel $c > 1$, cette série converge normalement, donc uniformément, sur le demi-plan fermé :*

$$\big\{\mathsf{Re}\, s \geqslant c\big\} \subset \big\{\mathsf{Re}\, s > 1\big\}$$

Démonstration. En utilisant $\big|e^{s\log n}\big| = e^{\mathsf{Re}\,s\,\log n}$, on majore terme à terme :

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^s|} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathsf{Re}\,s}} \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c} < \infty, \end{aligned}$$

d'après le critère de Riemann. □

Corollaire 2.9. *La fonction $\zeta(s)$ est holomorphe dans le demi-plan ouvert $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$.*

Démonstration. En effet, toutes les fonctions $s \longmapsto \frac{1}{n^s}$ y sont holomorphes, et un théorème dû à Cauchy assure qu'une série de fonctions holomorphes, uniformément convergente sur les compacts d'un ouvert, a une limite continue qui est de plus holomorphe. $\square$

Le résultat-clé, pour re-démontrer $\mathrm{Card}\, \mathscr{P} = \infty$, est la formule de produit d'Euler.

Théorème 2.10. *Pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, s > 1$, on a :*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Il importe de remarquer que cette identité exprime analytiquement le Théorème 2.3 fondamental de l'arithmétique. En effet, chaque terme $\frac{1}{1-p^{-s}}$ dans le produit infini $\prod_{p \in \mathscr{P}}$ se développe comme série géométrique convergente :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots + \frac{1}{p^{\mathrm{M}s}} + \cdots .$$

Ainsi, en numérotant les entiers $\mathscr{P} = \{p_1 < p_2 < \cdots\}$, nous considérons :

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{(p_k)^s} + \frac{1}{(p_k)^{2s}} + \cdots + \frac{1}{(p_k)^{\mathrm{M}s}} + \cdots\right).$$

En développant formellement tout ceci, outre le terme initial $1 = \prod_{k=1}^{\infty} 1$, on obtient une somme dont les termes sont des produits :

$$\frac{1}{(p_{k_1})^{\alpha_1 s}} \cdots \frac{1}{(p_{k_\nu})^{\alpha_\nu s}} =: \frac{1}{n^s},$$

avec $\nu \geqslant 1$, avec $2 \leqslant p_{k_1} < \cdots < p_{k_\nu}$ premiers, et avec des exposants $1 \leqslant \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$, et de cette manière, on reconstitue une et une seule fois tous les $\frac{1}{n^s}$, avec $n \geqslant 2$ entier quelconque.

Ainsi, ce (gigantesque) produit vaut bien :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

L'Exercice 1 propose de se convaincre que ces manipulations formelles convergent lorsque $\mathrm{Re}\, s > 1$.

Venons-en à la démonstration par Euler de $\mathrm{Card}\, \mathscr{P} = \infty$, celle qui a inspiré Dirichlet pour son théorème de la progression arithmétique.

Théorème 2.11. [Euler] *La série $\sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p} = \infty$ diverge.*

Démonstration. Prenons le logarithme complexe de la formule de produit d'Euler :

$$\prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \zeta(s) \qquad (\mathrm{Re}\, s > 1),$$

ce qui donne :

$$- \sum_{p \in \mathscr{P}} \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \log \zeta(s).$$

Comme $\log(1+z) = z + \mathrm{O}(z^2)$ pour $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ (exercice), il vient :

$$-\sum_{p\in\mathscr{P}} \bigg(-\frac{1}{p^s} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{p^{2s}}\Big)\bigg) = \log\zeta(s).$$

Or la somme-reste converge, car :

$$\bigg|\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^{2s}}\bigg| \leqslant \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^{2\,\mathrm{Re}\,s}} \leqslant \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty,$$

et ainsi, nous pouvons écrire :

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^s} + \mathrm{O}(1) = \log\zeta(s),$$

ce qui signifie l'existence d'une constante $0 < C < \infty$ telle que :

$$\bigg|\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^s} - \log\zeta(s)\bigg| \leqslant C \qquad\qquad (\forall\, \mathrm{Re}\, s > 1).$$

Maintenant, faisons $s \longrightarrow 1$ dans $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$. À droite, il est clair que :

$$\lim_{\substack{s\longrightarrow 1\\ \mathrm{Re}\, s>1}} \log\zeta(s) = \infty,$$

simplement parce que, pour tout $\mathrm{N} \gg 1$ entier :

$$\liminf_{\substack{s\longrightarrow 1\\ \mathrm{Re}\, s>1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \geqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} \underset{\mathrm{N}\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

cette série harmonique tendant vers l'infini avec N, comme on le sait.

Par conséquent, on doit aussi avoir à gauche :

$$\lim_{\substack{s\longrightarrow 1\\ \mathrm{Re}\, s>1}} \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^s} = \infty,$$

et comme avec $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$, on a $\frac{1}{p} > \frac{1}{p^s}$, nous concluons bien que :

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p} = \infty. \qquad \square$$

La suite de ce chapitre est consacrée à dévoiler comment Dirichlet a prolongé et adapté cette magnifique démonstration d'Euler.

3. Présentation des idées de Dirichlet dans un cas simple

L'objectif est donc d'établir le

Théorème 3.1. *Pour tous entiers $q \geqslant 2$ et $1 \leqslant \ell \leqslant q-1$ avec $\ell \wedge q = 1$, on a :*

$$\infty = \mathrm{Card}\, \mathscr{P} \cap \big\{\ell + k\,q\big\}_{k\in\mathbb{N}}.$$

Inspiré par les arguments d'Euler qui précèdent, Dirichlet a donc cherché à démontrer que la série :

$$\sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\,\equiv\,\ell \bmod q}} \frac{1}{p} \overset{?}{=} \infty$$

diverge *aussi*. Avant de procéder au cas général, détaillons une preuve très simple dans le cas $q = 4$, $\ell = 1$, qui aura le mérite d'anticiper notre compréhension transparente des choses, et de graver les idées essentielles sur notre disque dur mental.

Proposition 3.2. *Il y a une infinité de nombres premiers de la forme* $\{1 + 4\,k\}_{k\in\mathbb{N}}$*, et plus précisément :*

$$\infty = \sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\,\equiv\,1 \bmod 4}} \frac{1}{p}.$$

Démonstration. L'idée-clé est de considérer l'ensemble des entiers inversibles modulo 4 :

$$\begin{aligned}\big(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\big)^\times &:= \big\{\ell\in\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\colon\ \exists\,\ell'\in\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\ \ell\ell'=1\big\}\\ &= \{1,\,3\} \bmod 4,\end{aligned}$$

autrement dit, de regarder en même temps *toutes* les progressions arithmétiques modulo 4 dans lesquelles il est éventuellement possible de trouver des nombres premiers, vu que $\{0 + 4\,k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $\{2 + 4\,k\}_{k\in\mathbb{N}}$, toujours multiples de 2, n'en contiennent trivialement pas.

Dirichlet introduit alors la fonction de $n \in \mathbb{Z}$:

$$\chi(n) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } n \text{ est pair,}\\ 1 & \text{lorsque } n = 4k+1,\\ -1 & \text{lorsque } n = 4k+3.\end{cases} \tag{3.3}$$

On vérifie (exercice) que cette fonction est *complètement multiplicative :*

$$\chi\big(n_1\,n_2\big) = \chi(n_1)\,\chi(n_2), \tag{3.4}$$

pour tous $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Dirichlet introduit aussi ce qu'on appelle une « *fonction* L » :

$$\begin{aligned}L(s,\chi) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}\\ &= 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \cdots,\end{aligned}$$

qui est une '*déformation*' de la fonction $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$.

