

Séries de Fourier

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Espaces de fonctions 2π -périodiques

Les espaces de Hilbert abstraits peuvent se réaliser concrètement dans de nombreuses situations où ils permettent de résoudre des équations aux dérivées partielles en un certain sens. Mais la première réalisation historique et naturelle des espaces de Hilbert provient des séries de Fourier.

1.1. Fonctions sur le cercle unité (ou tore unidimensionnel). On note parfois $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont continues et 2π -périodiques :

$$f(\theta + 2k\pi) = f(\theta) \quad (\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}).$$

Pourquoi la lettre \mathbb{T} ? Parce qu'elle est l'initiale du mot « *Tore* » (de dimension un), et qu'un tore de dimension k est par définition homéomorphe au produit topologique $(S^1)^k \equiv \mathbb{T}^k$ de k copies du cercle unité :

$$\mathbb{T} \equiv S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Pour $k = 2$, on retrouve le tore 2-dimensionnel $\mathbb{T}^2 \equiv S^1 \times S^1$ qui est homéomorphe à la partie en caoutchouc d'une chambre à air gonflée (grand cercle de la roue \times petit cercle d'une section orthogonale à la jante). Grâce à la 2π -périodicité de f qui prend des valeurs bien définies sur le quotient :

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1 \equiv \mathbb{T},$$

on peut en effet considérer que la donnée de f équivaut à la donnée d'une fonction :

$$\tilde{f}(e^{i\theta}) := f(\theta)$$

qui est en fait vraiment définie sur le cercle unité (tore unidimensionnel) :

$$\mathbb{T} \equiv S^1 = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Le résultat de ces considérations préliminaires, c'est qu'il revient au même de considérer des fonctions continues \tilde{f} qui sont définies sur le cercle unité, et des fonctions 2π -périodiques définies sur \mathbb{R} tout entier. En vérité, il s'avère plus pratique de travailler avec des fonctions 2π -périodiques, notamment parce que l'application de la règle de Chasles permet de modifier aisément les bornes d'intégration dans toutes les intégrales (nombreuses) que nous rencontrerons, comme par exemple :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = \int_a^{a+2\pi} f(\theta) d\theta,$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$, identité que nous vérifions à l'instant comme suit.

Soit k l'entier unique tel que $a \leq 2k\pi < a + 2\pi$. L'intégrale de droite se découpe alors en :

$$\int_a^{a+2\pi} = \int_a^{2k\pi} + \int_{2k\pi}^{a+2\pi},$$

mais comme f est 2π -périodique, lorsqu'on remplace θ par $\theta - 2(k-1)\pi$ dans la première intégrale et θ par $\theta - 2k\pi$ dans la seconde, l'intégrande reste inchangé et les bornes d'intégration pour les deux morceaux se recollent :

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} f(\theta) d\theta &= \int_{a-2(k-1)\pi}^{2\pi} f(\theta) d\theta + \int_0^{a+2\pi-2k\pi} f(\theta) d\theta \\ &= \int_0^a f(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Ainsi, intégrer de 0 à 2π , c'est la même chose que d'intégrer sur n'importe quel segment $[a, a + 2\pi]$ de longueur 2π , car tout revient à intégrer sur le cercle S^1 tout entier. *Nous travaillerons donc avec des fonctions 2π -périodiques sur \mathbb{R} en nous souvenant toujours que le cercle S^1 est le vrai domaine d'existence (compact) de ces fonctions.*

1.2. Espaces fonctionnels. On peut alors munir l'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ des fonctions continues 2π -périodiques $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de la norme de la convergence uniforme :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0} := \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\theta)| = \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(\theta)|.$$

Une seconde illustration du fait que la 2π -périodicité ramène toute telle fonction f à la fonction $\tilde{f}(e^{i\theta}) := f(\theta)$ définie sur le cercle unité est la suivante.

Lemme 1.3. *Toute fonction 2π -périodique $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ est uniformément continue sur \mathbb{R} .*

Démonstration. Il est connu que toute fonction continue $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un espace métrique compact (X, d) est automatiquement uniformément continue. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier soigneusement que le lemme en découle. \square

Au-delà des espaces de fonctions continues, il y a les espaces de fonctions *intégrables* sur le cercle. Rappelons que ces fonctions sont définies à un ensemble de mesure nulle près, et qu'en toute rigueur, une fonction dans $L^1(\mathbb{T})$ de module intégrable sur le cercle est une *classe d'équivalence* de fonctions définies à un ensemble de mesure nulle près, ce qui ne change pas la valeur de l'intégrale. Dans la suite de ce cours, nous ne nous embarasserons pas avec la distinction entre classes d'équivalences et représentants d'une classe, et nous travaillerons avec les fonctions L^1 comme si elles possédaient une valeur bien définie en tout point.

Définition 1.4. [Espaces de fonctions sommables] Pour tout réel p avec $1 \leq p < +\infty$, on définit l'espace $L^p(\mathbb{T})$ comme l'espace des fonctions mesurables $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont 2π -périodiques :

$$f(\theta + 2k\pi) = f(\theta) \text{ pour } d\theta\text{-presque tout } \theta \in \mathbb{R}$$

et dont l'intégrale du module puissance p converge :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^p \frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$$

On peut alors vérifier que l'on a, comme pour toute fonction continue :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^p \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{a-\pi}^{a+\pi} |f(\theta)|^p \frac{d\theta}{2\pi},$$

pour tout a quelconque dans \mathbb{R} . De plus l'inégalité de Minkowski nous assure que $L^p(\mathbb{T})$, muni de la norme naturelle :

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \frac{dt}{2\pi} \right)^{1/p}$$

est un espace vectoriel normé, complet qui plus est grâce à un théorème dû à Riesz.

Qu'obtient-on lorsque $p = +\infty$? On sait vérifier par un exercice que :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_a^b |g(t)|^p \right)^{1/p} = \sup_{x \in [a,b]} |g(x)|,$$

pour toute fonction mesurable bornée $g \in L^\infty([a, b])$, et donc il est naturel d'introduire aussi l'espace des fonctions (essentiellement) bornées sur le tore :

$$L^\infty(\mathbb{T}) := \left\{ f \text{ mesurable } 2\pi\text{-périodique} : \|f\|_{L^\infty} := \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |f(\theta)| < \infty \right\},$$

où le « sup » est bien entendu pris à un ensemble de mesure nulle près. La norme pour les fonctions $L^\infty(\mathbb{T})$ est donc la même que pour les fonctions $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, mais avec la clause du « presque partout ».

Alors ces espaces sont emboîtés les uns dans les autres, l'espace $L^1(\mathbb{T})$ des fonctions simplement intégrables étant le plus grand d'entre eux, et l'espace $L^2(\mathbb{T})$ se trouvant en quelque sorte « au milieu de tous ».

Proposition 1.5. [Hiérarchie d'espaces fonctionnels sur le cercle] *Pour tous entiers p et q tels que $1 \leq p < q \leq \infty$, on a les inclusions ensemblistes :*

$$(1.6) \quad \mathcal{C}^1(\mathbb{T}) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^q(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^1(\mathbb{T})$$

qui sont de plus des injections topologiques, au sens où un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ s'injecte topologiquement dans un autre espace topologique $(F, \|\cdot\|_F)$ s'il existe une application linéaire injective $\iota : E \rightarrow F$ et une constante $C < +\infty$ telle que :

$$\|\iota(e)\|_F \leq C \|e\|_E,$$

pour tout vecteur $e \in E$ (autrement dit, s'il existe une application linéaire continue injective de E dans F).

Démonstration. Vérifions seulement ici que $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ et $L^\infty(\mathbb{T})$ s'injectent topologiquement dans $L^2(\mathbb{T})$, ou même plus généralement dans $L^p(\mathbb{T})$. En effet, on peut majorer trivialement toute intégrale d'une fonction par l'intégrale de son « sup », ce qui donne ici :

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/p} &\leq \left(\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\theta)|^p \right)^{1/p} \\ &= \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\theta)|. \end{aligned}$$

puisque la mesure $\frac{d\theta}{2\pi}$ est de probabilité : $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} = 1$. □

Théorème 1.7. *Pour tout exposant $1 \leq p < \infty$, les fonctions continues sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sont denses dans $L^p(\mathbb{T})$:*

$$\forall g \in L^p(\mathbb{T}) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_\varepsilon \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \quad \|g - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Dans un cours d'intégration, en dimension quelconque $d \geq 1$ sur \mathbb{R}^d , on démontre (rappel) que l'espace $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, pour tout $1 \leq p < \infty$ — mais comment procède-t-on ?

Par densité dans L^p des fonctions dites *étagées*, lesquelles sont combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices $\mathbf{1}_R$ de rectangles fermés bornés :

$$R = \prod_{1 \leq i \leq d} [a_i, b_i] \quad (-\infty < a_i < b_i < \infty),$$

la démonstration se ramène à faire voir que le résultat est vrai pour $g = \mathbf{1}_R$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d) \quad \|\mathbf{1}_R - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon,$$

ce qui est aisé, car il suffit de « lisser légèrement les angles » du graphe de $\mathbf{1}_R$ pour le rendre continu en s'assurant de ne perdre que très peu de volume, au sens L^1 , ou au sens L^p .



Sur le cercle unité \mathbb{T} à la place de \mathbb{R}^d , pour les fonctions $g \in L^p(\mathbb{T})$, la densité des fonctions étagées étant certainement tout aussi vraie puisque $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, il s'agit de lisser légèrement les angles de graphes de fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{[a,b]}$ d'intervalles :

$$[a, b] \subset [-\pi, \pi],$$

ce qui n'est qu'un cas particulier de ce qui vient d'être vu, seulement en dimension $d = 1$! □

2. Coefficients de Fourier de fonctions $f \in L^1([-\pi, \pi])$ ou $f \in L^2([-\pi, \pi])$

À partir de 1802, Joseph Fourier conduit des expériences sur la propagation de la chaleur dans les corps solides, et ces expériences lui permettront d'en donner un modèle de physique mathématique fondé sur la représentation des solutions en séries de fonctions trigonométriques $\sin kx$ et $\cos kx$. Aujourd'hui, les séries Fourier et les transformées de Fourier jouent un rôle omniprésent en analyse, en arithmétique et aussi pour la transmission de tous les signaux de télécommunications.

On notera parfois dans la suite pour abrégé :

$$e_n := e^{in\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

la famille des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ exponentielles complexes de pulsation un entier $n \in \mathbb{Z}$ positif ou négatif quelconque. Ce sont les fonctions-modèles 2π -périodiques avec lesquelles nous allons travailler. Rappelons que la mesure de Lebesgue renormalisée :

$$\frac{d\theta}{2\pi}$$

est une mesure *de probabilité* sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \equiv S^1$, puisque 2π est (par définition depuis l'Antiquité pré-hellénique) la circonférence du cercle S^1 de rayon 1. Entre les fonctions de carré intégrable sur le cercle, on a bien entendu un produit scalaire naturel :

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} \frac{d\theta}{2\pi}$$

qui satisfait l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle f, g \rangle_{L^2}| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Lemme 2.1. *La famille de toutes les fonctions exponentielles-modèles $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$, à savoir :*

$$\langle e_{n_1}, e_{n_2} \rangle_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in_1\theta} \overline{e^{in_2\theta}} \frac{d\theta}{2\pi} = \delta_{n_1, n_2}.$$

Démonstration. En effet, si $n_1 \neq n_2$, la fonction $e^{i(n_1-n_2)\theta}$ admet la primitive $\frac{e^{i(n_1-n_2)\theta}}{i(n_1-n_2)}$, et l'intégrale s'annule par 2π -périodicité :

$$\left[\frac{e^{i(n_1-n_2)\theta}}{i(n_1-n_2)} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Et lorsque $n_2 = n_1$, on a bien $\int_0^{2\pi} 1 \frac{d\theta}{2\pi} = 1$. □

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la famille de fonctions *réelles*

$$\{1\} \cup \{\sqrt{2} \cos(k\theta)\}_{k \geq 1} \cup \{\sqrt{2} \sin(k\theta)\}_{k \geq 1}$$

est elle aussi orthonormée sur le cercle.

La définition qui suit est formulée pour les fonctions dans $L^1(\mathbb{T})$ qui sont les plus nombreuses dans notre échelle topologique (1.6) ci-dessus.

Définition 2.2. Étant donné une fonction 2π -périodique intégrable $f \in L^1(\mathbb{T})$ quelconque, on appelle k -ème coefficient de Fourier de f le nombre complexe :

$$\widehat{f}(k) := \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi},$$

l'intégrale étant convergente :

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right| \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| \cdot \underbrace{|e^{-ik\theta}|}_{\equiv 1} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq \|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Les progrès les plus importants de la théorie des séries trigonométriques ont été réalisés dès la première moitié du vingtième siècle et ont été impulsés grâce au développement considérable de la théorie des fonctions d'une variable réelle, en particulier grâce à la popularisation de l'intégrale de Lebesgue. En fait, il existe des fonctions intégrables au sens de Lebesgue qui ne le sont pas au sens de Riemann et dont la série de Fourier converge partout vers la fonction, ce qui montre l'intérêt qu'il y a à mettre la notion d'intégrale de Lebesgue au fondement de la théorie des séries de Fourier.

Réinterprétation 2.3. Lorsque $f \in L^2(\mathbb{T})$, tout coefficient de Fourier s'interprète aussi comme étant le *produit scalaire* de f avec l'exponentielle-modèle correspondante :

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \overline{e^{ik\theta}} \frac{d\theta}{2\pi} = \langle f, e_k \rangle.$$

Il est important de remarquer que les coefficients de Fourier existent pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ appartenant au plus gros des espaces de la hiérarchie topologique (1.6), donc aussi pour tous les autres espaces fonctionnels $L^p(\mathbb{T})$, $L^2(\mathbb{T})$, $L^\infty(\mathbb{T})$, $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, $\mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ contenus en lui. Or cet espace L^1 des fonctions intégrables au sens de Lebesgue contient énormément de fonctions, et c'est la raison pour laquelle il est à l'origine de certaines pathologies qui ont beaucoup troublé de nombreux mathématiciens.

Définition 2.4. À toute fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$, on associe sa *série de Fourier* qui est la somme infinie purement formelle, peut-être non convergente, et au sujet de laquelle on ne dit rien pour l'instant :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}.$$

Lorsque $f \in L^2(\mathbb{T})$, la série de Fourier de f s'écrit aussi :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, e_k \rangle e_k$$

comme la somme de ses projections orthogonales $\langle f, e_k \rangle e_k$ sur toutes les exponentielles-modèles e_k .

Dans les travaux originaux de Fourier, la série de Fourier est définie, de manière alternative, en termes purement réels comme :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)\},$$

où les coefficients a_0, a_k, b_k s'expriment sous la forme des intégrales suivantes :

$$a_0 := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta, \quad a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(k\theta) d\theta, \quad b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(k\theta) d\theta \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

Nous privilégierons toujours le formalisme en termes des exponentielles $e^{ik\theta}$, et nous laissons au lecteur le soin de se convaincre que ces deux types de formules pour les coefficients de Fourier et pour la série de Fourier sont en fait équivalentes.

Question 2.5. [principale sur les séries de Fourier] *Étant donné une fonction raisonnable $f(\theta)$ définie sur le cercle, est-ce que sa série de Fourier permet de la reconstituer, au sens où f serait la limite :*

$$f(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(\theta)$$

des sommes partielles de sa série de Fourier, définies par :

$$S_n(f)(\theta) := \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}.$$

Puisque cette question, particulièrement difficile, est riche d'une très longue histoire, nous allons nous appesantir un peu sur elle avant de revenir aux espaces de Hilbert dans lesquels beaucoup de difficultés s'estomperont.

3. Brève histoire dialectique des séries de Fourier

Afin d'attiser l'appétit de connaissances mathématiques, ouvrons ici une parenthèse historique et spéculative

(Il est clair que dans ce cours de niveau Licence 3 dont l'horaire est limité par un arbitrage hiérarchique désincarné, à une vingtaine d'heures, nous sommes dans l'incapacité d'aborder en détail les considérations passionnantes qui vont suivre. Soyez donc curieux, non seulement sur Internet, mais surtout en étudiant de vrais livres écrits par des professeurs spécialistes. Lisez ! Vous deviendrez intelligents !)

En 1753, Euler a observé que les travaux de Bernoulli sur les mouvements d'une corde fixée à ses extrémités semblaient impliquer que toute fonction se développe en série infinie de sinus et de cosinus. À cette époque, les courbes étaient classifiées comme *continues* lorsqu'elles étaient définies par une formule, et comme *géométriques* lorsqu'elles pouvaient être tracées à la main.

Joseph Fourier affirmait au début du 19^{ème} siècle, en se basant sur des arguments de nature physique que toute fonction continue f sur le cercle pouvait être reconstituée comme étant égale à la série infinie $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ik\theta}$. Plus précisément, Fourier était essentiellement persuadé que toute fonction 2π -périodique « raisonnable », ou du moins issue de la physique, devrait être développable en série trigonométrique infinie, c'est-à-dire que l'on aurait :

$$f(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} \hat{f}(k) e^{ik\theta},$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Toutefois, de nombreux « troubles dialectiques » se sont interposés sur le chemin des mathématiciens à travers l'histoire, et les choses se sont avérées ne jamais être aussi simples que l'on aurait bien voulu le croire au premier abord. Pour cette raison, nous allons évoquer partiellement la complexité des réponses qui ont pu leur être apportées à travers l'histoire.

Il fallut attendre 1829 pour que le mathématicien allemand Peter Lejeune-Dirichlet démontre un premier théorème véritablement général et rigoureux de convergence, sous l'hypothèse que la fonction f ne possède qu'un nombre fini de minima et de maxima sur le cercle. Le Théorème 11.2 ci-dessous qu'on appelle aujourd'hui « de Dirichlet » est en fait un résultat différent, plus faible en quelque sorte, puisqu'il suppose que la fonction est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, alors que le théorème original de Dirichlet admet éventuellement une infinité dénombrable de points de discontinuité.

La question pour les fonctions qui sont seulement continues est restée ouverte très longtemps, étant donné que l'approfondissement du concept général de continuité a fait découvrir à Weierstrass (1861) des fonctions continues qui ne possèdent de dérivées en *aucun* point, par exemple :

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

où $|b| < 1$ pour assurer la convergence uniforme, donc la continuité, mais où a est un entier impair tel que le produit ab est $\geq 1 + \frac{3\pi}{2}$. Weierstrass a démontré que F n'est néanmoins dérivable en aucun point.

La vérité, que ne soupçonnait guère Fourier puisqu'il pensait en termes eulériens aux fonctions analytiques sauf éventuellement en un nombre fini de points de discontinuité,

c'est que le concept général de fonction continue au sens de la définition weierstrassienne « ε - δ » cache une ontologie extrêmement riche et difficile à étudier.

Toujours est-il qu'il fallut attendre 1876 pour qu'un autre mathématicien allemand, du Bois Reymond, construise une fonction continue dont la série de Fourier diverge (tend vers l'infini) en un point. En modifiant et en adaptant cet exemple, on peut construire des exemples un peu plus pathologiques de fonctions continues dont la série de Fourier diverge en un nombre fini, voire infini dénombrable, de points sur le cercle.

Au final, en 1923, Kolomogorov a produit un exemple de fonction intégrable au sens de Lebesgue, *i.e.* appartenant à $L^1(\mathbb{T})$, dont la série de Fourier diverge presque partout sur le cercle \mathbb{T} , et en 1926, il améliore ce contre-exemple, de telle sorte que la série de Fourier diverge en *tout* point de \mathbb{T} .

Entretemps, Lusin avait conjecturé en 1913 que la série de Fourier des fonctions L^2 sur le cercle converge presque partout vers la fonction. Ainsi Kolomogorov semblait détruire totalement les croyances « mystiques » de Lusin. En fait, c'était certainement la structure harmonieuse d'espace Hilbert dont jouit $L^2(\mathbb{T})$ qui avait insufflé à Lusin cette idée-là.

Après de nombreuses tentatives inabouties de pousser les techniques de Kolmogorov à s'appliquer à certaines fonctions pathologiques du sous-espace $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, ce fut une surprise fort surprenante lorsque le mathématicien suédois Carleson (récent récipiendaire du Prix Abel) établit en 1966, après sept années de recherches arides, acharnées et opposées aux croyances partagées, la véracité de la conjecture de Lusin : *Pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a :*

$$f(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta},$$

pour presque tout $\theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Cet énoncé fait partie du trésor des « démonstrations mythiques parmi les plus difficiles de toutes les mathématiques ». Corollaire immédiat puisque $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$: la série de Fourier d'une fonction continue sur \mathbb{T} converge presque partout vers la fonction.

Ainsi du Bois Reymond n'aurait-il de toute façon pas pu faire mieux que de faire diverger sur un ensemble de mesure *nulle* la série de Fourier d'une fonction continue !

Dans la foulée, un an après Carleson, le mathématicien américain Hunt montra que la série de Fourier d'une fonction $f \in L^p(\mathbb{T})$ converge presque partout vers f , dès que $p > 1$, mais avec $p < +\infty$ aussi.

Donc Kolomogorov n'aurait pas pu faire mieux que de construire des contre-exemples dans $L^1(\mathbb{T})$!

3.1. Conclusion intermédiaire. *Le problème de la convergence de la série de Fourier est un problème difficile.*

□ Dans $L^p([-\pi, \pi])$, pour $p > 1$, des théorèmes positifs existent, mais ils requièrent des démonstrations qui vont bien au-delà d'un cours de L3 à l'Université.

□ Dans le plus gros espace $L^1([-\pi, \pi])$ des fonctions Lebesgue-intégrables, des contre-exemples pathologiques existent.

□ Dans $L^2([-\pi, \pi])$, la structure d'espace de Hilbert aide considérablement, car elle apporte à l'Analyse toute la puissance et l'élégance de la Géométrie.

□ Un théorème accessible en L3, qui est l'énoncé le plus important de ce chapitre sur les séries de Fourier, et que nous allons démontrer complètement, va nous apprendre que *la*

série de Fourier d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} < \infty,$$

converge en norme L^2 vers la fonction :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(\theta) - \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta} \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi}.$$

□ Lors de la démonstration de ce théorème, nous allons découvrir qu'il vaut mieux *accélérer* la convergence des séries de Fourier afin d'éviter tous les phénomènes pathologiques qu'elles recellent, et alors, par une sorte de « miracle » absolument imprévisible, de magnifiques théorèmes simples de convergences vont s'avérer être vrais, théorèmes qu'il est tout à fait possible d'enseigner en L3 !

4. Lemme de Riemann-Lebesgue

Reprenons maintenant le cours à son rythme habituel. Dans l'éventualité d'une réponse positive à la Question Principale, à savoir, dans les cas favorables où la série de Fourier d'une fonction redonne la fonction, *i.e.* lorsque :

$$f(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta},$$

ne serait-ce qu'en un seul point $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, la convergence d'une telle série implique, comme on le sait, que son terme général tend vers 0 lorsque $|k| \rightarrow \infty$, avec les fonctions les plus générales possibles, c'est-à-dire avec les fonctions L^1 .

En fait, cette propriété est toujours vraie, sans même supposer que la série converge.

Proposition 4.1. [Lemme de Riemann-Lebesgue] *Les coefficients de Fourier $\widehat{f}(k)$ de toute fonction 2π -périodique intégrable $f \in L^1(\mathbb{T})$ tendent toujours vers zéro à l'infini :*

$$0 = \lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{f}(k) = \lim_{|k| \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Démonstration. Si l'on effectue le changement affine de variable angulaire :

$$t = \theta + \pi/k, \quad dt = d\theta$$

dans l'intégrale définissant $\widehat{f}(k)$, l'exponentielle $e^{-ik(-\frac{\pi}{k})} = -1$ introduit un signe négatif en facteur :

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} f\left(t - \frac{\pi}{k}\right) e^{-ik\left(t - \frac{\pi}{k}\right)} \frac{dt}{2\pi} = - \int_{-\pi}^{\pi} f\left(t - \frac{\pi}{k}\right) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi}.$$

Donc astucieusement, on peut représenter le coefficient de Fourier en question comme $\frac{1}{2}$ que multiplie la somme de ses deux représentations :

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(\theta) - f\left(\theta - \frac{\pi}{k}\right) \right] e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Mais si la fonction 2π -périodique f est supposée continue sur le compact $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, donc uniformément continue, on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N}^* \quad \text{tel que} \quad \left(|k| \geq K \implies \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |f(\theta) - f(\theta - \frac{\pi}{k})| \leq \varepsilon \right),$$

d'où par une majoration évidente de l'intégrale, il en découle alors que $|\widehat{f}(k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $k \geq K$, donc $\lim_{|k| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(k)| = 0$.

Maintenant, si $f \in L^1(\mathbb{T})$ est seulement supposée intégrable, on sait par densité de \mathcal{C}^0 dans L^1 que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g_\varepsilon \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ telle que :

$$\|g_\varepsilon - f\|_{L^1} \leq \varepsilon.$$

Mais alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il est immédiatement clair que le k -ème coefficient de Fourier de g_ε est ε -proche de celui de f :

$$\begin{aligned} |\widehat{g}_\varepsilon(k) - \widehat{f}(k)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (g_\varepsilon(\theta) - f(\theta)) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |g_\varepsilon(\theta) - f(\theta)| \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \|g_\varepsilon - f\|_{L^1} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Or puisque g_ε est continue, il existe d'après ce que l'on vient de voir K assez grand tel que $k \geq K$ implique $|\widehat{g}_\varepsilon(k)| \leq \varepsilon$. On en déduit $|\widehat{f}(k)| \leq 2\varepsilon$ pour $k \geq K$, et comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, on a enfin $0 = \lim_{|k| \rightarrow +\infty} |\widehat{f}(k)|$, ce qui était le but. \square

Pourquoi ce Lemme s'appelle-t-il de *Riemann-Lebesgue* ? Tout simplement parce qu'il avait déjà été compris dans le cadre de la théorie de l'intégration de Riemann, bien avant que Lebesgue ne le généralise (aisément) à sa théorie nouvelle englobante.

Corollaire 4.2. *En notation complexe comme en notation réelle pour les séries de Fourier, on a pour toute fonction dans $L^1(\mathbb{T}, \mathbb{C})$:*

$$0 = \lim_{|k| \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \lim_{|k| \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(k\theta) \frac{d\theta}{\pi} = \lim_{|k| \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(k\theta) \frac{d\theta}{\pi}.$$

Démonstration. Si $f = u + iv$ est la décomposition de f en deux fonctions à valeurs réelles $u, v \in L^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, la première limite, qui vient d'être démontrée, donne, pour $k \rightarrow \infty$ positif, en prenant aussi la limite de la suite conjuguée :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} u(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} + i \int_{-\pi}^{\pi} v(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} u(\theta) e^{ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} - i \int_{-\pi}^{\pi} v(\theta) e^{ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right), \end{aligned}$$

et elle donne aussi pour $-k \rightarrow -\infty$ négatif :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} u(\theta) e^{ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} + i \int_{-\pi}^{\pi} v(\theta) e^{ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} u(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} - i \int_{-\pi}^{\pi} v(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right), \end{aligned}$$

d'où au moyen de quatre combinaisons linéaire visibles à l'œil nu :

$$0 = \lim_{|k| \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} u(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \lim_{|k| \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} v(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi},$$

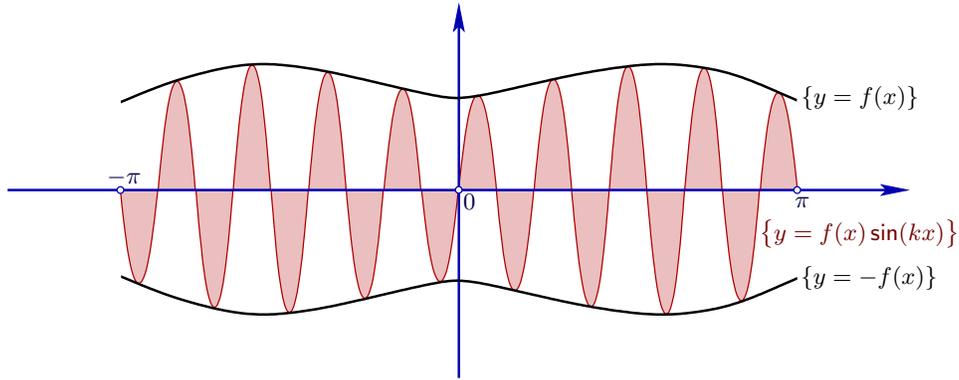
et ceci reconstitue les deux limites restantes, en prenant parties réelles et imaginaires. \square

La raison principale de $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{f}(k) = 0$ n'est pas complètement visible dans ces démonstrations, car elle a en vérité une origine *purement géométrique*. Pour fixer les idées, prenons f à valeurs réelles continue et examinons le cas de :

$$0 = \lim_{|k| \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \frac{dx}{2\pi}.$$

Traçons les trois courbes :

$$\{y = f(x)\}, \quad \{y = -f(x)\}, \quad \{y = f(x) \sin(kx)\}.$$



La courbe $\{y = f(x) \sin(kx)\}$ que l'on intègre, *i.e.* dont on calcule l'aire de son hypographe, coupe l'axe horizontal un grand nombre de fois aux $(2k + 1)$ points :

$$\ell \frac{\pi}{k} \quad (-k \leq \ell \leq k).$$

Elle forme donc une série d'arches alternativement positives et négatives, d'autant plus nombreuses que k est grand. Les aires de deux arches successives ont tendance à se compenser, car ces arches ont même base, et des hauteurs très voisines.

