

Fonctions entières et produits infinis

François DE MARÇAY

Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les fonctions holomorphes *entières*, à savoir celles qui sont définies sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C}$ consistant en le plan complexe tout entier.

D'après le principe des zéros isolés, toute $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ non identiquement nulle ne peut s'annuler que sur une collection de points n'ayant aucun point d'accumulation dans $\mathbb{C}$. Par conséquent, si l'ensemble :

$$Z(f) := \{a \in \mathbb{C} : f(a) = 0\},$$

est de cardinal infini, il consiste nécessairement en une suite $\{a_n\}_{n=1}^\infty = Z(f)$ de points tendant vers :

$$\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|.$$

Inversement, étant donné une suite quelconque $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ de points dans $\mathbb{C}$, existe-t-il une fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ qui s'annule en ces points et nulle part ailleurs ? Le théorème de Weierstrass affirme que la réponse est *oui*, à condition de corriger le produit naïf :

$$(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3) \cdots$$

par des facteurs appropriés afin de le rendre convergent.

Autre question : comment les fonctions holomorphes entières croissent-elles à l'infini ? Ici, la théorie va illustrer un principe général important : plus la croissance est grande, plus il peut y avoir de zéros.

D'ailleurs, ce principe se manifeste déjà clairement dans le cas simple des polynômes :

$$P(z) = a_0 z^d + a_1 z^{d-1} + \cdots + a_d \quad (a_0 \neq 0),$$

de croissance à l'infini :

$$\max_{|z|=R} |P(z)| \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} |a_0| R^d,$$

et qui possèdent un nombre de zéros (comptés avec multiplicité) gouverné par cette croissance, d'après le théorème fondamental de l'algèbre.

Pour les fonctions entières générales (non nécessairement polynomiales), c'est la *formule de Jensen*, par laquelle nous allons commencer, qui va ouvrir un accès à des informations sur leurs zéros.

2. Formule de Jensen

Un court préliminaire s'impose. Soit $\mathbb{D}_R(z_0)$ un disque de rayon $R > 0$ centré en un point $z_0 \in \mathbb{C}$, et soit $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_R(z_0))$. Pour tout rayon intermédiaire $0 < r < R$, la formule de Cauchy donne :

$$h(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta,$$

d'où en paramétrant $\zeta = z_0 + r e^{i\theta}$:

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta,$$

ce qui veut dire que la valeur au centre est égale à la moyenne sur (tout) le cercle $C_r(z_0)$.

En prenant la partie réelle, on obtient une *formule de la moyenne* :

$$(2.1) \quad \operatorname{Re} h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} h(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Choisissons maintenant $z_0 := 0$, et abrégeons $\mathbb{D}_R := \mathbb{D}_R(0)$ ainsi que $C_R := C_R(0)$. Le résultat suivant relie les zéros d'une fonction holomorphe à ce qu'on connaît d'elle sur le bord.

Théorème 2.2. [Formule de Jensen] *Soit une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ dans un ouvert $\Omega \supset \mathbb{D}_R \cup C_R$ satisfaisant :*

$$f(0) \neq 0 \quad \text{et} \quad f|_{C_R} \neq 0.$$

Si $z_1, \dots, z_L$ avec $L \geq 0$ entier, sont les zéros de f dans $\mathbb{D}_R$, comptés (répétés) avec multiplicités, alors :

$$\log |f(0)| = \sum_{\ell=1}^L \log \frac{|z_\ell|}{R} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(R e^{i\theta})| d\theta.$$

En fait, le principe des zéros isolés assure que ce nombre de zéros $0 \leq L < \infty$ est *fini* — il peut être nul ! —, et une autre manière d'exprimer cela est d'introduire les zéros *distincts* de f :

$$w_1, \dots, w_K \quad \text{de multiplicités} \quad m_1, \dots, m_K \geq 1,$$

avec $L = m_1 + \dots + m_K$, de telle sorte qu'après renumérotation éventuelle :

$$z_1 = \dots = z_{m_1} = w_1,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$z_{L-m_K+1} = \dots = z_L = w_K,$$

ce qui veut dire que dans la liste $z_1, \dots, z_L$, on *répète* chaque zéro autant de fois que sa multiplicité l'exige.

Puisque $z_1, \dots, z_L \in \mathbb{D}_R$ sont les zéros de $f|_{\mathbb{D}_R \cup C_R}$, on a :

$$0 \neq f(z) \quad (\forall z \in \mathbb{D}_R \cup C_R \setminus \{z_1, \dots, z_L\}).$$

Démonstration. Observons que si f_1 et f_2 sont deux fonctions satisfaisant les hypothèses et la conclusion du théorème, alors leur produit $f := f_1 f_2$ satisfait aussi les hypothèses, donc en utilisant $\log(x_1 x_2) = \log x_1 + \log x_2$ pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$, une simple addition des deux formules de Jensen pour f_1 et pour f_2 donne la formule désirée pour f .

Introduisons alors la fonction :

$$\begin{aligned} g(z) &:= \frac{f(z)}{(z - z_1) \cdots (z - z_L)} \\ &= \frac{f(z)}{(z - w_1)^{m_1} \cdots (z - w_K)^{m_K}}, \end{aligned}$$

définie et holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_L\} = \Omega \setminus \{w_1, \dots, w_K\}$. Mais comme on peut écrire au voisinage de chaque zéro :

$$f(z) = (z - w_k)^{m_k} [\alpha_k + O(z - w_k)] \quad (1 \leq k \leq K),$$

avec $\alpha_k \neq 0$, il est clair que g n'a que des singularités illusoires en les w_k , donc :

$$g \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \text{avec} \quad g(z_1) \neq 0, \dots, g(z_L) \neq 0,$$

et comme ni le numérateur de g , ni son dénominateur ne s'annulent ailleurs, nous déduisons que :

$$g|_{\mathbb{D}_R \cup C_R} \neq 0 \quad (\text{partout}).$$

Grâce à l'observation préliminaire, *en ré-écrivant* :

$$f(z) = g(z) (z - z_1) \cdots (z - z_L),$$

il suffit d'établir la formule pour deux types de fonctions.

Assertion 2.3. *Si une fonction g , holomorphe dans un voisinage ouvert de $\mathbb{D}_R \cup C_R$, ne s'annule jamais, alors :*

$$\log |g(0)| = 0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(R e^{i\theta})| d\theta.$$

Démonstration. Soit $R' > R$ assez proche avec $\mathbb{D}_{R'} \supset \mathbb{D}_R \cup C_R$ et avec $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_{R'})$ jamais nulle dans $\mathbb{D}_{R'}$. Puisque $\mathbb{D}_{R'}$ est simplement connexe, un théorème déjà vu (à la fin du chapitre consacré aux séries de Laurent) fournit un « logarithme » de g , à savoir une fonction $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_{R'})$ telle que :

$$g(z) = e^{h(z)}.$$

Il vient :

$$|g(z)| = e^{\operatorname{Re} h(z)},$$

puis :

$$\log |g(z)| = \operatorname{Re} h(z),$$

et la formule de la moyenne (2.1) conclut. □

Assertion 2.4. *Pour $w \in \mathbb{D}_R$ quelconque, la fonction $f(z) := z - w$ satisfait :*

$$\log |w| = \log \frac{|w|}{R} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |R e^{i\theta} - w| d\theta.$$

Notons que le membre de gauche est bien $\log |f(0)|$ ici.

Démonstration. Écrivons à droite $R \left(e^{i\theta} - \frac{w}{R} \right)$:

$$\log |w| \stackrel{?}{=} \log |w| - \log R + \log R + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| e^{i\theta} - \frac{w}{R} \right| d\theta,$$

simplifions, et renommons $a := \frac{w}{R}$ pour demander si on a bien :

$$\begin{aligned}
 0 &\stackrel{?}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |e^{i\theta} - a| d\theta \\
 [|e^{i\theta}| = 1] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |1 - a e^{-i\theta}| d\theta \\
 [\theta \mapsto -\theta] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |1 - a e^{i\theta}| d\theta \quad (\forall |a| < 1)?
 \end{aligned}$$

Mais oui ! Car la fonction holomorphe :

$$g(z) := 1 - a z,$$

jamais nulle dans $\{|z| \leq 1\}$, satisfait les hypothèses de l'Assertion 2.3 précédente, où $R = 1$, avec $\log |g(0)| = \log 1 = 0$. $\square$

Ceci conclut la démonstration du Théorème 2.2. $\square$

Maintenant, toujours dans un disque $\mathbb{D}_R = \mathbb{D}_R(0)$ de rayon $0 < R < \infty$, sur tout sous-disque ouvert $0 \in \mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_R$ de rayon intermédiaire $0 < r < R$, introduisons une notation pour toute $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_R)$ avec $f \not\equiv 0$:

$$\begin{aligned}
 n_f(r) &:= \text{nombre de zéros de } f \text{ dans } \mathbb{D}_r \\
 &\quad \text{comptés avec multiplicité.}
 \end{aligned}$$

De manière dynamique, il faut s'imaginer que les disques $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_R$ croissent, et voir $r \mapsto n_f(r)$ comme une *fonction* à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Observation 2.5. *La fonction $r \mapsto n_f(r)$ est croissante.* $\square$