Un point absolument crucial est la non-annulation :

$$L(1,\chi) \neq 0,$$

difficile à démontrer dans le cas général, mais ici facile à voir, puisque $L(1,\chi)$ est la série alternée convergente connue :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Par ailleurs, la multiplicativité (3.4) de la fonction χ permet un argument formel direct qui généralise celui d'Euler :

$$\begin{aligned} L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} &= \sum_{r_2,r_3,r_5,\cdots\geqslant 0} \frac{\chi(2)^{r_2}\,\chi(3)^{r_3}\,\chi(5)^{r_5}\cdots}{\big(2^{r_2}\,3^{r_3}\,5^{r_5}\cdots\big)^s} \\ &= \prod_{p\in\mathscr{P}} \bigg(\sum_{r\geqslant 0} \frac{\chi(p)^r}{p^{rs}}\bigg) \\ &= \prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}, \end{aligned}$$

le Théorème 5.4 *infra* donnant une preuve détaillé complète de la convergence de cette formule dans un cadre général.

En admettant donc cette formule :

$$\prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}} = L(s,\chi),$$

si nous prenons à nouveau son logarithme comme nous l'avons fait plus haut dans la démonstration du Théorème 2.11 d'Euler, si nous utilisons à nouveau $\log(1+z) = z + \mathrm{O}(z^2)$ pour $|z| \leqslant \frac{1}{2}$, et si nous observons que $|\chi(p)| \leqslant 1$ pour majorer une série-reste, nous obtenons :

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\chi(p)}{p^s} + \underbrace{\mathrm{O}\bigg(\sum_{p\in\mathscr{P}} \Big(\frac{\chi(p)}{p^s}\Big)^2\bigg)}_{=\,\mathrm{O}(1)} = \log L(s,\chi).$$

Or comme $L(1,\chi) \neq 0$, lorsque $s \longrightarrow 1$ avec $\mathrm{Re}\, s > 1$, le membre de droite reste borné, donc celui de gauche aussi. Autrement dit :

Lemme 3.5. *Lorsque $s \longrightarrow 1$ avec $\mathrm{Re}\, s > 1$, l'expression :*

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\chi(p)}{p^s} = \sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\,\equiv\,1 \bmod 4}} \frac{1}{p^s} - \sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\,\equiv\,3 \bmod 4}} \frac{1}{p^s}$$

reste bornée. □

Cette constatation essentielle termine le travail. En effet, nous savons déjà par le Théorème 2.11 que :

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^s} = \sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\,\equiv\,1 \bmod 4}} \frac{1}{p^s} + \sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\,\equiv\,3 \bmod 4}} \frac{1}{p^s}$$

tend au contraire vers ∞ quand $s \longrightarrow 1$, et alors par simple addition, nous déduisons que :

$$\infty \underset{\substack{1\,\leftarrow\, s\\ 1\,<\,\mathrm{Re}\, s}}{\longleftarrow} 2 \sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\,\equiv\,1 \bmod 4}} \frac{1}{p^s},$$

ce qui conclut la démonstration de la proposition. □

Le cas général du théorème de Dirichlet, toujours inspiré par Euler, débute alors comme suit. Pour $q \geqslant 2$ fixé, il s'agit de considérer *toutes* les sommes :

$$\bigg(\sum_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \equiv \ell \bmod q}} \frac{1}{p^s}\bigg)_{\ell \wedge q = 1},$$

quel que soit ℓ, et de montrer qu'elles divergent. Ainsi, le groupe des éléments inversibles de l'anneau quotient $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, à savoir :

$$\big(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\big)^\times := \Big\{\ell \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \colon\ \exists\, \ell' \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z},\ \ell\ell' = 1\Big\},$$

va jouer un rôle. Dans le cas $q = 4$, $\ell = 1$ vu à l'instant, avec la fonction χ_0 triviale :

$$\chi_0(n) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \mathsf{pgcd}\,(n, q) \geqslant 2, \\ 1 & \text{lorsque } n \wedge q = 1, \end{cases}$$

et avec la fonction χ défine ci-dessus par (3.3), l'argument final consistait à regarder (sommer) les deux fonctions L :

$$\begin{aligned} L(s, \chi_0) &= \sum_p \frac{\chi_0(p)}{p^s} = \sum_{p \equiv 1} \frac{1}{p^s} + \sum_{p \equiv 3} \frac{1}{p^s}, \\ L(s, \chi) &= \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} = \sum_{p \equiv 1} \frac{1}{p^s} - \sum_{p \equiv 3} \frac{1}{p^s}. \end{aligned}$$

Aussi faut-il « inventer » des fonction χ appropriées. C'est donc à la *théorie des* (bons !) *caractères* χ, due à Dirichlet, qu'est consacrée la section suivante. Une fois que nous aurons présenté cette théorie arithmétique, nous pourrons revenir à la description anticipatrice des idées.

4. Groupes abéliens finis, caractères, séries de Fourier discrètes

Soit $G = (G, +)$ un groupe abélien quelconque fini :

$$\mathsf{Card}\, G < \infty.$$

L'ensemble $\{f \colon G \longrightarrow \mathbb{C}\}$ des fonctions sur G est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit aussi le cercle unité :

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \colon\ |z| = 1\},$$

qui est un groupe abélien (infini) pour la multiplication complexe.

Définition 4.1. Un *caractère* de (ou sur) G est un morphisme de groupes abéliens :

$$\chi \colon\quad G \longrightarrow S^1.$$

On vérifie (exercice) que l'ensemble :

$$\widehat{G}$$

des caractères sur G est (aussi) un groupe abélien fini pour la multiplication :

$$\big(\chi\, \chi'\big)(a) := \chi(a)\, \chi'(a) \qquad\qquad (a \in G).$$

L'Exercice 2 propose d'obtenir

$$\mathsf{Card}\, \widehat{G} = \mathsf{Card}\, G.$$

En particulier, le caractère trivial χ_0 sur G prend pour constamment pour valeurs :

$$\chi_0(a) := 1 \qquad\qquad (a \in G).$$

Soit maintenant $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction quelconque.

Définition 4.2. Le *coefficient de Fourier* de f par rapport à un caractère $\chi \in \widehat{G}$ est :

$$\widehat{f}(\chi) := \frac{1}{\mathrm{Card}\, G} \sum_{a \in G} f(a)\, \overline{\chi(a)}.$$

Le produit scalaire hermitien naturel entre deux fonctions $f, g\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ étant :

$$\langle f, g\rangle_G := \frac{1}{\mathrm{Card}\, G} \sum_{a \in G} f(a)\, \overline{g}(a),$$

on a :

$$\widehat{f}(\chi) = \langle f, \chi\rangle_G.$$

Définition 4.3. La *transformée de Fourier* d'une fonction $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ est la fonction :

$$\mathscr{F}(f) := \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \cdot \chi,$$

à savoir dont les valeurs sur les éléments $a \in G$ sont :

$$\mathscr{F}(f)(a) := \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \cdot \chi(a).$$

On vérifie aisément (exercice) que les caractères de G forment une famille orthonormée. Mieux encore, ils forment une base. Les résultats de cette section, issus d'un cours d'Algèbre standard, ne seront pas re-démontrés.