5. Théorème d'unicité dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$

Comme nous allons le voir dans la Section 15 consacrée au contre-exemple de du Bois Reymond, la série de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ne converge *pas* en général en tout point vers la fonction.

Toutefois, on s'attend à ce que lorsque la convergence est satisfaite, la série de Fourier détermine la fonction de manière unique. Nous formulons alors un résultat d'unicité, valable pour les fonctions continues. Dans la démonstration de ce résultat, on va voir apparaître un certain nombre d'idées nouvelles importantes et réutilisables.

Théorème 5.1. *Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ est une fonction continue sur le cercle dont tous les coefficients de Fourier :*

$$0 = \widehat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi}$$

s'annulent, quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, alors la fonction est identiquement nulle.

La réciproque, vraie, est triviale.

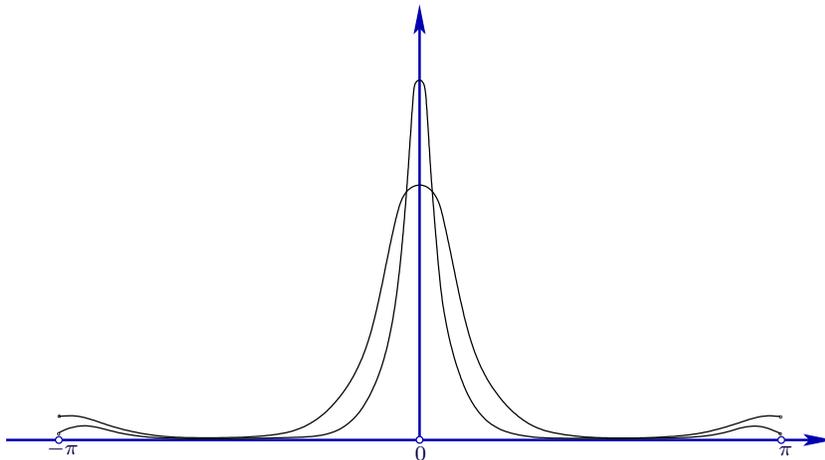
Démonstration. En décomposant $f = u + iv$ en sa partie réelle et imaginaire, on peut manifestement se ramener à supposer que f est à valeurs dans \mathbb{R} .

Raisonnons par contradiction : avec l'hypothèse que $\widehat{f}(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, supposons néanmoins, quitte à changer f en $-f$, qu'il existe $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$ tel que :

$$f(\theta_0) > 0.$$

Après translation, on se ramène à $\theta_0 = 0$, et :

$$f(0) > 0.$$



L'idée maintenant est de construire une famille de polynômes trigonométriques :

$$p_n(\theta) = \sum_{\text{finie}} \text{coefficients } e^{ik\theta} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

à savoir une famille de combinaisons linéaires finies des $e^{ik\theta}$, ce qui par linéarité des annulations supposées $0 = \int f e^{-ik\theta}$ donne toujours :

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} p_n(\theta) f(\theta) \frac{d\theta}{2\pi},$$

mais de telle sorte que le graphe des $p_n(\theta)$ s'élève comme un « *volcan columnaire* » resserré autour de $\theta = 0$ de manière à satisfaire simultanément la divergence :

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_n(\theta) f(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

ce qui sera la contradiction recherchée.

Puisque f est continue en 0, il existe $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ petit tel que :

$$f(\theta) \geq \frac{1}{2} f(0) \quad \text{pour tout } |\theta| \leq \delta.$$

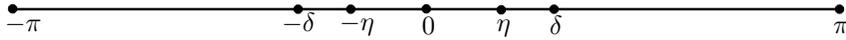
Ensuite, introduisons la fonction :

$$p(\theta) := \varepsilon + \cos \theta,$$

où $\varepsilon > 0$ est choisi assez petit pour que :

$$|p(\theta)| \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } \delta \leq |\theta| \leq \pi,$$

ce qui est possible (exercice : dessiner ce que donne une petite translation verticale positive du graphe de $\theta \mapsto \cos \theta$ sur $[-\pi, \pi]$).



Puis, choisissons un $\eta > 0$ avec $\eta < \delta$ tel que :

$$p(\theta) \geq 1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } |\theta| \leq \eta,$$

ce qui est tout aussi possible puisque $p(0) = \varepsilon + 1$. Enfin, introduisons des puissances n -èmes élevées :

$$p_n(\theta) := [p(\theta)]^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Puisque f est continue, elle est en particulier bornée :

$$M_f := \max_{\theta \in \mathbb{T}} |f(\theta)| < \infty.$$

En développant les puissances :

$$\begin{aligned} p_n(\theta) &= \left(\varepsilon + \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^n \\ &= \sum_{-n \leq k \leq n} \text{coefficient} \cdot e^{ik\theta}, \end{aligned}$$

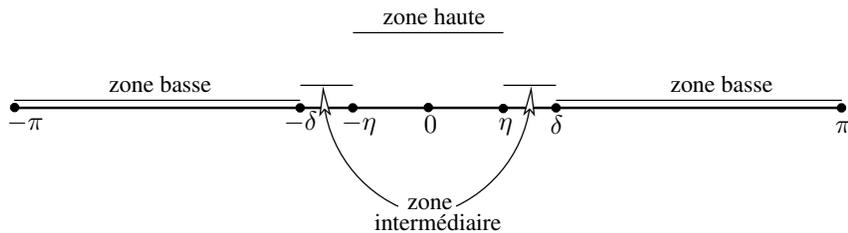
l'hypothèse que $\widehat{f}(k) = 0$ pour toute $k \in \mathbb{Z}$ implique bien par linéarité de l'intégrale que :

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} p_n(\theta) f(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Mais par ailleurs, on a une première majoration de la partie de cette intégrale qui concerne la « base du volcan » :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} f(\theta) p_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \right| &\leq M_f \int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} p_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq M_f \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right)^n, \end{aligned}$$

ce dernier majorant tendant visiblement vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.



De plus, notre choix de δ garantit que $p(\theta)$ et $f(\theta)$ prennent des valeurs positives pour tout $|\theta| \leq \delta$, d'où la positivité de l'intégrale sur la zone intermédiaire :

$$\int_{\eta \leq |\theta| \leq \delta} f(\theta) p_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \geq 0.$$

Enfin et surtout, sur la zone haute, l'intégrale est *minorée* par une quantité :

$$\int_{|\theta| \leq \eta} f(\theta) p_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \geq 2\eta \frac{f(0)}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

qui tend visiblement vers ∞ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Au total :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f p_n = \underbrace{\int_{|\theta| \leq \eta} f p_n}_{\substack{\text{zone haute} \\ \rightarrow \infty}} + \underbrace{\int_{\eta \leq |\theta| \leq \delta} f p_n}_{\substack{\text{zone intermédiaire} \\ \geq 0}} + \underbrace{\int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} f p_n}_{\substack{\text{zone basse} \\ \rightarrow 0}}$$

et donc on a bien établi que cette intégrale tend vers ∞ lorsque $n \rightarrow \infty$, en contradiction flagrante avec le fait qu'elle doit par hypothèse s'annuler. \square

Corollaire 5.2. Deux fonctions continues f et g sur le cercle unité \mathbb{T} sont égales :

$$f(\theta) = g(\theta) \quad (\forall \theta \in \mathbb{T})$$

si et seulement si tous leurs coefficients de Fourier coïncident :

$$\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k) \quad (\forall k \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

L'idée de construire des familles de fonctions, à savoir ici des polynômes trigonométriques, qui pointent fortement à l'origine, mais qui s'écrasent ailleurs vers 0, joue un rôle important et omniprésent en Analyse de Fourier, comme nous allons le voir dans la suite du cours.

En tout cas maintenant, nous pouvons déduire une conséquence élémentaire, intéressante, utile, que nous redémontrerons d'une manière légèrement différente ultérieurement comme corollaire du Théorème de Fejér.

Théorème 5.3. Si une fonction continue $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est telle que sa série de Fourier :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$$

est absolument convergente au sens où :

$$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} |\widehat{f}(k)| < \infty,$$

alors f est limite uniforme ponctuelle des sommes partielles de sa série de Fourier en tout point du cercle :

$$f(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta},$$

c'est-à-dire :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\theta \in \mathbb{T}} \left| f(\theta) - \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta} \right|.$$

Démonstration. Puisqu'une série uniformément convergente de fonctions continues possède une limite qui est encore une fonction continue, la majoration uniforme triviale :

$$|e^{ik\theta}| \leq 1,$$

assure que la série de Fourier de f converge normalement, donc uniformément sur le cercle \mathbb{T} . Notons alors :

$$g(\theta) := \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$$

la fonction continue dont cette série est la limite. Il s'agit maintenant juste de faire voir que $g = f$!

Mais la convergence normale-uniforme — à nouveau elle — garantit *via* un théorème connu que lorsqu'on calcule les coefficients de Fourier de g , on peut intervertir sommation et intégration pour réaliser que la fonction continue g possède les mêmes coefficients de Fourier :

$$\begin{aligned} \widehat{g}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \widehat{f}(n) e^{in\theta} \right) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \widehat{f}(n) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta} \frac{d\theta}{2\pi}}_{=0 \text{ lorsque } n \neq k} \\ &= \widehat{f}(k), \end{aligned}$$

que la fonction continue f , et le corollaire que nous venons d'obtenir nous assure sans délai que $g = f$! □

Maintenant, mentionnons une condition suffisante pour que f soit égale à sa série de Fourier, et beaucoup plus simple que la convergence absolue, puisqu'elle repose sur de simples intégrations par parties.

Théorème 5.4. [Élémentaire] *Les coefficients de Fourier de toute fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$ deux fois continûment différentiable sur le cercle unité décroissent à l'infini comme :*

$$\widehat{f}(k) = O\left(\frac{1}{|k|^2}\right) \quad \text{lorsque } |k| \rightarrow \infty,$$

de telle sorte que la série de Fourier $\sum \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$ de f converge absolument sachant que $\sum \frac{1}{|k|^2} < \infty$.

Démonstration. En effet, puisque f est de classe \mathcal{C}^2 , dans l'intégrale qui définit son k -ème coefficient de Fourier :

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi},$$

on peut en intégrant par parties primitiver deux fois l'exponentielle de manière à faire apparaître deux fois une division $\frac{1}{k}$:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \left[f(\theta) \frac{e^{-ik\theta}}{-ik} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= 0 + \frac{1}{ik} \left[f'(\theta) \frac{e^{-ik\theta}}{-ik} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{(ik)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= -\frac{1}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi}.\end{aligned}$$

Puisque f'' est continue, elle est en particulier bornée :

$$M_{f''} := \max_{\theta \in \mathbb{T}} |f''(\theta)| < \infty,$$

et donc on obtient bien :

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(k)| &\leq \frac{1}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(\theta)| \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq \frac{1}{k^2} M_{f''} \\ &= O\left(\frac{1}{|k|^2}\right),\end{aligned}$$

ce qui conclut. □

En utilisant des intégrations par parties itérées, on démontre le résultat général suivant.

Théorème 5.5. [Décroissance des coefficients de Fourier] *Les coefficients de Fourier de toute fonction $f \in \mathcal{C}^\ell(\mathbb{T})$ qui est continûment différentiable jusqu'à un ordre $\ell \geq 1$ satisfont :*

$$\widehat{f}(k) = O\left(\frac{1}{|k|^\ell}\right) \quad \text{lorsque } |k| \rightarrow \infty. \quad \square$$

Corollaire 5.6. *Lorsque $\ell \geq 2$, la série de Fourier $\sum \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$ de f converge absolument vers $f(\theta)$ en tout point $\theta \in \mathbb{T}$. □*

6. Théorème fondamental de la base hilbertienne sur $L^2(\mathbb{T})$

Contrairement aux phénomènes pathologiques possibles dans $L^1(\mathbb{T})$, lorsqu'on travaille dans $L^2(\mathbb{T})$, la théorie des séries de Fourier se comporte de manière remarquablement harmonieuse : tel est l'objet de la Section qui débute. L'une des raisons « métaphysiques » profondes de cet état de fait tient à ce que toutes les formules ont, grâce au produit scalaire, un *sens géométrique intrinsèque* lorsque les fonctions appartiennent à $L^2(\mathbb{T})$.

Nous laisserons donc pour l'instant de côté la démonstration des critères classiques de convergence (voir par exemple la Section 11 pour le Théorème célèbre de Dirichlet), afin de revenir à la famille élémentaire des fonctions exponentielles-modèles $(e^{ik\theta})_{k \in \mathbb{Z}}$, qui est orthonormée dans $L^2(\mathbb{T})$. Cette famille est de plus *totale*, comme l'énonce le *résultat fondamental du cours* qui fournit la première illustration vraiment intéressante d'espace de Hilbert qui sera utile ultérieurement dans les applications.

Théorème 6.1. [Convergence en norme L^2 des séries de Fourier] La famille de toutes les fonctions exponentielles-modèles $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (e^{ik\theta})_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} < \infty,$$

et donc toute fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$ se développe en une série trigonométrique :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$$

qui est convergente vers f pour la norme L^2 sur le cercle, au sens précis où :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(\theta) - \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta} \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi}.$$

De plus, rappelons que nous savons déjà qu'une telle série qui est convergente en norme dans un certain espace de Hilbert est aussi automatiquement commutativement convergente, à savoir dans notre cas : pour toute bijection $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, on a de même :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f - \sum_{k=-n}^{k=+n} c_{\tau(k)}(f) e_{\tau(k)} \right|^2.$$

Mise en garde importante. Toutefois, insistons sur le fait que la convergence en norme L^2 vers f de la série de Fourier $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$ ne signifie aucunement que l'on ait $f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$ pour tout, ou même pour presque tout, $\theta \in \mathbb{R}$. La convergence affirmée par le Théorème 6.1 fondamental a lieu *seulement au sens d'une intégrale*. En fait, il se pourrait très bien qu'en tout point θ_0 , les valeurs de $S_n(f)(\theta_0)$ « sautent tout le temps » sans jamais converger.

Démonstration du Théorème 6.1 fondamental. L'idée consiste à faire un détour par les fonctions continues, en utilisant le plongement topologique de $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ dans $L^2(\mathbb{T})$ exprimé par l'inégalité $\|\cdot\|_{L^2} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}$ (facile) :

$$\|h\|_{L^2(\mathbb{T})} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |h(\theta)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/2} \leq \max_{|\theta| \leq \pi} |h(\theta)| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} = \|h\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})},$$

valable pour toute fonction $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$. Toutefois, un ingrédient important va nous manquer pour la démonstration complète et nous l'admettrons temporairement avant d'être en mesure d'en donner une preuve *infra* dans le Corollaire 7.7.

Affirmation 6.2. [admise temporairement] La famille des exponentielles-modèles $(e^{ik\theta})_{k \in \mathbb{Z}}$ est totale dans l'espace $(\mathcal{C}^0(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0})$.

Autrement dit, pour toute fonction $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une combinaison linéaire *finie* à coefficients complexes des $e^{ik\theta}$ qui satisfait :

$$\left\| \sum_{\text{finie}} a_k e^{ik\theta} - h \right\|_{\mathcal{C}^0} \leq \varepsilon.$$

Soit maintenant $f \in L^2(\mathbb{T})$ une fonction de carré intégrable quelconque, comme dans le théorème. Grâce à la densité de l'espace des fonctions continues dans $(L^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{L^2})$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ qui est ε -proche de f en norme L^2 :

$$\|h - f\|_{L^2} \leq \varepsilon.$$

Mais alors on peut majorer grâce à l'inégalité du triangle et au plongement de \mathcal{C}^0 dans L^2 :

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{\text{finie}} a_k e^{ik\theta} \right\|_{L^2} &\leq \|f - h\|_{L^2} + \left\| h - \sum_{\text{finie}} a_k e^{ik\theta} \right\|_{L^2} \\ &\leq \varepsilon + \left\| h - \sum_{\text{finie}} a_k e^{ik\theta} \right\|_{\mathcal{C}^0} \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. \square

Ainsi, toute fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$ s'identifie, au sens L^2 , à son développement en série de Fourier $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$. Nous avons donc là l'exemple le plus paradigmatique d'espace de Hilbert, et il en découle que tous les théorèmes de la théorie abstraite des espaces de Hilbert s'appliquent à $L^2(\mathbb{T})$. En particulier, nous avons le :

Corollaire 6.3. [Bessel, Plancherel, Parseval] *Pour toutes fonctions $f, g \in L^2(\mathbb{T})$, on a :*

- inégalité de Bessel : pour tout sous-ensemble $\mathcal{J} \subset \mathbb{Z}$:

$$\sum_{k \in \mathcal{J}} |\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k \in \mathcal{J}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} \right|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi};$$

- identité de Plancherel :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} \right|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi};$$

- identité de Parseval :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{g(t) e^{-ikt}} \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} \frac{dt}{2\pi}.$$

Signifions à nouveau que le Théorème de Riesz-Fischer, d'après lequel tout espace de Hilbert complexe séparable est isométriquement isomorphe à $\ell^2_{\mathbb{C}}$, s'interprète en théorie des séries de Fourier d'une manière absolument nette, explicite et remarquable.

Théorème 6.4. *Sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, l'espace des fonctions de carré intégrable :*

$$L^2(\mathbb{T}) = \left\{ f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurables } \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} < \infty \right\}$$

s'identifie à l'espace :

$$\ell_2(\mathbb{C}) := \left\{ z = (z_k)_{k \in \mathbb{Z}} : \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} |z_k|^2 < \infty \right\}$$

via l'application « prise de coefficients de Fourier » :

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{T}) &\longrightarrow \ell_2(\mathbb{C}) \\ f &\longmapsto \left(\widehat{f}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right)_{k \in \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

de telle sorte qu'on peut écrire, seulement au sens L^2 :

$$f(\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik(\cdot)}.$$

6.5. Renormalisation. Tous les concepts et théorèmes qui précèdent et qui suivent concernant les fonctions 2π -périodiques sur \mathbb{R} se transfèrent aux fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont périodiques $f(x+T) = f(x)$ d'une certaine période $T > 0$ quelconque grâce au changement de variable évident :

$$\theta := x \frac{2\pi}{T},$$

qui les rend 2π -périodiques. Pour $k \in \mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier de f valent alors :

$$\widehat{f}(k) := \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-ikx \frac{2\pi}{T}} dx,$$

et la série de Fourier de f est, sans parler de sa convergence :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikx \frac{2\pi}{T}}.$$

En particulier, les identités de Plancherel et de Parseval, ainsi que le théorème de convergence en norme L^2 vers f lorsque $f \in L^2[0, T]$, sont vrais. D'autres théorèmes qui suivent seront tout aussi vrais, et nous nous contenterons de les énoncer seulement dans le cas standard où $T = 2\pi$.

6.6. Remarque sur la convergence des séries de Fourier. Nous avons insisté et nous réinsistons ici sur le fait que le Théorème 6.1 fondamental énonce seulement que $\sum_{|k| \leq n} \widehat{f}(k) e^{ik \cdot}$ converge vers $f(\cdot)$ en norme L^2 , *et non pas ponctuellement, même au sens de la convergence simple*. Toutefois, un résultat fondamental de la théorie de l'intégrale de Lebesgue est le suivant.

Théorème 6.7. Soit $f_n \in L^p([a, b], \mathbb{C})$ une suite ($n \geq 1$) de fonctions de puissance p -ème intégrable ($1 \leq p < \infty$) définies sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. S'il existe une fonction $f \in L^p[a, b]$ vers laquelle les f_n convergent en norme L^p :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - f_n(x)|^p dx = 0,$$

alors il existe au moins une sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ telle que :

$$f_{n_k}(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(x),$$

pour presque tout $x \in [a, b]$. □

Par conséquent, puisque nous venons donc de démontrer — en admettant temporairement le Corollaire 7.7 — que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)(\theta) - f(\theta)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = 0,$$

il découle de ce résultat qu'il existe toujours une sous-suite $(S_{n_k}(f))_{k=1}^{\infty}$ de la suite $(S_n(f))_{n=1}^{\infty}$ des sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$ telle que l'on ait convergence ponctuelle simple :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(f)(\theta) = f(\theta),$$

en presque tout point $\theta \in \mathbb{T}$ du cercle unité.

C'est vraisemblablement pour cette raison, et en connaissance de ce résultat, que Lusin a dû émettre sa conjecture en 1913. Mais il faut bien insister sur le fait que ce qu'a

démontré Carleson en 1966 était vraiment beaucoup plus fort, puisqu'il a démontré que la suite *complète* $(S_n(f))_{n \geq 1}$ convergeait presque partout vers f , *sans avoir besoin de passer à aucune sous-suite extraite*.

La convergence d'une sous-suite ne prouve rien sur le comportement de la suite complète. Fixez-vous par exemple une sous-suite constante, donc trivialement convergente, mais sur les autres termes, choisissez n'importe quelles valeurs qui sautent n'importe comment, qui divergent dans tous les sens, vers $-\infty$, vers $+\infty$, sans aucun contrôle : vous avez alors une sous-suite qui se comporte de la meilleure manière tout à fait «*suitement correcte*», mais alors que dire de la sauvagerie de la vraie suite complète !

7. Produit de convolution et séries de Fourier

Contrairement à ce qui se passe dans $L^2(\mathbb{T})$, lorsqu'on travaille dans le «*gros*» espace $L^1(\mathbb{T})$, il n'existe aucun produit scalaire, mais il est quand même possible d'écrire la «*projection*» $\widehat{f}(k) e^{ik\theta}$ de f sur la k -ème exponentielle-modèle sous la forme d'une intégrale :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) e^{ik\theta} &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} e^{ik\theta} \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ik(\theta-t)} \frac{dt}{2\pi} \\ &\stackrel{[\text{Poser } t := \theta - t]}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) e^{ikt} \frac{dt}{2\pi}, \end{aligned}$$

les arguments t et $\theta - t$ des deux fonctions $f(\cdot)$ et $e^{ik\cdot}$ étant *interchangeables* grâce à un simple changement de variable affine dans l'intégrale. Cette écriture nous sera extrêmement utile dans la suite.

Définition 7.1. Le produit de convolution $f * g$ entre deux fonctions intégrables $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $g \in L^1(\mathbb{T})$ est la fonction visiblement 2π -périodique définie par :

$$f * g(\theta) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(\theta - t) \frac{dt}{2\pi}.$$

Avant de revenir (plus tard !) à l'espace de Hilbert intéressant $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, il s'avère en effet plus naturel d'étudier le produit de convolution dans le plus gros espace $L^1(\mathbb{T})$, à cause d'un résultat qui justifie *in fine* le bien-fondé de cette définition.

Théorème 7.2. Le produit de convolution $f * g$ entre deux fonctions $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ est une fonction qui appartient encore à $L^1(\mathbb{T})$, et dont la norme L^1 satisfait l'inégalité simple :

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

De plus, il est commutatif :

$$f * g = g * f.$$

Démonstration. Tout d'abord, pour vérifier que $\int_{\mathbb{T}} |f * g| < \infty$, c'est au théorème de Tonelli qu'il faut faire appel, puisqu'une intégrale double apparaît nécessairement :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f * g(\theta)| \frac{d\theta}{2\pi} &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| |g(\theta - t)| \frac{dt}{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\stackrel{[\text{Poser } \vartheta := \theta - t]}{=} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \frac{dt}{2\pi} \int_{-t}^{2\pi-t} |g(\vartheta)| \frac{d\vartheta}{2\pi}, \end{aligned}$$

et cette inégalité montre directement que la norme L^1 de $f * g$ est contrôlée par le produit des normes L^1 de f et de g :

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

Ensuite, puisque le fait que $f * g$ est L^1 garantit que $f * g(\theta)$ prend des valeurs finies $\in \mathbb{C}$ en presque tout $\theta \in \mathbb{T}$, le même changement de variable $t := \theta - t$ que plus haut montre que le produit de convolution est commutatif :

$$f * g(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(\theta - t) \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) g(t) \frac{dt}{2\pi} = g * f(\theta).$$

On voit d'ailleurs aussi que $f * g$ est bilinéaire par rapport à chacun de ses deux arguments. L'associativité, que nous n'utiliserons pas, est satisfaite, et peut être envisagée comme l'Exercice 2. \square

Ainsi, toujours avec $f \in L^1(\mathbb{T})$, le produit de convolution nous permet d'écrire la « projection » $\widehat{f}(k) e^{ik\theta}$ simplement comme :

$$\widehat{f}(k) e^{ik\theta} = f * e_k(\theta) = e_k * f(\theta).$$

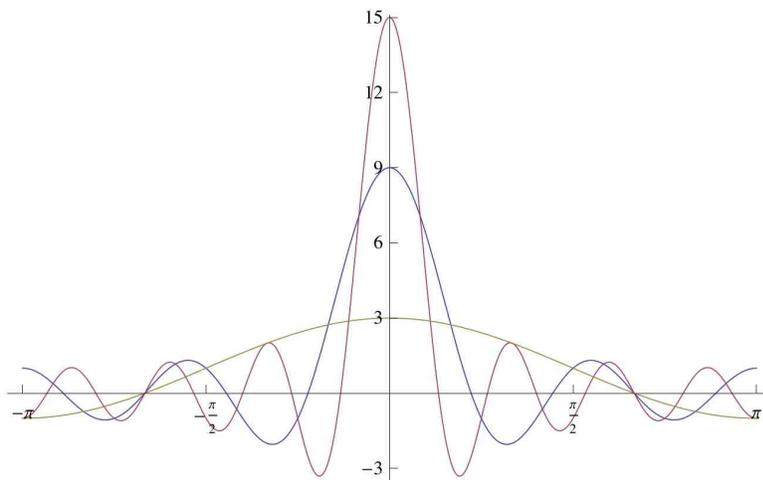
Mais alors la n -ème somme partielle de la série de Fourier de f peut s'abrégier sous la forme de la convolution de f avec une certaine fonction :

$$S_n(f)(\theta) = \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta} = \sum_{k=-n}^{k=+n} f * e_k(\theta) = f * \left(\sum_{k=-n}^{k=+n} e_k \right) (\theta)$$

qui est la *somme des exponentielles-modèles* e_k pour $|k| \leq n$, que l'on appelle habituellement *noyau de Dirichlet*, et que l'on calcule très facilement :

$$\begin{aligned} D_n(\theta) &:= \sum_{k=-n}^{k=+n} e^{ik\theta} = e^{-in\theta} [1 + e^{i\theta} + \dots + e^{i2n\theta}] \\ &= e^{-in\theta} \frac{e^{i(2n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \\ &= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} - e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} \\ &= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Pour $n = 1, 4, 7$, les graphes de $D_n(\theta)$ sur $[-\pi, \pi]$ peuvent être représentés comme suit.