En termes de fonctions indicatrices, lorsque $R < \infty$, en supposant comme dans le Théorème 2.2 que f n'a qu'un nombre fini $L \geq 0$ de zéros $z_1, \dots, z_L \in \mathbb{D}_R$, on a :

$$(2.6) \quad n_f(r) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ |z_\ell| < r}}^L 1 = \sum_{\ell=1}^L \mathbf{1}_{|z_\ell|, \infty[}(r),$$

et donc nous pouvons transformer comme suit la somme dans le membre de droite de la formule de Jensen (affectée d'un signe moins) :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\ell=1}^L \log \frac{R}{|z_\ell|} &= \sum_{\ell=1}^L \int_{|z_\ell|}^R \frac{dr}{r} \\
 &= \sum_{\ell=1}^L \int_0^R \mathbf{1}_{|z_\ell|, \infty[}(r) \frac{dr}{r} \\
 &= \int_0^R \left(\sum_{\ell=1}^L \mathbf{1}_{|z_\ell|, \infty[}(r) \right) \frac{dr}{r} \\
 &= \int_0^R n_f(r) \frac{dr}{r}.
 \end{aligned}$$

[Reconnaître (2.6)]

Théorème 2.7. [Réexpression de Jensen] Pour $f \in \mathcal{O}(\Omega \supset \mathbb{D}_R \cup C_R)$ avec $f(0) \neq 0$ et $f|_{C_R} \neq 0$, on a :

$$\int_0^R n_f(r) \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(R e^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)|. \quad \square$$

Intuitivement, pour $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ holomorphe entière, en considérant que la constante terminale $-\log |f(0)|$ devient négligeable, lorsque $R \rightarrow \infty$, cette égalité s'interprète comme établissant une relation entre le nombre de zéros, à gauche, et la « croissance », à droite.

Afin de préciser ce qu'on peut entendre par *croissance*, voici un concept — parmi d'autres.

Définition 2.8. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ a un ordre de croissance $\leq \rho$, avec $\rho \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, s'il existe deux constantes $0 \leq A, B < \infty$ telles que :

$$|f(z)| \leq A e^{B|z|^\rho} \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

L'ordre de croissance ρ_f de f est alors le plus petit de ces ρ :

$$\rho_f := \inf \rho.$$

Il peut être infini — penser à e^{e^z} —, mais nous n'étudierons que les cas où $\rho_f < \rho < \infty$. Par exemple, e^z est d'ordre 1 (exercice), et e^{z^2} d'ordre 2 (exercice).

Le premier résultat intéressant de la théorie majore le nombre de zéros en termes de la croissance.

Théorème 2.9. Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ a un ordre de croissance $\leq \rho < \infty$, alors il existe une constante $0 \leq C < \infty$ telle que :

$$n_f(r) \leq C r^\rho \quad (\forall r \geq 1).$$

De plus, si $z_1, z_2, z_3, \dots$ sont tous les zéros non nuls de f , alors pour tout $\rho' > \rho$:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{|z_\ell|^{\rho'}} < \infty.$$

Le cas où f n'a qu'un nombre fini de zéros, voire n'a aucun zéro, est inclus dans cet énoncé, mais devient trivial.

De plus, un zéro éventuel de f à l'origine ne perturbe rien, puisque l'objet d'étude est le comportement de f sur $\mathbb{D}_r$ quand $r \rightarrow \infty$.

Démonstration. Soit $\nu := \nu_f(0)$ l'ordre de f à l'origine, d'où :

$$f(z) = z^\nu (\alpha + O(z)),$$

avec $\alpha \neq 0$. Si nous introduisons la fonction :

$$F(z) := \frac{f(z)}{z^\nu \alpha},$$

il vient :

$$n_F(r) = n_f(r) - \nu,$$

décalage par une constante devenant invisible quand $r \rightarrow \infty$, quitte à augmenter la constante C de la majoration affirmée par le théorème. Nous pouvons donc supposer que :

$$f(0) = 1.$$

L'idée-clé est d'écrire la formule de Jensen — au centre ! — pour $R = 2r$:

$$\begin{aligned}
 n_f(r) \log 2 &= n_f(r) [\log(2r) - \log(r)] \\
 &= n_f(r) \int_r^{2r} \frac{ds}{s} \\
 \text{[Croissance]} \quad &\leq \int_r^{2r} n_f(s) \frac{ds}{s} + 0 \\
 \text{[Jensen]} \quad &\leq \int_0^{2r} n_f(s) \frac{ds}{s} + \underline{\log |f(0)|}_\circ \stackrel{J}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(2re^{i\theta})| d\theta \\
 \text{[Hypothèse]} \quad &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |A e^{B|2r|^\rho}| d\theta \\
 &= \frac{2\pi}{2\pi} (\log A + B 2^\rho r^\rho) \\
 \text{[}\forall r \geq 1\text{]} \quad &\leq \text{constante} \cdot r^\rho,
 \end{aligned}$$

et l'inégalité entre membres extrêmes donne bien $n_f(r) \leq C r^\rho$.

Ensuite, puisque tous les zéros z_ℓ , $\ell = 1, 2, 3, \dots$, de f sont non nuls, et deviennent de module $|z_\ell| \geq 1$ à partir d'un certain rang, avec $\rho' > \rho$ qui garantit :

$$2^{\rho' - \rho} > 1,$$

l'idée-clé est de décomposer $\{|z| \geq 1\}$ en anneaux dyadiques successifs en commençant par décomposer :

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{|z_\ell|^{\rho'}} = \underbrace{\sum_{|z_\ell| < 1} \frac{1}{|z_\ell|^{\rho'}}}_{< \infty} + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{2^j \leq |z_\ell| < 2^{j+1}} \frac{1}{|z_\ell|^{\rho'}} \right),$$

la première somme étant finie car il ne peut y avoir qu'un nombre fini de zéros dans le compact $\overline{\mathbb{D}}$ d'après le principe des zéros isolés, afin de majorer la deuxième somme comme suit pour conclure :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{2^j \leq |z_\ell| < 2^{j+1}} \frac{1}{|z_\ell|^{\rho'}} \right) &\leq \sum_{j=0}^{\infty} n_f(2^{j+1}) \frac{1}{(2^j)^{\rho'}} \\
 &\leq \sum_{j=0}^{\infty} C 2^{(j+1)\rho} \frac{1}{2^{j\rho'}} \\
 &= C 2^\rho \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{\rho' - \rho})^j} \\
 &= C 2^\rho \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\rho' - \rho}}} \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

□

3. Produits infinis

Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite quelconque de nombres complexes $a_n \in \mathbb{C}$. Dans l'étude des séries infinies $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, il est bien connu que la convergence nécessite que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, parfois rapidement. De manière analogue, si on souhaite élaborer une théorie des *produits* infinis convergents :

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n,$$

on s'attend à ce que les b_n tendent (rapidement) vers 1 — sinon le produit divergera ! C'est pourquoi on écrira dorénavant $b_n = 1 + a_n$, en ayant en tête que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = ?.$$

Les propriétés spéciales du nombre 0 relativement à la multiplication entraînent pour les produits infinis quelques particularités qui n'ont pas de contrepartie pour les séries : si $1 + a_{n_0} = 0$ pour un certain n_0 , on a $\prod_{n=1}^N (1 + a_n) = 0$ dès que $N \geq n_0$, d'où la convergence triviale $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = 0$.

Formulons une première définition dans laquelle nous excluons tout facteur $1 + a_n$ qui pourrait être nul, définition qui est classique dans certains livres mais que nous n'utiliserons pas vraiment dans la théorie des fonctions holomorphes.

Définition 3.1. [Non utilisée] Pour une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres complexes avec $a_n \neq -1$ pour tout n , si la limite :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (1 + a_n) =: \ell,$$

existe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, c'est-à-dire existe *et est non nulle*, on dit que le produit infini des $1 + a_n$ *converge*, et on le note :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \in \mathbb{C}^*.$$

Il importe d'observer que ce produit infini est alors considéré comme *non convergent* lorsque la limite est égale à zéro :

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (1 + a_n) \implies \text{produit infini divergent.}$$

Ensuite, en abrégant :

$$B_N := \prod_{n=1}^N (1 + a_n) \quad (N \geq 1),$$

lorsque le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = \ell \in \mathbb{C}^*$ converge donc vers une limite *non nulle*, il est clair que :

$$1 + a_N = \frac{B_N}{B_{N-1}} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \frac{\ell}{\ell} = 1,$$

et ainsi, une condition nécessaire pour la convergence dans $\mathbb{C}^*$ est que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Comme la fonction logarithme transforme un produit en une somme, et comme $\log(1+z) \approx z$ pour $z \in \mathbb{C}$ petit :

$$\begin{aligned} \log \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n) \\ &\approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \end{aligned}$$

on pourrait croire que la convergence d'un produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ équivaut à la convergence de la série infinie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, mais l'Exercice 1 montre qu'il n'en est rien :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge dans } \mathbb{C} \not\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \text{ converge dans } \mathbb{C}^*.$$

De plus, dans la théorie des produits infinis, on souhaite absolument préserver la propriété suivante des produits finis :

« Pour qu'un produit de nombres complexes soit nul, il faut et il suffit que l'un de ses facteurs soit nul. »

Cependant, malheureusement, l'exemple des facteurs tous différents de zéro :

$$1 + a_n := 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \quad (n \geq 1),$$

montre, par télescopage, que :

$$B_N = \prod_{n=1}^N (1 + a_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N}{N+1} = \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

ce qui montre qu'un produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ peut converger, vers zéro, mais sans qu'aucun de ses facteurs soit nul.