Théorème 4.4. *Les caractères $\chi\colon G \longrightarrow S^1$ (morphismes de groupes) sur un groupe abélien G de cardinal $\mathrm{Card}\, G < \infty$ sont au nombre de $\mathrm{Card}\, G$, et forment une base orthonormée de l'espace vectoriel hermitien :*

$$\big\{f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}\big\},$$

muni du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle_G := \frac{1}{\mathrm{Card}\, G} \sum_{a \in G} f(a)\, \overline{g(a)}.$$

De plus, toute fonction $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ est égale *à sa transformée de Fourier :*

$$f(a) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \langle f, \chi\rangle_G \cdot \chi(a) \qquad\qquad (a \in G).$$

Enfin, la formule de Plancherel-Parseval est satisfaite :

$$\|f\|_G^2 := \langle f, f\rangle_G = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \big|\langle f, \chi\rangle_G\big|^2. \qquad \square$$

Pour illustrer ce propos, soit le groupe cyclique $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \geqslant 2$. Via l'isomorphisme :

$$k \bmod n \quad \longleftrightarrow \quad \big(e^{\frac{2i\pi}{n}}\big)^k,$$

on peut le voir comme :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \,=\, \big\{e^{2i\pi\,\frac{k}{n}} \colon\; k = 0, 1, 2, \dots, n-1\big\}.$$

Ici, les $n = \mathsf{Card}\,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ caractères distincts sont les fonctions :

$$\chi_l\colon \quad e^{\frac{2i\pi k}{n}} \;\longmapsto\; \big(e^{\frac{2i\pi k}{n}}\big)^l \qquad\qquad {\scriptstyle (l = 0, 1, \dots, n-1)}.$$

On vérifie (exercice) qu'on a bien :

$$\big\langle \chi_{l_1},\, \chi_{l_2}\big\rangle_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \,=\, \delta_{l_1, l_2} \qquad\qquad {\scriptstyle (0 \leqslant l_1, l_2 \leqslant n-1)},$$

pour le produit scalaire hermitien :

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \,:=\, \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} f(k)\,\overline{g(k)},$$

où $f\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ et où $g\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ sont deux fonctions quelconques.

L'égalité de toute fonction à sa transformée de Fourier :

$$f(k) \,=\, \frac{1}{n} \sum_{0\leqslant l\leqslant n-1} \langle f, \chi_l\rangle \cdot \chi_l(k) \qquad\qquad {\scriptstyle (k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})},$$

peut être démontrée directement (exercice) sans passer par la théorie générale.

Théorème 4.5. [Structure des groupes abéliens finis] *Tout groupe abélien G avec $\mathsf{Card}\, G < \infty$ est isomorphe à un produit direct de groupes abéliens cycliques.*

Plus précisément, il existe une suite finie unique d'entiers $d_1, \dots, d_{\mathrm{K}}$ se divisant successivement :

$$d_1 \,|\, d_2, \qquad d_2 \,|\, d_3, \qquad \dots\dots, \qquad d_{\mathrm{K}-1} \,|\, d_{\mathrm{K}},$$

telle que :

$$G \,\cong\, \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_{\mathrm{K}}\mathbb{Z}. \qquad\qquad \square$$

Mentionnons que l'on peut établir le Théorème 4.4 en vérifiant d'abord que pour deux groupes abéliens finis G_1 et G_2, on a :

$$\widehat{G_1 \times G_2} \,=\, \widehat{G}_1 \times \widehat{G}_2,$$

et en utilisant ensuite ce théorème de structure.

Maintenant, étant donné $q \geqslant 2$ entier et $1 \leqslant \ell \leqslant q-1$ premier avec q, dans le Théorème 3.1 de Dirichlet, le groupe abélien fini concerné se trouvera être le groupe des éléments inversibles pour la multiplication (commutative) :

$$\big(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\big)^\times \,:=\, \Big\{\ell \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \colon\; \exists\, \ell' \in \mathbb{Z}/z\mathbb{Z},\; \ell\ell' = 1\Big\}.$$

Ce groupe n'est pas forcément cyclique, contrairement au groupe *additif* $\big(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +\big)$ dans lequel il est plongé.

Toutefois, le théorème de structure qui précède montre que $\big(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\big)^\times$ est toujours somme directe finie de groupes cycliques $\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$, avec $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{K}(q)$.

Exemple 4.6. Pour $q = 4$, seuls 1 et 3 ont un inverse :

$$1 \cdot 1 \equiv 1 \mod 4, \qquad\qquad 3 \cdot 3 \equiv 1 \mod 4,$$

et ceci fait voir que :

$$\big(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\big)^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

via l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} 1 &\longleftrightarrow 0, \\ 3 &\longleftrightarrow 2. \end{aligned}$$

Dans la Section **3** qui précède, cet exemple très simple s'est avéré particulièrement éclairant pour comprendre le principe de la démonstration de Dirichlet.

Exemple 4.7. Pour $q = 8$, on vérifie que :

$$\big(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\big)^\times = \big\{1, 3, 5, 7\big\},$$

et que :

$$\big(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\big)^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

via l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} 1 &\longleftrightarrow (0,0), \\ 3 &\longleftrightarrow (1,0), \\ 5 &\longleftrightarrow (0,1), \\ 7 &\longleftrightarrow (1,1). \end{aligned}$$

Comme nous l'avons vu, l'ensemble des caractères sur le groupe intéressant que nous noterons parfois en abrégé :

$$\mathbb{Z}_q^\times \equiv \big(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\big)^\times,$$

sera noté :

$$\widehat{\mathbb{Z}}_q^\times.$$

5. Présentation des idées de Dirichlet dans le cas général

De retour à la discussion laissée en suspens à la fin de la Section **3**, avec $\ell \wedge q = 1$, l'objectif est de démontrer que :

$$\sum_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \equiv \ell \mod q}} \frac{1}{p^s} = \infty.$$

Au moyen de la fonction de $m \in \mathbb{Z}$ définie par :

$$\delta_\ell(m) := \begin{cases} 1 & \text{lorsque } m \equiv \ell \mod q, \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

cette somme se ré-exprime comme :

$$\sum_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \equiv \ell \mod q}} \frac{1}{p^s} = \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\delta_\ell(p)}{p^s}.$$

Bien entendu, δ_ℓ peut aussi être vue comme fonction :

$$\delta_\ell \colon \quad \big(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\big)^\times \longrightarrow \{0, 1\}.$$

La théorie des caractères, à savoir le Théorème 4.4, représente alors δ_ℓ comme série de Fourier :

$$\delta_\ell(m) \;=\; \sum_{\chi\in\widehat{\mathbb{Z}}_q^\times} \langle \delta_\ell, \chi\rangle \cdot \chi(m),$$

et puisqu'un calcul simple donne :

$$\begin{aligned}\langle \delta_\ell, \chi\rangle \;&=\; \frac{1}{\mathrm{Card}\,\mathbb{Z}_q^\times} \sum_{m\in\mathbb{Z}_q^\times} \delta_\ell(m)\,\overline{\chi}(m)\\ &=\; \frac{1}{\varphi(q)}\,\overline{\chi(\ell)},\end{aligned}$$

on obtient :

$$\delta_\ell(m) \;=\; \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi\in\widehat{\mathbb{Z}}_q^\times} \overline{\chi(\ell)}\,\chi(m) \qquad\qquad {\scriptstyle (m\,\in\,\mathbb{Z}_q^\times)}.$$

Définition 5.1. Un *caractère de Dirichlet* modulo q est l'extension à $\mathbb{Z}$ d'un caractère $\chi \in \widehat{\mathbb{Z}}_q^\times$ sur $\mathbb{Z}_q^\times$:

$$\chi(m) \;:=\; \begin{cases}\chi(m) & \text{lorsque } m\wedge q = 1,\\ 0 & \text{autrement,}\end{cases}$$

tous deux notés avec la même lettre χ.