Proposition 7.3. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ est une fonction Lebesgue-intégrable quelconque sur le cercle unité, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la n -ème somme partielle $S_n(f)(\theta)$ de la série de Fourier de f s'écrit comme le produit de convolution :

$$S_n(f)(\theta) = D_n * f(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} f(\theta - t) \frac{dt}{2\pi}$$

de f avec le noyau de Dirichlet :

$$D_n(t) := \begin{cases} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2n + 1 & \text{si } t \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Démonstration. Il nous reste seulement à observer que la limite $D_n(t)$, lorsque t tend vers $2\pi l$ avec $l \in \mathbb{Z}$ est bien égale à $\frac{(n+\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} = 2n + 1$, puisque $\sin t = t + O(t^3)$ en $t = 0$. \square

Cette représentation intégrale compacte de la n -ème somme partielle de la série de Fourier de f est le point de départ des démonstrations de tous les critères de convergence classiques, que nous traiterons ultérieurement.

Pour compléter la démonstration du Théorème fondamental 6.1 dans L^2 , revenons maintenant aux sommes de Fejér, qui ne sont autres que les sommes de Cesàro des $S_k(f)$:

$$\sigma_n(f) := \frac{S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_{n-1}(f)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f) \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Nous avons dit que cette simple idée de faire les sommes de Cesàro *accélérait remarquablement la convergence*, ce que nous allons voir en détail maintenant.

Par simple linéarité et de manière très similaire à ce que nous venons de faire pour réexprimer $S_n(f)(\theta)$ sous forme compacte, on peut représenter la n -ème somme de Fejér $\sigma_n(f)$ sous la forme d'une convolution de f (à gauche) avec une certaine fonction :

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k * f = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k \right) * f$$

qui n'est autre que la moyenne de Cesàro des noyaux de Dirichlet :

$$F_n := \frac{D_0 + D_1 + \cdots + D_{n-1}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k.$$

et que l'on appelle habituellement *noyau de Fejér* $F_n(\theta)$.

À nouveau, ce noyau se calcule explicitement en fonction de θ , et il va se produire un *spectaculaire miracle*, découvert par Fejér en 1908, qui fut à l'origine de développements majeurs dans l'Analyse mathématique.

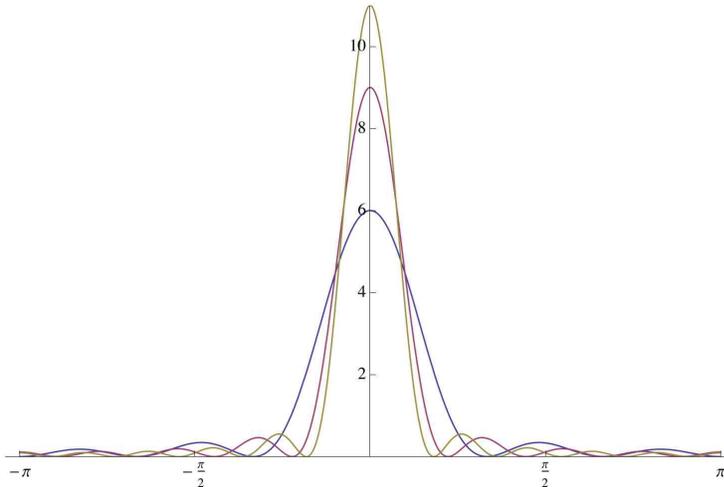
Lorsque $\theta = 0$ (et d'ailleurs aussi, lorsque $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$), on a tout d'abord :

$$F_n(0) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{1}{n} n^2 = n.$$

Mais génériquement, on a $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et alors en utilisant l'expression explicite de $D_n(\theta)$, on peut calculer progressivement :

$$\begin{aligned} n F_n(\theta) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin((k + \frac{1}{2})\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im}(e^{ik\theta} e^{i\theta/2}) \\ &= \frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})} \operatorname{Im} \left\{ \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} \right) e^{i\theta/2} \right\} \\ &= \frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})} \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{in\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} e^{i\theta/2} \right\} \\ &= \frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})} \operatorname{Im} \left\{ e^{in\theta/2} \frac{e^{in\theta/2} - e^{-in\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} \right\} \\ &= \frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})} \operatorname{Im} \left\{ e^{in\theta/2} \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right\} \\ &= \left[\frac{\sin(\frac{n}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} \right]^2, \end{aligned}$$

et il est remarquable de constater alors que ce noyau prend des valeurs qui sont *toujours positives*. Pour $n = 5, 8, 10$, les graphes des F_n sont les suivants.



Proposition 7.4. [Propriétés du noyau de Fejér] Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la n -ème somme de Cesàro :

$$\sigma_n(f) := \frac{S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_{n-1}(f)}{n}$$

des sommes partielles $S_k(f)(\theta) = \sum_{l=-k}^{l=+k} \widehat{f}(l) e^{il\theta}$ de la série de Fourier de f s'exprime comme la convolution (à droite ou à gauche) :

$$\sigma_n(f) = F_n * f = f * F_n$$

de f avec le noyau de Fejér :

$$F_n(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{n} \left[\frac{\sin(\frac{n}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} \right]^2 & \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ n & \text{si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z}, \end{cases}$$

qui ne prend que des valeurs positives. De plus, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale sur $[-\pi, +\pi]$ de ce noyau positif est toujours égale à 1 :

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \|F_n\|_{L^1},$$

ce qui montre que la fonction 2π -périodique continue $\theta \mapsto F_n(\theta)$ est une densité de probabilité sur tout intervalle de longueur 2π . Enfin, pour tout réel $\delta > 0$ fixé et arbitrairement petit, la portion de l'aire du graphe de F_n située hors du petit intervalle $[-\delta, \delta]$ autour de 0 tend vers zéro quand n tend vers l'infini :

$$(7.5) \quad 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} + \int_{\delta}^{\pi} F_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \right).$$

Cette dernière propriété montre que toute l'aire sous le graphe de F_n se concentre autour de zéro, et c'est surtout grâce à elle que nous allons pouvoir démontrer que la série de Fejér $\sigma_n(f)(\theta)$ de toute fonction continue 2π -périodique converge uniformément vers la fonction f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, un résultat inaccessible (et d'ailleurs faux) lorsqu'on ne considère que les sommes de Fourier $S_n(f)(\theta)$.

Démonstration. Le fait que $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = 1$ provient évidemment de la même propriété $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = 1$ qui est satisfaite, comme on l'a déjà vu, par le noyau de Dirichlet :

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{n} n = 1.$$

Fixons maintenant $\delta > 0$ petit. La parité du noyau $F_n(\theta)$ nous ramène à estimer :

$$\int_{\delta}^{\pi} F_n(\theta) \frac{d\theta}{\pi}.$$

Or la fonction $\theta \mapsto \sin^2(\theta/2)$ est croissante sur l'intervalle $[0, \pi]$, puisque sa dérivée $\sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$ y est positive, donc on a :

$$\forall \theta \in [\delta, \pi] \quad \sin^2(\theta/2) \geq \sin^2(\delta/2),$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \leq \frac{1}{\sin^2(\delta/2)} = \frac{1}{\text{Constante}_\delta} \quad \forall \theta \in [\delta, \pi].$$

les deux termes pour $|k| = n$ s'annulant, puis par convolution :

$$\sigma_n(f)(\theta) = F_n * f(\theta) = \sum_{k=-n}^{k=+n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{f}(k) e^{ik\theta},$$

cette dernière formule montrant bien que $\sigma_n(f)(\theta)$ est un polynôme (trigonométrique) en les deux variables $(e^{-i\theta}, e^{i\theta})$.

Le théorème que nous venons d'énoncer stipule donc bien la convergence vers f en norme \mathcal{C}^0 de la suite $\sigma_n(f)(\theta)$ de combinaisons linéaires finies d'exponentielles-modèles $e^{ik\theta}$. \square

Démonstration du Théorème 7.6. Toutes les considérations préliminaires qui précèdent nous permettent maintenant d'écrire la différence entre la fonction f et sa n -ème somme de Fejér $\sigma_n(f)$ sous la forme d'une seule intégrale :

$$\begin{aligned} \sigma_n(f)(\theta) - f(\theta) &= (F_n * f)(\theta) - f(\theta) \\ &= (F_n * f)(\theta) - f(\theta) \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) \frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) [f(\theta - t) - f(\theta)] \frac{dt}{2\pi}, \end{aligned}$$

dans laquelle apparaissent les différences $f(\theta - t) - f(\theta)$ entre les valeurs de f . Et comme le noyau de Fejér est positif, on en déduit la majoration, valable pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$:

$$|\sigma_n(f)(\theta) - f(\theta)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) |f(\theta - t) - f(\theta)| \frac{dt}{2\pi}.$$

Examinons ce majorant : on voudrait bien qu'il tende vers zéro lorsque n tend vers ∞ ; or nous nous rappelons que la masse de $F_n(t)$ est concentrée autour de $t = 0$, et pour les valeurs petites de t , il est clair par continuité de f que $|f(\theta - t) - f(\theta)|$ est petit, uniformément en $\theta \in [-\pi, \pi]$. Il faudra donc découper l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi}$ en un premier morceau $\int_{-\delta}^{\delta}$ autour de 0 qui va être petit grâce à la petitesse de $|f(\theta - t) - f(\theta)|$ pour $|t| \leq \delta$, et un second morceau $\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}$ qui va lui aussi être petit grâce à petitesse de F_n exprimée par l'équation (7.5) :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\delta) \quad \text{où :} \quad I_n(\delta) := \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Formalisons rigoureusement cette stratégie de démonstration.

Ainsi, puisque la fonction 2π -périodique f est *uniformément* continue sur \mathbb{R} tout entier d'après le Lemme 1.3, on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad \left(|t| \leq \delta \implies \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(\theta - t) - f(\theta)| \leq \varepsilon \right).$$

Fixons donc un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Bien entendu, on peut toujours imposer au δ ci-dessus d'être inférieur à π . Découpons alors l'intégrale majorante en question selon $|t| \leq \delta$

et selon $\delta \leq |t| \leq \pi$ et appliquons les majorations que nous avons anticipées :

$$\begin{aligned}
 |\sigma_n(f)(\theta) - f(\theta)| &\leq \int_{|t| \leq \delta} F_n(t) |f(\theta - t) - f(\theta)| \frac{dt}{2\pi} + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) |f(\theta - t) - f(\theta)| \frac{dt}{2\pi} \\
 &\leq \max_{\substack{|t| \leq \delta \\ \theta \in \mathbb{R}}} |f(\theta - t) - f(\theta)| \int_{|t| \leq \delta} F_n(t) \frac{dt}{2\pi} + 2 \|f\|_{\mathcal{C}^0} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) \frac{dt}{2\pi} \\
 &\leq \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) \frac{dt}{2\pi} + 2 \|f\|_{\mathcal{C}^0} I_n(\delta) \\
 &\leq \varepsilon + 2 \|f\|_{\mathcal{C}^0} I_n(\delta).
 \end{aligned}$$

Or puisque $I_n(\delta)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, avec le même $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit que nous avons fixé à l'instant, il existe un entier $N \gg 1$ assez grand pour que :

$$n \geq N \implies 2 \|f\|_{\mathcal{C}^0} I_n(\delta) \leq \varepsilon.$$

En conclusion, nous avons établi que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \gg 1$ assez grand pour que :

$$(n \geq N \implies |\sigma_n(f)(\theta) - f(\theta)| \leq 2\varepsilon) \quad \forall \theta \in \mathbb{R},$$

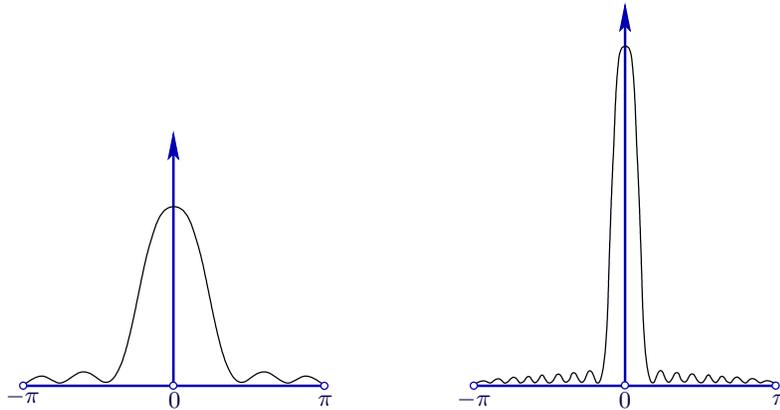
et ceci termine de démontrer que $\sigma_n(f)$ converge uniformément vers f en norme \mathcal{C}^0 . \square

8. 'Bons noyaux' et convolution

Dans la démonstration du théorème de Fejér, nous avons construit une suite de polynômes trigonométriques :

$$F_n(\theta) = \sum_{-n \leq k \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{ik\theta}$$

qui pointait fortement à l'origine $\theta = 0$, et s'abaissait vers 0 sur tout $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ avec $0 < \delta \leq \pi$ arbitrairement petit. Comme résultat, nous avons pu extraire le comportement d'une fonction au voisinage d'un point. Maintenant, nous abstrayons les propriétés du noyau de Fejér, et nous formulons un cadre *a priori* beaucoup plus général dans lequel des résultats de convergence de type Fejér seront valables, presque sans aucun effort supplémentaire.



Définition 8.1. Une famille de fonctions-noyaux :

$$\{K_n(\theta)\}_{n \geq 1}$$

définies sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et au moins de classe \mathcal{C}^0 est dite être une famille de *bons noyaux* lorsqu'elle satisfait les *trois* propriétés suivantes :

(a) pour tout $n \geq 1$:

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi};$$

(b) il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $n \geq 1$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(\theta)| \frac{d\theta}{2\pi} \leq M;$$

(c) pour tout $0 < \delta < \pi$:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} |K_n(\theta)| \frac{d\theta}{2\pi}.$$

En pratique, on rencontre surtout des fonctions-noyaux à valeurs $K_n(\theta) \geq 0$ positives, et alors (b) est conséquence triviale de (a).

On peut interpréter de tels $K_n(\theta)$ comme des distributions de poids sur le cercle unité : la propriété (a) signifie que K_n assigne la masse 1 à la totalité du cercle $[-\pi, \pi]/2\pi\mathbb{Z}$, et la propriété (c) signifie que cette masse se concentre de plus en plus autour de l'origine $\theta = 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Voici donc la généralisation naturelle du Théorème de Fejér.

Théorème 8.2. *Étant donné une famille de bons noyaux sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:*

$$\{K_n(\theta)\}_{n \geq 1},$$

pour toute fonction continue $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, la suite des convolées :

$$f * K_n(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) K_n(t) \frac{dt}{2\pi}$$

converge en norme \mathcal{C}^0 vers f :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{\theta \in \mathbb{T}} |f * K_n(\theta) - f(\theta)| \right).$$

Classiquement, une telle famille $\{K_n\}$ de bons noyaux est appelée une *approximation de l'identité*, puisqu'elle redonne la fonction à la limite.

Ici, la convolution :

$$f * K_n(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) K_n(t) \frac{dt}{2\pi}$$

s'interprète naturellement comme une moyennisation à poids, à savoir la valeur moyenne de $f(\theta - t)$ sur le cercle affectée de la distribution de poids $K_n(t)$. Et cruciallement, cette distribution de poids $K_n(t)$ se concentre de plus en plus au point $t = 0$, avec toujours une masse totale égale à 1, et donc à la limite, on extrait la valeur :

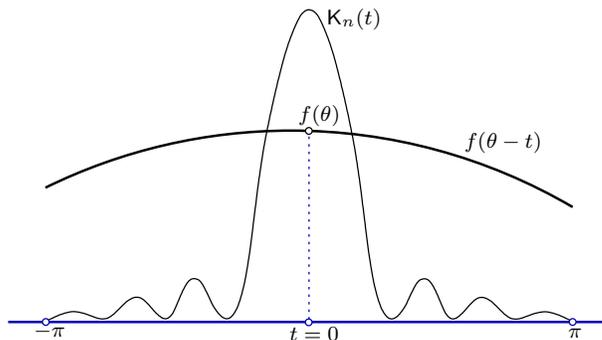
$$1 \cdot f(\theta - 0) = f(\theta).$$

Autrement dit, l'intégrale affecte à la limite *toute* la masse au point $t = 0$.

Démonstration. La preuve requiert une légère variation de la démonstration du théorème de Fejér.

Par uniforme continuité de la fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ continue sur le cercle compact \mathbb{T} , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|t| \leq \delta \implies |f(\theta - t) - f(\theta)| \leq \varepsilon.$$



Grâce à la propriété **(a)** que la masse de K_n vaut toujours 1, on peut écrire la différence à estimer :

$$\begin{aligned} (f * K_n)(\theta) - f(\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) K_n(t) \frac{dt}{2\pi} - f(\theta) \cdot 1 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta - t) - f(\theta)] K_n(t) \frac{dt}{2\pi}. \end{aligned}$$

Ensuite, on découpe l'intégrale comme :

$$\begin{aligned} |(f * K_n)(\theta) - f(\theta)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta - t) - f(\theta)] K_n(t) \frac{dt}{2\pi} \right| \\ &\leq \int_{|t| \leq \delta} |f(\theta - t) - f(\theta)| |K_n(t)| \frac{dt}{2\pi} + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |f(\theta - t) - f(\theta)| |K_n(t)| \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)| \frac{dt}{2\pi} + 2 \|f\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |K_n(t)| \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq \varepsilon M + 2 \|f\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |K_n(t)| \frac{dt}{2\pi} \\ &= \varepsilon \cdot \text{constante} + (\text{Quantité} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0), \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Rappelons que les sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ sont :

$$\begin{aligned} S_n(f)(\theta) &= (f * D_n)(\theta) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) D_n(t) \frac{dt}{2\pi}, \end{aligned}$$

en termes du noyau de Dirichlet :

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2} + 1\right) t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

On pourrait alors se demander de manière tout à fait légitime si la famille $\{D_n\}_{n \geq 1}$ est une famille de bons noyaux au sens de la définition qui précède, mais malheureusement, ce n'est pas du tout le cas, car la condition **(b)** de bornitude uniforme des normes L^1 n'est pas satisfaite, et nous allons démontrer dans peu de temps que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| \frac{dt}{2\pi} = \frac{4}{\pi^2} \log n + O(1).$$

9. Principe de localisation

Maintenant, revenons au problème initial (Question 2.5) : étudier la convergence de la vraie série de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$. Nous savons que la n -ème somme partielle de la série de Fourier de f s'écrit comme le produit de convolution :

$$S_n(f)(\theta) = D_n * f(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(\theta - t) \frac{dt}{2\pi}$$

de f avec le noyau de Dirichlet :

$$D_n(t) := \begin{cases} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} & \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2n + 1 & \text{si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Proposition 9.1. [Principe de localisation] Si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ sont deux fonctions Lebesgue-intégrables sur le cercle \mathbb{T} qui coïncident dans un intervalle ouvert non vide $] \theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta[$, $\delta > 0$, centré en un point $\theta_0 \in \mathbb{T}$, à savoir $f(\theta) = g(\theta)$ pour tout $\theta \in] \theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta[$, alors leurs deux séries de Fourier en θ_0 ont le même comportement (convergence ou divergence) en ce point :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(g)(\theta_0) - S_n(f)(\theta_0)].$$

Démonstration. En soustrayant les deux formules de convolution avec le noyau de Dirichlet écrites pour f et pour g , on obtient :

$$\begin{aligned} S_n(g)(\theta_0) - S_n(f)(\theta_0) &= D_n * (g - f)(\theta_0) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) [g(\theta_0 - t) - f(\theta_0 - t)] \frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_0^{\pi} D_n(t) [g(\theta_0 - t) + g(\theta_0 + t) - f(\theta_0 - t) - f(\theta_0 + t)] \frac{dt}{2\pi}, \end{aligned}$$

puisque le noyau de Dirichlet est pair. Mais comme par hypothèse, $g(\theta) = f(\theta)$ pour tout θ avec $|\theta - \theta_0| < \delta$, l'intégrale \int_0^{δ} disparaît et il reste donc seulement :

$$\int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} h_{f,g}(t) \frac{dt}{2\pi},$$

pour une certaine fonction $h_{f,g} \in L^1(\mathbb{T})$ qui est écrite entre crochets ci-dessus. Mais il se trouve que pour tout δ avec $0 < \delta < \pi$ et pour toute fonction $h \in L^1(\mathbb{T})$, le fait que le numérateur $\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})}$ du noyau de Dirichlet soit borné par $\frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}$ lorsque t varie seulement dans $[\delta, \pi]$ permet facilement de voir que la fonction $\frac{h(t)}{\sin(\frac{t}{2})}$ est intégrable sur $[\delta, \pi]$:

$$\int_{\delta}^{\pi} \left| \frac{h(t)}{\sin(\frac{t}{2})} \right| \frac{dt}{2\pi} \leq \frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})} \int_{\delta}^{\pi} |h(t)| \frac{dt}{2\pi} \leq \frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})} \|h\|_{L^1}.$$

Enfin, le lemme de Riemann-Lebesgue (Corollaire 4.2) s'applique grâce à la présence de $\sin((n + \frac{1}{2})t)$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(g)(\theta_0) - S_n(f)(\theta_0)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\pi} \sin((n + \frac{1}{2})t) \frac{h_{f,g}(t)}{\sin(\frac{t}{2})} \frac{dt}{2\pi} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. \square

Ce résultat montre que le comportement de la série de Fourier d'une fonction f en un point $\theta_0 \in \mathbb{T}$ dépend seulement des valeurs qu'elle prend dans un voisinage ouvert autour de θ_0 , aussi petit soit-il. Cette propriété des séries de Fourier est quelque peu surprenante, car dans la série de Fourier de f , les valeurs des coefficients $\widehat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi}$ dépendent visiblement de la définition de f dans un intervalle de périodicité complet, ici $[-\pi, \pi]$.

Corollaire 9.2. *Sous les mêmes hypothèses, si la série de Fourier de f converge vers une limite ℓ en un point $\theta_0 \in \mathbb{T}$, alors la série de Fourier de g converge vers la même limite ℓ en ce point θ_0 .* \square

10. Constantes de Lebesgue

Un examen plus approfondi de la démonstration du principe de localisation ci-dessus permet d'observer, au-delà de similarités évidentes, une différence majeure entre les deux noyaux de Dirichlet D_n et de Fejér F_n .

Lemme 10.1. *Le noyau de Dirichlet et le noyau de Fejér sont tous deux pairs et ils satisfont, pour tout nombre arbitraire (petit) δ avec $0 < \delta < \pi$:*

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} D_n(t) \frac{dt}{2\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_{\delta}^{\pi} D_n(t) \frac{dt}{2\pi}, \\ 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) \frac{dt}{2\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_{\delta}^{\pi} F_n(t) \frac{dt}{2\pi}. \end{aligned}$$

Plus généralement, pour toute fonction $h \in L^1(\mathbb{T})$, on a pour tout nombre arbitraire (petit) δ avec $0 < \delta < \pi$:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} D_n(t) h(t) \frac{dt}{2\pi}, \\ 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) h(t) \frac{dt}{2\pi}. \end{aligned}$$

Cependant, l'analogie entre les deux noyaux D_n et F_n s'arrête là, et tandis que F_n prend seulement des valeurs positives et que sa norme L^1 :

$$\|F_n\|_{L^1} = 1 \quad (n \geq 1)$$

est toujours égale à 1, le noyau de Dirichlet D_n quant à lui prend alternativement des valeurs positives et négatives, et surtout, sa norme L^1 tend vers l'infini :

$$\|D_n\|_{L^1} = \frac{4}{\pi^2} \log n + O(1) \quad (n \geq 1).$$

Là gît la raison profonde pourquoi les théorèmes de convergence pour les séries de Fourier sont difficiles.

Démonstration. Sans utiliser le Lemme de Riemann-Lebesgue, nous avons déjà vu que l'intégrale de F_n sur $\{\delta \leq |\theta| \leq \pi\}$ tend vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$, dans l'équation (7.5). Mais il y a en fait beaucoup mieux, son supremum sur $\{\delta \leq |\theta| \leq \pi\}$ est majoré par une quantité :

$$\max_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} F_n(\theta) = \max_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} \frac{1}{n} \left[\frac{\sin(\frac{n}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} \right]^2 \leq \frac{1}{n} \underbrace{\frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})}}_{\text{constante}}$$

qui tend visiblement vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Ensuite, comme $|F_n(t)| = F_n(t)$ pour tout $t \in \mathbb{T}$, on en déduit aisément :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) h(t) \frac{dt}{2\pi} \right| &\leq \frac{1}{n} \frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |h(t)| \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq \frac{1}{n} \frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})} \|h\|_{L^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

pour toute fonction $h \in L^1(\mathbb{T})$.

Les deux mêmes propriétés pour le noyau de Dirichlet D_n se démontrent de la même manière.

Estimons maintenant la norme L^1 du noyau de Dirichlet,

$$\|D_n\|_{L^1},$$

quantités appelées *constantes de Lebesgue* dont on doit donc démontrer qu'elles tendent vers $+\infty$ comme $\log n$. Commençons par établir les deux inégalités fonctionnelles préparatoires :

$$t - \frac{t^3}{6} \leq \sin t \leq t,$$

pour tout $t \in [0, \infty[$. Intégrer l'inégalité triviale $\cos t \leq 1$ donne l'inégalité connue $\sin t \leq t$ valable pour tout $t \geq 0$. Autrement dit : $-t \leq -\sin t$, inégalité que l'on intègre à nouveau pour obtenir, après transfert à gauche de la constante 1 d'intégration :

$$1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t,$$

inégalité valable sur $[0, \infty[$. Enfin, une troisième et dernière intégration donne l'inégalité désirée :

$$t - \frac{t^3}{6} \leq \sin t \leq t,$$

satisfaite sur $[0, \infty[$.

Ensuite, en remplaçant t par $\frac{t}{2}$, l'inégalité préparatoire devient :

$$\frac{t}{2} - \frac{t^3}{48} \leq \sin \frac{t}{2} \leq \frac{t}{2}.$$

Par inversion, les inégalités et les extrémités échangent leurs rôles :

$$\frac{2}{t} \leq \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} \leq \frac{2}{t} \frac{1}{1 - \frac{t^2}{24}}.$$

Or sur l'intervalle $[0, \pi]$, on a l'inégalité (légèrement grossière) $\frac{t^2}{24} \leq \frac{1}{2}$, et en appliquant l'inégalité :

$$\frac{1}{1-x} \leq 1+2x,$$

dont on vérifie qu'elle est trivialement satisfaite pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, on déduit que :

$$\frac{2}{t} \leq \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} \leq \frac{2}{t} + \frac{t}{6},$$

à nouveau pour tout $t \in [0, \pi]$.