D'ailleurs, ce — mauvais (garçon ?), très mauvais (garçon de Marçay ?) — exemple pour lequel :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = -\infty,$$

montre aussi incidemment que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge dans } \mathbb{C} \not\Leftarrow \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \text{ converge dans } \mathbb{C},$$

et donc aucune implication n'est vraie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge dans } \mathbb{C} \not\Leftarrow \not\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \text{ converge dans } \mathbb{C}!$$

Toutefois, l'intuition qu'un passage par le logarithme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n) = \text{formellement} = \log \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n),$$

permet de ramener l'étude des produits infinis à celle des séries est correcte, à condition d'imposer la convergence *absolue*, laquelle s'avère être la condition suffisante la plus utile dans toutes les applications.

Reformulons alors une définition plus adaptée dans laquelle nous autorisons les facteurs à être nuls.

Définition 3.2. [Utilisée] Pour une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres complexes, si la limite :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (1 + a_n) =: \ell,$$

existe dans $\mathbb{C}$, on dit que le produit infini des $1 + a_n$ *converge*, et on le note :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \in \mathbb{C}.$$

Voici l'énoncé élémentaire qui sera important pour la théorie des fonctions holomorphes.

Théorème 3.3. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, alors le produit infini :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (1 + a_n) \in \mathbb{C}$$

converge vers une valeur finie. De plus :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = 0 \iff \exists n_0 \geq 1, \quad 1 + a_{n_0} = 0.$$

Démonstration. Comme $|a_n| \rightarrow 0$ nécessairement, pour n assez grand, on a $|a_n| \leq \frac{1}{2}$. En éliminant les premiers facteurs du produit infini, on peut supposer que $|a_n| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$. Puisque seuls ces premiers facteurs pouvaient donc satisfaire $1 + a_{n_0} = 0$, nous allons voir que, en fait, la limite :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (1 + a_n) \stackrel{?}{\in} \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

existe et est *non nulle*. Autrement dit, un produit infini convergent ne peut valoir 0 que si l'un de ses *premiers* facteurs est nul.

En effet, avec le développement connu en série entière valable pour $|z| < 1$:

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \dots,$$

si de plus $|z| \leq \frac{1}{2}$, on peut majorer :

$$\begin{aligned} |\log(1 + z)| &\leq |z| \left(1 + |z| + |z|^2 + |z|^3 + |z|^4 + \dots \right) \\ (3.4) \quad &\leq |z| \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots \right) \\ &= 2|z|, \end{aligned}$$

pour assurer la convergence de la série :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n) \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\log(1 + a_n)| \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \\ \text{[Hypothèse]} \quad &< \infty, \end{aligned}$$

vers un nombre que l'on note :

$$\ell := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \log(1 + a_n),$$

et comme l'exponentielle est continue :

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^N (1 + a_n) &= \prod_{n=1}^N e^{\log(1 + a_n)} \\ &= e^{\sum_{n=1}^N \log(1 + a_n)} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{\ell} \neq 0, \end{aligned}$$

ceci montre bien la convergence des produits partiels vers un nombre qui est effectivement *non nul*, parce qu'il est exponentielle d'un nombre complexe. $\square$

Terminologie 3.5. On dit qu'un produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ de nombres complexes *converge absolument* si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Ce critère de convergence *absolue* $\sum |a_n| < \infty$ est en effet approprié, car la plupart du temps, dans la théorie des fonctions holomorphes, on est en mesure, au moyen d'estimations souvent élémentaires, de garantir une convergence normale — donc uniforme — des séries de fonctions, ce qui préserve le caractère holomorphe de la limite.

Théorème 3.6. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions holomorphes $F_n \in \mathcal{O}(\Omega)$. S'il existe des constantes $c_n > 0$ majorant dans Ω :

$$|F_n(z) - 1| \leq c_n \quad \text{telles que} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty,$$

alors les trois propriétés suivantes sont satisfaites.

(1) Le produit infini de fonctions holomorphes $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ converge uniformément dans Ω vers une fonction holomorphe :

$$F(z) := \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N F_n(z).$$

(2) En un point $w \in \Omega$, on a $F(w) = 0$ si et seulement si il existe $n = n_w \geq 1$ avec $F_n(w) = 0$.

(3) Si toutes les $F_n \neq 0$ ne s'annulent nulle part dans Ω , alors $F \neq 0$ aussi partout dans Ω , et de plus :

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'_n(z)}{F_n(z)}.$$

Démonstration. Puisque $c_n \rightarrow 0$ nécessairement, il existe un entier $M \geq 1$ assez grand pour que :

$$n \geq M + 1 \implies c_n \leq \frac{1}{2}.$$

En décomposant alors :

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z) = \prod_{n=1}^M F_n(z) \prod_{n=M+1}^{\infty} F_n(z),$$

nous allons constater que le deuxième produit-reste ne s'annule en *aucun* point de Ω , et donc les zéros de la fonction-limite ne peuvent être présents que dans les premiers facteurs :

$$\{w \in \Omega : F(w) = 0\} = \bigcup_{1 \leq n \leq M} \{w \in \Omega : F_n(w) = 0\}.$$

En éliminant ces premiers facteurs, ce qui ne change rien à **(1)**, **(2)**, **(3)**, nous nous ramenons à $c_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

Maintenant, en homologie avec les notations précédentes, ré-écrivons :

$$F_n(z) =: 1 + a_n(z).$$

Puisque $|a_n(z)| \leq c_n \leq \frac{1}{2}$ dans Ω , l'hypothèse $\sum c_n < \infty$, suivie de l'estimation de convergence normale-uniforme :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n(z)) \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \log(1 + a_n(z)) \right| \\ \text{[(3.4)]} \quad &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(z)| \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty, \end{aligned}$$

associée à un théorème connu (spectaculaire) de Cauchy offrent l'holomorphie de la fonction-série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n(z)) \in \mathcal{O}(\Omega),$$

donc :

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n(z)) = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n(z))} \in \mathcal{O}(\Omega),$$

et cette fonction holomorphe ne s'annule en aucun point de Ω — car c'est une exponentielle! —, ce qui conclut **(1)**.

Pour l'équivalence **(2)**, on a ici :

$$\emptyset = \{w \in \Omega : F(w) = 0\},$$

ce qui est cohérent avec le fait que nous nous sommes ramenés à $c_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$, de telle sorte que les inégalités $|F_n(z) - 1| \leq \frac{1}{2}$ forçaient, à l'avance aussi :

$$\emptyset = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{w \in \Omega : F_n(w) = 0\}.$$

Pour (3), en notant :

$$G_N(z) := \prod_{n=1}^N F_n(z) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{uniformément}} F(z) \quad (\text{dans } \Omega),$$

un théorème connu (encore plus spectaculaire) de Cauchy offre la convergence des dérivées en tout point :

$$G'_N(z) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} F'(z) \quad (\forall z \in \Omega).$$

Mais les G_N sont uniformément minorées dans Ω , car $|F_n(z) - 1| \leq c_n \leq \frac{1}{2}$ donne :

$$\begin{aligned} |G_N(z)| &= \prod_{n=1}^N |F_n(z)| \\ &\geq \prod_{n=1}^N (1 - c_n) \\ &\geq \prod_{n=1}^{\infty} (1 - c_n) \\ &> 0, \end{aligned}$$

[Théorème 3.3]

donc on a aussi en tout point convergence uniforme :

$$\frac{1}{F(z)} \xleftarrow[\infty \leftarrow N]{} \frac{1}{G_N(z)},$$

d'où la conclusion de (3) :

$$\begin{aligned} \frac{F'(z)}{F(z)} &\xleftarrow[\infty \leftarrow N]{} \frac{G'_N(z)}{G_N(z)} \\ &= \frac{(F_1(z) \cdots F_N(z))'}{F_1(z) \cdots F_N(z)} = \frac{F'_1(z)}{F_1(z)} + \cdots + \frac{F'_N(z)}{F_N(z)}. \end{aligned} \quad \square$$

Ainsi, la bonne condition suffisante pour la convergence d'un *produit* infini $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$, c'est la convergence normale de la *série* de fonctions holomorphes $\sum_{n=1}^{\infty} (F_n(z) - 1)$.

Conceptualisons cela, quitte à nous restreindre à des compacts.