En particulier, le *caractère de Dirichlet trivial* χ_0 est :

$$\chi_0(m) \;:=\; \begin{cases}1 & \text{lorsque } m\wedge q = 1,\\ 0 & \text{autrement.}\end{cases}$$

De manière similaire, on a noté ci-dessus $\delta_\ell \colon \mathbb{Z} \longrightarrow \{0,1\}$ ainsi que $\delta_\ell \colon \mathbb{Z}_q^\times \longrightarrow \{0,1\}$.

Alors la somme intéressante devient :

$$\begin{aligned}\sum_{p\,\equiv\,\ell} \frac{1}{p^s} \;&=\; \sum_p \frac{\delta_\ell(p)}{p^s}\\ &=\; \frac{1}{\varphi(q)} \sum_\chi \overline{\chi(\ell)} \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s},\end{aligned}$$

et ainsi, dans l'objectif d'atteindre $\infty = \sum_{p\equiv\ell} \frac{1}{p}$, il suffit de comprendre le comportement de :

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\chi(p)}{p^s},$$

sachant que la somme $\sum_\chi \overline{\chi(\ell)}$ devant est finie.

Observons que sur les entiers premiers $p \in \mathscr{P}$, le caractère de Dirichlet trivial prend les valeurs :

$$\chi_0(p) \;:=\; \begin{cases}1 & \text{lorsque } p\nmid q,\\ 0 & \text{autrement.}\end{cases}$$

Décomposons alors cette $\sum_\chi$ en distinguant $\chi = \chi_0$, le caractère trivial, des autres caractères $\chi \neq \chi_0$:

$$\begin{aligned} \sum_{p \equiv \ell} \frac{1}{p^s} &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_p \frac{\chi_0(p)}{p^s} + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{p \nmid q} \frac{1}{p^s} + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Or puisqu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers $p \in \mathscr{P}$ ne divisant pas q, le théorème d'Euler $\sum \frac{1}{p} = \infty$ implique que le premier terme à droite *diverge* lorsque $s \longrightarrow 1$ avec $\mathsf{Re}\, s > 1$.

Toutes ces observations montrent que le théorème de la progression arithmétique dû à Dirichlet est conséquence de la découverte suivante, elle aussi due à Dirichlet.

Théorème 5.3. *Pour tout caractère non trivial $\chi \neq \chi_0$ sur $\big(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\big)^\times$, la somme :*

$$\sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\chi(p)}{p^s}$$

demeure bornée lorsque $s \longrightarrow 1$ avec $\mathsf{Re}\, s > 1$.

En effet, l'identité (5.2) ci-dessus donnera alors :

$$\sum_{p \equiv \ell} \frac{1}{p^s} \underset{s \to 1}{\longrightarrow} \infty.$$

Le reste de ce chapitre est consacré à la démonstration de ce théorème.

Terminons cette section par une preuve détaillée du :

Théorème 5.4. *Pour tout caractère de Dirichlet χ modulo un entier $q \geqslant 2$ et tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathsf{Re}\, s > 1$, on a :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}.$$

Démonstration. Notons S le membre de gauche et P le membre de droite :

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \qquad \text{et} \qquad \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} := P.$$

Une application d'un théorème connu d'Analyse Complexe (exercice), garantit que ce produit infini converge pour $\mathsf{Re}\, s > 1$, puisque (solution de l'exercice), la somme infinie :

$$\sum_{p \in \mathscr{P}} \left| \frac{\chi(p)}{p^s} \right| \leqslant \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p^{\mathsf{Re}\, s}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathsf{Re}\, s}} < \infty$$

converge.

Pour $\mathrm{N} \gg 1$ entier, notons aussi :

$$S_{\mathrm{N}} := \sum_{1 \leqslant n \leqslant \mathrm{N}} \frac{\chi(n)}{n^s} \qquad \text{et} \qquad P_{\mathrm{N}} := \prod_{1 \leqslant p \leqslant \mathrm{N}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}.$$

Ainsi :

$$S = \lim_{\mathrm{N} \to \infty} S_{\mathrm{N}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\mathrm{N} \to \infty} P_{\mathrm{N}} = P,$$

donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathrm{N} = \mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$\big|S_{\mathrm{N}(\varepsilon)} - S\big| \leqslant \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}\, s}} \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \big|P_{\mathrm{N}(\varepsilon)} - P\big| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $1 \leqslant \mathrm{N} \leqslant \mathrm{M}$ entiers, soit aussi :

$$P_{\mathrm{N,M}} := \prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\leqslant \mathrm{N}}} \bigg(1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \cdots + \frac{\chi(p^{\mathrm{M}})}{p^{\mathrm{M}s}}\bigg).$$

Assertion 5.5. *Il existe* $\mathrm{M} = \mathrm{M}(\varepsilon) \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)$ *assez grand pour que :*

$$\big|P_{\mathrm{N,M}} - P_{\mathrm{N}}\big| \leqslant \varepsilon \qquad \textit{et} \qquad \big|P_{\mathrm{N,M}} - S_{\mathrm{N}}\big| \leqslant \varepsilon.$$

Preuve. La première inégalité provient simplement de la convergence du développement en série infinie :

$$\frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} = 1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \cdots + \frac{\chi(p^{\mathrm{M}})}{p^{\mathrm{M}s}} + \cdots .$$

Quant à la seconde, plus subtile, avec :

$$t := t(\mathrm{N}) := \mathsf{Card}\,\big\{p \in \mathscr{P} \colon\; 2 \leqslant p \leqslant \mathrm{N}\big\},$$

et la numérotation $2 = p_1 < \cdots < p_t \leqslant \mathrm{N}$, on estime grâce à la multiplicativité complète de χ :

$$\begin{aligned}
\big|S_{\mathrm{N}} - P_{\mathrm{N,M}}\big| &= \bigg|\sum_{n\leqslant \mathrm{N}} \frac{\chi(n)}{n^s} - \prod_{p\leqslant \mathrm{N}} \Big(1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \cdots + \frac{\chi(p^{\mathrm{M}})}{p^{\mathrm{M}s}}\Big)\bigg| \\
&= \bigg|\sum_{n\leqslant \mathrm{N}} \frac{\chi(n)}{n^s} - \sum_{\beta_1,\dots,\beta_t\leqslant \mathrm{M}} \frac{\chi\big(p_1^{\beta_1}\cdots p_t^{\beta_t}\big)}{\big(p_1^{\beta_1}\cdots p_t^{\beta_t}\big)^s}\bigg| \\
&= \bigg| - \sum_{\substack{\beta_1,\dots,\beta_t\leqslant \mathrm{M}\\ p_1^{\beta_1}\cdots p_t^{\beta_t}\geqslant \mathrm{N}+1}} \frac{\chi\big(p_1^{\beta_1}\cdots p_t^{\beta_t}\big)}{\big(p_1^{\beta_1}\cdots p_t^{\beta_t}\big)^s}\bigg| \\
&\leqslant \sum_{n\geqslant \mathrm{N}+1} \bigg|\frac{\chi(n)}{n^s}\bigg| \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Enfin, une inégalité triangulaire à 4 termes :

$$\begin{aligned}
|S - P| &\leqslant \big|S - S_{\mathrm{N}}\big| + \big|S_{\mathrm{N}} - P_{\mathrm{N,M}}\big| + \big|P_{\mathrm{N,M}} - P_{\mathrm{N}}\big| + \big|P_{\mathrm{N}} - P\big| \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon,
\end{aligned}$$

fait voir que $S - P$ est arbitrairement petit, donc $S = P$. □

6. Non-annulation en $s = 1$ des fonctions $L(s, \chi)$

Commençons par énoncer un rappel du cours d'Analyse Complexe.