Maintenant, par parité de la fonction qui définit le noyau de Dirichlet, sa norme est égale à :

$$\|D_n\|_{L^1} = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})t|}{\sin(\frac{t}{2})} dt.$$

En appliquant les inégalités vues à l'instant, on déduit aisément :

$$\begin{aligned} 0 \leq \|D_n\|_{L^1} - \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi 2 \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})t|}{t} dt &\leq \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{t}{6} |\sin(n + \frac{1}{2})t| dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{t}{6} dt \\ &= \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Dans l'intégrale considérée à l'instant qui approche donc $\|D_n\|_{L^1}$ à $O(1)$ près, on pose :

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)t =: v, \quad \text{d'où : } \frac{dt}{t} = \frac{dv}{v},$$

ce qui la transforme en deux morceaux dont le second est d'une contribution négligeable :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})t|}{t} dt &= \frac{2}{\pi} \int_0^{n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{|\sin v|}{v} dv \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv + \frac{2}{\pi} \underbrace{\int_{n\pi}^{n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{|\sin v|}{v} dv}_{\leq \frac{1}{n\pi} \frac{\pi}{2} = O(\frac{1}{n})}. \end{aligned}$$

Naturellement, grâce aux changements de variables linéaires $v := k\pi + u$ effectués pour $k = 0, \dots, n-1$, l'intégrale restante (le premier morceau) se décompose en une somme d'intégrales sur $[0, \pi]$:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{|\sin u|}{k\pi + u} du.$$

En définitive, on obtient (la valeur absolue disparaît) :

$$\|D_n\|_{L^1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin u}{k\pi + u} du + O(1) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

expression dans laquelle la constante qui se cache dans le $O(1)$ n'a pas été modifiée et peut être prise égale à $\frac{\pi}{12}$.

Tout d'abord, le terme pour $k = 0$ de cette dernière somme est majoré par :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du \leq \pi.$$

Ensuite, pour tout entier k avec $1 \leq k \leq n-1$, les inégalités triviales :

$$\frac{1}{k\pi + \pi} \leq \frac{1}{k\pi + u} \leq \frac{1}{k\pi},$$

valables pour tout $u \in [0, \pi]$, multipliées par la quantité positive $\sin u$, intégrées sur $[0, \pi]$, puis sommées pour k allant de 1 à $n-1$, donnent :

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\pi + \pi} \underbrace{\int_0^\pi \sin u du}_{=2} \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin u}{k\pi + u} du \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\pi} \underbrace{\int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du}_{=2}.$$

Or on est en mesure de s'imaginer que l'étudiant sait pertinemment que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \log n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

où γ est la constante d'Euler (sinon, l'étudiant en question est prié de se cultiver sur la question). Donc on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi^2} \left(-\frac{1}{1} + \log n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) &\leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin u}{k\pi + u} du \\ &\leq \frac{4}{\pi^2} (\log n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)). \end{aligned}$$

En faisant le bilan de toutes les inégalités établies jusqu'à présent, on conclut par exemple que :

$$\left| \|D_n\|_{L^1} - \frac{4}{\pi^2} \log n \right| \leq \frac{\pi}{12} + \pi + \frac{4}{\pi^2} \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

ce qui conclut. □

Question laissée en suspens : quelle est la valeur *exacte* de la constante c telle que :

$$\|D_n\|_{L^1} = \frac{4}{\pi^2} \log n + c + O\left(\frac{1}{n}\right)?$$

11. Théorème de Dirichlet

Rappelons que l'on identifie les fonctions définies sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ avec les fonctions 2π -périodiques définies sur \mathbb{R} , de telle sorte qu'il suffit de considérer ces fonctions sur n'importe quel intervalle de longueur 2π .

Définition 11.1. Sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, on dit qu'une fonction f à valeurs dans \mathbb{C} est \mathcal{C}^1 *par morceaux* s'il existe un nombre fini $\kappa \geq 0$ de points :

$$-\pi < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{\kappa-1} < \theta_\kappa < \pi$$

tels que les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(i) il existe $\delta > 0$ (très petit) tel que f est de classe \mathcal{C}^1 , i.e. continûment différentiable, sur la réunion :

$$] - \pi - \delta, \theta_1[\cup] \theta_1, \theta_2[\cup \dots \cup] \theta_{\kappa-1}, \theta_{\kappa}[\cup] \theta_{\kappa}, \pi + \delta[;$$

(ii) pour tout $1 \leq \lambda \leq \kappa$, les deux limites suivantes à gauche et à droite existent :

$$f_-(\theta_\lambda) := \lim_{t \underset{>}{\rightarrow} 0} f(\theta_\lambda + t) \quad \text{et} \quad f_+(\theta_\lambda) := \lim_{t \underset{>}{\rightarrow} 0} f(\theta_\lambda + t);$$

(iii) pour tout $1 \leq \lambda \leq \kappa$, les deux dérivées suivantes à gauche et à droite existent :

$$f'_-(\theta_\lambda) := \lim_{t \underset{>}{\rightarrow} 0} \frac{f(\theta_\lambda + t) - f_-(\theta_\lambda)}{t} \quad \text{et} \quad f'_+(\theta_\lambda) := \lim_{t \underset{>}{\rightarrow} 0} \frac{f(\theta_\lambda + t) - f_+(\theta_\lambda)}{t}.$$

Bien entendu, en tous les autres points $\theta \neq \theta_\lambda$, $\lambda = 1, \dots, \kappa$, la fonction est continue :

$$f_-(\theta) = f_+(\theta),$$

dérivable, avec dérivées à droite et à gauche qui coïncident :

$$f'_-(\theta) = f'(\theta) = f'_+(\theta).$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, rappelons l'expression de la n -ème somme partielle de la série de Fourier de f :

$$S_n(f) := \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}.$$

Ce fut un grand problème historique d'étudier quelles conditions la fonction f doit satisfaire pour être égale à sa série de Fourier :

$$\begin{aligned} f(\theta) &\stackrel{?}{=} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \widehat{f}(k) e^{ik\theta} \\ &\stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f), \end{aligned}$$

en un point $\theta_0 \in \mathbb{T}$ donné, en presque tout point $\theta \in \mathbb{T}$, voire même en tout point $\theta \in \mathbb{T}$.

En 1847, Peter Lejeune-Dirichlet fut l'un des premiers mathématiciens à avoir démontré un théorème *rigoureux* de convergence. Le théorème que Dirichlet a vraiment démontré stipulait que si, au voisinage d'un point θ_0 , la fonction f n'a qu'un nombre *fini* de maxima et de minima, autrement dit, si elle est en fait monotone à gauche et à droite dans des voisinages assez petits de θ_0 , alors la convergence désirée a lieu.

L'histoire des mathématiques étant faite de grands mystères inexplicables, actuellement, ce qu'on appelle *Théorème de Dirichlet* est un *autre* théorème, l'une des 'stars' de l'enseignement de l'Analyse de Fourier de par le monde, célébrité que voici.

Théorème 11.2. [de Dirichlet] *Si une fonction $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ est \mathcal{C}^1 par morceaux, alors en tout point $\theta \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge vers la demi-somme de ses limites à gauche et à droite :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = \frac{f_-(\theta) + f_+(\theta)}{2},$$

demi-somme qui est égale à $f(\theta)$ en tout point de continuité de f .

Lorsqu'on analyse finement la démonstration, on est naturellement amené à 'découvrir' un théorème légèrement plus général, que nous nous proposons maintenant d'expliquer.

Fixons $\theta_0 \in \mathbb{T}$. Tout d'abord, puisque toute fonction admettant une limite en un point reste localement bornée au voisinage de ce point, il est clair que les deux hypothèses d'existence de dérivées à gauche et à droite :

$$f'_-(\theta_0) := \lim_{t \underset{<}{\rightarrow} 0} \frac{f(\theta_0 + t) - f_-(\theta_0)}{t} \quad \text{et} \quad f'_+(\theta_0) := \lim_{t \underset{>}{\rightarrow} 0} \frac{f(\theta_0 + t) - f_+(\theta_0)}{t}$$

— limites qui coïncident d'ailleurs lorsque $\theta_0 \neq \theta_1, \dots, \theta_\kappa$ —, assure qu'il existe $\delta > 0$ et $0 \leq C < \infty$ tels que :

$$\left| \frac{f(\theta_0 - t) - f_-(\theta_0)}{t} \right| \leq C \quad (\forall 0 < t \leq \delta),$$

$$\left| \frac{f(\theta_0 + t) - f_+(\theta_0)}{t} \right| \leq C \quad (\forall 0 < t \leq \delta).$$

Ainsi, les hypothèses du théorème plus général suivant sont en fait satisfaites en *tout* point $\theta_0 \in \mathbb{T}$ par le Théorème 11.2 de Dirichlet, et donc, nous pouvons nous concentrer à partir de maintenant sur ce nouvel énoncé.

Théorème 11.3. *Soit une fonction 2π -périodique $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui est Lebesgue-intégrable, c'est-à-dire L^1 , sur $[-\pi, \pi]$. Si, en un point $\theta_0 \in \mathbb{R}$, les deux hypothèses suivantes sont satisfaites :*

(i) *les deux limites suivantes à gauche et à droite existent :*

$$f_-(\theta_0) := \lim_{t \underset{<}{\rightarrow} 0} f(\theta_0 + t) \quad \text{et} \quad f_+(\theta_0) := \lim_{t \underset{>}{\rightarrow} 0} f(\theta_0 + t);$$

(ii) *il existe $\delta > 0$ tel que :*

$$\int_0^\delta \left| \frac{f(\theta_0 - t) - f_-(\theta_0)}{t} \right| dt < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^\delta \left| \frac{f(\theta_0 + t) - f_+(\theta_0)}{t} \right| dt < \infty;$$

alors la série de Fourier de f en θ_0 converge vers :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta_0} \right) = \frac{f_-(\theta_0) + f_+(\theta_0)}{2}.$$

Démonstration. Rappelons que la n -ème somme partielle de la série de Fourier de f en un point quelconque $\theta \in \mathbb{T}$ se contracte comme la convolution :

$$S_n(f)(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(\theta - t) \frac{dt}{2\pi},$$

de la fonction f avec le n -ème noyau de Dirichlet :

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Or il se trouve que ce noyau, quotient de sinus, est une fonction *paire* de t , et par conséquent, on peut décomposer l'intégrale de convolution ci-dessus, changer de variable, et

rassembler les termes :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(\theta - t) \frac{dt}{2\pi} &= \underbrace{\int_{-\pi}^0 \text{idem}}_{\text{poser } u := -t} + \int_0^{\pi} \text{idem} \\
 &= \int_0^{\pi} D_n(-u) f(\theta + u) \frac{du}{2\pi} + \int_0^{\pi} D_n(t) f(\theta - t) \frac{dt}{2\pi} \\
 &= \int_0^{\pi} D_n(t) [f(\theta - t) + f(\theta + t)] \frac{dt}{2\pi}.
 \end{aligned}$$

En le point θ_0 où les deux hypothèses **(i)** et **(ii)** sont satisfaites, pour établir le théorème, il s'agit donc d'estimer la différence :

$$\begin{aligned}
 S_n(f)(\theta_0) - \frac{f_-(\theta_0) + f_+(\theta_0)}{2} &= \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(\theta_0 - t) \frac{dt}{2\pi} - \frac{f_-(\theta_0) + f_+(\theta_0)}{2} \\
 &= \int_0^{\pi} D_n(t) [f(\theta_0 - t) + f(\theta_0 + t)] \frac{dt}{2\pi} - \frac{f_-(\theta_0) + f_+(\theta_0)}{2},
 \end{aligned}$$

et de montrer qu'elle tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Mais puisque :

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} D_n = \int_{-\pi}^0 D_n + \int_0^{\pi} D_n = 2 \int_0^{\pi} D_n,$$

on peut, de manière très agréable et très astucieuse, ré-écrire le $\frac{1}{2}$ de la demi-somme $\frac{f_-(\theta_0) + f_+(\theta_0)}{2}$ comme l'intégrale $\int_0^{\pi} D_n$ et *absorber-factoriser* le tout dans une *unique* intégrale :

$$S_n(f)(\theta_0) - \frac{f_-(\theta_0) + f_+(\theta_0)}{2} = \int_0^{\pi} D_n(t) [f(\theta_0 - t) - f_-(\theta_0) + f(\theta_0 + t) - f_+(\theta_0)] \frac{dt}{2\pi}.$$

La démonstration se terminera alors grâce à l'assertion suivante. \square

Assertion 11.4. *Les deux limites suivantes sont nulles :*

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} D_n(t) [f(\theta_0 - t) - f_-(\theta_0)] \frac{dt}{2\pi}, \\
 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} D_n(t) [f(\theta_0 + t) - f_+(\theta_0)] \frac{dt}{2\pi}.
 \end{aligned}$$

Démonstration. Par symétrie, il suffit bien entendu de traiter seulement la première. C'est alors à cet instant précis qu'il faut réinsérer l'expression explicite du noyau D_n , en faisant mieux apparaître le fait que la singularité qu'il incorpore au dénominateur se comporte simplement comme du $\frac{1}{t}$:

$$\begin{aligned}
 D_n(t) &= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
 &= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{t} \cdot \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)},
 \end{aligned}$$

puisqu'on se convainc aisément que la fonction $\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})}$ se comporte comme $\frac{2}{t}$ en $t = 0$, et on se convainc tout aussi aisément que la fonction :

$$\begin{aligned} [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\longmapsto \frac{t}{\sin(\frac{t}{2})} \end{aligned}$$

est continue bornée sur $[0, \pi]$; en effet, il suffit de vérifier qu'elle se prolonge par continuité avec la valeur $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ en $t = 0$, mais aussi, on peut se rappeler que plus haut, on a même établi l'inégalité $\frac{2}{t} \leq \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} \leq \frac{2}{t} + \frac{t}{6}$ valable pour $0 < t \leq \pi$, qui suffit manifestement aussi pour faire voir le caractère borné.

Alors la première intégrale dont il faut établir qu'elle converge vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ peut être ré-écrite sous une forme qui fait clairement apparaître la deuxième hypothèse (ii) :

$$\int_0^\pi \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) \cdot \underbrace{\frac{t}{\sin(\frac{t}{2})}}_{\mathcal{C}^0 \text{ sur } [0, \pi]} \cdot \underbrace{\left[\frac{f(\theta_0 - t) - f_-(\theta_0)}{t}\right]}_{L^1 \text{ sur } [0, \pi]} \frac{dt}{2\pi}.$$

=: une certaine fonction $g \in L^1[0, \pi]$

On se retrouve alors dans la situation typique d'un énoncé simple et célèbre, ce qui conclura, la seconde intégrale se traitant de la même manière. \square

Lemme 11.5. [de Riemann-Lebesgue général] *Sur un intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$, avec $-\infty < a < b < \infty$, soit une fonction $g \in L^1([a, b], \mathbb{C})$. Alors on a :*

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\substack{|\omega| \rightarrow \infty \\ \omega \in \mathbb{R}}} \int_a^b g(t) e^{i\omega t} dt, \\ 0 &= \lim_{\substack{|\omega| \rightarrow \infty \\ \omega \in \mathbb{R}}} \int_a^b g(t) \sin(\omega t) dt, \\ 0 &= \lim_{\substack{|\omega| \rightarrow \infty \\ \omega \in \mathbb{R}}} \int_a^b g(t) \cos(\omega t) dt. \end{aligned}$$

Démonstration. Par densité des fonctions en escalier dans L^1 , il suffit d'établir ceci pour une fonction indicatrice :

$$g = \mathbf{1}_{[c, d]},$$

avec $a \leq c < d \leq b$ quelconques.

Or, comme on connaît une primitive évidente de l'exponentielle (ou du sinus, ou du cosinus, la démonstration serait similaire), il est facile de calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{1}_{[c, d]}(t) e^{i\omega t} dt &= \int_c^d e^{i\omega t} dt \\ &= \left[\frac{e^{i\omega t}}{i\omega} \right]_c^d \\ &= \frac{e^{i\omega d} - e^{i\omega c}}{i\omega}, \end{aligned}$$

et puisque les deux exponentielles au numérateur sont de module égal à 1 — l'hypothèse $\omega \in \mathbb{R}$ est importante ! —, il est instantané que la majoration :

$$\left| \int_c^d e^{i\omega t} dt \right| \leq \frac{2}{|\omega|}$$

montre bien la nullité de la limite ! Les sinus et les cosinus se traitent de manière analogue. \square

12. Théorèmes de Dini et de Jordan

Le Théorème de Dirichlet fut, historiquement parlant, le premier résultat sur les séries de Fourier qui ait été démontré de manière absolument rigoureuse. Il est important de noter que la fonction f est supposée *continûment différentiable* (à quelques exceptions près, finies en nombre), et que cette hypothèse est *globale*, *i.e.*, la fonction f est supposée « raisonnable » sur tout intervalle de période ayant la longueur 2π .

Or Riemann (élève de Dirichlet) a observé, dans sa thèse d'habilitation en 1854, que la convergence de la série de Fourier d'une fonction *ne dépend en fait que du comportement de la fonction dans un intervalle ouvert arbitrairement petit autour de θ_0* , cf. le *Principe de localisation* 9.1. Ce phénomène mathématique peut déjà s'observer lorsqu'on examine attentivement la preuve du théorème de Dirichlet.

En tout cas, deux autres critères de convergence classiques pour les séries dus à Dini et à Jordan vont à présent ne faire que des hypothèses *locales* sur le comportement de la fonction.

Théorème 12.1. [de Dini] *Si, en un point $\theta_0 \in \mathbb{T}$, une fonction intégrable $f \in L^1(\mathbb{T})$ est telle que l'intégrale impropre suivante :*

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(\theta_0 - t) + f(\theta_0 + t) - 2f(\theta_0)}{t} \right| \frac{dt}{2\pi} < \infty$$

converge, alors la série de Fourier de f converge au point θ_0 vers la valeur attendue $f(\theta_0)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta_0} = f(\theta_0).$$

Démonstration. En fait, ce théorème découle d'une adaptation simple de la démonstration du Théorème 11.3 ci-dessus, puisque l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} S_n(f)(\theta_0) - f(\theta_0) &= \int_0^\pi D_n(t) \left[f(\theta_0 - t) + f(\theta_0 + t) - 2f(\theta_0) \right] \frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_0^\pi \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) \cdot \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \underbrace{\left[\frac{f(\theta_0 - t) + f(\theta_0 + t) - 2f(\theta_0)}{t} \right]}_{\in L^1([0,\pi])} \frac{dt}{2\pi} \end{aligned}$$

et raisonner de la même manière en appliquant l'hypothèse de convergence de l'intégrale de la valeur absolue de la fonction entre crochets, et en appliquant à nouveau le Lemme 11.5 général de Riemann-Lebesgue \square

En particulier, l'hypothèse de Dini est satisfaite s'il existe un réel $\alpha > 0$ et une constante $C > 0$ tels que l'on ait, pour tout θ' dans un certain intervalle ouvert (non vide) centré en θ_0 :

$$|f(\theta') - f(\theta_0)| \leq C |\theta' - \theta_0|^\alpha,$$

puisque l'on peut alors majorer le numérateur par :

$$|f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)| + |f(\theta_0 + t) - f(\theta_0)| \leq 2Ct^\alpha,$$

et parce que l'on sait bien que l'intégrale impropre en zéro $\int_0^{\frac{\theta^\alpha}{\theta}} d\theta < +\infty$ converge.

Définition 12.2. Une fonction $f: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *höldérienne d'exposant* $0 < \alpha \leq 1$ en un point $\theta_0 \in \mathbb{T}$ s'il existe une constante $0 \leq C < \infty$ telle que :

$$|f(\theta') - f(\theta_0)| \leq C|\theta' - \theta_0|^\alpha.$$

Évidemment, f est alors *continue* en θ_0 . Hölder a globalisé ce type d'hypothèse de la manière suivante.

Définition 12.3. Une fonction $f: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *höldérienne d'exposant* $0 < \alpha \leq 1$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|f(\theta'') - f(\theta')| \leq C|\theta'' - \theta'|^\alpha,$$

pour tous $\theta', \theta'' \in \mathbb{R}$.

On notera alors :

$$\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T})$$

l'espace des fonctions α -höldériennes sur \mathbb{T} , qui sont manifestement continues.

Définition 12.4. Lorsque $\alpha = 1$, c'est-à-dire lorsque :

$$|f(\theta'') - f(\theta')| \leq C|\theta'' - \theta'|,$$

on dit que f est *Lipschitzienne*.

Donc le théorème de Dini avec une telle hypothèse globale nous donne comme corollaire le :

Théorème 12.5. La série de Fourier de toute fonction $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T})$ avec $0 < \alpha \leq 1$ converge vers la fonction en tout point du cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Mais ici, la convergence n'est pas forcément uniforme. Plus bas, on démontrera le Théorème dit « de Bernstein », d'après lequel la série de Fourier converge même *normalement* lorsque $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Par ailleurs, l'Exercice 20 donne la croissance :

$$\widehat{f}(k) = O\left(\frac{1}{|k|^\alpha}\right).$$

On notera au passage que notre hiérarchie d'espaces fonctionnels vient de s'enrichir par l'apparition de ce qui peut être considéré comme l'espace des fonctions qui ont une « dérivée d'ordre égal à un réel $\alpha \in]0, 1[$ quelconque » :

$$\mathcal{C}^1(\mathbb{T}) \hookrightarrow \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T}) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{T}).$$

On démontre, ce que nous laisserons en exercice, la complétude de ces trois espaces fonctionnels.

Proposition 12.6. *Les trois espaces vectoriels : $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ muni de la norme :*

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0} := \max_{\theta \in \mathbb{T}} |f(\theta)|;$$

$\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T})$ pour $0 < \alpha < 1$ muni de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^\alpha} := \max_{\theta \in \mathbb{T}} |f(\theta)| + \sup_{\substack{\theta', \theta'' \in \mathbb{T} \\ \theta' \neq \theta''}} \frac{|f(\theta'') - f(\theta')|}{|\theta'' - \theta'|^\alpha}$$

et $\mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ muni de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1} := \max_{\theta \in \mathbb{T}} |f(\theta)| + \max_{\theta \in \mathbb{T}} |f'(\theta)|$$

sont chacun complet.

Mais alors, que se passe-t-il lorsque $\alpha \rightarrow 0$ dans les espace $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T})$? Il semblerait que l'on retrouve les fonction continues $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, et peut-être que le théorème de Dini-Hölder admet des généralisations qui s'appliqueraient aux fonctions qui sont seulement continues ?

Malheureusement, cette question de savoir si la série de Fourier d'une fonction continue (en tout point) converge *en tout point* vers la fonction, question motivée par la croyance du père de la théorie, Fourier lui-même, que tel devait être bien le cas, cette question a connu un destin particulièrement imprévisible, dialectique et chaotique — nous y reviendrons lorsque nous détaillerons le contre-exemple de du bois Reymond.

Pour revenir aux critères classiques de convergence, présentons pour terminer un dernier espace fonctionnel classique. Soient $-\infty < a < b < \infty$, et soit une fonction réelle :

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Partager $[a, b]$ en sous-segments revient à se pourvoir d'une collection d'un certain nombre fini $\nu \geq 1$ de points :

$$\Delta := \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\}.$$

Définition 12.7. La *variation (absolue)* de f sur Δ est la quantité positive :

$$\begin{aligned} V_f(\Delta) &:= |f(a) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \cdots + |f(x_{\nu-1}) - f(b)| \\ &= \sum_{1 \leq \kappa \leq \nu} |f(x_{\kappa-1}) - f(x_\kappa)|. \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, il est clair que :

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= |f(a) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) + \cdots + f(x_{\nu-1}) - f(b)| \\ &\leq V_f(\Delta). \end{aligned}$$

Définition 12.8. La *variation totale* de f sur $[a, b]$ est la quantité positive :

$$\begin{aligned} V_f[a, b] &:= \sup_{\Delta} V_f(\Delta) \\ &= \sup_{a < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < b} \sum_{1 \leq \kappa \leq \nu} |f(x_{\kappa-1}) - f(x_\kappa)|, \end{aligned}$$

nombre éventuellement infini appartenant à $[0, \infty]$.

On dit que f est à *variation bornée* lorsque cette quantité est *finie* :

$$0 \leq V_f[a, b] < \infty.$$

De ce qui précède, on déduit l'inégalité assez grossière $|f(a) - f(b)| \leq V_f[a, b]$, qui peut devenir intéressante lorsqu'on l'applique à la restriction de f à de petits intervalles $[c, d] \subset [a, b]$:

$$(12.9) \quad |f(c) - f(d)| \leq V_f[c, d].$$

Lemme 12.10. *Toute fonction monotone (croissante ou décroissante) $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est à variation bornée égale à :*

$$V_g[a, b] = |g(a) - g(b)|.$$

Démonstration. Si, par exemple, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est décroissante, pour toute collection $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\}$, on a alors sans valeurs absolues :

$$\begin{aligned} 0 \leq V_g(\Delta) &= g(a) - g(x_1) + g(x_1) - g(x_2) + \dots + g(x_{\nu-1}) - g(b) \\ &= g(a) - g(b) < \infty, \end{aligned}$$

la somme étant télescopique, calculable, constante, finie, indépendante de Δ . □

La somme $f = g_1 + \dots + g_K$ d'un nombre fini $K \geq 1$ quelconque de fonctions (monotones ou pas) possède une variation totale toujours majorée (exercice) par :

$$V_f[a, b] \leq V_{g_1}[a, b] + \dots + V_{g_K}[a, b],$$

et donc, lorsque g_1, \dots, g_K sont toutes à variation bornée, f l'est aussi.

Ce qui est remarquable, c'est que les fonctions à variation bornée se ramènent de cette manière à des fonctions monotones.

Théorème 12.11. *Toute fonction à variation bornée $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ peut être représentée comme différence :*

$$f = g - h,$$

entre deux fonctions $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (faiblement) croissantes.

Démonstration. Pour tout $x \in [a, b]$, et toute collection finie $\Delta \subset [a, b]$ qui contient le point x , de telle sorte que $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ se partage alors en deux sous-collections concernant $[a, x]$ et $[x, b]$, on a trivialement :

$$V_f(\Delta_1) + V_f(\Delta_2) = V_f(\Delta_1 \cup \Delta_2),$$

et en prenant le supremum sur Δ_1 et sur Δ_2 , sachant qu'il y a plus de collection $\Delta \subset [a, b]$ que celles qui contiennent le point x , on obtient :

$$(12.12) \quad 0 \leq V_f[a, x] + V_f[x, b] \leq V_f[a, b] < \infty.$$

Pour $a \leq x' \leq x'' \leq b$, le même raisonnement sur $[a, x'']$ donne :

$$V_f[a, x'] + \underbrace{V_f[x', x'']}_{\geq 0} \leq V_f[a, x''],$$

ce qui montre que la fonction qui interprétera le premier rôle :

$$g: x \mapsto V_f[a, x]$$

est croissante !

Pour montrer que la deuxième fonction h qui vaut alors nécessairement $h := g - f$ et s'exprime donc manifestement comme :

$$h: x \mapsto V_f[a, x] - f(x),$$

est elle aussi (faiblement) croissante, avec $a \leq x' \leq x'' \leq b$, il suffit de minorer la différence :

$$\begin{aligned} h(x'') - h(x') &= V_f[a, x''] - V_f[a, x'] - f(x'') + f(x') \\ \text{[Appliquer (12.12) sur } [a, x'']] &\geq V_f[x', x''] - (f(x'') - f(x')) \quad \square \\ \text{[Appliquer (12.9) sur } [x', x'']] &\geq 0. \end{aligned}$$

Puisque les fonctions monotones sont Riemann-intégrables, les fonctions à variation bornée le sont elles aussi, et pour cette raison, il est naturel de quitter temporairement le cadre de la théorie de Lebesgue, pour revenir au cadre riemannien plus ancien.

Comme on sait que les fonctions monotones admettent en tout point des limites à gauche et à droite, il en va de même pour les fonctions à variation bornée.

Théorème 12.13. [de Jordan] *Si $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ est à variation bornée sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, alors la série de Fourier de f converge en tout point $\theta_0 \in \mathbb{T}$ vers la moyenne des limites à gauche et à droite de f en ce point :*

$$\frac{f_-(\theta_0) + f_+(\theta_0)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(\theta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ik\theta_0}.$$

Démonstration. Par linéarité, il suffit de traiter le cas où f est monotone, puis croissante quitte à remplacer f par $-f$, ce que nous supposons dorénavant.