Définition 3.7. Un produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ de fonctions holomorphes $F_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ est dit *normalement convergent sur les compacts* de Ω si, pour tout sous-ensemble compact $K \subset \Omega$, il existe une suite $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres positifs $c_n = c_n(K) \geq 0$ avec $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ tels que :

$$|F_n(z) - 1| \leq c_n \quad (\forall z \in K, \forall n \geq 1).$$

On généralise alors aisément le théorème précédent.

Théorème 3.8. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, si une suite $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions holomorphes $F_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ converge normalement sur les compacts de Ω , alors :

(1) le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ définit une fonction holomorphe dans Ω :

$$F(z) := \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N F_n(z);$$

(2) en un point $w \in \Omega$, on a $F(w) = 0$ si et seulement si il existe $n = n_w \geq 1$ avec $F_n(w) = 0$;

(3) si toutes les $F_n \neq 0$ ne s'annulent nulle part dans Ω , alors $F \neq 0$ aussi partout dans Ω , et de plus :

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'_n(z)}{F_n(z)}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de convergence normale de Cauchy sur des compacts arbitraires $K \subset \Omega$ à la même série $\sum \log(1 + a_n(z))$ de fonctions holomorphes. $\square$

4. Formule de produit d'Euler pour la fonction sinus

Avant de continuer à développer la théorie générale des produits de Weierstrass, établissons une formule de produit infini pour la fonction sinus, due à Euler :

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

qui est valable pour *tout* $z \in \mathbb{C}$.

Cette identité sera déduite de la représentation suivante de la fonction cotangente comme série de fractions rationnelles :

$$\begin{aligned} \pi \cotan \pi z &= \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z + n} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z + n} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}, \end{aligned}$$

qui sera valable pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. En fait, la somme $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ doit être entendue comme limite, lorsque $N \rightarrow \infty$, de la somme symétrique $\sum_{n=-N}^N$, parce que aucune *moitié-somme* $\sum_{n=-\infty}^0$ et $\sum_{n=0}^{\infty}$ ne converge, à cause de $\sum \frac{1}{n} = \infty$.

Heureusement, quand on interprète la somme de manière symétrique, des compensations réalisées dans la dernière formule écrite ci-dessus vont assurer la convergence.

Théorème 4.1. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$:

$$\pi \cotan \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Démonstration. L'idée est d'exploiter le fait que cette série et la fonction $\pi \cotan \pi z$ ont les mêmes propriétés structurales. Notamment, avec $n \in \mathbb{Z}$ entier, et $z = n + w$ proche mais

différent de n , donc avec $w \neq 0$ petit, comme on a :

$$\begin{aligned} \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} &= \pi \frac{\cos(\pi n + \pi w)}{\sin(\pi n + \pi w)} = \pi \frac{(-1)^n \cos \pi w}{(-1)^n \sin \pi w} \\ &= \pi \frac{1 + O(w^2)}{\pi w + O(w^3)} = \frac{1}{z - n} + \text{reste holomorphe}, \end{aligned}$$

il est clair que les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

- (1) $\pi \frac{\cos \pi(z+1)}{\sin \pi(z+1)} = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$;
 (2) $\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ possède des pôles simples en tous les entiers $z = n \in \mathbb{Z}$, avec des résidus tous égaux à 1, et est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Alors nous affirmons que la série :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z + n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z + n}$$

satisfait aussi exactement ces deux mêmes propriétés.

En effet, (1) revient simplement à observer que le passage de z à $z + 1$ décale d'une unité les termes de la somme infinie :

$$\sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z + 1 + n} = -\frac{1}{z - N} + \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z + n} + \frac{1}{z + N + 1},$$

et en faisant $N \rightarrow \infty$, les termes d'erreur parasites s'évanouissent :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z + 1 + N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z + n}.$$

Par conséquent, la fonction-différence :

$$\Delta(z) := \pi \cotan \pi z - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z + n}$$

satisfait, via (1), la périodicité $\Delta(z + 1) = \Delta(z)$, mais surtout, grâce à (2), nous constatons que toutes les singularités de $\Delta(z)$ en les entiers $z = n \in \mathbb{Z}$ sont illusoires, ce qui implique :

$$\Delta \in \mathcal{O}(\mathbb{C}).$$

Enfin, on vérifie l'imparité :

$$\Delta(-z) = -\Delta(z) \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Afin d'établir la formule du théorème, qui équivaut à $\Delta(z) \equiv 0$, commençons par une

Assertion 4.2. *La fonction $\Delta \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ est bornée dans le plan complexe tout entier.*

Preuve. Grâce à la 1-périodicité, il suffit de faire voir que Δ est bornée dans la bande infinie verticale :

$$\left\{ |x| \leq \frac{1}{2} \right\} \quad (z = x + iy),$$

et grâce à l'imparité, il suffit de le faire dans le rectangle infini :

$$\left\{ |x| \leq \frac{1}{2}, y \geq 0 \right\}.$$

Comme Δ est partout holomorphe, elle est bornée sur le carré $\{|x| \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1\}$, donc on peut supposer $y \geq 1$, et alors on majore premièrement :

$$\begin{aligned}
 |\pi \cotan \pi z| &= \left| \pi i \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \\
 &= \pi \left| \frac{e^{i\pi x - \pi y} + e^{-i\pi x + \pi y}}{e^{i\pi x - \pi y} - e^{-i\pi x + \pi y}} \right| \\
 &= \pi \left| \frac{e^{-2\pi y} + e^{-2i\pi x}}{e^{-2\pi y} - e^{-2i\pi x}} \right| \\
 &\leq \pi \frac{e^{-2\pi y} + 1}{-e^{-2\pi y} + 1} \\
 &\leq \pi \frac{e^{-2\pi} + 1}{-e^{-2\pi} + 1} \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

[$\frac{1}{|a-b|} \leq \frac{1}{-|a|+|b|}$ quand $|b| > |a|$]

Deuxièmement, toujours avec $y \geq 1$ et avec $|x| \leq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \right| &\leq \left| \frac{1}{x + iy} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2(x + iy)}{x^2 - y^2 - n^2 + 2i xy} \right| \\
 &\leq \frac{1}{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2y}{y^2 + n^2 - x^2} \\
 &\leq 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{y^2 + n^2 - \frac{1}{4}} \\
 &\leq 1 + 2 \cdot 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{y^2 + n^2}.
 \end{aligned}$$

[$u > 1 \implies \frac{1}{u-\frac{1}{4}} < \frac{2}{u}$]

Or comme la fonction $x \mapsto \frac{y}{y^2 + x^2}$ est décroissante, cette dernière somme est majorée par une intégrale finie indépendante de y :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{y^2 + n^2} &\leq \int_0^{\infty} \frac{y}{y^2 + x^2} dx \\
 [x = yt] \quad &= \int_0^{\infty} \frac{y}{y^2 + y^2 t^2} y dt \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, les deux constituants de la fonction-différence Δ sont bel et bien bornés dans $\{|x| \leq \frac{1}{2}, y \geq 1\}$. □

Pour terminer, le théorème de Liouville force $\Delta \equiv C$ à être constante, et puisqu'elle est impaire, $C = 0$, ce qui conclut :

$$0 \equiv \pi \cotan \pi z - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z + n}. \quad \square$$

Comme promis, nous pouvons maintenant établir le célèbre :

Théorème 4.3. [Euler] *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a la représentation par un produit infini convergent :*

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Démonstration. Abrégeons :

$$G(z) := \frac{\sin \pi z}{\pi} \quad \text{et} \quad P(z) := z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$, le Théorème 3.6 montre que ce produit infini converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, et que, en-dehors de l'ensemble $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Mais comme $\frac{G'(z)}{G(z)} = \pi \cotan \pi z$, le développement en série rationnelle de la fonction cotangente que nous venons d'obtenir montre l'annulation identique :

$$\begin{aligned} \left(\frac{P(z)}{G(z)}\right)' &= \frac{P(z)}{G(z)} \left[\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{G'(z)}{G(z)}\right] \\ &\equiv 0, \end{aligned}$$

et donc $P(z) = c G(z)$ pour une certaine constante $c \in \mathbb{C}$. Enfin, puisque $P(z) = z + O(z^2)$ et $G(z) = \frac{\pi z}{\pi} + O(z^3)$, il est clair que $c = 1$. $\square$

5. Formule produit d'Euler pour les nombres premiers

La fonction zêta de Riemann est définie, pour $s > 1$ réel, par la série :

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

convergente d'après un critère connu, et elle se prolonge au domaine complexe.

Lemme 5.1. *Cette série $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge normalement sur tout demi-plan complexe :*

$$\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 1 + \delta\},$$

avec $\delta > 0$ quelconque, et définit une fonction holomorphe dans $\{\operatorname{Re} s > 1\}$.