Théorème 6.1. [Cauchy] *Sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions holomorphes $f_n \in \mathscr{O}(\Omega)$ qui convergent uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction (continue) $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$:*

$$\forall\, K \Subset \mathbb{C} \text{ compact} \qquad \lim_{n \to \infty} \max_{z \in K} \big| f_n(z) - f(z) \big| \,=\, 0.$$

Alors la fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ est holomorphe dans Ω.

De plus, les dérivées de tous ordres $\kappa \geqslant 0$ de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ convergent aussi uniformément sur les compacts de Ω :

$$\forall\, \kappa \in \mathbb{N} \quad \forall\, K \Subset \mathbb{C} \text{ compact} \qquad \lim_{n \to \infty} \max_{z \in K} \big| f_n^{(\kappa)}(z) - f^{(\kappa)}(z) \big| \,=\, 0. \qquad \square$$

Un autre préliminaire connu va être utile. Soient $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ et $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ deux suites de nombres complexes. Il s'agit de transformer des séries infinies de produits $\sum_n a_n\, b_n$ afin d'établir leur convergence, et pour cela, il est avisé d'étudier leurs sommes partielles. Aussi, pour $1 \leqslant \mathrm{M} \leqslant \mathrm{N}$ entiers, on note :

$$S_{\mathrm{M,N}} \,:=\, \sum_{\mathrm{M} \leqslant n \leqslant \mathrm{N}} a_n\, b_n,$$

et pour $n \geqslant \mathrm{M}$:

$$A_{\mathrm{M},n} \,:=\, a_{\mathrm{M}} + a_{\mathrm{M}+1} + \cdots + a_n.$$

Lemme 6.2. [d'Abel] *Alors :*

$$S_{\mathrm{M,N}} \,=\, \sum_{\mathrm{M} \leqslant n \leqslant \mathrm{N}-1} A_{\mathrm{M},n}\, \big(b_n - b_{n+1} \big) + A_{\mathrm{M,N}}\, b_{\mathrm{N}}.$$

Démonstration. Avec l'assignation de valeur $A_{\mathrm{M,M}-1} \,:=\, 0$, on remplace $a_n \,=\, A_{\mathrm{M},n} - A_{\mathrm{M},n-1}$:

$$S_{\mathrm{M,N}} \,=\, \sum_{\mathrm{M} \leqslant n \leqslant \mathrm{N}} \big(A_{\mathrm{M},n} - A_{\mathrm{M},n-1} \big)\, b_n,$$

et on regroupe (à l'œil) les termes. $\square$

Lemme 6.3. *Étant donné deux nombres réels $0 < \alpha < \beta$, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x > 0$, on a :*

$$\big| e^{-\alpha z} - e^{-\beta z} \big| \,\leqslant\, \frac{|z|}{x}\, \big(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x} \big).$$

Démonstration. On majore la représentation intégrale :

$$e^{-\alpha z} - e^{-\beta z} \,=\, z \int_{\alpha}^{\beta} e^{-zt}\, dt,$$

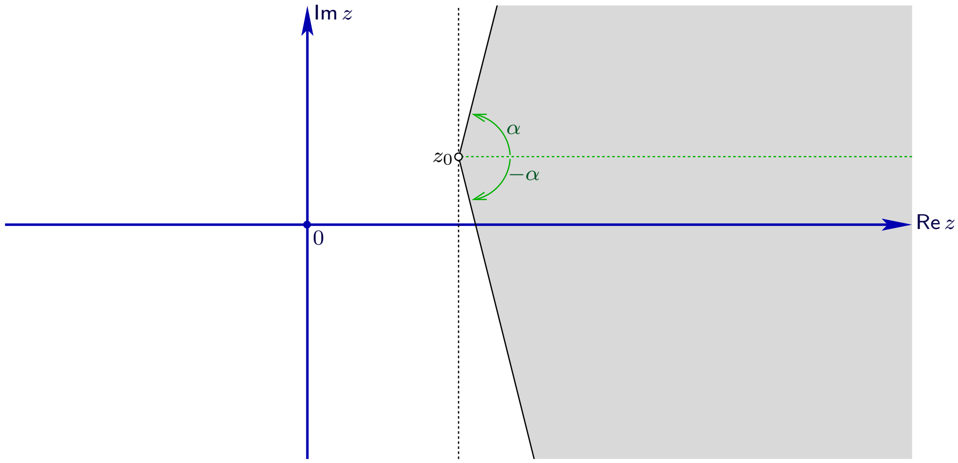
simplement par :

$$\big| e^{-\alpha z} - e^{-\beta z} \big| \,\leqslant\, |z| \int_{\alpha}^{\beta} e^{-xt}\, dt \,=\, \frac{|z|}{x}\, \big(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x} \big). \qquad \square$$

Définition 6.4. Une *série de Dirichlet* est une série infinie, fonction de $z \in \mathbb{C}$, de la forme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z},$$

où $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de nombres appartenant à $\mathbb{C}$.



Proposition 6.5. *Si une série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$ converge (simplement) en un $z = z_0 \in \mathbb{C}$, alors pour tout angle $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, elle converge normalement, donc uniformément, dans le secteur ouvert :*

$$\Big\{z \in \mathbb{C} \colon \ \mathrm{Re}\,(z - z_0) > 0, \ -\alpha < \mathrm{Arg}\,(z - z_0) < \alpha\Big\}.$$

Démonstration. Quitte à effectuer une translation sur z, on peut supposer que $z_0 = 0$. L'hypothèse signifie alors que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, simplement.

Il revient au même (exercice) de démontrer qu'il y a convergence uniforme dans tout domaine de la forme :

$$\big\{z \in \mathbb{C} \colon \ \mathrm{Re}\, z > 0 \colon \ \tfrac{|z|}{\mathrm{Re}\, z} < k\big\},$$

quel que soit $k \geqslant 1$ entier.

Puisque $\sum a_n$ converge, pour tout $\varepsilon > 0$ (arbitrairement petit), il existe un entier $\mathrm{N} = \mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$n_2 \geqslant n_1 \geqslant \mathrm{N} \quad \Longrightarrow \quad \big|A_{n_1,n_2}\big| \leqslant \varepsilon,$$

où comme précédemment $A_{n_1,n_2} = a_{n_1} + \cdots + a_{n_2}$.