Pour atteindre cette convergence, comme dans la preuve de l'Assertion 11.4, on se ramène à démontrer que :

$$0 \stackrel{?}{=} \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \int_0^\pi [f(\theta_0 + t) - f_+(\theta_0)] \frac{\sin(\omega t)}{t} dt,$$

et en introduisant la fonction croissante :

$$g(t) := f(\theta_0 + t) - f(\theta_0),$$

qui satisfait $0 = g_+(0)$, il s'agit donc d'établir que :

$$0 \stackrel{?}{=} \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \int_0^\pi g(t) \frac{\sin(\omega t)}{t} dt.$$

En remplaçant au besoin $g(0)$ par $g_+(0)$, ce qui ne change pas la valeur de l'intégrale à droite, on peut même supposer que g est continue à droite en 0.

Découpons alors l'intégrale en deux morceaux, au moyen d'un certain $0 < \delta < \pi$ très proche de 0 :

$$\int_0^\pi g(t) \frac{\sin(\omega t)}{t} dt = \int_0^\delta g(t) \frac{\sin(\omega t)}{t} dt + \underbrace{\int_\delta^\pi \frac{g(t)}{t} \sin(\omega t) dt}_{\xrightarrow{|\omega| \rightarrow \infty} 0},$$

la seconde intégrale tendant vers 0 lorsque $|\omega| \rightarrow \infty$, grâce au Lemme de Riemann-Lebesgue, puisque $\frac{g(t)}{t}$ devient Riemann-intégrable sur $[\delta, \pi]$ pour tout choix de $0 < \delta < \pi$.

Pour atteindre l'objectif, il suffira donc de faire voir que la première intégrale peut être rendue arbitrairement petite par un choix de $0 < \delta$ suffisamment petit. Commençons par un préliminaire utile.

Lemme 12.14. *La limite $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M \frac{\sin t}{t} dt$ existe.*

On peut même démontrer qu'elle vaut $\frac{\pi}{2}$, ce à quoi l'Exercice 19 se consacre, mais nous n'aurons pas besoin ici d'une information aussi précise.

Démonstration. Observons que $\frac{\sin t}{t}$ est continue en $t = 0$, et y prend la valeur 1, donc est continue sur $[0, \infty]$. Soit $M \geq 0$. Il existe un unique entier $n \geq 1$ tel que $(n-1)\pi \leq M < n\pi$, et alors :

$$\int_0^M \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin t}{t} dt}_{=: a_k} + \underbrace{\int_{(n-1)\pi}^M \frac{\sin t}{t} dt}_{\xrightarrow[M \rightarrow \infty]{} 0}$$

l'intégrale rémanente tendant vers 0 lorsque M (donc n) tend vers ∞ , puisque :

$$\left| \int_{(n-1)\pi}^M \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \int_{(n-1)\pi}^M \frac{dt}{t} \leq \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{dt}{t} \leq \frac{\pi}{(n-1)\pi} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Quant à la somme (contribution principale), vue comme série numérique $\sum_{k=1}^{n-1} a_k$, elle est *alternée*, car $\sin t$ est de signe $(-1)^{k-1}$ sur $](k-1)\pi, k\pi[$, et car :

$$\begin{aligned} 0 < |a_{k+1}| &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \\ \text{[Poser } u &=: \pi + t] &= \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{\pi + t} dt < \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = |a_k|, \end{aligned}$$

donc grâce à un théorème connu, la série infinie alternée $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge. \square

Corollaire 12.15. *Il existe une constante $0 < C < \infty$ telle que $\left| \int_0^M \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq C$, pour tout $M \geq 0$.*

Démonstration. En effet, en tant que fonction de M , cette intégrale est continue (et même \mathcal{C}^1), et comme elle possède une limite à l'infini, hors d'un gros intervalle compact $[0, M_1]$, elle doit rester proche de sa limite à l'infini, donc être bornée. \square

Si nous revenons maintenant à la première intégrale $\int_0^\delta g(t) \frac{\sin t}{t} dt$ laissée sur le bord de notre route, un instrument puissant permettant de raccourcir de nombreuses démonstrations — censé être déjà assimilé grâce au cours d'Intégration — déclenche alors l'*instant magique* tant attendu.

Théorème 12.16. [Deuxième formule de la moyenne] *Sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, étant donné deux fonctions :*

- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-intégrable,
- $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotone (donc Riemann-intégrable),

il existe toujours un point intermédiaire $a \leq c \leq b$ tel que :

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g_+(a) \int_a^c f(x) dx + g_-(b) \int_c^b f(x) dx. \quad \square$$

L'intérêt majeur de cette deuxième formule de la moyenne, c'est que la fonction monotone g sort de l'intégrale ! Si donc nous l'appliquons à notre intégrale délicate, nous obtenons l'existence de $0 \leq \xi \leq \delta$ tel que :

$$\int_0^\delta g(t) \frac{\sin(\omega t)}{t} dt = \underbrace{g_+(0)}_0 \int_0^\xi \frac{\sin(\omega t)}{t} dt + g_-(\delta) \int_\xi^\delta \frac{\sin(\omega t)}{t} dt,$$

le premier terme disparaissant, puisqu'on s'était ramené à l'avance à $0 = g_+(0) = g(0)$, et le second terme tendant vers 0 avec $\delta > 0$:

$$0 = \lim_{\delta \xrightarrow{>} 0} g_-(\delta),$$

puisque par croissance et positivité de g :

$$0 \leq g_-(\delta) \leq \underbrace{g(\delta)}_{\xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0}.$$

Ainsi grâce à tout ce qui précède, et en supposant $\omega > 0$, puisque le cas $\omega < 0$ est équivalent, nous pouvons majorer l'intégrale 'sur le gril' en question :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\delta g(t) \frac{\sin(\omega t)}{t} dt \right| &= |g_-(\delta)| \cdot \left| \int_\xi^\delta \frac{\sin(\omega t)}{t} dt \right| \\ &= |g_-(\delta)| \cdot \left| \int_0^\delta \frac{\sin(\omega t)}{t} dt - \int_0^\xi \frac{\sin(\omega t)}{t} dt \right| \\ \text{[Poser } u := \omega t \text{]} &= |g_-(\delta)| \cdot \left| \int_0^{\omega\delta} \frac{\sin u}{u} du - \int_0^{\omega\xi} \frac{\sin u}{u} du \right| \\ \text{[Corollaire 12.15]} &\leq |g_-(\delta)| \cdot 2C, \end{aligned}$$

par une quantité qui tend effectivement vers 0 lorsque $\delta \xrightarrow{>} 0$. □

13. Séries trigonométriques versus séries de Fourier

Une question naturelle est la suivante.

Question 13.1. *Toute série trigonométrique $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik\theta}$ à coefficients $a_k \in \mathbb{C}$ est-elle la série de Fourier d'une certaine fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$?*

Cette question est tout à fait naturelle, puisqu'il faut connaître la généralité et l'extension des êtres mathématiques.

En fait, la réponse s'avère être négative pour une raison assez simple : le Lemme 4.1 de Riemann-Lebesgue énonce en effet que les coefficients de Fourier $\widehat{f}(k)$ de toute fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ tendent vers 0 lorsque $|k| \rightarrow \infty$.

Par ailleurs, Cantor a démontré en 1870 qu'une série trigonométrique $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik\theta}$ ne peut converger pour toute valeur de $\theta \in \mathbb{T}$ que si $a_k \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Plus généralement, Lebesgue a démontré que cette condition est encore nécessaire pour que la série trigonométrique converge en tout point d'un ensemble de mesure positive sur \mathbb{T} .

Donc la question peut être relancée.

Question 13.2. Toute série trigonométrique $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik\theta}$ dont les coefficients complexes a_k satisfait :

$$0 = \lim_{|k| \rightarrow \infty} |a_k|$$

est-elle la série de Fourier d'une certaine fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$?

La réponse est : *non !*, car Fatou a construit un contre-exemple qui apparaît dans le livre de Lebesgue en 1906.

Théorème 13.3. La série trigonométrique :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{\log n}$$

dont les coefficients tendent vers 0 n'est la série de Fourier d'aucune fonction $g \in L^1(\mathbb{T})$.

Démonstration. Rappelons pour commencer que les noyaux de Fejér s'écrivent :

$$n F_n(\theta) = \sum_{|k| \leq n} (n - |k|) e^{ik\theta}$$

et, pour toute fonction 2π -périodique Lebesgue-intégrable $f \in L^1(\mathbb{T})$, que :

$$(13.4) \quad F_n * f(\theta) = \sum_{k=-n}^{k=+n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{f}(k) e^{ik\theta}.$$

où $\widehat{f}(k) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi}$ désigne le k -ème coefficient de Fourier de f .

Lemme 13.5. Soit g une fonction dans $L^1(\mathbb{T})$ telle que $\widehat{g}(0) = 0$, et soit $G(t) := \int_0^t g(s) ds$ sa primitive s'annulant en 0. Alors G est 2π -périodique et :

$$\widehat{G}(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s g(s) ds.$$

Démonstration. Étant l'intégrale d'une fonction L^1 , la fonction $G(t) = \int_0^t g(s) ds$ est continue, et sa 2π -périodicité équivaut à $\widehat{g}(0) = 0$:

$$G(t + 2\pi) = \int_0^{2\pi+t} g(s) ds = \int_0^t g(s) ds + \int_t^{2\pi+t} g(s) ds = G(t).$$

Pour calculer $\widehat{G}(0)$, il vaut mieux considérer $\int_0^{2\pi}$ au lieu de $\int_{-\pi}^{\pi}$. La fonction $(t, s) \mapsto g(s)$ étant intégrable sur le triangle $\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t \leq 2\pi\}$, le théorème de Fubini-Tonelli nous permet d'échanger l'ordre de l'intégration double qui apparaît naturellement, et en prenant bon soin des bornes, on obtient la réponse :

$$\begin{aligned} \widehat{G}(0) &= \int_0^{2\pi} G(t) \frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^t g(s) ds \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_s^{2\pi} g(s) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds (\underline{2\pi} - s) g(s) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s g(s) ds, \end{aligned}$$

car l'intégrale correspondant au terme souligné s'annule, puisque $\widehat{g}(0) = 0$ par hypothèse (encore elle !). □

Assertion 13.6. Pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a :

$$\widehat{G}(k) = \frac{1}{ik} \widehat{g}(k).$$

Démonstration. Envisageons l'identité affirmée sous la forme équivalente $\widehat{g}(k) = ik \widehat{G}(k)$, ce qui revient à dire que nous partons de la définition :

$$\widehat{g}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi},$$

et que nous prenons avantage du fait que la *primitive* G de g s'annulant en zéro peut être considérée, ce qui nous permet d'intégrer par parties :

$$\begin{aligned} \widehat{g}(k) &= \left[G(t) e^{-ikt} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} G(t) (-ik) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} \\ &= ik \int_{-\pi}^{\pi} G(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} \\ &= ik \widehat{G}(k), \end{aligned}$$

le terme souligné s'annulant grâce à la 2π -périodicité de G observée à l'instant. \square

Nous affirmons maintenant que :

$$F_n * G(0) = \widehat{G}(0) - i \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{\widehat{g}(k)}{k} + \frac{i}{n} \left(\sum_{k=1}^{k=n} \widehat{g}(k) - \sum_{k=-n}^{k=-1} \widehat{g}(k) \right).$$

En effet, en posant $\theta = 0$ dans l'identité (13.4) ci-dessus que l'on applique présentement à notre primitive G , en utilisant les relations démontrées jusqu'à ce point, et en réorganisant, on obtient effectivement :

$$\begin{aligned} F_n * G(0) &= \sum_{k=-n}^{k=+n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{G}(k) = \widehat{G}(0) + \sum_{1 \leq |k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{G}(k) \\ &= \widehat{G}(0) + \sum_{1 \leq |k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \frac{1}{ik} \widehat{g}(k) \\ &= \widehat{G}(0) - i \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{\widehat{g}(k)}{k} + \frac{i}{n} \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{|k|}{k} \widehat{g}(k) \\ &= \widehat{G}(0) - i \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{\widehat{g}(k)}{k} + \frac{i}{n} \left(\sum_{k=1}^{k=n} \widehat{g}(k) - \sum_{k=-n}^{k=-1} \widehat{g}(k) \right). \end{aligned}$$

Assertion 13.7. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{\widehat{g}(k)}{k} = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} s g(s) ds.$$

Démonstration. Il devient enfin possible de raisonner sur l'identité intéressante obtenue à l'instant.

Comme la fonction G est continue, le théorème de Fejér assure que $F_n * G(0)$ converge vers $G(0) = 0$ lorsque n tend vers $+\infty$. Par ailleurs, le lemme de Riemann-Lebesgue appliqué à la fonction $g \in L^1(\mathbb{T})$ fournit les deux limites :

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{g}(k) \quad \text{et} \quad 0 = \lim_{k \rightarrow -\infty} \widehat{g}(k).$$

Le théorème de Cesàro, d'après lequel les moyennes arithmétiques de toute suite ayant une limite déterminée ont forcément la même limite nous donne alors aussi :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{g}(1) + \cdots + \widehat{g}(n)}{n} \quad \text{et} \quad 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{g}(-1) + \cdots + \widehat{g}(-n)}{n}.$$

Il découle donc de notre identité intéressante que la limite, quand n tend vers ∞ , de la somme $\sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{\widehat{g}(k)}{k}$ existe et qu'elle n'est autre que $-i \widehat{G}(0)$, c'est-à-dire si l'on revient à son expression intégrale :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{\widehat{g}(k)}{k} = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} s g(s) ds,$$

comme asserté. \square

À présent, pour tout couple d'entiers (p, q) tels que $0 \leq p \leq q$ et tout $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, on se propose de calculer :

$$\sum_{n=p}^{n=q} \sin(n\theta) = \sum_{n=p}^{n=q} \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}.$$

en procédant comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^{n=q} \sin(n\theta) &= \sum_{n=p}^{n=q} \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} = \frac{e^{ip\theta} [1 + e^{i\theta} + \cdots + e^{i(q-p)\theta}] - e^{-ip\theta} [1 + e^{-i\theta} + \cdots + e^{-i(q-p)\theta}]}{2i} \\ &= \frac{e^{ip\theta} \frac{e^{i(q-p+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} - e^{-ip\theta} \frac{e^{-i(q-p+1)\theta} - 1}{e^{-i\theta} - 1}}{2i} \\ &= \frac{e^{ip\theta} \frac{e^{i(\frac{q-p+1}{2}\theta)} e^{i(\frac{q-p+1}{2}\theta)} - e^{i(\frac{q-p+1}{2}\theta)} e^{-i(\frac{q-p+1}{2}\theta)}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} - e^{-ip\theta} \frac{e^{-i(\frac{q-p+1}{2}\theta)} e^{-i(\frac{q-p+1}{2}\theta)} - e^{-i(\frac{q-p+1}{2}\theta)} e^{i(\frac{q-p+1}{2}\theta)}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}}{2i} \\ &= \frac{e^{i(\frac{q+p}{2})\theta} \frac{\sin(\frac{q-p+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} - e^{-i(\frac{q+p}{2})\theta} \frac{\sin(-\frac{q-p+1}{2}\theta)}{\sin(-\frac{\theta}{2})}}{2i} \\ &= \frac{\sin(\frac{q-p+1}{2}\theta) \frac{e^{i(\frac{q+p}{2})\theta} - e^{-i(\frac{q+p}{2})\theta}}{2i}}{\sin(\frac{\theta}{2})} \\ &= \frac{\sin(\frac{q-p+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} \sin(\frac{q+p}{2}\theta). \end{aligned}$$

De cette dernière expression explicite découle que la somme en question est majorée par :

$$\frac{1}{\left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|},$$

à savoir on a la majoration :

$$\left| \sum_{n=p}^{n=q} \sin(n\theta) \right| \leq \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|}$$

Rappelons maintenant un critère de convergence de séries, qui sera redémontré en détail plus bas.

Théorème 13.8. [Critère de convergence d'Abel] Si une suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est positive, décroissante, convergente vers zéro :

$$a_n \geq a_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\geq} 0,$$

et si la suite $(\sum_{k=1}^n b_k)_{n \geq 1}$ est bornée, alors la série :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

converge.

Indications de preuve. Si $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ sont deux suites de nombres réels quelconques, alors pour tout $n \geq 2$, on établit très facilement par récurrence l'identité élémentaire :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) [b_k + \cdots + b_1] = \sum_{k=1}^n a_k b_k - a_n (b_1 + \cdots + b_n),$$

sorte d'intégration par parties discrète.

Ensuite, puisque \mathbb{R} est complet, il suffit de montrer que la suite :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)_{n \geq 2}$$

est de Cauchy. Mais la suite $-a_n (b_1 + \cdots + b_n)$ est de Cauchy, puisque $a_n \rightarrow 0$ et puisque par hypothèse, il existe une constante $B > 0$ telle que $|b_1 + \cdots + b_n| \leq B$ pour tout $n \geq 1$.

Il reste alors à examiner le membre de gauche dans l'identité d'intégration par parties discrète, et pour tout couple d'entiers (p, q) avec $1 \leq p \leq q \leq n - 1$, on estime :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p \leq k \leq q} (a_k - a_{k+1}) [b_k + \cdots + b_1] \right| &\leq B \sum_{p \leq k \leq q} |a_k - a_{k+1}| \\ &= B \sum_{p \leq k \leq q} a_k - a_{k+1} = B(a_p - a_{q+1}), \end{aligned}$$

quantité qui peut être rendue arbitrairement petite pourvu que p soit assez grand, puisque $a_k \rightarrow 0$. \square

De ce théorème de convergence, on déduit que le

Lemme 13.9. La série trigonométrique :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{\log n}$$

est convergente en tout point $\theta \in \mathbb{T}$.

Démonstration. Notons tout d'abord que pour $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$, la série considérée $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{\log n}$ est bien entendu convergente, puisque tous ses termes sont nuls.

Nous pouvons donc supposer que $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, d'où $\frac{1}{|\sin(\frac{\theta}{2})|} < +\infty$.

Or nous avons vu plus haut que les sommes partielles $\sum_{n=p}^{\tilde{n}=q} \sin(n\theta)$ sont majorées, en valeur absolue, par une quantité finie qui est indépendante de p et de q . Comme de plus la

suite positive $n \mapsto \frac{1}{\log n}$ est décroissante pour $n \geq 2$ et tend vers 0, le critère d'Abel assure bien que la série trigonométrique :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{\log n}$$

converge pour tous ces autres $\theta \in \mathbb{T}$ fixés non égaux à 0 modulo π . \square

Lemme 13.10. *On a :*

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \log k} \sim \log \log n.$$

Démonstration. Grâce au principe de comparaison entre \sum et \int , par le simple changement de variable $y := \log x$, $dy = \frac{dx}{x}$, on trouve :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \log k} \sim \int_2^n \frac{1}{x \log x} dx = \int_{\log 2}^{\log n} \frac{1}{y} dy \sim \log \log n,$$

et cet équivalent tend vers l'infini quand n tend vers ∞ . \square

Fin de la démonstration du Théorème 13.3. Supposons par l'absurde qu'il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(k) e^{ik\theta}$$

est cette série trigonométrique :

$$\sum_{k=-\infty}^{k=-2} \frac{-1}{2i \log(-k)} e^{ik\theta} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2i \log k} e^{ik\theta},$$

c'est-à-dire dont les coefficients de Fourier $\widehat{g}(k)$ seraient donnés par :

$$\widehat{g}(k) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |k| \leq 1; \\ \frac{1}{2i \log k} & \text{pour } k \geq 2; \\ \frac{-1}{2i \log(-k)} & \text{pour } k \leq -2. \end{cases}$$

On en déduit l'imparité de ces coefficients :

$$\widehat{g}(-k) = -\widehat{g}(k),$$

et donc aussi, la parité de la fonction $k \mapsto \frac{\widehat{g}(k)}{k}$, pour $|k| \geq 1$. D'après l'Assertion 13.7, si une telle fonction $g \in L^1(\mathbb{T})$ existait, la suite indexée par un entier n :

$$\sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{\widehat{g}(k)}{k} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\widehat{g}(k)}{k} = \frac{1}{2i} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \log k}$$

devrait avoir une limite *finie* lorsque $n \rightarrow +\infty$, mais nous venons de voir dans la question précédente que la série à termes positifs $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$ divergeait — contradiction conclusive !

14. Convergence normale des séries de Fourier et Théorème de Bernstein

Revenons maintenant au Théorème de Fejér pour en dévoiler une belle et élémentaire application. Soit à nouveau $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$. Si la série de Fourier :

$$S_n(f)(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$$

de f converge normalement, *i.e.* si $\sum_{|k| \leq n} |\widehat{f}(k)|$ converge, alors $S_n(f)(\theta)$ converge uniformément sur le cercle unité (majorer $|e^{ik\theta}|$ simplement par 1) vers une certaine limite $\ell(\theta)$, donc les sommes de Cesàro de la série de Fourier de f :

$$\frac{S_0(f)(\theta) + \cdots + S_{n-1}(f)(\theta)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell(\theta)$$

convergent vers la même limite $\ell(\theta)$, mais le Théorème de Fejér dit justement que cette limite n'est autre que $f(\theta)$! Ceci redémontre le Théorème 5.3.

Proposition 14.1. *Toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier converge normalement :*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| < \infty$$

est égale à sa série de Fourier :

$$f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta},$$

en tout point $\theta \in \mathbb{T}$ du cercle unité. □

Mais ce n'est pas seulement par chance que la série de Fourier d'une fonction continue donnée converge normalement, car un théorème assure que tel est le cas, pourvu que la fonction soit höldérienne d'exposant assez grand.

Théorème 14.2. [Bernstein] *Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ une fonction continue 2π -périodique sur le cercle unité pour laquelle il existe une constante $K > 0$ et un exposant α avec $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ telle que :*

$$|f(\theta'') - f(\theta')| \leq K |\theta'' - \theta'|^\alpha,$$

pour tous $\theta', \theta'' \in \mathbb{T}$. Alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur \mathbb{T} .

Démonstration. Ainsi, le but est d'établir que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| < +\infty$. À cette fin, pour tout $h \in \mathbb{R}$, introduisons la fonction :

$$g_h(\theta) := f(\theta + h) - f(\theta - h),$$

qui est continue sur le cercle et 2π -périodique. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le k -ème coefficient de Fourier de cette fonction se calcule aisément comme suit :

$$\begin{aligned}\widehat{g}_h(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(\theta + h) e^{-ik\theta} - f(\theta - h) e^{-ik\theta} \right] \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik(\theta-h)} \frac{d\theta}{2\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik(\theta+h)} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= (e^{ikh} - e^{-ikh}) \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= 2i \sin(kh) \widehat{f}(k).\end{aligned}$$

L'identité de Plancherel, qui s'applique à notre fonction f puisque $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$, nous donne ensuite :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |g_h(\theta)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}_h(k)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 4 |\sin(kh)|^2 |\widehat{f}(k)|^2.\end{aligned}$$

Or par hypothèse d'hölderianité de f , la fonction g_h satisfait l'inégalité fondamentale :

$$|g_h(\theta)| = |f(\theta + h) - f(\theta - h)| \leq K (2h)^\alpha,$$

donc sa norme L^2 au carré sur le cercle peut être majorée bêtement par :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g_h(\theta)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \leq K^2 2^{2\alpha} h^{2\alpha},$$

et en revenant à ce que Parseval nous avait fourni, on obtient une inégalité (on place le $\frac{1}{4}$ à droite) :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\sin(kh)|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{4} K^2 2^{2\alpha} h^{2\alpha},$$

qui va constituer le vrai point de départ de la démonstration.

Ici, eu égard à notre objectif d'établir la convergence normale de la série de Fourier de f , nous aurions bien aimé voir à gauche de cette inégalité la bonne somme :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2,$$

mais hélas, chaque terme de cette série est pondéré par un facteur perturbateur $|\sin(kh)|^2$, et l'on sait que la fonction sinus peut prendre des valeurs proches de 0. De plus, il y a même aussi un exposant carré qui nous gêne quelque peu, car c'est la somme $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|$ avec exposant 1 qui nous intéresse ; heureusement, ce second problème sera réglé ultérieurement grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour corriger le problème, nous allons nous focaliser sur les termes pour lesquels le sinus perturbateur a en fait des valeurs proches de 1, disons $\geq \frac{1}{2}$ pour fixer les idées, de telle sorte qu'on ait, à un facteur $\frac{1}{2}$ près, la bonne somme.

Plus précisément, posons $h := \frac{\pi}{2^{p+1}}$ avec $p \geq 1$ entier dans l'inégalité obtenue à l'instant en supprimant le terme correspondant à $k = 0$, ce qui nous donne l'inégalité :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left| \sin \left(\frac{k\pi}{2^{p+1}} \right) \right|^2 |\widehat{f}(k)|^2 &\leq \frac{K^2}{4} \frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2p\alpha+2\alpha_0}} \\ &= \frac{K^2}{4} \frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha p}}, \end{aligned}$$

et décomposons la somme $\sum_{k \in \mathbb{Z}^*}$ en :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} = \sum_{2^0 \leq |k| < 2^1} + \sum_{2^1 \leq |k| < 2^2} + \sum_{2^2 \leq |k| < 2^3} + \dots$$

En particulier, la même inégalité est alors satisfaite trivialement par la sous-somme $\sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p}$ puisque tous les termes de $\sum_{k \in \mathbb{Z}^*}$ sont positifs :

$$\sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p} \left| \sin \left(\frac{k\pi}{2^{p+1}} \right) \right|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2}{4} \frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha p}},$$

Maintenant, si la valeur absolue $|k|$ de l'entier $k \in \mathbb{Z}$ satisfait donc :

$$2^{p-1} \leq |k| < 2^p,$$

pour un tel entier positif quelconque $p \geq 1$ relié au choix de $h = \frac{\pi}{2^{p+1}}$, il est clair alors que $\frac{\pi}{4} \leq \frac{|k|\pi}{2^{p+1}} < \frac{\pi}{2}$, d'où :

$$\left| \sin \left(\frac{k\pi}{2^{p+1}} \right) \right|^2 \geq \frac{1}{2},$$

et l'on en déduit l'inégalité plus intéressante :

$$\sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2}{2} \frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha p}},$$

valable pour tout entier $p \geq 1$.

Certes, l'exposant de $|\widehat{f}(k)|$ est égal à 2 ici, mais l'astuce classique qui consiste à faire apparaître un facteur 1 dans l'inégalité (finie) de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n a_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^n 1 \cdot a_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

pour se débarrasser, au prix d'un facteur \sqrt{n} , de l'exposant 2, donne dans notre situation :

$$\begin{aligned} \sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p} |\widehat{f}(k)| &\leq \left(\sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p} 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (2(2^p - 2^{p-1}))^{\frac{1}{2}} \left(\frac{K^2}{2} \frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha p}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \text{[Utiliser } 2^p - 2^{p-1} = 2^{p-1} \text{ !]} &= 2^{\frac{p}{2}} \frac{K}{2^{\frac{1}{2}}} \frac{\pi^\alpha}{2^{\alpha p}} \\ &= \frac{K}{2^{\frac{1}{2}}} \frac{\pi^\alpha}{2^{p(\alpha - \frac{1}{2})}}. \end{aligned}$$

Si donc l'exposant d'hölderianité α est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$ comme on l'a supposé dans le théorème, il est clair que la série à considérer :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |\widehat{f}(k)| &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p} |\widehat{f}(k)| \\ &\leq \underbrace{\frac{K}{2^{\frac{1}{2}}} \pi^\alpha}_{\text{constante}} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha - \frac{1}{2}}} \right)^p \\ &< \infty \end{aligned}$$

est majorée par la série géométrique infinie convergente de raison le réel $\frac{1}{2^{\alpha - \frac{1}{2}}}$ qui est < 1 . La démonstration du théorème est terminée, maintenant. \square

15. Contre-exemple de du Bois-Reymond 1876

Comme nous l'avons déjà signalé, la théorie des séries de Fourier a connu un bouleversement spectaculaire au moment où ont été découvertes des fonction *continues* dont la série de Fourier ne re-converge *pas* vers la fonction de départ. Ces phénomènes surprenants ouvraient un champ d'investigation, notamment en direction de nouveaux espaces fonctionnels tels que les espaces de fonctions höldériennes $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T})$ sur le cercle.