Démonstration. Comme Riemann, écrivons le nombre complexe s sous la forme :

$$s = \sigma + it,$$

avec $\sigma, t \in \mathbb{R}$, d'où en supposant $\sigma > 1 + \delta$:

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^s|} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|e^{s \log n}|} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sigma \log n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} < \infty, \end{aligned}$$

ce qui établit la convergence normale, dans $\{\operatorname{Re} s > 1 + \delta\}$, de cette série de fonctions holomorphes. Le théorème de Cauchy garantit alors que $s \mapsto \zeta(s)$ est holomorphe dans tout demi-plan $\{\operatorname{Re} s > 1 + \delta\}$, donc dans $\{\operatorname{Re} s > 1\}$, puisque $\delta > 0$ peut être choisi arbitrairement petit. $\square$

Une application célèbre de la théorie des produits infinis est due à Euler. Elle établit un lien extrêmement profond avec la théorie des nombres. Notons :

$$\mathcal{P} := \{p \geq 2 \text{ entiers premiers}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}.$$

Théorème 5.2. [Euler] Pour $s \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} s > 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

où le produit infini est normalement convergent dans tout demi-plan $\{\operatorname{Re} s > 1 + \delta\}$ avec $\delta > 0$ quelconque.

De plus, la fonction :

$$s \mapsto \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

est holomorphe dans le demi-plan ouvert $\{\operatorname{Re} s > 1\}$.

Démonstration. Commençons par justifier la convergence de ce produit infini. Avec $z := \frac{1}{p^s}$ qui vérifie $0 < |z| \leq \frac{1}{2}$ car $p \geq 2$, en utilisant :

$$\left| \frac{1}{1-z} \right| \leq \frac{1}{1-|z|} \leq 1 + 2|z|,$$

majorons le produit infini par :

$$\left| \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right| \leq \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + \frac{2}{|p^s|} \right) \stackrel{?}{<} \infty,$$

et constatons que le critère suffisant des Théorèmes 3.3 et 3.6 pour la convergence des produits infinis s'applique grâce à :

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{2}{|p^s|} = 2 \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^{\operatorname{Re} s}} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}} < \infty.$$

Ensuite, soient deux (grands) entiers $1 \leq N \leq M$. Puisque d'après le théorème fondamental de l'arithmétique, tout entier $n \leq N$ s'écrit de manière unique $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_\mu^{\alpha_\mu}$ avec $p_1, \dots, p_\mu \in \mathcal{P}$, avec $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu \geq 1$, et avec :

$$p_1, \dots, p_\mu \leq N, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_\mu \leq N \leq M,$$

un développement du produit à droite de la première ligne ci-dessous donne une majoration dans laquelle on suppose $s \in \mathbb{R}$ avec $s > 1 + \delta$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} &\leq \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq N}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \cdots + \frac{1}{p^{Ms}} \right) \\ &\leq \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq N}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \cdots + \frac{1}{p^{Ms}} + \cdots \right) \\ &= \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq N}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \\ &\leq \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}. \end{aligned}$$

Grâce à la majoration (qui est en fait une égalité) $\left| \frac{1}{n^s} \right| \leq \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}}$, la même inégalité est vraie avec $s \in \mathbb{C}$ satisfaisant $\operatorname{Re} s > 1 + \delta$.

En faisant $N \rightarrow \infty$, il vient :

$$\zeta(s) \leq \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Pour l'inégalité inverse, à nouveau d'après le théorème fondamental de l'arithmétique, un développement du produit à gauche montre qu'on n'obtient pas tous les $\frac{1}{n^s}$:

$$\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq N}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots + \frac{1}{p^{Ms}} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

d'où en faisant $M \rightarrow \infty$:

$$\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq N}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \leq \zeta(s),$$

et enfin via $N \rightarrow \infty$:

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \leq \zeta(s).$$

Tout ceci étant vrai dans $\{\operatorname{Re} s > 1 + \delta\}$ avec $\delta > 0$ arbitraire, nous concluons que la formule (incroyable !) d'Euler est vraie dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} s > 1\}$. $\square$

6. Produits infinis de Weierstrass

Rappelons que si une fonction holomorphe non identiquement nulle $f(z)$ s'annule en un point $z = a$, la multiplicité $\nu_f(a) =: \nu$ est l'unique entier tel que l'on puisse factoriser :

$$f(z) = (z - a)^\nu g(z),$$

avec une fonction-reste holomorphe $g(z)$ satisfaisant $g(a) \neq 0$. On voit cela instantanément en factorisant la puissance maximale de $z - a$ dans le développement en série entière de f au point a .

Maintenant, si $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ est une suite quelconque (infinie) de points dans $\mathbb{C}$, existe-t-il une fonction holomorphe entière $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ayant exactement ces a_n comme zéros, et non nulle ailleurs ? À cause du principe des zéros isolés, il est nécessaire de supposer que $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ n'a pas de point d'accumulation à distance finie, et donc que $|a_n| \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. Après réordonnancement, on pourrait supposer que $|a_n| \leq |a_{n+1}|$ pour tout $n \geq 1$, mais cela n'est pas nécessaire.

Rappelons que nous autorisons des répétitions dans les suites de zéros, et donc il revient au même de se donner une suite $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ de points mutuellement distincts avec $|b_n| \rightarrow \infty$, ainsi que des multiplicités $\nu_n \geq 1$, et de demander s'il existe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ayant ces b_n comme zéros d'ordres ν_n , et jamais nulle sur $\mathbb{C} \setminus \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$.

Cette question est triviale pour un nombre fini de zéros prescrits, et pour un nombre infini, la réponse est toujours positive, aussi.

Théorème 6.1. [Weierstrass] *Pour toute suite $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ de nombres complexes $a_n \in \mathbb{C}$ satisfaisant $|a_n| \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, il existe $f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ holomorphe entière s'annulant en tous les $z = a_n$, et non nulle ailleurs.*

Toute autre fonction $\tilde{f}(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ satisfaisant cela est de la forme :

$$\tilde{f}(z) = f(z) e^{g(z)},$$

avec $g(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ holomorphe entière.

Démonstration. En effet, si a_n est un zéro prescrit, disons d'ordre 1 pour fixer les idées, alors au voisinage de $z = a_n$, on peut écrire :

$$f(z) = (z - a_n) \left[\alpha + O(z - a_n) \right] \quad (\alpha \neq 0),$$

$$\tilde{f}(z) = (z - a_n) \left[\tilde{\alpha} + O(z - a_n) \right] \quad (\tilde{\alpha} \neq 0),$$

d'où il découle que $z = a_n$ est une singularité illusoire du quotient :

$$\frac{\tilde{f}(z)}{f(z)} = \frac{(z - a_n) [\tilde{\alpha} + O(z - a_n)]}{(z - a_n) [\alpha + O(z - a_n)]} = \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha} + O(z - a_n),$$

accompagné du fait que $\frac{\tilde{f}(z)}{f(z)}$ ne s'annule pas au voisinage de $z = a_n$.

Le cas où a_n est répété un nombre $m \geq 1$ de fois est similaire, donc :

$$\frac{\tilde{f}(z)}{f(z)} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^*)$$

est holomorphe entière, et ne s'annule jamais.

Comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe, un théorème connu montre qu'il existe bien une fonction holomorphe entière $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ représentant :

$$\frac{\tilde{f}(z)}{f(z)} = e^{g(z)}.$$

Ainsi, nous devons construire une fonction qui s'annule précisément en tous les $z = a_n$. La proposition naïve, suggérée par la formule de produit d'Euler :

$$f(z) \stackrel{?}{=} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

se heurte à un problème de convergence, notamment lorsque $\sum \frac{1}{|a_n|} = \infty$. Afin d'y remédier, Weierstrass a eu l'idée d'insérer des facteurs exponentiels — jamais nuls — accélérant la convergence sans introduire de nouveaux zéros.

Pour chaque entier $k \geq 0$, introduisons en effet les *facteurs canoniques* de Weierstrass :

$$\begin{aligned} E_0(z) &:= 1 - z, \\ E_k(z) &:= (1 - z) e^{z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^k}{k}} \quad (k \geq 1). \end{aligned}$$

En localisant autour d'un zéro à prescrire $z = a_n$, nous serons intéressés par l'étude de ces $E_k(z)$ dans le disque $\{|z| \leq \frac{1}{2}\}$.

Lemme 6.2. *Il existe une constante universelle $0 < c < \infty$ telle que, pour tout $k \geq 0$:*

$$|1 - E_k(z)| \leq c |z|^{k+1} \quad (\forall |z| \leq \tfrac{1}{2}).$$

On peut prendre $c = 2e^1$, qui est indépendante de k .

Preuve. Pour $|z| \leq \frac{1}{2}$, le logarithme $\log(1 - z)$ est défini par la série connue $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, donc comme on peut écrire $1 - z = e^{\log(1-z)}$, il vient :

$$\begin{aligned} E_k(z) &= e^{\log(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^k}{k}} \\ &=: e^w, \end{aligned}$$

en posant :

$$w := - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Mais puisque $|z| \leq \frac{1}{2}$, nous pouvons majorer de manière élémentaire :

$$\begin{aligned} |w| &\leq |z|^{k+1} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{|z|}{k+2} + \frac{|z|^2}{k+3} + \dots \right) \\ &\leq |z|^{k+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) \\ &= 2 |z|^{k+1}. \end{aligned}$$

La formule des accroissements finis appliquée à la fonction $h(t) := e^{tw}$ de la variable réelle $0 \leq t \leq 1$ ayant pour dérivée $h'(t) = w e^{tw}$ conclut :

$$\begin{aligned} |1 - E_k(z)| &= |1 - e^w| = |h(0) - h(1)| \\ &= 1 \cdot \max_{0 \leq t \leq 1} |h'(t)| \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq 1} |w| e^{t|w|} \\ &\leq 2 |z|^{k+1} e^{|w|} \\ &\leq 2e^1 |z|^{k+1}. \end{aligned}$$

$[|w| \leq 1]$

□

Supposons dorénavant qu'un zéro d'ordre $\nu \geq 0$ est prescrit en $z = 0$, et que les zéros $a_1, a_2, a_3, \dots$ sont tous non nuls. Définissons alors le *produit de Weierstrass* par :

$$\begin{aligned} f(z) &:= z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right) \\ &= z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n}, \end{aligned}$$

et vérifions qu'il remplit toutes les conditions, à savoir que $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ est holomorphe entière avec un zéro d'ordre ν en $z = 0$, avec des zéros en chaque a_n , et que f est non nulle ailleurs.