Une application du Lemme 6.2 avec $b_n := \frac{1}{n^z}$ donne alors :

$$\begin{aligned} S_{n_1,n_2} &:= \sum_{n_1 \leqslant n \leqslant n_2} \frac{a_n}{n^z} \\ &= \sum_{n_1 \leqslant n \leqslant n_2 - 1} A_{n_1,n} \left(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{(n+1)^z}\right) + A_{n_1,n_2}\, \frac{1}{n_2^z}. \end{aligned}$$

Ensuite, avec $z = x + iy$, et $x > 0$, le Lemme 6.3 offre, en tenant compte de $\frac{1}{|n_2^z|} = \frac{1}{n_2^x} < 1$:

$$\big|S_{n_1,n_2}\big| \leqslant \varepsilon \left[\frac{|z|}{x} \sum_{n_1 \leqslant n \leqslant n_2 - 1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right) + 1\right],$$

c'est-à-dire par téléscopie :

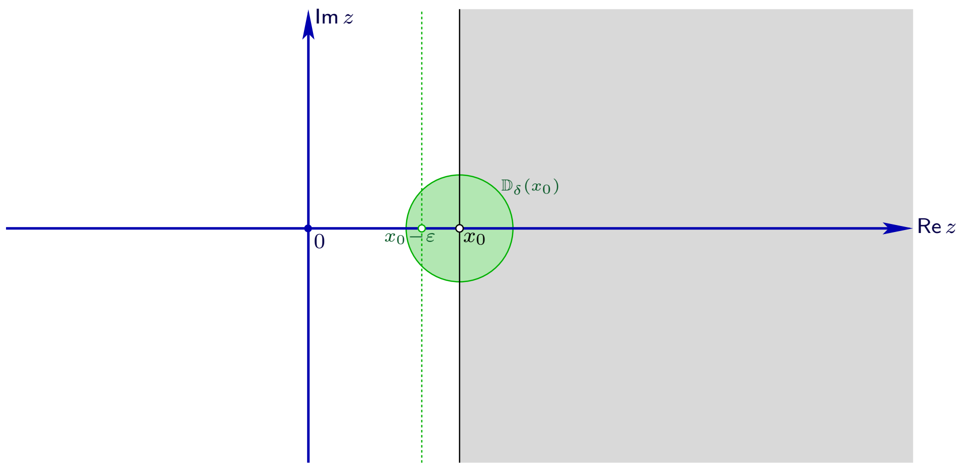
$$\begin{aligned} \big|S_{n_1,n_2}\big| &\leqslant \varepsilon \left(k \left(\frac{1}{n_1^x} - \frac{1}{n_2^x}\right) + 1\right) \\ &\leqslant \varepsilon\,(k+1), \end{aligned}$$

ce qui établit la convergence normale. □

Corollaire 6.6. *Si une série de Dirichlet $\sum \frac{a_n}{n^z}$ converge en un $z = z_0$, alors elle converge en tout point de $\{\mathrm{Re}\, z > \mathrm{Re}\, z_0\}$ vers une fonction-limite* holomorphe *dans $\{\mathrm{Re}\, z > \mathrm{Re}\, z_0\}$.*

Démonstration. En ouvrant l'angle $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ arbitrairement proche de $\frac{\pi}{2}$, on atteint tout point de $\{\mathrm{Re}\, z > \mathrm{Re}\, z_0\}$. La convergence uniforme et le Théorème 6.1 établissent l'holomorphie de la fonction-limite. □

Pour utilisation ultérieure, il faut maintenant étudier les séries de Dirichlet à coefficients réels $a_n \geqslant 0$.

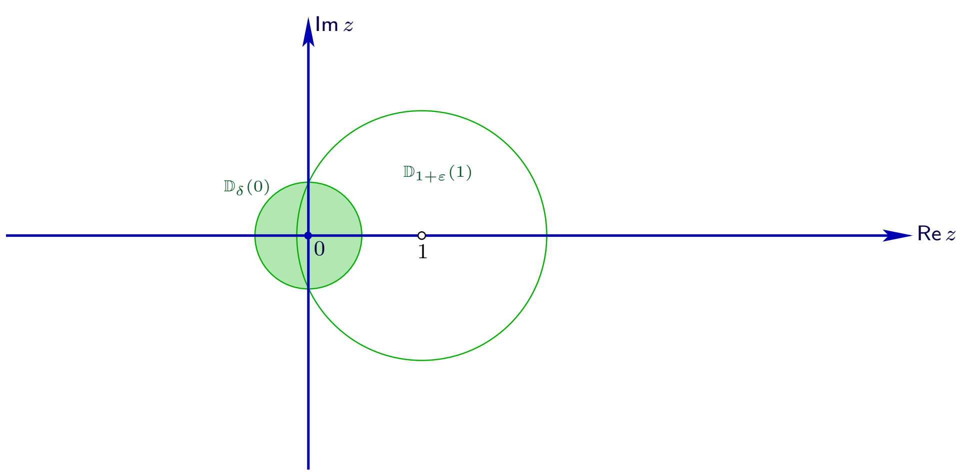


Proposition 6.7. *Soit $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$ une série de Dirichlet à coefficients réels positifs $a_n \geqslant 0$. Si $f(z)$ converge en un point réel $z = x_0 \in \mathbb{R}$ — donc aussi dans $\{\mathrm{Re}\, z > x_0\}$ — et si $f(z)$ peut être prolongée holomorphiquement à un disque ouvert $\mathbb{D}_\delta(x_0)$ de rayon $\delta > 0$ centré en x_0, alors il existe $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ tel que la série $\sum \frac{a_n}{n^z}$ converge en fait dans :*

$$\{z \in \mathbb{C} \colon \ \mathrm{Re}\, z > x_0 - \varepsilon\}.$$

Démonstration. Quitte à translater $z \longmapsto z - x_0$, on peut supposer que $x_0 = 0$. Alors f est holomorphe dans la réunion :

$$\{\mathrm{Re}\, z > 0\} \cup \{|z| < \delta\}.$$



On se convainc aisément qu'il existe $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ assez petit pour que cette réunion *contienne* un voisinage ouvert du disque fermé de centre 1 et de rayon $1+\varepsilon$:

$$\overline{\mathbb{D}}_{1+\varepsilon}(1).$$

En particulier, la série de Taylor (standard) de f calculée au point 1 doit avoir un rayon de convergence strictement supérieur à $1+\varepsilon$. Or le Théorème 6.1 permet de calculer toutes les dérivées κ-ièmes, $\kappa \in \mathbb{N}$, de f en dérivant terme à terme :

$$f^{(\kappa)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(-\log n)^\kappa}{n^z},$$

d'où en $z=1$ pour tout $\kappa \in \mathbb{N}$:

$$f^{(\kappa)}(1) = (-1)^\kappa \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(\log n)^\kappa}{n} \tag{6.8}$$

Observons alors la positivité qui va devenir cruciale :

$$(-1)^\kappa f^{(\kappa)}(1) \geqslant 0.$$

Comme la série de Taylor de f au point $z=1$ s'écrit généralement :

$$f(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(z-1)^\kappa}{\kappa!} f^{(\kappa)}(1),$$

sa valeur au point $z=-\varepsilon$, qui *appartient* au disque de convergence, est :

$$f(-\varepsilon) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(1+\varepsilon)^\kappa}{\kappa!} (-1)^\kappa f^{(\kappa)}(1),$$

cette série étant convergente. Mais puisqu'elle est à termes tous $\geqslant 0$, elle est aussi absolument convergente.