Rappelons que lorsque $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, le théorème de Bernstein — démontré plus haut dans le cours — stipule qu'on a la convergence absolue : $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| < \infty$, qui assure que la fonction $f(\theta) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$ coïncide avec sa série de Fourier en tout point du cercle unité. *C'est donc lorsque l'exposant de régularité est inférieur : $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ que des phénomènes nouveaux sont susceptibles d'apparaître.*

Afin de transmettre au mieux la substantifique moëlle des choses, nous allons *inverser volontairement* l'ordre logique de la présentation, en admettant (provisoirement) que pour tout entier $K \geq 1$, on a la majoration uniforme de la somme *symétrique* suivante :

$$\left| \sum_{1 \leq |k| \leq K} \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \pi + 4.$$

Ces inégalités uniformes seront établies par la suite.

Théorème 15.1. [Contre-exemple de du Bois-Reymond 1876] *Il existe une fonction continue :*

$$g_{\text{BR}} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$$

sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dont les sommes partielles de la série de Fourier :

$$S_K(g_{\text{BR}})(\theta) = \sum_{|k| \leq K} \widehat{g_{\text{BR}}}(k) e^{ik\theta}$$

n'ont pas de limite finie en $\theta = 0$ lorsque K tend vers l'infini, à savoir plus précisément, il existe une fonction continue $g_{\text{BR}} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ telle qu'il existe une sous-suite $(K_j)_{j \geq 1}$ satisfaisant :

$$S_{2K_j}(g_{\text{BR}})(0) \longrightarrow -\infty.$$

En particulier, il n'y a aucune chance que la série de Fourier de g_{BR} prenne la même valeur que g_{BR} en $\theta = 0$!

Démonstration. La recette consiste à briser la symétrie de la somme uniformément bornée ci-dessus, et plus précisément à observer que sa partie négative :

$$\sum_{-K \leq k \leq -1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$$

n'est absolument pas uniformément bornée sur \mathbb{T} , puisque sa valeur en $\theta = 0$:

$$-\sum_{k=1}^K \frac{1}{k} = -\log(K) - \gamma_{\text{Euler}} + o(1)$$

tend vers $-\infty$ comme $-\log K$.

Introduisons alors les deux notations suivantes pour la somme symétrique initiale et pour celle qu'on a obtenue en capturant sa partie négative :

$$\left. \begin{aligned} f_K(\theta) &:= \sum_{1 \leq |k| \leq K} \frac{e^{ik\theta}}{k} \\ f_{\bar{K}}(\theta) &:= \sum_{-K \leq k \leq -1} \frac{e^{ik\theta}}{k} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{tous deux des polynômes trigonométriques,} \\ \text{à savoir appartenant à } \mathbb{Q}[e^{i\theta}, e^{-i\theta}]. \end{array}$$

Ensuite, effectuons un *déplacement-translation* de toutes les fréquences de ces deux polynômes trigonométriques en les multipliant tous deux par $e^{i(2K)\theta}$, ce qui nous donne deux nouveaux polynômes trigonométriques :

$$\begin{aligned} P_K(\theta) &:= e^{i(2K)\theta} f_K(\theta), \\ P_{\bar{K}}(\theta) &:= e^{i(2K)\theta} f_{\bar{K}}(\theta). \end{aligned}$$

Exercice rapide : calculer leurs expressions sous forme de somme.

Utilisons alors l'assertion suivante, dont la démonstration est laissée au lecteur-étudiant soucieux de tout détailler.

Lemme 15.2. *Étant donné un polynôme trigonométrique quelconque :*

$$Q(\theta) := \sum_{\text{finie}} Q_k e^{ik\theta}$$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la n -ème somme partielle de sa série de Fourier :

$$S_n(Q)(\theta) = \sum_{|k| \leq n} Q_k e^{ik\theta}$$

collecte seulement les fréquence de valeur absolue inférieure ou égale à n . \square

Nous nous intéresserons non pas à toutes les sommes partielles de la série de Fourier de P_K , mais seulement aux trois familles suivantes (exercice rapide : vérifier que les formules sont correctes grâce l'expression de P_K calculée ci-dessus) :

$$S_n(P_K) = \begin{cases} P_K & \text{lorsque } n \geq 3K, \\ P_K^- & \text{lorsque } n = 2K, \\ 0 & \text{lorsque } n \leq K - 1. \end{cases}$$

Ce qui est intéressant dans ces formules, c'est que pour $n = 2K$, on trouve P_K^- qui a une valeur absolue élevée $\approx \log(K)$ en $\theta = 0$.

La suite de l'argument consiste à itérer cette construction jusqu'à l'infini au moyen d'une suite d'entiers $(K_j)_{j \geq 1}$, ce qui produit donc une suite de polynômes trigonométriques :

$$P_{K_j}(\theta) := e^{i(2K_j)\theta} f_{K_j}(\theta),$$

mais on veut assurer en même temps que leurs fréquences ne se mélangent absolument pas. Comme P_K contient des $e^{ik\theta}$ seulement pour $K \leq k \leq 3K$ (d'après la solution à un exercice laissé en chemin plus haut), il est clair qu'il suffit de demander que :

$$K_{j+1} > 3K_j$$

pour tout $j \geq 1$. Nous choisirons plus précisément une telle suite K_j plus bas.

Voici alors notre candidat pour produire une fonction *continue* de type du Bois-Reymond dont la série de Fourier ne convergera pas en 0 :

$$g_{\text{BR}}(\theta) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} P_{K_j}(\theta).$$

Ici, on a mis un facteur-poids $\frac{1}{j^2}$ parce que la somme $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$ converge, et parce que nous avons admis avant d'énoncer le théorème que l'on a les majorations uniformes :

$$|P_{K_j}(\theta)| \leq \pi + 4,$$

pour tout $j \geq 1$ et tout $\theta \in \mathbb{T}$, de telle sorte que la série que nous venons d'écrire *converge normalement donc uniformément vers une certaine fonction continue* (qui va être pathologique !).

Maintenant, qu'en est-il des sommes partielles :

$$S_n(g_{\text{BR}})(\theta)$$

de sa série de Fourier ?

Choisissons directement $n := 2K_j$ pour « pointer là où ça fait mal ». Comme dans le lemme ci-dessus, prendre la n -somme partielle d'une série normalement convergente d'exponentielles $e^{ik\theta}$ revient à capturer seulement ses fréquences satisfaisant $|k| \leq n$. Pour en capurant donc les fréquence satisfaisant $|k| \leq 2K_j$, on prend d'abord tous les polynômes $P_{K_1}, \dots, P_{K_{j-1}}$ dans g_{BR} , puisque la plus haute fréquence, celle qui est la plus haute dans

$P_{K_{j-1}}$, est $e^{i(3K_{j-1})}$ et l'on a par hypothèse $3K_{j-1} < K_j$, donc $< 2K_j$. On se convainc alors aisément (exercice de compréhension) que :

$$S_{2K_j}(g_{BR})(\theta) = \underbrace{\sum_{l=1}^{j-1} \frac{1}{l^2} P_{K_l}(\theta)}_{\text{somme gentille uniformément bornée}} + \underbrace{\frac{1}{j^2} P_{K_j}^-(\theta)}_{\text{terme potentiellement méchant}},$$

où, fait important, on n'a conservé que la moitié inférieure-négative $P_{K_j}^-$ de P_{K_j} .

Mais alors la première somme est à nouveau uniformément bornée en valeur absolue, puisqu'elle est :

$$\begin{aligned} \text{somme gentille} &\leq \sum_{l=1}^{j-1} \frac{1}{l^2} |P_{K_l}(\theta)| \\ &\leq \sum_{l=1}^{j-1} \frac{1}{l^2} (\pi + 4) \\ &\leq \frac{\pi^2}{6} (\pi + 4) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Au contraire, le dernier terme possède une valeur en $\theta = 0$:

$$\frac{1}{j^2} P_{K_j}^-(0) \approx -\frac{1}{j^2} \log(K_j)$$

qui n'a pas de raison particulière d'être bornée. À vrai dire, en prenant pour K_j les valeurs doublement exponentielles :

$$K_j := 3^{2^j},$$

on se convainc mentalement que la condition $K_{j+1} > K_j$ est (largement) satisfaite, tandis que la valeur en $\theta = 0$ du « *terme potentiellement méchant* » :

$$-\frac{1}{j^2} \log(3^{2^j}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} -\infty$$

tend vers l'infini négatif (exercice visuel). Donc en $\theta = 0$, c'est le terme effectivement méchant qui entraîne avec lui la somme gentille pour les précipiter tous deux ensemble vers l'infini négatif !

En conclusion, nous avons donc bien construit une fonction continue g_{BR} sur le cercle et une suite d'entiers $(2K_j)_{j \geq 1}$ telles que :

$$-\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} S_{2K_j}(g_{BR})(0),$$

ce qui conclut la démonstration. □

Exercice de compréhension mathématique : effectuer un résumé mental des arguments utilisés.

Exercice de réflexion plus profonde : méditer sur le fait que la fonction g_{BR} ne peut pas être de classe \mathcal{C}^1 , eu égard au théorème de Dirichlet.

16. Sommation d'Abel et noyau de Poisson

Pour se convaincre complètement de la véracité de ce contre-exemple, il reste encore à établir l'uniforme majoration :

$$\left| \sum_{1 \leq |k| \leq K} \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \pi + 4.$$

Plusieurs approches existent, et nous choisirons celle — classique — qui nous fera faire un détour par la théorie du noyau de Poisson, puisque cette théorie montre des similarités frappantes avec la théorie du noyau de Fejér. Nous effectuerons ainsi une bonne transition avec le chapitre suivant dans lequel les « bon noyaux de convolution » seront étudiés en tant que tels et dans toute leur généralité.

Soit pour commencer une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ qui appartient à l'espace le plus « gros » des fonctions sur le cercle dans la hiérarchie des espaces fonctionnels dont nous sommes partis. Elle possède donc des coefficients de Fourier, et l'on peut considérer sa série de Fourier complète :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ik\theta}.$$

Fejér a eu cette idée géniale de prendre les sommes de Cesàro des sommes partielles de cette série de Fourier pour en accélérer la convergence, ce qui donnait un résultat spectaculaire de convergence uniforme lorsque $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$. Fejér a « taclé » du Bois-Reymond !

Or un *autre* procédé d'accélération de convergence avait été mis au point bien auparavant par Abel au début du 19^{ème} siècle, lequel que voici !

Définition 16.1. Une série de nombres complexes $\sum_{k \geq 1} c_k$ est dite *sommable au sens d'Abel* de somme un nombre complexe $\ell \in \mathbb{C}$ lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) pour tout rayon r satisfaisant $0 \leq r < 1$, la série :

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k =: A(r) \in \mathbb{C}$$

converge vers un nombre complexe $A(r)$ dépendant de r ;

(ii) ce nombre possède une limite quand r tend vers 1 par valeurs inférieures :

$$\ell = \lim_{r \rightarrow 1^-} A(r).$$

On a alors un résultat général dont nous n'aurons pas réellement besoin mais qu'il est naturel de citer ici, et qui pourrait tout à fait faire l'objet d'un exercice à un moment donné amusant de l'année.

Théorème 16.2. [Admis] Pour toute série $\sum_{k \geq 1} c_k$ de nombres complexes, les implications suivantes sont satisfaites :

$$\text{convergence classique} \implies \text{Cesàro-sommabilité} \implies \text{Abel-sommabilité},$$

à savoir plus précisément :

$$\left(\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K c_k =: \ell \text{ existe} \right) \implies \begin{cases} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^1 c_k + \sum_{k=1}^2 c_k + \cdots + \sum_{k=1}^K c_k}{K} = \ell \text{ aussi,} \\ \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = \ell \text{ aussi,} \end{cases}$$

$$\left(\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^1 c_k + \sum_{k=1}^2 c_k + \cdots + \sum_{k=1}^K c_k}{K} = \ell \text{ existe} \right) \implies \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = \ell \text{ aussi. } \square$$

Aucune de ces implications ne peut être renversée, comme le montrent les deux séries (divergentes !) :

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \quad \text{et} \quad 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots ,$$

ce dont on se convainc par une réflexion-exercice. Et si l'auto-exercitation ne fonctionne pas, pour bénéficier de l'aide d'un coach sportif, on se reportera à l'Exercice 14.

Ce théorème général nous donne alors instantanément l'idée de *soumettre au procédé d'Abel* la série de Fourier de toute fonction sur le cercle, en espérant voir apparaître là aussi une accélération bénéfique de convergence. C'est à ce moment-là que va entrer en scène le célèbre *noyau de Poisson*.

Soit donc un rayon r satisfaisant $0 \leq r < 1$. Avec Abel, on modifie comme promis la série de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ en multipliant ses monômes par une puissance correspondante de r :

$$A_r(f)(\theta) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}.$$

Noter que le facteur d'écrasement des coefficients de Fourier $r^{|k|}$ est symétrique par rapport à l'origine dans \mathbb{Z} , ce qui assure que les termes de la série tendent rapidement vers 0 dans les deux directions, négative et positive.

Or si $f \in L^1(\mathbb{T})$ est intégrable au sens de Lebesgue, ses coefficients de Fourier satisfont la majoration uniforme (exercice mental) :

$$|\widehat{f}(k)| \leq \|f\|_{L^1},$$

donc par conséquent, $A_r(f)(\theta)$ converge *normalement* grâce à la majoration élémentaire :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} |\widehat{f}(k)| \leq 2 \|f\|_{L^1} \frac{r}{1-r}.$$

Ensuite, comme pour les sommes de Cesàro de la Série de Fourier de f , le point-clé c'est que ces sommes d'Abel peuvent elles aussi être écrites comme des convolutions avec

un (nouveau !) noyau qui « naît spontanément dans un calcul » :

$$\begin{aligned} A_r(f)(\theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \widehat{f}(k) e^{ik\theta} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} \right) e^{ik\theta} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{-ik(t-\theta)}}_{=: P_r(\theta-t)} \right) \frac{dt}{2\pi}, \end{aligned}$$

où interversion de la sommation et de l'intégration sont bien entendu aisément justifiables (exercice). On voit alors en effet apparaître ici une *convolution* de f avec une certaine fonction nouvelle (qu'on appelle *noyau de Poisson*) :

$$P_r(\theta) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta}$$

qui admet en fait aussi une expression explicite contractée :

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.$$

Il est manifestement clair qu'on doit s'attendre à une telle contraction, puisque l'expression sommatoire de $P_r(\theta)$ montre deux séries géométriques ! Pour conduire le calcul à la manière astucieuse des « sioux-mathématiciens », posons :

$$\omega := r e^{i\theta},$$

de telle sorte que la somme à calculer s'écrit (exercice visuel) :

$$P_r(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\omega}^k + \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k.$$

Mais comme $0 \leq r < 1$, ces deux séries sont égales, respectivement, à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \omega} + \frac{\bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}} &= \frac{1 - \bar{\omega} + (1 - \omega)\bar{\omega}}{(1 - \omega)(1 - \bar{\omega})} \\ &= \frac{1 - |\omega|^2}{|1 - \omega|^2} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}, \end{aligned}$$

ce qui était annoncé. On vérifie d'un seul coup d'œil que le dénominateur ne s'annule jamais, puisque $0 \leq r < 1$ et puisque $|\cos \theta| \leq 1$.

Maintenant que ce calcul a été effectué, nous pouvons revenir en arrière et exprimer, donc, que la sommation au sens d'Abel de la série de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ intégrable au sens de Lebesgue sur le cercle revient à effectuer une *convolution avec le*

noyau de Poisson :

$$\begin{aligned} A_r(f)(\theta) &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \widehat{f}(k) e^{ik\theta} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P_r(\theta - t) \frac{dt}{2\pi} \\ &= f * P_r(\theta). \end{aligned}$$

Le second « miracle » après celui (similaire) des noyaux de Fejér $(F_n)_{n \geq 1}$ est alors que cette famille de noyaux de Poisson $(P_r)_{0 \leq r < 1}$ — indexée par un paramètre continu $r \in [0, 1[$ au lieu d'être indexée par un entier $n \geq 1$, ce qui ne constitue pas une différence essentielle — satisfait des propriétés qui sont exactement les mêmes que celles que nous connaissons déjà.

Proposition 16.3. *Lorsque $r \rightarrow 1^-$ tend vers 1 par valeurs inférieures, la famille des noyaux de Poisson :*

$$(P_r(\theta))_{0 \leq r < 1}$$

constitue un bon noyau de convolution au sens où elle jouit des trois propriétés fondamentales suivantes :

(i) $P_r(\theta) > 0$ est strictement positif 2π -périodique pour tout $\theta \in \mathbb{T}$ et tout $0 \leq r < 1$;

(ii) son intégrale totale sur le cercle :

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$$

est constamment égale à 1 ;

(iii) pour tout $\delta > 0$ petit, on a convergence uniforme :

$$\|P_r\|_{\mathcal{C}^0([- \pi, -\delta] \cup [\delta, \pi])} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0,$$

ce qui implique notamment aussi l'annulation des valeurs intégrales :

$$0 = \lim_{r \rightarrow 1^-} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} + \int_{\delta}^{\pi} P_r(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \right).$$

Démonstration. On vient de voir que le dénominateur du noyau de Poisson ne s'annule jamais sur le cercle — qui est compact — donc cette fonction :

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2},$$

manifestement 2π -périodique, est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{T} , et visiblement aussi, elle est strictement positive, puisque $r < 1$.

Par convergence normale-uniforme, on peut intégrer terme à terme la définition initiale de $P_r(\theta)$ sous forme de série infinie, ce qui donne presque sans effort :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= 0 + r^{|0|} + 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

[Annihilations évidentes pour $|k| \geq 1$]

Enfin, si on suppose pour fixer les idées que $\frac{1}{2} \leq r < 1$, alors pour $\delta \leq |\theta| \leq \pi$ on peut minorer :

$$\begin{aligned} 1 - 2r \cos \theta + r^2 &= \underbrace{(1-r)^2}_{\substack{\text{négliger} \\ \text{cela}}} + 2r(1 - \cos \theta) \\ &\geq 2r(1 - \cos \theta) \\ &\geq \underbrace{1 - \cos \delta}_{\substack{\text{minorant } > 0 \\ \text{uniforme en } r}}. \end{aligned}$$

Ainsi donc, grâce à une telle minoration qui produit une majoration de la contribution du dénominateur dans le noyau de Poisson $\frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2}$, nous déduisons que :

$$P_r(\theta) \leq \frac{1-r^2}{1-\cos \delta} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0$$

ce qui conclut la vérification de (iii). □

Grâce à ces trois propriétés dont jouit la famille des noyaux de Poisson, exactement la même démonstration qu'avec le noyau de Fejér produit sans effort le théorème fondamental suivant.

Théorème 16.4. *Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ une fonction continue 2π -périodique sur le cercle unité et soit la famille :*

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2}$$

indexée par $0 \leq r < 1$ des noyaux de Poisson. Alors on a :

$$0 = \lim_{r \rightarrow 1^-} \|f - f * P_r\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})}.$$

Dans l'examen partiel 2012 apparaît la version L^p du théorème de Fejér que nous n'avons pas démontrée dans le cours magistral.

Théorème 16.5. *Pour toute $f \in L^p(\mathbb{T})$ avec $1 \leq p < \infty$, on a :*

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f * F_n\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Nous ne produirons pas la démonstration ici (se reporter au corrigé qui a été rédigé). Une démonstration entièrement similaire donne le même résultat avec le noyau de Poisson.

Théorème 16.6. *Pour toute $f \in L^p(\mathbb{T})$ avec $1 \leq p < \infty$, on a :*

$$0 = \lim_{r \rightarrow 1^-} \|f - f * P_r\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

17. Fonction en dents de scie

Maintenant que cette petite excursion divertissante s'achève, on commence à s'impatienter de savoir pourquoi et comment une majoration uniforme du type :

$$\left| \sum_{1 \leq |k| \leq K} \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \pi + 4$$

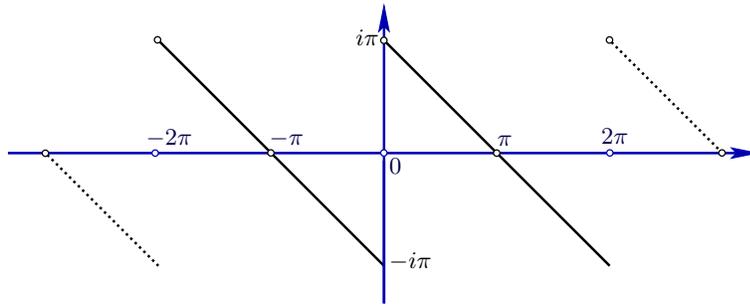
peut être satisfaite ?

La réponse que nous allons proposer — il y en a d'autres — va utiliser le noyau de Poisson en observant pour commencer que la série infinie complète :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{ik\theta}}{k}$$

est la série de Fourier d'une fonction extrêmement simple (dangereuse ?), dite *fonction en dents de scie* définie par :

$$f_{\text{DS}}(\theta) := \begin{cases} i(\pi - \theta) & \text{lorsque } 0 \leq \theta \leq \pi \\ i(-\pi - \theta) & \text{lorsque } -\pi < \theta < 0 \end{cases}$$



Cette fonction, que l'on prolonge bien entendu à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ en la rendant 2π -périodique, est impaire :

$$f_{\text{DS}}(-\theta) = -f_{\text{DS}}(\theta).$$

Elle est discontinue précisément en tous les points de $2\pi\mathbb{Z}$.

Lemme 17.1. *Le 0-ème coefficient de Fourier de cette fonction en dents de scie s'annule :*

$$0 = \widehat{f_{\text{DS}}}(0),$$

tandis que pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, il vaut :

$$\widehat{f_{\text{DS}}}(k) = \frac{1}{k}.$$

Démonstration. Il s'agit d'un calcul au cours duquel il est facile de se tromper — et de s'énerver — plusieurs fois, donc nous le détaillerons lentement comme suit :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^0 \frac{i(-\pi - \theta)}{2\pi} e^{-ik\theta} d\theta + \int_0^{\pi} \frac{i(\pi - \theta)}{2\pi} e^{-ik\theta} d\theta \\ &= \left[\frac{i(-\pi - \theta)}{2\pi} \frac{e^{-ik\theta}}{-ik} \right]_{-\pi}^0 + \int_{-\pi}^0 \frac{i}{2\pi} \frac{e^{-ik\theta}}{-ik} d\theta + \left[\frac{i(\pi - \theta)}{2\pi} \frac{e^{-ik\theta}}{-ik} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{i}{2\pi} \frac{e^{-ik\theta}}{-ik} d\theta \\ &= -\frac{i\pi}{2\pi} \frac{1}{-ik} + 0 + \left[\frac{i}{2\pi} \frac{e^{-ik\theta}}{(-ik)^2} \right]_{-\pi}^0 + 0 - \frac{i}{2\pi} \frac{1}{-ik} + \left[\frac{i}{2\pi} \frac{e^{-ik\theta}}{(-ik)^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2k} + \frac{i}{2\pi} \frac{1}{(ik)^2} - \frac{i}{2\pi} \frac{e^{ik\pi}}{-k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{i}{2\pi} \frac{e^{-ik\pi}}{-k^2} - \frac{i}{2\pi} \frac{1}{-k^2}. \end{aligned}$$

À ce moment-là, les deux termes soulignés s'annulent visiblement ensemble. Il reste deux exponentielles intempestives. Mais comme :

$$-e^{i\pi} + e^{-i\pi} = 0$$

elles s'annihilent aussi ensemble ! Au final :

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k},$$

ce qui termine ce calcul qui de toute façon ne peut pas ne pas être quelque peu laborieux. \square

Ainsi donc, les sommes partielles de la série de Fourier de cette fonction en dents de scie sont justement les sommes :

$$S_K(f_{\text{DS}})(\theta) = \sum_{1 \leq |k| \leq K} \frac{e^{ik\theta}}{k}$$

que nous voulons majorer uniformément par une constante telle que $\pi + 4$.

Sachant que cette fonction en dents de scie est manifestement \mathcal{C}^1 par morceaux — et même \mathcal{C}^∞ par morceaux —, on pourrait se dire qu'une application du Théorème de Dirichlet qui assure que sa série de Fourier converge vers la somme des demi-valeurs limites à gauche et à droite en tout point va produire une majoration uniforme, *mais cela ne suffit pas* !

En effet, la convergence ponctuelle (non uniforme !) :

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$$

d'une suite de fonctions $h_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vers une fonction $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ en tout point $x \in [0, 1]$ n'implique pas en général que la suite des fonctions h_n est uniformément bornée sur $[0, 1]$ (exercice : trouver un exemple).

Il nous faut donc d'autres arguments pour démontrer l'énoncé tant repoussé grâce auquel nous avons pu construire une fonction continue g_{BR} dont la série de Fourier diverge en un point :

Proposition 17.2. *Les sommes partielles de la série de Fourier de la fonction f_{DS} en dents de scie satisfont la majoration uniforme :*

$$\left| \sum_{1 \leq |k| \leq K} \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \pi + 4.$$

Démonstration. Comme promis, commençons par soumettre cette série de Fourier :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f_{\text{DS}}}(k) e^{ik\theta}$$

au procédé de sommation-accélération d'Abel avec bien sûr $0 \leq r < 1$:

$$\begin{aligned} f_{\text{DS}} * P_r(\theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} r^{|k|} \widehat{f_{\text{DS}}}(k) e^{ik\theta} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} r^{|k|} \frac{e^{ik\theta}}{k}. \end{aligned}$$

Grâce au fait que le noyau de Poisson possède de bonnes propriétés, on en déduit la majoration :

$$\begin{aligned} |f_{\text{DS}} * P_r(\theta)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{DS}}(\theta - t) P_r(t) \frac{dt}{2\pi} \right| \\ &\leq \max_{[-\pi, \pi]} |f_{\text{DS}}| \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} P_r \frac{dt}{2\pi}}_{\text{vaut 1!}} \\ &= \pi \cdot 1. \end{aligned}$$

Ceci montre donc que pour tout $0 \leq r < 1$ et pour tout $\theta \in \mathbb{T}$, on a la majoration uniforme :

$$\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} r^{|k|} \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \pi.$$

Grâce donc à une utilisation du noyau de Poisson — qui nous a permis de faire une excursion touristique intéressante —, nous sommes dans la situation de pouvoir appliquer l’assertion suivante.