Fixons $R > 0$, supposons $z \in \mathbb{D}_R$, et démontrons que toutes ces propriétés sont satisfaites dans $\mathbb{D}_R$. Comme R est arbitraire, cela terminera la démonstration.

Décomposons le produit en deux morceaux :

$$f(z) = z^\nu \prod_{|a_n| \leq 2R} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right) \prod_{|a_n| > 2R} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Puisque $|a_n| \rightarrow \infty$, il n'y a qu'un nombre fini de facteurs dans le premier produit, lequel s'annule clairement en tous les $z = a_n$ avec $|a_n| < R$, mais nulle part ailleurs dans $\mathbb{D}_R$, ce qu'on voulait.

Dans le deuxième morceau qui est un produit infini, on a, toujours pour $|z| < R$:

$$\left| \frac{z}{a_n} \right| \leq \frac{R}{2R} = \frac{1}{2},$$

et donc le Lemme 6.2 offre une estimation :

$$\begin{aligned} \left| 1 - E_n\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| &\leq c \left| \frac{z}{a_n} \right|^{n+1} \\ &\leq c \frac{1}{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

montrant, puisque $\sum \frac{1}{2^{n+1}} < \infty$, en appliquant le Théorème 3.6, que le produit infini :

$$\prod_{|a_n| > 2R} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right) \Big|_{\mathbb{D}_R}$$

converge normalement dans le disque $\mathbb{D}_R$ et y définit une fonction holomorphe ne s'annulant jamais.

Au final, f possède toutes les propriétés voulues dans $\mathbb{D}_R$ avec $R > 0$ arbitraire, donc dans $\mathbb{C}$. $\square$

7. Théorème de factorisation de Hadamard

Étant donné une fonction holomorphe entière $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ non identiquement nulle qui possède $\nu := \nu_f(0)$ zéros à l'origine suivis d'un nombre *infini* de zéros $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *non nuls*,

le Théorème 6.1 de Weierstrass construit un produit infini convergent :

$$\begin{aligned} E(z) &:= z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right) \\ &= z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n} \end{aligned}$$

qui a exactement les mêmes zéros que f , sans s'annuler ailleurs, et par conséquent, le quotient :

$$\frac{f(z)}{E(z)}$$

n'a que des singularités illusoires, car si w est un zéro, $w = 0$ ou $w = a_n$, et si m est la multiplicité de ce zéro, $m = \nu$ ou $m =$ nombre de fois que a_n est répété, alors au voisinage de w , on peut écrire :

$$f(z) = (z - w)^m [\alpha + O(z - w)] \quad (\alpha \neq 0),$$

$$E(z) = (z - w)^m [\beta + O(z - w)] \quad (\beta \neq 0),$$

d'où la compensation au numérateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{E(z)} &= \frac{(z - w)^m [\alpha + O(z - w)]}{(z - w)^m [\beta + O(z - w)]} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} + O(z - w) \quad \left(\frac{\alpha}{\beta} \neq 0\right), \end{aligned}$$

montrant que $\frac{f(z)}{E(z)}$ est holomorphe, jamais égale à zéro, au voisinage de $z = w$. Comme $f(z) \neq 0 \neq E(z)$ partout ailleurs, ce quotient ne s'annule donc en *aucun* point de $\mathbb{C}$, et comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe, un théorème connu permet de représenter ce quotient comme exponentielle :

$$\frac{f(z)}{E(z)} = e^{g(z)},$$

d'une certaine fonction $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ unique.

Corollaire 7.1. [Weierstrass] *Toute $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ayant un zéro d'ordre $\nu \geq 0$ à l'origine et une infinité de zéros $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ non nuls s'écrit de manière unique avec $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$:*

$$f(z) = e^{g(z)} z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n}. \quad \square$$

Or quand $n \rightarrow \infty$, dans l'exponentielle, le degré n du polynôme en $\frac{z}{a_n}$ est non borné. Hadamard s'est posé la question de savoir si on peut raffiner ce théorème de représentation de Weierstrass lorsque $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ est supposée être d'ordre de croissance *fini* $\leq \rho < \infty$:

$$|f(z)| \leq A e^{B|z|^\rho} \quad (\forall z \in \mathbb{C}),$$

en s'assurant que les deux fonctions $g(z)$ et $Q\left(\frac{z}{a_n}\right)$ dans les exponentielles soient elles aussi bornées par $C|z|^\rho$, voire éventuellement par $C|z|^{\rho'}$ avec $\rho < \rho' < \infty$.

Ici, rappelons que $\rho_f = \inf \rho$ est l'ordre de f , mais qu'il est souvent plus aisé de travailler avec un $\rho > \rho_f$, éventuellement arbitrairement proche de ρ_f .

Rappelons aussi que nous avons démontré à l'avance deux résultats qui vont s'avérer utiles, la borne supérieure :

$$\begin{aligned} n_f(r) &= \text{nombre de zéros de } f \text{ dans } \mathbb{D}_r \\ &\leq C r^\rho \end{aligned} \quad (\forall r \geq 1),$$

ainsi que la convergence :

$$(7.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\rho} < \infty,$$

quel que soit $\rho > \rho_f$.

Terminologie 7.3. Pour $k \geq 0$ entier, on appelle *facteur canonique de degré k* la fonction :

$$E_k(z) := (1 - z) e^{z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^k}{k}}.$$

Rappelons que l'intérêt de ces $E_k(z)$ est qu'ils ont le même zéro que $1 - z$, tout en collant davantage à 1 pour $|z| \leq \frac{1}{2}$ petit, comme l'exprime l'estimée déjà vue $|1 - E_k(z)| \leq c |z|^{k+1}$.

La réponse à la question, positive, s'exprime comme suit.

Théorème 7.4. [Hadamard] *Toute $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ avec $f \not\equiv 0$ d'ordre fini $\rho_f < \infty$ ayant un zéro d'ordre $\nu \geq 0$ à l'origine et une infinité de zéros $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ non nuls s'écrit de manière unique comme produit infini convergent :*

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{P(z)} z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \\ &= e^{p_0 + p_1 z + \dots + p_k z^k} z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k}, \end{aligned}$$

où $P(z)$ est un polynôme de degré $\leq k$, avec des facteurs canoniques de degrés constants k , où k est l'unique entier satisfaisant :

$$k \leq \rho_f < k + 1.$$

Le travail le plus exigeant, dans l'argumentation, sera d'établir que le facteur $e^{g(z)}$ est une exponentielle-polynôme de degré contrôlé.

Démonstration. Introduisons :

$$E(z) := z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Grâce au Lemme 6.2, pour tous les $n \geq N \gg 1$ assez grands afin que $\left|\frac{z}{a_n}\right| \leq \frac{1}{2}$, on a la majoration :

$$\left|1 - E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \leq c \left|\frac{z}{a_n}\right|^{k+1} \quad (n \geq N).$$

Quitte à augmenter N , on peut supposer $|a_n| \geq 1$ lorsque $n \geq N$. En intercalant alors un ρ avec :

$$k \leq \rho_f < \rho < k + 1,$$

nous constatons que le critère suffisant du Théorème 3.6 pour la convergence du produit infini $\prod_{n=N}^{\infty}$ est vérifié :

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{\infty} \left| 1 - E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| &\leq c |z|^{k+1} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{k+1}} \\ &\leq c |z|^{k+1} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho}} \\ [(7.2)] \quad &< \infty. \end{aligned}$$

Clairement, $E(z)$ possède exactement les mêmes zéros que f , et donc, le quotient ne s'annulant jamais :

$$\frac{f(z)}{E(z)} = e^{g(z)},$$

est l'exponentielle d'une certaine fonction holomorphe entière, puisque $\mathbb{C}$ est simplement connexe.

Comment parvenir à démontrer que $g(z) = P(z) \in \mathbb{C}[z]$ est un polynôme de degré $\leq k$?

Le point délicat, ici, est qu'on *divise* par $E(z)$, ce qui peut perturber la croissance $|f(z)| \leq A e^{B|z|^{\rho}}$, voire la détruire, notamment lorsque $z \approx a_n$ est proche d'un zéro de $E(z)$!