Qui plus est, en remplaçant $(-1)^\kappa f^{(\kappa)}(1)$ par (6.8), il s'ensuit que la série double à termes positifs :

$$f(-\varepsilon) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\kappa!} (1+\varepsilon)^\kappa (\log n)^\kappa \frac{1}{n},$$

est elle aussi convergente — donc commutativement convergente !, d'après un résultat classique. Or en regroupant les termes adéquatement :

$$\begin{aligned} f(-\varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa!} \big[(1+\varepsilon)\log n\big]^\kappa \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} e^{(1+\varepsilon)\log n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{-\varepsilon}}, \end{aligned}$$

on constate que la série de Dirichlet $\sum \frac{a_n}{n^z}$ converge en $z=-\varepsilon$, donc aussi dans $\{\mathrm{Re}\, z > -\varepsilon\}$, grâce à la Proposition 6.5. □

Lemme 6.9. *Si les coefficients $|a_n| \leqslant C < \infty$ sont bornés, la série $\sum \frac{a_n}{n^s}$ converge absolument dans $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$.*

Démonstration. Avec $c > 1$ arbitrairement proche de 1, on majore en effet, pour tout $\mathsf{Re}\, s \geqslant c$:

$$\bigg|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\bigg| \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathsf{Re}\, s}} \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c} < \infty,$$

d'après le critère de Riemann. □

Lemme 6.10. *Si les sommes partielles $A_{\mathrm{M,N}} = a_{\mathrm{M}} + \cdots + a_{\mathrm{N}}$ sont bornées :*

$$\big|A_{\mathrm{M,N}}\big| \leqslant C < \infty \qquad\qquad (\forall\, \mathrm{N} \geqslant \mathrm{M} \geqslant 1),$$

alors la série $\sum \frac{a_n}{n^s}$ converge (pas nécessairement de manière absolue) dans $\{\mathsf{Re}\, s > 0\}$.

Démonstration. Une application du Lemme 6.2 à la somme partielle $S_{\mathrm{M,N}} = \sum_{n=\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \frac{a_n}{n^s}$ avec $b_n := \frac{1}{n^s}$ donne :

$$\big|S_{\mathrm{M,N}}\big| = C \Bigg(\sum_{\mathrm{M}\leqslant n\leqslant \mathrm{N}-1} \bigg|\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\bigg| + \frac{1}{|\mathrm{N}^s|}\Bigg).$$

Supposons $s = s_0 > 0$ réel arbitrairement proche de 0. Alors par téléscopie :

$$\big|S_{\mathrm{M,N}}\big| \leqslant C \bigg(\frac{1}{\mathrm{M}^{s_0}} - \frac{1}{\mathrm{N}^{s_0}} + \frac{1}{\mathrm{N}^{s_0}}\bigg) \underset{\mathrm{N}\geqslant \mathrm{M}\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc il y a convergence lorque $s = s_0$. La Proposition 6.5 montre alors qu'il y a convergence dans $\{\mathsf{Re}\, s > s_0\}$. □

Lemme 6.11. *La fonction $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ se prolonge holomorphiquement à $\{\mathsf{Re}\, s > 0\}$.*

Démonstration. En effet, avec $\mathsf{Re}\, s > 1$, il apparaît dans la différence une série :

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_n^{n+1} dx \bigg(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\bigg)}_{=:\, E_n(s)}$$

de fonctions holomorphes qui sont majorables grâce à l'inégalité de la moyenne :

$$\begin{aligned}\big|E_n(s)\big| = \bigg|\int_n^{n+1} dx \int_n^x \frac{s\, du}{u^{s+1}}\bigg| &\leqslant 1 \cdot \max_{n\leqslant u\leqslant n+1} \bigg|\frac{s}{u^{s+1}}\bigg| \\ &= \frac{|s|}{n^{1+\mathsf{Re}\, s}},\end{aligned}$$

ce qui montre la convergence uniforme sur $\{\mathsf{Re}\, s > 0\}$ vers une fonction-limite holomorphe. □

Après tous ces préparatifs d'Analyse, il est temps de revenir à la théorie des groupes. Soit $\chi \in \widehat{\mathbb{Z}_q^\times}$ un caractère quelconque. Rappelons la formule de produit du Théorème 5.4 :

$$L(s, \chi) = \prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} = \prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\wedge q=1}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}},$$

puisque tout caractère de Dirichlet est identiquement nul sur les entiers non inversibles modulo q :

$$p \wedge q = 1 \iff p \nmid q.$$

On a de manière similaire pour la fonction ζ de Riemann :

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}.$$

Lemme 6.12. *Pour le caractère trivial $\chi \neq \chi_0$, on a :*

$$L(s,\chi_0) = \zeta(s) \prod_{p\,|\,q} \Big(1-\frac{1}{p^s}\Big).$$

Démonstration. En effet :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_0(n)}{n^s} = \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\wedge q=1}} \frac{1}{n^s} = \prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\nmid q}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \zeta(s) \prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\,|\,q}} \Big(1-\frac{1}{p^s}\Big). \qquad \square$$

Corollaire 6.13. *La fonction $L(s,\chi_0)$ est prolongeable méromorphiquement à $\{\mathrm{Re}\, s>0\}$ et y admet un unique pôle simple en $s=1$, de résidu égal à :*

$$\prod_{p\,|\,q} \Big(1-\frac{1}{p}\Big) = \frac{\varphi(q)}{q}. \qquad \square$$

Rappelons que la théorie des caractères montre que pour tout $\chi \in \widehat{\mathbb{Z}}_q^\times$:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}_q^\times} \chi(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi\neq\chi_0, \\ \varphi(q) & \text{si } \chi=\chi_0, \end{cases}$$

d'où découle, en confondant χ avec son extension à $\mathbb{Z}$ comme caractère de Dirichlet :

$$\Big|\sum_{1\leqslant n\leqslant \mathrm{N}} \chi(n)\Big| \leqslant \varphi(q),$$

quel que soit $\mathrm{N}\geqslant 1$ entier.

Proposition 6.14. *Pour tout caractère non trivial $\chi\neq\chi_0$, la série $L(s,\chi)=\sum\frac{\chi(n)}{n^s}$ converge uniformément (mais pas nécessairement absolument) sur les compacts de $\{\mathrm{Re}\, s>0\}$, et y définit une fonction* holomorphe.

Démonstration. Grâce au Lemme 6.10, il suffit de faire voir que les sommes partielles :

$$X_{\mathrm{M,N}} := \sum_{\mathrm{M}\leqslant n\leqslant \mathrm{N}} \chi(n),$$

sont uniformément bornées pour tous $1\leqslant \mathrm{M}\leqslant \mathrm{N}$, et cela est aisé :

$$\big|X_{\mathrm{M,N}}\big| \leqslant \Big|\sum_{1\leqslant n\leqslant \mathrm{N}} \chi(n) - \sum_{1\leqslant n\leqslant \mathrm{M}-1} \chi(n)\Big| \leqslant 2\,\varphi(q). \qquad \square$$

En particulier, au point $s=1$, la valeur $L(1,\chi)$ est *finie*, pour tout $\chi\neq\chi_0$. Comme cela a été annoncé au milieu de la Section **5**, le *point essentiel* de la démonstration du Théorème 3.1 de Dirichlet consiste à établir que :

$$L(1,\chi) \neq 0,$$

et maintenant, nous sommes en mesure de faire aboutir cet objectif.

Toujours avec $q \geqslant 2$ entier, avec $p \in \mathscr{P}$ premier, avec $Z_q^\times = \big(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\big)^\times$ le groupe des entiers inversibles modulo q de cardinal :

$$\mathsf{Card}\, \mathbb{Z}_q^\times \,=\, \varphi(q),$$

lorsque $p \nmid q$, d'où $p \in \mathbb{Z}_q^\times$, on notera son *ordre* dans le groupe $\mathbb{Z}_q^\times$ par :

$$\boldsymbol{o}(p) \,=\, \min\big\{1 \leqslant \boldsymbol{o} \leqslant \varphi(q) \colon\, p^{\boldsymbol{o}} \equiv 1 \,\mathsf{mod}\, q\big\}.$$

Le groupe quotient de $\mathbb{Z}_q^\times$ par le groupe cyclique que p engendre est alors de cardinal entier :

$$\frac{\varphi(q)}{\boldsymbol{o}(p)} \,=\, \mathsf{Card}\,\, \mathbb{Z}_q^\times \Big/ \{1, p, \dots, p^{\boldsymbol{o}(p)-1}\}.$$

Enfin, soit T une indéterminée formelle.