Lemme 17.3. *Soit une série numérique $\sum_{k \geq 1} c_k$ de nombres complexes $c_k \in \mathbb{C}$. S’il existe une première constante positive A telle que :*

$$\sup_{0 \leq r < 1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k \right| \leq A < \infty$$

et s’il existe aussi une deuxième constante positive M telle que :

$$\sup_{k \geq 1} k |c_k| \leq M < \infty,$$

alors on a :

$$\sup_{K \geq 1} \left| \sum_{k=1}^K c_k \right| \leq A + 2M.$$

Démonstration. Donnons alors un nom à la sommation d’Abel de la série initiale :

$$A(r) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k$$

qui converge (exercice mental), et estimons sa proximité à la K -ème somme partielle que l’on veut majorer avec $K \gg 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K c_k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k &= \sum_{k=1}^K c_k - \sum_{k=1}^K c_k r^k - \sum_{k=K+1}^{\infty} c_k r^k \\ &= \sum_{k=1}^K (c_k - c_k r^k) - \sum_{k=K+1}^{\infty} c_k r^k. \end{aligned}$$

En abrégant aussi cette K -ème somme partielle au moyen de la notation :

$$C_K := \sum_{k=1}^K c_k,$$

on obtient donc grâce à l'inégalité triangulaire :

$$|C_K - A_r| \leq \sum_{k=1}^K |c_k| (1 - r^k) + \sum_{k=K+1}^{\infty} |c_k| r^k.$$

Or une factorisation élémentaire suivie des majorations triviales $r^l \leq 1$ donne :

$$\begin{aligned} 1 - r^k &= (1 - r) (1 + r + \dots + r^{k-1}) \\ &\leq (1 - r) \cdot k, \end{aligned}$$

inégalité que l'on reporte pour obtenir une inégalité comportant deux sommes :

$$|C_K - A_r| \leq (1 - r) \sum_{k=1}^K k |c_k| + \sum_{k=K+1}^{\infty} |c_k| r^k.$$

Utilisons à présent *deux fois* la deuxième hypothèse, d'abord sous la forme inchangée $k |c_k| \leq M$ pour la première somme, et ensuite sous une forme légèrement adaptée pour la deuxième somme :

$$|c_k| \leq \frac{M}{k} \leq \frac{M}{K} \quad (k \geq K+1),$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} |C_K - A_r| &\leq (1 - r) \sum_{k=1}^K M + \frac{M}{K} \sum_{k=K+1}^{\infty} r^k \\ &\leq (1 - r) K M + \frac{M}{K} \frac{r^{K+1}}{1 - r} \\ \text{[Majorer simplement } r^{K+1} \leq 1] &\leq (1 - r) K M + \frac{M}{K} \frac{1}{1 - r}. \end{aligned}$$

Maintenant, choisissons alors le rayon d'une manière très astucieuse pour que le membre de droite soit borné, ce qui est possible (youpi !) :

$$r := 1 - \frac{1}{K}.$$

On obtient en effet :

$$\begin{aligned} |C_K - A_{1-\frac{1}{K}}| &\leq \frac{1}{K} K M + \frac{M}{K} \frac{1}{\frac{1}{K}} \\ &= 2M. \end{aligned}$$

Pour conclure la démonstration, il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^K c_k \right| &= |C_K| \\ &\leq |A_{1-\frac{1}{K}}| + 2M \\ &\leq A + 2M, \end{aligned}$$

ce dernier majorant étant uniforme (et explicite !).

□

Ainsi donc une application de ce lemme à notre série :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{ik\theta}}{k}$$

que nous devons ré-écrire sous la forme d'une seule sommation :

$$\sum_{k \geq 1} \underbrace{\left(\frac{e^{-ik\theta}}{-k} + \frac{e^{ik\theta}}{k} \right)}_{=: c_k}$$

avec les deux constantes $A := \pi$ et $M := 2$ (exercice visuel) nous donne la majoration uniforme :

$$\left| \sum_{1 \leq |k| \leq K} \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \pi + 2 \cdot 2$$

annoncée. □

18. Équidistribution

Définition 18.1. Si x est un nombre réel, on notera :

$$[x] \equiv \text{Ent } x$$

la *partie entière* de x , à savoir le plus grand entier inférieur ou égal à x . En soustrayant à x sa partie entière, on obtient la *partie fractionnaire* de x :

$$\langle x \rangle := x - [x],$$

qui est un réel appartenant à $[0, 1[$.

Définition 18.2. Deux nombres réels $x, y \in \mathbb{R}$ sont dits *congrus modulo \mathbb{Z}* :

$$x \equiv y \pmod{\mathbb{Z}},$$

lorsque leur différence $x - y \in \mathbb{Z}$ est un entier.

Ainsi, tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est équivalent à un unique nombre réel appartenant à $[0, 1[$, qui est précisément sa partie fractionnaire $\langle x \rangle$. En fait, réduire un nombre modulo \mathbb{Z} , c'est oublier son chiffre avant la virgule.

Maintenant, étant donné un nombre réel $\gamma \in \mathbb{R}$, regardons la suite de ses multiples :

$$\gamma, \quad 2\gamma, \quad 3\gamma, \quad 4\gamma, \quad 5\gamma, \quad \dots,$$

Une question est alors de déterminer ce que devient cette suite lorsqu'on la réduit modulo \mathbb{Z} :

$$\langle \gamma \rangle, \quad \langle 2\gamma \rangle, \quad \langle 3\gamma \rangle, \quad \langle 4\gamma \rangle, \quad \langle 5\gamma \rangle, \quad \dots$$

Voici deux observations préliminaires.

Lemme 18.3. (i) Si $\gamma \in \mathbb{Q}$ est rationnel, seulement un nombre fini de $\langle k\gamma \rangle$ sont distincts.

(ii) Si $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est irrationnel, tous les nombres $\langle k\gamma \rangle$ sont mutuellement distincts.

Démonstration. En effet pour (i), lorsque :

$$\gamma = \frac{p}{q},$$

les q premiers termes de la suite sont :

$$\langle p/q \rangle, \quad \langle 2p/q \rangle, \quad \langle 3p/q \rangle, \quad \dots, \quad \langle (q-1)p/q \rangle, \quad \langle qp/q \rangle = 0,$$

et visiblement, la suite commence à se répéter elle-même, puisque :

$$\begin{aligned} \langle (q+1)p/q \rangle &= \langle 1 + p/q \rangle \\ &= \langle p/q \rangle, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Mieux encore, lorsque $\gamma = p/q \in \mathbb{Q}$ est rationnel l'Exercice 29 montre que la suite périodique de tous les points $\langle kp/q \rangle$ visite tous les points :

$$0, \quad \frac{1}{q}, \quad \frac{2}{q}, \quad \dots, \quad \frac{q-1}{q},$$

de manière essentiellement équilibrée, cf. ce qui va suivre.

Pour (ii), si au contraire il existait deux entiers distincts $k_1 \neq k_2$ tels que :

$$\langle k_1 \gamma \rangle = \langle k_2 \gamma \rangle,$$

ceci voudrait dire que :

$$k_1 \gamma - k_2 \gamma \in \mathbb{Z},$$

d'où γ est rationnel, contradiction. □

En fait, on peut même montrer à moindres frais que pour $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrationnel, la suite :

$$\langle k \gamma \rangle$$

est *dense* dans $[0, 1[$: c'est le théorème dit *de Kronecker*, mais ici, il s'agit de viser un énoncé plus profond d'après lequel la suite $\langle k \gamma \rangle$ visite en moyenne tout sous-intervalle $[a, b] \subset [0, 1[$ en proportion exacte à la mesure de cet intervalle.

Définition 18.4. Une suite de nombres réels :

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots \in [0, 1[$$

est dite *équidistribuée* lorsque, pour tous :

$$0 \leq a < b < 1$$

on a :

$$b - a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card} \{1 \leq k \leq n : \xi_k \in [a, b]\}}{n}.$$

Autrement dit, pour $n \gg 1$ grand, la proportion des n nombres $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ qui appartiennent à l'intervalle quelconque $[a, b]$ devient asymptotiquement égale au quotient :

$$\frac{\text{mesure}([a, b])}{\text{mesure}([0, 1])},$$

c'est-à-dire que les ξ_k se distribuent de manière équitable et homogène partout dans les sous-intervalles de l'intervalle complet $[0, 1[$.

En vérité, l'ordre dans lequel apparaissent les ξ_k est important, comme le montrent deux illustrations.

La suite :

$$0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots,$$

est équidistribuée (exercice), car elle se déplace dans l'intervalle de manière très régulière. Toutefois, étant donné une énumération quelconque :

$$(r_k)_{k \geq 1}$$

de tous les nombres rationnels $\mathbb{Q} \ni r_k$, si on perturbe artificiellement l'ordre d'apparition de ses termes par exemple comme :

$$\xi_k = \begin{cases} r_{k/2} & \text{lorsque } k \text{ est pair,} \\ 0 & \text{lorsque } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

alors il est clair qu'aucune équidistribution ne peut avoir lieu, puisque la 'moitié' de la suite se voit contrainte de visiter le seul point 0.

Théorème 18.5. *Pour tout nombre irrationnel :*

$$\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

la suite des parties fractionnaires :

$$\langle 1\gamma \rangle, \langle 2\gamma \rangle, \langle 3\gamma \rangle, \dots, \langle k\gamma \rangle, \dots,$$

est équidistribuée dans $[0, 1[$, et, en particulier, elle est dense.

Démonstration. Soient donc :

$$0 \leq a < b < 1,$$

et soit la fonction indicatrice :

$$\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$$

de l'intervalle $[a, b]$.

Si on étend cette fonction comme fonction 1-périodique sur \mathbb{R} , alors (exercice mental) :

$$\text{Card} \{1 \leq k \leq n : \langle k\gamma \rangle \in [a, b]\} = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[a,b]}(k\gamma),$$

et l'énoncé du théorème peut être reformulé comme la propriété de convergence :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[a,b]}(k\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^1 \mathbf{1}_{[a,b]}(x) dx}_{=b-a}.$$

Une telle reformulation élimine la difficulté technique de travailler avec des parties fractionnaires, et — plus en profondeur dans le cœur unitaire des mathématiques —, elle remet un problème d'Arithmétique entre les mains puissantes de l'Analyse.

L'énoncé crucial ci-dessous est en fait une généralisation de la propriété de convergence désirée, et sa démonstration — élégante dans sa manière d'emprunter un raccourci séduisant — repose sur une mobilisation de l'Analyse de Fourier !

Lemme 18.6. Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une fonction continue 2π -périodique, alors pour tout nombre irrationnel :

$$\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

on a la convergence :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx.$$

Démonstration. Divisons les arguments en deux parties.

Dans la première étape, vérifions la validité du résultat lorsque f est une fonction exponentielle quelconque :

$$e^{2i\pi\ell x}$$

avec :

$$\ell \in \mathbb{Z},$$

et dans ce cas nous allons être aidé par la simplification majeure qu'offre la contraction d'une sommation géométrique :

$$q + q^2 + \dots + q^n = q \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1).$$

Pour $\ell = 0$, à savoir pour $f = 1$, on a bien (sans limite) :

$$\frac{1}{n} [1 + \dots + 1] = 1 = \int_0^1 1 dx.$$

Pour $\ell \neq 0$ entier, puisque γ est par hypothèse irrationnel, on est certain que :

$$e^{2i\pi\ell\gamma} \neq 1,$$

et après sommation géométrique :

$$\frac{1}{n} [e^{2i\pi\ell\gamma} + e^{2i\pi 2\ell\gamma} + \dots + e^{2i\pi n\ell\gamma}] = e^{2i\pi\ell\gamma} \frac{1 - e^{2i\pi n\ell\gamma}}{1 - e^{2i\pi\ell\gamma}},$$

on peut majorer :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi k\ell\gamma} \right| &= \frac{1}{n} \left| e^{2i\pi\ell\gamma} \frac{1 - e^{2i\pi n\ell\gamma}}{1 - e^{2i\pi\ell\gamma}} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \underbrace{\frac{2}{|1 - e^{2i\pi\ell\gamma}|}}_{\text{constante}} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

donc on a bien :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi k\ell\gamma} \\ &= \int_0^1 e^{2i\pi\ell\gamma} dx, \end{aligned}$$

cette dernière intégrale étant connue pour s'annuler !

Ensuite, la propriété de convergence énoncée par le lemme étant manifestement linéaire par rapport à la fonction f , on en déduit instantanément que pour tout polynôme trigonométrique :

$$Q(x) = \sum_{\text{finie}} Q_\ell e^{2i\pi \ell x},$$

on a aussi :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q(k\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 Q(x) dx.$$

Pour conclure, la deuxième étape consiste simplement à mobiliser un raisonnement par densité.

En effet, grâce à la densité des polynômes trigonométriques comme ci-dessus dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ — conséquence du théorème de Fejér renormalisé de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ à \mathbb{R}/\mathbb{Z} —, étant donné une fonction continue 1-périodique quelconque f sur \mathbb{R} comme dans le lemme, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique $Q = Q_\varepsilon$ tel que :

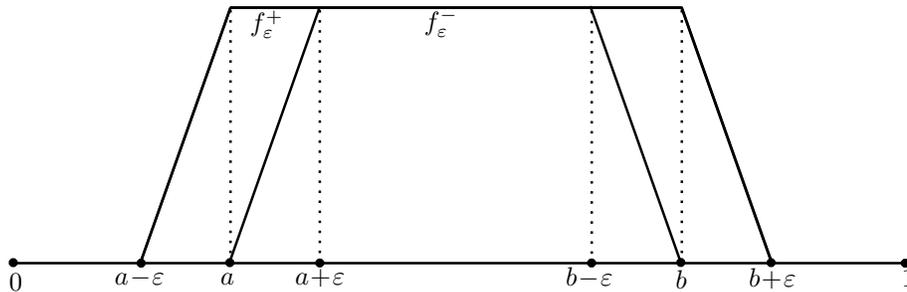
$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - Q(x)| \leq \varepsilon.$$

Mais alors on peut aisément estimer en insérant Q deux fois :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k\gamma) - \int_0^1 f(x) dx \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k\gamma) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q(k\gamma) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q(k\gamma) - \int_0^1 Q(x) dx + \int_0^1 Q(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \underbrace{|f(k\gamma) - Q(k\gamma)|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q(k\gamma) - \int_0^1 Q(x) dx \right|}_{\substack{\text{tend vers } 0 \\ \text{par ce qui précède}}} + \int_0^1 \underbrace{|Q(x) - f(x)|}_{\leq \varepsilon} dx \\ &\leq \varepsilon + (\text{Quantité} \rightarrow 0) + \varepsilon, \end{aligned}$$

et donc quand n est assez grand, le tout est $\leq 3\varepsilon$, ce qui conclut. □

Pour achever la démonstration du théorème d'équidistribution, sachant que la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$ n'est pas continue de telle sorte que le lemme ne s'y applique pas directement, c'est encore un raisonnement par densité qui va permettre de conclure.



En effet, choisissons deux fonctions 1-périodiques positives *continues* affines par morceaux :

$$f_\varepsilon^+ \quad \text{et} \quad f_\varepsilon^-$$

qui encadrent $\mathbf{1}_{[a,b]}$ — en supposant $0 < a < b < 1$, le cas où $a = 1$ étant laissé au lecteur — :

$$f_\varepsilon^- \leq \mathbf{1}_{[a,b]} \leq f_\varepsilon^+,$$

qui sont bornées par 1, et qui coïncident avec $\mathbf{1}_{[a,b]}$ excepté sur les deux intervalles :

$$]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cup]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$$

de longueur totale petite 2ε , de telle sorte que :

$$b-a-2\varepsilon \leq \int_0^1 f_\varepsilon^-(x) dx \leq \int_0^1 f_\varepsilon^+(x) dx \leq b-a+2\varepsilon.$$

Une sommation sur les inégalités d'encadrement donne alors :

$$\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_\varepsilon^-(k\gamma)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_\varepsilon^-} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[a,b]}(k\gamma) \leq \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_\varepsilon^+(k\gamma)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_\varepsilon^+},$$

mais puisque les deux fonctions f_ε^- et f_ε^+ sont continues, le lemme principal ci-dessus a déjà démontré que les extrémités gauche et droite tendent vers les intégrales correspondantes, et donc :

$$b-a-2\varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[a,b]}(k\gamma) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[a,b]}(k\gamma) \leq b-a+2\varepsilon,$$

et comme $\varepsilon > 0$ était arbitrairement petit, c'est que la limite existe bel et bien et qu'elle vaut :

$$b-a = \int_a^b \mathbf{1}_{[a,b]}(x) dx,$$

comme programmé par la reformulation effectuée plus haut. \square

Observons que le dernier résultat établi, est tout aussi vrai — avec une démonstration quasiment identique — pour la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{]a,b[}$ d'un intervalle ouvert.

Corollaire 18.7. *Pour toute fonction 1-périodique $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui est Riemann intégrable, on a encore la convergence :*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx.$$

Démonstration. La Riemann-intégrabilité de f s'exprime, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, par l'existence d'une subdivision $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ de $[a, b]$:

$$\Delta = \{0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{\nu-1} < a_\nu = 1\},$$

telle que, si on définit une fonction en escalier inférieure :

$$f_\Delta^{\text{esc}}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x = a_\lambda \text{ pour un unique } 1 \leq \lambda \leq \nu, \\ \inf_{[a_{\lambda-1}, a_\lambda]} f & \text{si } a_{\lambda-1} < x < a_\lambda \text{ pour un unique } 1 \leq \lambda \leq \nu, \end{cases}$$

ainsi qu'une fonction en escalier supérieure :

$$f_\Delta^{\Delta}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x = a_\lambda \text{ pour un unique } 1 \leq \lambda \leq \nu, \\ \sup_{[a_{\lambda-1}, a_\lambda]} f & \text{si } a_{\lambda-1} < x < a_\lambda \text{ pour un unique } 1 \leq \lambda \leq \nu, \end{cases}$$

alors la différence entre leurs intégrales est petite :

$$0 \leq \int_0^1 f_{\text{esc}}^{\Delta}(x) dx - \int_0^1 f_{\Delta}^{\text{esc}}(x) dx \leq \varepsilon,$$

et l'intégrale de f s'en trouve enfermée :

$$(18.8) \quad \int f_{\Delta}^{\text{esc}} \leq \int f \leq \int f_{\text{esc}}^{\Delta}.$$

Mais pour une fonction indicatrice d'intervalle (ouvert ou fermé), on a vu à la fin de la démonstration du théorème précédent que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{]a_{\lambda-1}, a_{\lambda}[}(k\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (a_{\lambda} - a_{\lambda-1}),$$

ceci étant vrai pour tout $1 \leq \lambda \leq \nu$, et si ensuite, on se rappelle que les fonctions en escalier sont combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices d'intervalles :

$$\begin{aligned} f_{\Delta}^{\text{esc}} &= \sum_{1 \leq \lambda \leq \kappa} \inf_{]a_{\lambda-1}, a_{\lambda}[} f \cdot \mathbf{1}_{]a_{\lambda-1}, a_{\lambda}[}(x) + \underbrace{f(0) \cdot \mathbf{1}_{\{0\}} + \cdots + f(1) \cdot \mathbf{1}_{\{1\}}}_{\text{d'intégrale} = 0}, \\ f_{\text{esc}}^{\Delta} &= \sum_{1 \leq \lambda \leq \kappa} \sup_{]a_{\lambda-1}, a_{\lambda}[} f \cdot \mathbf{1}_{]a_{\lambda-1}, a_{\lambda}[}(x) + \underbrace{f(0) \cdot \mathbf{1}_{\{0\}} + \cdots + f(1) \cdot \mathbf{1}_{\{1\}}}_{\text{d'intégrale} = 0}, \end{aligned}$$

on déduit (exercice) de toutes ces visions explicites agréables que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_{\Delta}^{\text{esc}}(k\gamma) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_{\Delta}^{\text{esc}}(x) dx, \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_{\text{esc}}^{\Delta}(k\gamma) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_{\text{esc}}^{\Delta}(x) dx. \end{aligned}$$

Pour terminer, en revenant à l'inégalité $f_{\Delta}^{\text{esc}} \leq f \leq f_{\text{esc}}^{\Delta}$, des sommations-moyennisations finies donnent :

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_{\Delta}^{\text{esc}}(x) dx & \leq & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k\gamma) & \leq & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_{\text{esc}}^{\Delta}(x) dx \\ \infty \leftarrow n \downarrow & & & & \downarrow n \rightarrow \infty \\ \int_0^1 f_{\Delta}^{\text{esc}}(x) dx & & & & \int_0^1 f_{\text{esc}}^{\Delta}(x) dx, \end{array}$$

puis en tenant compte de $\int (f_{\text{esc}}^{\Delta} - f_{\Delta}^{\text{esc}}) \leq \varepsilon$ et de (18.8), sachant que $\varepsilon > 0$ était arbitraire, cet impitoyable pressoir vertical extrait en son centre la liqueur substantifique terminale :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx. \quad \square$$

Notons que ce résultat n'est pas satisfait par les fonctions plus générales qui sont intégrables au sens de Lebesgue, comme le montre la fonction indicatrice :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Z} + \gamma \mathbb{Z}},$$

toujours avec $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrationnel, fonction 1-périodique nulle presque partout qui montre la *non-coïncidence* :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\mathbb{Z} + \gamma \mathbb{Z}}(k\gamma) = 1 \neq 0 = \int_0^1 \mathbf{1}_{\mathbb{Z} + \gamma \mathbb{Z}}.$$

Voici maintenant l'interprétation du lemme et de son corollaire, en termes de ce qu'on appelle des *systèmes dynamiques*. Ici, le contexte est celui du cercle unité centré en 0 dans \mathbb{C} paramétré par un angle θ . Or une rotation d'angle $2\pi\gamma$:

$$\rho: \theta \longmapsto \theta + 2\pi\gamma$$

envoie le cercle unité sur lui-même.

Comment cette action-rotation évolue-t-elle avec le temps ?

En d'autres termes, comment les rotations itérées qui sont les compositions :

$$\rho, \rho^{\circ 2}, \rho^{\circ 3}, \dots, \rho^{\circ k}, \dots,$$

et sont elles-mêmes des rotations :

$$\rho^{\circ k} = \underbrace{\rho \circ \dots \circ \rho}_{k \text{ fois}}: \theta \longmapsto \theta + 2\pi k\gamma,$$

se comportent-elles en moyenne lorsque $k \rightarrow \infty$?

À toute fonction Riemann-intégrable, on peut associer l'effet par composition de ces rotations itérées :

$$f(\rho(\theta)), \quad f(\rho^{\circ 2}(\theta)), \quad f(\rho^{\circ 3}(\theta)), \quad \dots, \quad f(\rho^{\circ k}(\theta)), \quad \dots,$$

où bien entendu pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f(\rho^{\circ k}(\theta)) = f(\theta + 2\pi k\gamma).$$

Dans ce contexte paradigmatiquement simple, le *théorème ergogique de Birkhoff* pour ce système dynamique stipule que la '*moyenne temporelle*' :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\rho^{\circ k}(\theta))$$

existe pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et est égale à la '*moyenne spatiale*' :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta,$$

toutes les fois que $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est *irrationnel*. Bien entendu, cette assertion n'est autre qu'une reformulation du corollaire qui précède, une fois qu'on a effectué le changement de variable :

$$\theta = 2\pi x.$$

Si l'on revient au problème des suites équiréparties, on observe que la démonstration du théorème précédent fournit aussi le résultat suivant.

Théorème 18.9. [Critère d'équidistribution de Weyl] Une suite de nombres réels de l'intervalle $[0, 1[$:

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots,$$

est équilibrée si et seulement si, pour tout entier non nul $\ell \in \mathbb{Z}^*$, on a :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi \ell \xi_k}$$

Démonstration. Une direction de cette condition nécessaire et suffisante a en fait déjà été rigoureusement établie, tandis que l'autre direction réciproque (aisée) est proposée dans l'Exercice 31. \square

19. Une fonction continue nulle part dérivable (avec les moyennes retardées)

Dans cette section, nous exhibons une fonction continue qui n'admet de dérivée en aucun point.

Théorème 19.1. *Étant donné un nombre réel $0 < \alpha < 1$, la fonction :*

$$f_\alpha(\theta) = f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} e^{i2^n \theta}$$

définie par une série normalement — donc uniformément — convergente, est continue mais elle n'admet de dérivée en aucun point $\theta \in \mathbb{R}$.

Intuitivement, la série dérivée terme à terme :

$$i \sum_n \underbrace{2^{n(1-\alpha)}}_{\rightarrow \infty} e^{i2^n \theta}$$

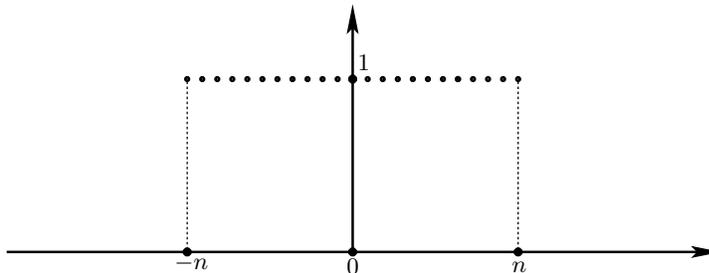
a de très fortes chances de ne pas converger, puisque le module de son terme général tend vers l'infini ! Toutefois, cette observation n'est pas une démonstration, et c'est afin de réaliser réellement une telle divergence qu'apparaît une somme d'exponentielles $e^{ik\theta}$ qui est très *lacunaire*, au sens où seules les fréquences $k = 2^n$ qui sont des puissances de 2 sont présentes.

Démonstration. La preuve raconte d'une manière fort éloquente trois méthodes différentes de sommation d'une série de Fourier.

Premièrement, la méthode ordinaire de convergence des sommes partielles d'une fonction $g \in L^1(\mathbb{T})$:

$$S_n(g)(\theta) = \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{g}(k) e^{ik\theta}$$

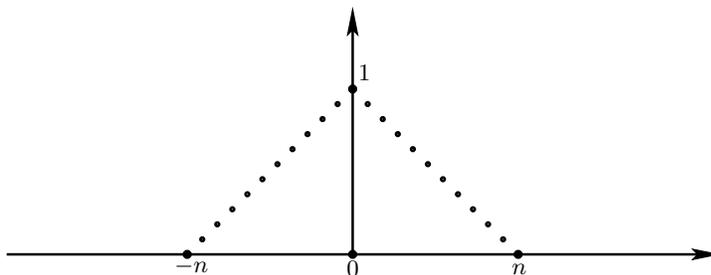
se représente graphiquement en plaçant des points à hauteur 1 au dessus des entiers k compris entre $-n$ et $+n$.



Deuxièmement, la ‘césarorisation’ de $S_n(f)$ due à Fejér :

$$\begin{aligned}\sigma_n(g)(\theta) &= \frac{S_0(g)(\theta) + S_1(g)(\theta) + \cdots + S_{n-1}(g)(\theta)}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{|k| \leq \ell} \widehat{g}(k) e^{ik\theta} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{|k| \leq n} (n - |k|) \widehat{g}(k) e^{ik\theta} \\ &= \sum_{k=-n}^{k=+n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{g}(k) e^{ik\theta}\end{aligned}$$

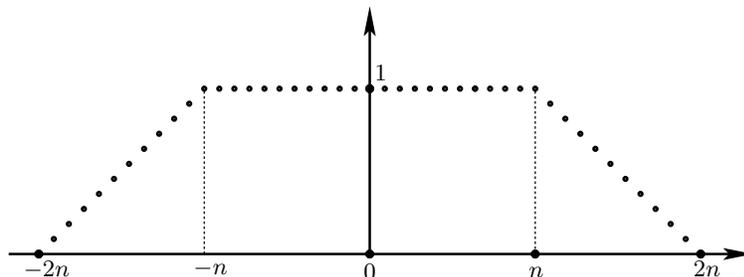
possède une allure graphique symétrique de forme triangulaire.



Troisièmement et dernièrement, la *sommation par moyennes retardées* :

$$\Delta_n(g) = 2\sigma_{2n}(g) - \sigma_n(g)$$

possède une allure graphique symétrique de forme trapézoïdale :



car l'on vérifie (exercice) que :

$$\Delta_n(g)(\theta) = \sum_{|k| \leq n} \widehat{g}(k) e^{ik\theta} + \sum_{n+1 \leq |k| \leq 2n} \left(2 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{g}(k) e^{ik\theta}.$$

Ces sommations par moyennes retardées $\Delta_n(g)$ cumulent les avantages des sommes de Fourier $S_n(g)$ et de Cesàro-Fejér $\sigma_n(g)$: elles conservent la propriété d'être représentées par des ‘bons noyaux’, positifs, centrés en 0 et de masse constamment égale à 1, tandis que pour les séries qui ont des propriétés lacunaires, elles redonnent essentiellement les sommes partielles simples de Fourier.