L'idée-clé de Hadamard a été d'établir des *minorations* de $|E(z)|$ d'où découlent des *majorations* de $\frac{1}{|E(z)|}$, au moins sur des suites de cercles :

$$\{|z| = r_m\} \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

de rayons :

$$1 \leq r_{m-1} < r_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty,$$

ne contenant aucun zéro a_n , cercles qui soient « assez éloignés », en un certain sens, de ces a_n .

Lemme-clé 7.5. [Hadamard] *Il existe une suite de cercles $C_{r_m}(0)$ centrés à l'origine de rayons $1 \leq r_{m-1} < r_m \rightarrow \infty$ tendant vers l'infini en restriction auxquels :*

$$\left| \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| \geq e^{-c|z|^{\rho}} \quad (\forall z \in C_{r_m}, \forall m \geq 1),$$

où $k \leq \rho_f < \rho < k+1$ est arbitrairement proche de ρ_f , pour une constante $0 < c < \infty$ dépendant seulement de f .

La démonstration, technique, étant repoussée à la Section 8 suivante, achevons l'argumentation.

Ainsi, sur tous ces cercles $\{|z| = r_m\}$, $m = 1, 2, 3, \dots$, il vient :

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{Re} g(z)} &= \left| \frac{f(z)}{E(z)} \right| \leq \frac{A e^B |z|^\rho}{e^{-c} |z|^\rho} \\ &= A e^{(B+c) |z|^\rho} \\ &= e^{\log A + (B+c) |z|^\rho} \\ &\leq e^{(|\log A| + B + c) |z|^\rho} \\ \text{[Changer } c] &=: e^c |z|^\rho \end{aligned}$$

c'est-à-dire en changeant la constante c sans changer de nom :

$$e^{\operatorname{Re} g(z)} \leq e^c |z|^\rho \quad (\forall |z| = r_m, \forall m = 1, 2, 3, \dots).$$

On sait qu'une fonction holomorphe satisfaisant $|g(z)| \leq c |z|^\rho$ pour $|z|$ grand doit être un polynôme de degré (entier) $\leq \rho$, et cela reste vrai si on a cette inégalité pour sa partie réelle seulement sur une suite de cercles grandissant indéfiniment.

Lemme 7.6. *Si une fonction entière $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ satisfait :*

$$\operatorname{Re} g(z) \leq c r^\rho \quad (\forall |z| = r_m),$$

sur une suite de cercles de rayons $1 \leq r_{m-1} < r_m \rightarrow \infty$, alors g est un polynôme de degré $\leq \rho$.

Démonstration. Développons g à l'origine en série entière normalement convergente sur les compacts de $\mathbb{C}$:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Comme $\int_0^{2\pi} e^{i\ell\theta} d\theta = 0$ pour tout $\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, nous savons que pour un rayon $r > 0$ arbitraire :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \begin{cases} b_n r^n & \text{lorsque } n \geq 0, \\ 0 & \text{lorsque } n \leq -1. \end{cases}$$

Le cas $n = 0$, dont on prend la double partie réelle, donne :

$$2 \operatorname{Re} b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{Re} g(r e^{i\theta}) d\theta.$$

Ensuite, prenons la conjuguée de la deuxième ligne :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{g(r e^{i\theta})} e^{-in\theta} d\theta = 0 \quad (\forall n \geq 1),$$

d'où en additionnant avec la première ligne pour faire apparaître $2 \operatorname{Re} g = g + \bar{g}$:

$$b_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{Re} g(r e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad (\forall n \geq 1).$$

Ensuite, comme $0 = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta$ pour $n \geq 1$, insérons un terme nul :

$$b_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{[\operatorname{Re} g(r e^{i\theta}) - c r^\rho]}_{\leq 0 \text{ quand } r = r_m} e^{-in\theta} d\theta,$$

et en restriction à la famille intéressante de cercles, déduisons une majoration :

$$\begin{aligned} |b_n| &\leq \frac{1}{\pi (r_m)^n} \int_0^{2\pi} [-\operatorname{Re} g(r_m e^{i\theta}) + c (r_m)^\rho] 1 d\theta \\ &\leq \frac{1}{\pi (r_m)^n} [-2\pi \operatorname{Re} b_0 + 2\pi c (r_m)^\rho], \end{aligned}$$

pour constater que le membre de droite converge vers zéro lorsque $r_m \rightarrow \infty$ dès que $n > \rho$, d'où $b_n = 0$ pour tous les $n > \rho$, ce qui montre bien la polynomialité de $g(z) = \sum_{n \leq \rho} b_n z^n$. $\square$

En conclusion, la fonction entière $g(z)$ du facteur $f(z) = e^{g(z)} E(z)$ est bien un polynôme de degré $\leq \rho < k + 1$, donc de degré $\leq k$, ce qui termine la démonstration du Théorème 7.4, sous réserve du Lemme-clé 7.5. $\square$

8. Démonstration du lemme-clé

Ainsi, toujours avec $k \leq \rho_f < \rho < k + 1$, l'objectif est d'établir une minoration :

$$\left| z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| \geq e^{-c|z|^\rho},$$

pour $z \in C_{r_m}$ appartenant à une suite de cercles de rayons :

$$1 \leq r_{m-1} < r_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty.$$

Convention 8.1. Les lettres c, C désigneront des constantes positives finies, modifiables, dépendant du contexte.

Lemme 8.2. Les facteurs canoniques $E_k(z) = (1 - z) e^{z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^k}{k}}$ satisfont :

$$|E_k(z)| \geq e^{-c|z|^{k+1}} \quad (\forall |z| \leq \tfrac{1}{2}),$$

ainsi que :

$$|E_k(z)| \geq |1 - z| e^{-c|z|^k} \quad (\forall |z| \geq \tfrac{1}{2}).$$

La première constante c , ici, est universelle ; la seconde dépend de k , qui est de toute façon fixé.

Démonstration. Lorsque $|z| \leq \frac{1}{2}$, nous pouvons utiliser la série entière qui définit le logarithme de $1 - z$ pour écrire :

$$\begin{aligned} E_k(z) &= e^{\log(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^k}{k}} \\ &= e^{-\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{z^n}{n}} \\ &=: e^w. \end{aligned}$$

Comme $|e^w| \geq e^{-|w|}$, et comme, grâce au Lemme 6.2, on a $|w| \leq c|z|^{k+1}$ dès que $|z| \leq \frac{1}{2}$, la première minoration tombe :

$$\begin{aligned} |E_k(z)| &= |e^w| \geq e^{-|w|} \\ &\geq e^{-c|z|^{k+1}}. \end{aligned}$$

Pour la seconde, avec $|z| \geq \frac{1}{2}$, qui équivaut à $1 \leq 2|z|$, comme pour tout entier $1 \leq \ell \leq k$, on a :

$$1^{k-\ell} \cdot |z|^\ell \leq 2^{k-\ell} |z|^{k-\ell} |z|^\ell,$$

nous pouvons minorer et conclure :

$$\begin{aligned} |E_k(z)| &= |1 - z| \left| e^{z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^k}{k}} \right| \\ &\geq |1 - z| e^{-\frac{|z|}{1} - \frac{|z|^2}{2} - \dots - \frac{|z|^k}{k}} \\ &\geq |1 - z| e^{-|z|^k \left(\frac{2^{k-1}}{1} + \frac{2^{k-2}}{2} + \dots + \frac{2^0}{k} \right)} \\ &=: |1 - z| e^{-c|z|^k}. \end{aligned} \quad \square$$

Le point-clé est d'obtenir une minoration du produit infini des facteurs canoniques $\prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)$ dans des lieux où z est assez éloigné des zéros a_n . Le facteur z^ν n'intervient pas, car il est de toute façon ≥ 1 en module quand $|z| = r_m \geq 1$.

La première estimée, quelque peu subtile, a lieu hors d'une réunion de disques centrés en les a_n et de rayons quantitativement assez petits, égaux à $\frac{1}{|a_n|^{k+1}}$.

Lemme 8.3. *Pour tout ρ avec $k \leq \rho_f < \rho < k + 1$, on a une minoration :*

$$\left| \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| \geq e^{-c|z|^\rho},$$

valable pour tout :

$$z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{D}_{\frac{1}{|a_n|^{k+1}}}(a_n) \quad \text{avec} \quad |z| \geq 1.$$

Démonstration. Fixons z hors de ces disques, décomposons en deux types de facteurs, et minorons grâce au Lemme 8.2 :

$$\begin{aligned} \left| \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| &= \prod_{|a_n| \leq 2|z|} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \prod_{|a_n| > 2|z|} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \\ &\geq \prod_{|a_n| \leq 2|z|} \left| 1 - \frac{z}{a_n} \right| \prod_{|a_n| \leq 2|z|} e^{-c \left| \frac{z}{a_n} \right|^k} \prod_{|a_n| > 2|z|} e^{-c \left| \frac{z}{a_n} \right|^{k+1}} \end{aligned}$$

C'est l'estimation du premier de ces trois produits qui requiert la restriction que z ne soit pas trop proche des a_n .