Lemme 6.15. *Si $p \nmid q$, on a l'identité :*

$$\prod_{\chi \in \mathbb{Z}_q^\times} \big(1 - \chi(p)\, T\big) \,=\, \Big(1 - T^{\boldsymbol{o}(p)}\Big)^{\frac{\varphi(q)}{\boldsymbol{o}(p)}}.$$

Démonstration. Les $\boldsymbol{o}(p)$ racines $\boldsymbol{o}(p)$-ièmes de l'unité sont :

$$\big\{e^{\frac{2i\pi k}{\boldsymbol{o}(p)}}\big\}_{0 \leqslant k \leqslant \boldsymbol{o}(p)-1},$$

et il est clair que :

$$\prod_{0 \leqslant k \leqslant \boldsymbol{o}(p)-1} \Big(1 - e^{\frac{2i\pi k}{\boldsymbol{o}(p)}}\, T\Big) \,=\, 1 - T^{\boldsymbol{o}(p)}.$$

Or la théorie des caractères assure, pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant \boldsymbol{o}(p) - 1$, qu'il existe exactement $\frac{\varphi(q)}{\boldsymbol{o}(p)}$ caractères $\chi \in \mathbb{Z}_q^\times$ dont la valeur en p est constante égale à :

$$\chi(p) \,=\, e^{\frac{2i\pi k}{\boldsymbol{o}(p)}},$$

donc le produit complet se décompose en deux produits, ce qui donne la formule. □

Introduisons maintenant la fonction de $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathsf{Re}\, s > 1$:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(s) \,&:=\, \prod_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}}_q^\times} L(s, \chi)\\ &= L(s, \chi_0) \prod_{\chi \neq \chi_0} L(s, \chi).\end{aligned}$$

Elle est holomorphe dans $\{\mathsf{Re}\, s > 1\}$.

Proposition 6.16. *Cette fonction est égale à :*

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(s) \,&=\, \prod_{p \nmid q} \frac{1}{\big(1 - \frac{1}{p^{s\boldsymbol{o}(p)}}\big)^{\frac{\varphi(q)}{\boldsymbol{o}(p)}}}\\ &= \prod_{p \nmid q} \bigg(1 + \frac{1}{p^{s\boldsymbol{o}(p)}} + \frac{1}{p^{2s\boldsymbol{o}(p)}} + \cdots\bigg)^{\frac{\varphi(q)}{\boldsymbol{o}(p)}}\\ &=: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s},\end{aligned}$$

et elle se développe en une série de Dirichlet à coefficients réels positifs $c_n \geqslant 0$ qui converge dans $\{\mathsf{Re}\, s > 1\}$.

Démonstration. En effet, grâce à ce qui précède, en rappelant que $\chi \equiv 0$ sur les entiers non premiers avec q :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(s) = \prod_{\chi} L(s,\chi) &= \prod_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}}_q^\times} \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \\
&= \prod_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \nmid q}} \prod_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}}_q^\times} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \\
\text{[Lemme 6.15]} \qquad &= \prod_{p \nmid q} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^{so(p)}}\right)^{\frac{\varphi(q)}{o(p)}}}.
\end{aligned}$$

Ensuite, le développement de produit de séries $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{kso(p)}}$ à coefficients $\geqslant 0$ donne bien des coefficients $c_n \geqslant 0$, et sa convergence dans $\{\mathsf{Re}\, s > 1\}$ est claire. □

Nous pouvons enfin énoncer et démontrer le théorème-clé qui achève complètement la démonstration du Théorème 3.1 de Dirichlet.

Théorème 6.17. *Pour tout caractère non trivial $\chi \neq \chi_0$, on a en $s = 1$:*

$$L(1,\chi) \neq 0.$$

Démonstration. Sinon, par contradiction, si $L(1,\chi_1) = 0$ pour un caractère $\chi_1 \neq \chi_0$, comme $L(s,\chi_0)$ a été prolongée méromorphiquement à $\{\mathsf{Re}\, s > 0\}$ par le Corollaire 6.13 avec un unique pôle en $s = 1$, d'ordre 1, et comme les autres $L(s,\chi)$ ont été prolongées *holomorphiquement* à $\{\mathsf{Re}\, s > 0\}$ par la Proposition 6.14, le zéro en $s = 1$ de $L(s,\chi_1)$ « *tue* » le pôle en $s = 1$ de $L(s,\chi_0)$, et alors le produit (fini) :

$$\mathscr{L}(s) = L(s,\chi_0) \prod_{\chi \neq \chi_0} L(s,\chi)$$

s'avère être *holomorphe* dans $\{\mathsf{Re}\, s > 0\}$.

Or ce produit prolonge la série de Dirichlet à coefficients $\geqslant 0$ convergente dans $\{\mathsf{Re}\, s > 1\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = \mathscr{L}(s),$$

donc la Proposition 6.7 permet crucialement de déduire que cette série de Dirichlet converge *en fait* dans $\{\mathsf{Re}\, s > 0\}$.

Mais ceci est absurde, car pour tout $p \wedge q = 1$, on peut minorer :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^{so(p)}}}\right)^{\frac{\varphi(q)}{o(p)}} &= \left(1 + \frac{1}{p^{so(p)}} + \frac{1}{p^{2so(p)}} + \cdots\right)^{\frac{\varphi(q)}{o(p)}} \\
&\geqslant 1 + \frac{1}{p^{s\varphi(q)}} + \frac{1}{p^{2s\varphi(q)}} + \cdots,
\end{aligned}$$

donc en prenant le produit :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = \prod_{p \nmid q} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^{so(p)}}} \right)^{\frac{\varphi(q)}{o(p)}} \geqslant \prod_{p \nmid q} \left(1 + \frac{1}{p^{s\varphi(q)}} + \frac{1}{p^{2s\varphi(q)}} + \cdots \right)$$
$$= \sum_{\substack{1 \leqslant n \\ n \wedge q = 1}} \frac{1}{n^{s\varphi(q)}},$$

et cette dernière série diverge en $s = \frac{1}{\varphi(q)} > 0$, car $\sum \frac{1}{n} = \infty$, donc à gauche, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$ ne peut *pas* converger dans $\{\mathrm{Re}\, s > 0\}$ — contradiction conclusive. $\square$

7. Exercices

Exercice 1. L'objectif est d'établir rigoureusement la formule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$ du Théorème 2.10, pour $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, s > 1$.

(a) Justifier la convergence de ce produit infini.

(b) On suppose temporairement $s \in \mathbb{R}$, avec $s > 1$. Pour un entier $\mathrm{N} \geqslant 1$ quelconque, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leqslant \prod_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \leqslant \mathrm{N}}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

(c) En déduire :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leqslant \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

(d) Pour deux entiers $1 \leqslant \mathrm{M} \leqslant \mathrm{N}$, montrer que :

$$\prod_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \leqslant \mathrm{N}}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots + \frac{1}{p^{\mathrm{M}s}} \right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

(e) En déduire :

$$\prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

(f) Traiter le cas général $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, s > 1$.

Exercice 2. En utilisant le Théorème 4.5 de structure des groupes abéliens finis G, démontrer que le groupe des caractères $\widehat{G}$ sur G est toujours isomorphe à G.

Exercice 3. EE