En effet, en supposant donc que $|z - a_n| \geq \frac{1}{|a_n|^{k+1}}$, minorons :

$$\begin{aligned} \prod_{|a_n| \leq 2|z|} \left| \frac{a_n - z}{a_n} \right| &\geq \prod_{|a_n| \leq 2|z|} \frac{1}{|a_n|^{k+2}} \\ &= e^{-(k+2) \sum_{|a_n| \leq 2|z|} \log |a_n|}. \end{aligned}$$

Or le contrôle par le Théorème 2.9 du nombre de zéros de f dans le disque $\mathbb{D}_{2|z|}$ permet, pour tout $\rho_f < \rho' < \rho$, de majorer :

$$\begin{aligned} (k+2) \sum_{|a_n| \leq 2|z|} \log |a_n| &\leq (k+2) \mathfrak{n}_f(2|z|) \log(2|z|) \\ &\leq c|z|^{\rho'} \log(2|z|) \\ [c \text{ change}] &\leq c|z|^\rho, \end{aligned}$$

puisque $|z| \geq 1$ par hypothèse et parce qu'il existe (exercice) une constante $c > 0$ telle que $r^{\rho'} \log(2r) \leq c r^\rho$ pour tout $r \geq 1$. Par exponentiation et inversion, toujours pour $|z - a_n| \geq \frac{1}{|a_n|^{k+1}}$ et $|z| \geq 1$, nous obtenons finalement :

$$\prod_{|a_n| \leq 2|z|} \left| 1 - \frac{z}{a_n} \right| \geq e^{-c|z|^\rho}.$$

Il reste à traiter deux produits, et pour chacun d'entre eux, nous allons obtenir une minoration valable sans restriction, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

En effet, comme $|a_n| \leq 2|z|$ dans le deuxième produit (fini), et comme $k < \rho < k+1$, il vient :

$$|a_n|^{\rho-k} \leq 2^{\rho-k} |z|^{\rho-k} \leq 2^1 |z|^{\rho-k},$$

d'où :

$$\frac{1}{|a_n|^k} = \frac{1}{|a_n|^\rho} |a_n|^{\rho-k} \leq \frac{1}{|a_n|^\rho} 2 |z|^{\rho-k},$$

ce qui permet, en utilisant (7.2), de minorer comme annoncé :

$$\begin{aligned} \prod_{|a_n| \leq 2|z|} e^{-c \frac{|z|^k}{|a_n|^k}} &= e^{-c|z|^k \sum_{|a_n| \leq 2|z|} \frac{1}{|a_n|^k}} \\ &\geq e^{-c|z|^k 2 |z|^{\rho-k} \sum_{|a_n| \leq 2|z|} \frac{1}{|a_n|^\rho}} \\ [c \text{ change}] &\geq e^{-c|z|^\rho \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{|a_n|^\rho}} \\ [c \text{ change}] &= e^{-c|z|^\rho}. \end{aligned}$$

Le troisième, et dernier, produit (infini) se traite de manière analogue, en partant de $|a_n| > 2|z|$ qui entraîne $\frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{2} \frac{1}{|z|}$, d'où en tenant compte de $k < \rho < k+1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|a_n|^{k+1-\rho}} &< \frac{1}{2^{k+1-\rho}} \frac{1}{|z|^{k+1-\rho}} \\ &< 1 \cdot |z|^{-k-1+\rho}, \end{aligned}$$

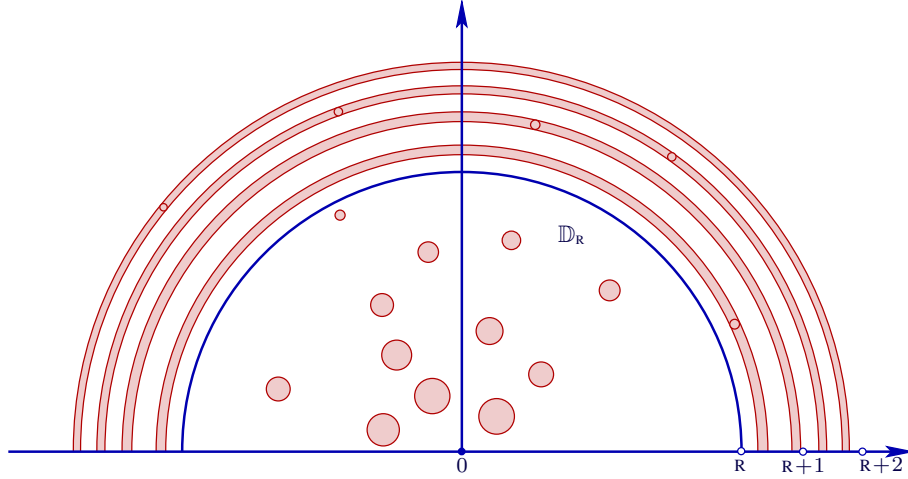
puis :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|a_n|^{k+1}} &= \frac{1}{|a_n|^{k+1-\rho}} \frac{1}{|a_n|^\rho} \\ &\leq |z|^{-k-1+\rho} \frac{1}{|a_n|^\rho}, \end{aligned}$$

ce qui permet, en utilisant à nouveau (7.2), de minorer comme annoncé :

$$\begin{aligned}
 \prod_{|a_n| > 2|z|} e^{-c \frac{|z|^{k+1}}{|a_n|^{k+1}}} &= e^{-c|z|^{k+1} \sum_{|a_n| > 2|z|} \frac{1}{|a_n|^{k+1}}} \\
 &\geq e^{-c|z|^{k+1} |z|^{-k-1+\rho} \sum_{|a_n| > 2|z|} \frac{1}{|a_n|^\rho}} \\
 &\geq e^{-c|z|^\rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\rho}} \\
 [c \text{ change}] \quad &= e^{-c|z|^\rho}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Intuitivement, les rayons $\frac{1}{|a_n|^{k+1}}$ de ces disques centrés en les a_n tendent suffisamment vite vers zéro, grâce à $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{k+1}} < \infty$, pour que l'on puisse s'imaginer que leur réunion devienne négligeable, pour $n \geq N \gg 1$ grand, de manière à faire passer des grands cercles de rayons r_m qui ne rencontrent *aucun* de ces petits disques.



Fin de la démonstration du Lemme-clé 7.5. Prenons en effet $N \gg 1$ assez grand pour que :

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{k+1}} \leq \frac{1}{3},$$

ainsi qu'un rayon $R \gg 1$ assez grand pour que :

$$\mathbb{D}_{\frac{1}{|a_1|^{k+1}}}(a_1) \cup \dots \cup \mathbb{D}_{\frac{1}{|a_N|^{k+1}}}(a_N) \subset \mathbb{D}_R;$$

il n'est pas exclu que certains autres a_n avec $n \geq N+1$ appartiennent aussi à $\mathbb{D}_R$.

Insérons les disques restants dans les anneaux d'épaisseur totale $\frac{1}{|a_n|^{k+1}}$ qu'ils balayent en tournant autour de l'origine :

$$\bigcup_{n=N+1}^{\infty} \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_n| < \frac{1}{|a_n|^{k+1}} \right\} \subset \bigcup_{n=N+1}^{\infty} \left\{ w \in \mathbb{C} : |a_n| - \frac{1}{|a_n|^{k+1}} < |w| < |a_n| + \frac{1}{|a_n|^{k+1}} \right\}.$$

Comme la réunion de ces anneaux pour $n \geq N+1$ est d'épaisseur $\leq \frac{2}{3}$, pour chaque entier $m = 1, 2, 3, \dots$, elle ne peut couvrir complètement chaque anneau-unité :

$$\{R + m - 1 < |w| < R + m\},$$

d'épaisseur $1 > \frac{2}{3}$. Par conséquent, il existe bien une suite de cercles C_{r_m} centrés à l'origine de rayons :

$$R + m - 1 < r_m < R + m,$$

d'où $r_{m-1} < r_m \rightarrow \infty$, qui ne rencontrent aucun de ces anneaux, donc aucun disque $\mathbb{D}_{\frac{1}{|a_n|^{k+1}}}(a_n)$, y compris pour $1 \leq n \leq N$, par construction.

Ainsi s'achève la démonstration du Lemme-clé 7.5. $\square$

9. Exercices

Exercice 1. Dans cet exercice, on applique la Définition 3.1 que la théorie des fonctions holomorphes n'utilise pas. Soit donc une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres $a_n \in \mathbb{C}$ avec $a_n \neq -1$ pour tout n .

(a) Avec, pour $m \geq 1$ entier :

$$a_{2m-1} := -\frac{1}{\sqrt{m+1}} \quad \text{et} \quad a_{2m} := \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \frac{1}{m+1},$$

montrer que le produit infini :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

converge vers un nombre complexe *non nul*, bien que la série de terme général a_n ne soit pas convergente.

(b) Trouver un exemple de suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres réels telle que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge sans que $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ converge dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. **Indication:** Penser à une suite alternée $a_n = (-1)^n b_n$ avec $b_{n+1} \leq b_n$.

(c) Montrer, pour une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres $a_n \in \mathbb{C}$, que si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, et si $a_n \neq -1$ pour tout n , alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \quad \text{converge}.$$

Exercice 2. EE