En particulier pour notre série trigonométrique lacunaire :

$$f = f_\alpha(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} e^{i2^n \theta},$$

en observant par convergence uniforme que, pour $k \leq -1$:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} e^{i2^n \theta} \right) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(2^n - k)\theta} \frac{d\theta}{2\pi}, \end{aligned}$$

car $2^n - k \geq 1$, et que, pour des entiers $n \equiv 2^n$ qui sont puissances de 2, on a (exercice) :

$$(19.2) \quad \Delta_{2^n}(f)(\theta) = S_{2^n}(f)(\theta) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k\alpha}} e^{i2^k \theta}.$$

Lemme 19.3. *La famille des noyaux de Fejér :*

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \sum_{|k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n} \right) e^{ikt} \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right]^2 \end{aligned}$$

possède des dérivées qui satisfont :

$$|F'_n(t)| \leq n(2n+1),$$

et simultanément aussi :

$$|F'_n(t)| \leq \frac{1}{t^2} \left(\pi^2 + \frac{\pi^3}{2} \right),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. En effet, dans l'expression explicite :

$$F_n(t) = \sum_{|k| \leq n} \underbrace{\left(1 - \frac{|k|}{n} \right)}_{|\cdot| \leq 1} e^{ikt},$$

les coefficients-poids sont tous ≤ 1 en valeur absolue, donc quand on dérive terme à terme cette somme finie :

$$F'_n(t) = \sum_{|k| \leq n} \underbrace{ik \left(1 - \frac{|k|}{n} \right)}_{|\cdot| \leq n} e^{ikt},$$

et quand on majore sans finesse par $\leq n$ le module de ces nouveaux coefficients-poids, on obtient bien, vu qu'il y a $2n+1$ termes :

$$|F'_n(t)| \leq n(2n+1).$$

Deuxièmement, une dérivation de l'autre expression (close) :

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \frac{\sin^2\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)},$$

donne (exercice visuel) :

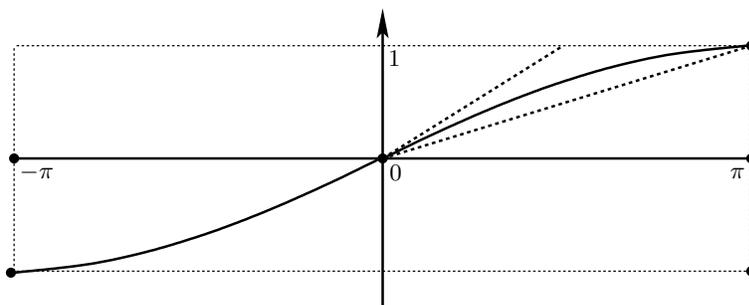
$$F'_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right) \cos\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{n} \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right) \sin^2\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin^3\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Maintenant, dans le deuxième numérateur à droite, on décompose le carré :

$$\sin^2\left(\frac{n}{2}t\right) = \sin\left(\frac{n}{2}t\right) \cdot \sin\left(\frac{n}{2}t\right),$$

et on majore dans un premier temps en négligeant au numérateur les deux cosinus ≤ 1 et aussi deux sinus numérateuriaux sur trois tous ≤ 1 en valeur absolue :

$$|F'_n(t)| \leq \frac{1}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{1}{n} \frac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin^3\left(\frac{t}{2}\right)}.$$



Ensuite, la fonction impaire :

$$\begin{aligned} [-\pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

étant en-dessous de sa tangente d'équation $t \longmapsto \frac{t}{2}$ sur $[0, \pi]$, et au-dessus de sa corde d'équation $t \longmapsto \frac{1}{\pi}t$, à savoir satisfaisant l'encadrement classique :

$$\frac{1}{\pi}|t| \leq \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{2}|t| \quad (|t| \leq \pi),$$

on poursuit et on termine la majoration par :

$$\begin{aligned} |F'_n(t)| &\leq \frac{\pi^2}{t^2} + \frac{1}{n} \frac{n_0}{2} |t| \frac{\pi^3}{|t|^3} \\ &= \frac{1}{t^2} \left(\pi^2 + \frac{\pi^3}{2} \right), \end{aligned}$$

comme annoncé. □

Supposons maintenant en raisonnant par contradiction que la série trigonométrique lacunaire :

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} e^{i2^n \theta}$$

admette une dérivée en un certain point $\theta_0 \in \mathbb{T}$ du cercle unité.

Proposition 19.4. *Étant donné une fonction $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ continue sur le cercle, si sa dérivée :*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(\theta_0 + t) - g(\theta_0)}{t} =: g'(\theta_0),$$

existe en un certain point $\theta_0 \in \mathbb{T}$, alors en ce même point les dérivées des sommes de Fejér sont contrôlées comme :

$$\sigma_n(g)'(\theta_0) = O(\log n),$$

et de même pour les sommes retardées :

$$\Delta_n(g)'(\theta_0) = O(\log n).$$

Démonstration. Comme $\sigma_n(g)$ est le résultat de la convolution de f avec les noyaux de Fejér :

$$\sigma_n(g)(\theta_0) = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(\theta_0 - t) g(t) \frac{dt}{2\pi},$$

une dérivation sous le signe somme donne :

$$\begin{aligned} \sigma_n'(g)(\theta_0) &= \int_{-\pi}^{\pi} F_n'(\theta_0 - t) g(t) \frac{dt}{2\pi} \\ &= F_n' * g(\theta_0) \\ &= g * F_n'(\theta_0) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} F_n'(t) g(\theta_0 - t) \frac{dt}{2\pi}, \end{aligned}$$

car l'opérateur $*$ de convolution est commutatif. Mais puisque F_n est 2π -périodique :

$$0 = \left[\frac{F_n(t)}{2\pi} \right]_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} F_n'(t) \frac{dt}{2\pi}$$

on a par soustraction astucieuse :

$$\sigma_n(g)'(\theta_0) = \int_{-\pi}^{\pi} F_n'(t) [g(\theta_0 - t) - g(\theta_0)] \frac{dt}{2\pi}.$$

Maintenant, g étant supposée dérivable en $\theta = \theta_0$, il existe une constante $C_0 > 0$ finie telle que (exercice) :

$$|g(\theta_0 - t) - g(\theta_0)| \leq C_0 |t|,$$

pour tout $|t| \leq \pi$. Il en découle instantanément que :

$$|\sigma_n(g)'(\theta_0)| \leq C_0 \int_{-\pi}^{\pi} |F_n'(t)| \cdot |t| \frac{dt}{2\pi}.$$

Alors une application intelligente des deux inégalités du lemme qui précède permet de majorer en découpant l'intégrale :

$$\begin{aligned} |\sigma_n(g)'(\theta_0)| &\leq C_0 \int_{|t| \leq \frac{1}{n}} |F_n'(t)| \cdot |t| \frac{dt}{2\pi} + C_0 \int_{\frac{1}{n} \leq |t| \leq \pi} |F_n'(t)| \cdot |t| \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq C_0 n(2n+1) \int_{|t| \leq \frac{1}{n}} |t| \frac{dt}{2\pi} + C_0 \left(\pi^2 + \frac{\pi^3}{2} \right) \int_{\frac{1}{n} \leq |t| \leq \pi} \frac{1}{|t|} \frac{dt}{2\pi} \\ &= \frac{C_0}{2\pi} \frac{n(2n+1)}{n^2} + C_0 \left(\pi^2 + \frac{\pi^3}{2} \right) \frac{2}{2\pi} \left[\log \pi - \log \frac{1}{n} \right] \\ &\leq \text{constante} + \text{constante} \cdot \log n \\ &= O(\log n). \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}\Delta_n(g)'(\theta_0) &= 2\sigma_{2n}(g)'(\theta_0) - \sigma_n(g)'(\theta_0) \\ &= O(\log n) + O(\log n) \\ &= O(\log n),\end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Qui plus est, on a aussi pour la même raison :

$$\Delta_{2n}(g)'(\theta_0) - \Delta_n(g)'(\theta_0) = O(\log n).$$

Maintenant, en revenant à notre série trigonométrique lacunaire :

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} e^{i2^n \theta},$$

et en prenant dans ce qui vient d'être obtenu :

$$n := 2^{n-1},$$

on obtient en supposant (par l'absurde) que $f = g$ est dérivable en point θ_0 :

$$|\Delta_{2^n}(f)'(\theta_0) - \Delta_{2^{n-1}}(f)'(\theta_0)| \leq \text{constante} \cdot \log(2^n).$$

Mais par ailleurs, le fait que la série soit lacunaire assure, en revenant à (19.2), que cette soustraction ne consiste qu'en un seul terme pour tout θ :

$$\Delta_{2^n}(f)(\theta) - \Delta_{2^{n-1}}(f)(\theta) = \frac{1}{2^{n\alpha}} e^{i2^n \theta},$$

dont la dérivée en $\theta = \theta_0$ vaut manifestement :

$$\Delta_{2^n}(f)'(\theta_0) - \Delta_{2^{n-1}}(f)'(\theta_0) = i 2^{n(1-\alpha)} e^{i2^n \theta_0},$$

et donc son module :

$$|\Delta_{2^n}(f)(\theta_0) - \Delta_{2^{n-1}}(f)(\theta_0)| = 2^{n(1-\alpha)}$$

ne peut absolument pas être majoré par :

$$\text{constante} \cdot \log(2^n)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, puisque $0 < \alpha < 1$, ce qui est la contradiction conclusive. □

20. Une fonction continue nulle part dérivable (d'après Lebesgue)

La première fonction continue sans dérivée découverte par Weierstrass :

$$W(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n x),$$

avec $0 < a < 1$ et $b \geq 2$ entier satisfaisant :

$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2},$$

ne convient pas pour un enseignement élémentaire, ce qui a conduit Lebesgue à rechercher, en 1939, à améliorer cet exemple en simplifiant au maximum les arguments et en réduisant les connaissances requises au strict minimum. L'exemple de Lebesgue est inspiré des développements en série de Fourier lacunaires, et il possède l'avantage de montrer que des

fonctions non dérivables peuvent se présenter au cours d'un calcul d'allure tout à fait normale. Nous allons détailler très scrupuleusement chaque étape du raisonnement afin d'en assurer l'éléментарité.

Théorème 20.1. *La fonction :*

$$L(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin(2^{n^2} x)$$

est continue 2π -périodique sur \mathbb{R} par convergence normale, mais elle n'admet de dérivée en aucun point $x \in \mathbb{R}$, à savoir plus précisément, en tout point $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite :

$$(h_m)_{m \geq 1} \longrightarrow 0$$

qui tend vers zéro telle que :

$$\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{L(x + h_m) - L(x)}{h_m} \right|.$$

Démonstration. Pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque il s'agit donc d'examiner la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(x + h) - L(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\sin(2^{n^2}(x + h)) - \sin(2^{n^2} x)}{h}.$$

La première astuce simplificatrice de Lebesgue consiste à choisir des $h \in \mathbb{R}$ petits et suffisamment spéciaux pour annihiler tous les termes de cette somme de quotients différentiels, à partir d'un certain ordre $m + 1 \geq 2$ arbitraire, et nous prétendons (avec Lebesgue) que cela est possible avec par exemple :

$$\begin{aligned} h &:= h_m \\ &:= \frac{\pi}{2^{m^2+1}}, \end{aligned}$$

sachant qu'un autre choix similaire suivra ultérieurement pour compléter l'argumentation :

$$\begin{aligned} h &:= h'_m \\ &:= \frac{3\pi}{2^{m^2+1}}, \end{aligned}$$

Ainsi donc avec $h = h_m$, dans la somme infinie que l'on découpe :

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^m + \sum_{n=m+1}^{\infty}$$

tous les quotients différentiels de la deuxième somme-reste infinie pour $n \geq m + 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\sin\left(2^{n^2}\left(x + \frac{\pi}{2^{m^2+1}}\right)\right) - \sin(2^{n^2} x)}{h_m} &= \frac{\sin\left(2^{n^2} x + \overbrace{\frac{2^{n^2}}{2^{m^2+1}} \pi}^{\geq 2}\right) - \sin(2^{n^2} x)}{h_m} \\ &= 0 \end{aligned}$$

disparaissent simplement grâce au fait que $y \mapsto \sin y$ est 2π -périodique, et donc le quotient à examiner se réduit à :

$$\frac{L(x + h_m) - L(x)}{h_m} = \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^n} \frac{\sin(2^{n^2}(x + h_m)) - \sin(2^{n^2} x)}{h_m}.$$

De même, on vérifie aisément que l'on a aussi pour les mêmes raisons la troncature similaire :

$$\frac{L(x + h'_m) - L(x)}{h'_m} = \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^n} \frac{\sin(2^{n^2}(x + h'_m)) - \sin(2^{n^2}x)}{h'_m}.$$

Maintenant, la seconde idée qui était implicitement cachée dans les 2^{n^2} , c'est de faire en sorte que dans ces sommes finies :

$$\sum_{n=1}^m = \sum_{n=1}^{m-1} + m\text{-ème terme},$$

le dernier terme non nul surpasse considérablement la somme de tous ceux qui le précèdent afin de faire diverger à souhait les quotients différentiels.

Plus précisément :

$$\frac{L(x + h_m) - L(x)}{h_m} = \underbrace{\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{2^n} \frac{\sin(2^{n^2}(x + h_m)) - \sin(2^{n^2}x)}{h_m}}_{\text{somme à contrôler}} + \underbrace{\frac{1}{2^m} \frac{\sin(2^{m^2}x + \frac{\pi}{2}) - \sin(2^{m^2}x)}{\frac{\pi}{2^{m^2+1}}}}_{\text{dernier terme à faire diverger}},$$

avec des expressions similaires lorsque h_m est remplacé par h'_m .

Puisqu'il s'agit de contrôler une somme $\sum_{n=1}^{m-1}$ de quotients du type :

$$\frac{\sin(a(x+h)) - \sin(ax)}{h},$$

un énoncé auxiliaire élémentaire sera le bienvenu.

Lemme 20.2. *Étant donné $a > 0$ fixé, pour tout x et tout $0 < h \leq \frac{2}{a}$, on a :*

$$\left| \frac{\sin(a(x+h)) - \sin(ax)}{h} \right| \leq 2a.$$

Démonstration. La formule :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

permet de développer :

$$\begin{aligned} \sin(a(x+h)) - \sin(ax) &= \sin(ax) \cos(ah) + \cos(ax) \sin(ah) - \sin(ax) \\ &= \cos(ax) \sin(ah) + \sin(ax) [\cos(ah) - 1]. \end{aligned}$$

Ensuite, les majorations standard :

$$\begin{aligned} |\sin y| &\leq |y|, \\ |\cos y - 1| &\leq \frac{y^2}{2}, \end{aligned}$$

valables pour tout $y \in \mathbb{R}$ (exercice de révision) permettent de déduire :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin(ax+ah) - \sin(ax)}{h} \right| &\leq 1 \cdot |ah| + \frac{1 \cdot \frac{(ah)^2}{2}}{|h|} \\ &= a + \frac{a^2}{2} |h| \\ &\leq 2a, \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Pour les termes de la somme à contrôler avec $1 \leq n \leq m-1$, on a :

$$a = 2^{n^2},$$

et alors :

$$h = \frac{\pi}{2^{m^2+1}}$$

satisfait bien $0 < h \leq \frac{2}{a}$ (exercice mental), donc le lemme s'applique pour majorer la somme en question :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{2^n} \frac{\sin(2^{n^2}(x+h_m)) - \sin(2^{n^2}x)}{h_m} \right| &\leq \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{2^n} (2 \cdot 2^{n^2}) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{m-1} 2^{n^2-n} \\ &= 2 \left[2^0 + 2^{2^2-2} + 2^{2^3-3} + \dots + 2^{(m-1)^2-(m-1)} \right] \\ &\leq 2 \sum_{k=0}^{(m-1)^2-(m-1)} 2^k \\ &= 2 \cdot 2^{(m-1)^2-(m-1)+1} \\ &= 2^{m^2-3m+4}. \end{aligned}$$

En revenant donc au quotient différentiel laissée en chemin plus haut :

$$\begin{aligned} \frac{L(x+h_m) - L(x)}{h_m} &= O(2^{m^2-3m+4}) + \underbrace{\frac{1}{2^m} \frac{\sin\left(2^{m^2}x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(2^{m^2}x)}{\frac{\pi}{2^{m^2+1}}}}_{\text{dernier terme}} \\ &= O(2^{m^2-3m+4}) + \underbrace{\frac{2^{m^2-m+1}}{\pi} \left[\sin\left(2^{m^2}x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(2^{m^2}x) \right]}_{\substack{\text{dominant} \\ \text{lorsque } m \rightarrow \infty} \text{ assurer que cela soit non nul}}, \end{aligned}$$

il suffirait d'assurer que le terme entre crochets soit uniformément non nul pour que la domination de 2^{m^2-m+1} contraigne ce quotient à diverger vers l'infini, comme cela a été annoncé.

Cependant, ce terme entre crochets :

$$\sin\left(2^{m^2}x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(2^{m^2}x) = \underbrace{\cos(2^{m^2}x)}_{=:\alpha_m} - \underbrace{\sin(2^{m^2}x)}_{=:\beta_m},$$

n'est pas forcément uniformément minoré, en valeur absolue :

$$|\alpha_m - \beta_m|.$$

Mais c'est là qu'intervient l'idée anticipée d'effectuer aussi les constructions avec l'autre suite :

$$h'_m = \frac{3\pi}{2^{m^2+1}},$$

puisque alors l'autre terme entre crochets afférent :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{L}(x + h'_m) - \mathbb{L}(x)}{h'_m} &= O(2^{m^2-3m+4}) + \frac{1}{2^m} \frac{\sin\left(2^{m^2}x + \frac{3\pi}{2}\right) - \sin(2^{m^2}x)}{\frac{3\pi}{2^{m^2+1}}} \\ &= O(2^{m^2-3m+4}) + 2^{m^2-m+1} \frac{1}{3\pi} \left[\sin\left(2^{m^2}x + \frac{3\pi}{2}\right) - \sin(2^{m^2}x) \right], \end{aligned}$$

devient égal à :

$$-\cos(2^{m^2}x) - \sin(2^{m^2}x) = -\alpha_m - \beta_m.$$

Lemme 20.3. Deux nombres réels α et β contraints par la relation :

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

satisfont toujours :

$$\max(|\alpha - \beta|, |\alpha + \beta|) \geq 1.$$

Démonstration. En effet :

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta|^2 + |\alpha + \beta|^2 &= \alpha^2 - 2\underline{\alpha\beta}_\circ + \beta^2 + \alpha^2 + 2\underline{\alpha\beta}_\circ + \beta^2 \\ &= 2, \end{aligned}$$

donc l'une au moins des valeurs absolues est ≥ 1 . □

Ainsi, au moins une des deux suites de quotients différentiels :

$$\left| \frac{\mathbb{L}(x + h_m) - \mathbb{L}(x)}{h_m} \right| = \frac{2^{m^2-m+1}}{\pi} [\alpha_m - \beta_m] + O(2^{m^2-3m+4}),$$

ou :

$$\left| \frac{\mathbb{L}(x + h'_m) - \mathbb{L}(x)}{h'_m} \right| = \frac{2^{m^2-m+1}}{\pi} [-\alpha_m - \beta_m] + O(2^{m^2-3m+4}),$$

diverge vers ∞ lorsque $m \rightarrow \infty$, fin de la démonstration ! □

21. Exercices

Exercice 1. Soit $f \in L^1(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ une fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} Lebesgue-intégrable.

(a) Montrer qu'avec ses coefficients de Fourier $\widehat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi}$, la série de Fourier de f :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$$

peut se ré-écrire sous la forme :

$$\widehat{f}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} [\widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k)] \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} i [\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)] \sin k\theta.$$

(b) Lorsque f est paire, montrer que $\widehat{f}(k) = \widehat{f}(-k)$ pour tout $k \geq 0$, de telle sorte qu'on obtient une série de cosinus.

(c) Lorsque f est impaire, montrer que $\widehat{f}(k) = -\widehat{f}(-k)$ pour tout $k \geq 0$, de telle sorte qu'on obtient une série de sinus.

(d) Lorsque $f(\theta + \pi) = f(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que $\widehat{f}(k) = 0$ pour $k \in \mathbb{Z}$ impair.

(e) Montrer que $f \in L^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ est à valeurs dans \mathbb{R} lorsque, et seulement lorsque :

$$\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{f}(-k) \quad (\forall k \in \mathbb{Z}).$$

Exercice 2. Soient $f, g, h \in L^1(\mathbb{T})$ trois fonctions Lebesgue-intégrables sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Montrer l'associativité du produit de convolution :

$$f * (g * h) = (f * g) * h.$$

Exercice 3. Soit la fonction 2π -périodique impaire définie sur $[0, \pi]$ par $\theta(\pi - \theta)$.

- (a) Dessiner le graphe de f .
 (b) Calculer les coefficients de Fourier de f .
 (c) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\theta) = \frac{8}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k^3}.$$

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(\theta) := |\theta|$.

- (a) Dessiner le graphe de f .
 (b) Montrer, en les calculant, que les coefficients de Fourier de f valent :

$$\widehat{f}(k) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{pour } k = 0, \\ \frac{-1+(-1)^k}{\pi k^2} & \text{lorsque } k \in \mathbb{Z}^*. \end{cases}$$

- (c) Écrire la série de Fourier de f en termes de sinus et de cosinus.
 (d) Au point $\theta = 0$, en déduire les deux formules d'Euler :

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 5. Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, avec $\delta > 0$, on considère la fonction :

$$f(\theta) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \delta \leq |\theta| \leq \pi, \\ 1 - \frac{|\theta|}{\delta} & \text{lorsque } 0 \leq |\theta| \leq \delta. \end{cases}$$

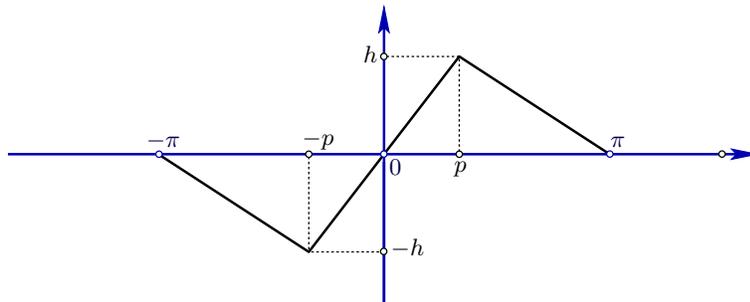
- (a) Dessiner le graphe de f .
 (b) Montrer que :

$$f(\theta) = \frac{\delta}{2\pi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(n\delta)}{n^2 \pi \delta} \cos(n\theta) \quad (\forall \theta \in [-\pi, \pi]).$$

Exercice 6. Soient deux réels positifs $0 < p < \pi$ et $h > 0$, et soit, sur le segment $[0, \pi]$, la fonction *corde pincée* définie par :

$$f(\theta) := \begin{cases} \frac{\theta h}{p} & \text{lorsque } 0 \leq \theta \leq p, \\ \frac{h(\pi - \theta)}{\pi - p} & \text{lorsque } p \leq \theta \leq \pi, \end{cases}$$

que l'on prolonge ensuite par imparité sur $[-\pi, 0]$, puis par 2π -périodicité sur \mathbb{R} tout entier.



Montrer que l'on a, pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$:

$$f(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\theta),$$

avec :

$$A_m := \frac{2h}{m^2} \frac{\sin(mp)}{p(\pi-p)} \quad (\forall m \geq 1).$$

Exercice 7. (a) Effectuer la démonstration complète du Théorème 5.5.

(b) En appliquant le Lemme de Riemann-Lebesgue, montrer qu'on a en fait, lorsque $|k| \rightarrow \infty$:

$$\hat{f}(k) = o\left(\frac{1}{|k|^\ell}\right).$$

Exercice 8. Soit la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ définie par :

$$a_k := \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{lorsque } k \geq 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Vérifier que $(a_k) \in \ell_2(\mathbb{Z})$, mais qu'il n'existe aucune fonction intégrable dont les coefficients de Fourier sont égaux aux a_k .

Exercice 9. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction continue $f_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ avec $|f_n| \leq 1$ telle que :

$$S_n(f_n)(0) \geq c \log n.$$

Indication: La fonction g_n égale à 1 là où le noyau de Dirichlet D_n est > 0 et égale à -1 là où D_n est < 0 conviendrait, si elle n'était pas discontinue. Approximer alors g_n par une fonction continue appropriée f_n .

Exercice 10. (a) Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ réel non entier, la série de Fourier de la fonction définie sur $[0, 2\pi]$ par :

$$\theta \mapsto \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{i(\pi-\theta)\alpha}$$

est égale à :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n+\alpha}.$$

(a) Appliquer l'identité de Plancherel pour en déduire que :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi\alpha)^2}.$$

Exercice 11. (a) Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Indication: Introduire la fonction f définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(\theta) := |\theta|$, calculer ses coefficients de Fourier, et appliquer l'identité de Plancherel.

(b) Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Indication: Utiliser la fonction 2π -périodique impaire g définie sur $[0, \pi]$ par $g(\theta) := \theta(\pi - \theta)$.

Exercice 12. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ un nombre complexe non égal à un entier.

(a) Calculer les coefficients de Fourier et la série de Fourier de la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(\theta) := \cos(\alpha\theta)$.

(b) Obtenir la formule suivante due à Euler :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha \tan(\alpha\pi)}.$$

(c) Pour $u \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$, montrer que :

$$\cotan u = \frac{1}{u} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u}{u^2 - n^2\pi^2}.$$

(d) Pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, montrer que :

$$\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)} = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2}.$$

(e) Pour $0 < \alpha < 1$, montrer que :

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Indication: Découper l'intégrale \int_0^{∞} en $\int_0^1 + \int_1^{\infty}$, puis effectuer le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ dans la seconde intégrale. Ensuite, les deux intégrales étant de la forme :

$$\int_0^1 \frac{t^{\gamma-1}}{1+t} dt \quad (0 < \gamma < 1),$$

montrer que cette dernière vaut :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+\gamma}.$$

Enfin, pour conclure, appliquer la question (d).

Exercice 13. Au-delà de ce qui précède, l'objectif est de trouver une formule générale pour les *sommes d'Euler* :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}},$$

où $m \geq 1$ est un entier quelconque. Le cas des puissances impaires, pour lequel aucune formule close n'est connue, ouvre sur de nombreux problèmes qui excitent toujours la sagacité des mathématiciens contemporains.

On définit les *nombre de Bernoulli* comme apparaissant dans le développement en série entière de :

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

(a) Vérifier par un calcul manuel que :

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0.$$

(b) Obtenir la formule de récurrence suivante pour $n \geq 1$:

$$B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k.$$

(c) En écrivant :

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n,$$

montrer que $B_n = 0$ pour tout entier impair $n \geq 3$.

(d) Montrer que :

$$z \cotan z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

(e) Soit la fonction zêta définie pour $s > 1$ réel par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

En utilisant l'Exercice 12 qui précède, montrer que :

$$x \cotan x = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\zeta(2m)}{\pi^{2m}} x^{2m}.$$

(f) Conclure en obtenant la formule explicite générale suivante, valable pour un entier $m \geq 1$ quelconque :

$$2\zeta(2m) = (-1)^{m+1} \frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!} B_{2m}.$$

Exercice 14. [Cesàro, Abel, Tauber] (a) Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} c_k =: \ell$ converge vers une limite finie, montrer qu'elle est aussi *Abel-sommable*, i.e. qu'on a aussi $\ell = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k$. Indication: Vérifier qu'on peut supposer $\ell = 0$. Avec :

$$s_k := c_1 + \dots + c_k \quad (k \geq 1),$$

montrer, pour tout $K \geq 1$, l'identité d'Abel :

$$\sum_{k=1}^K c_k r^k = (1-r) \sum_{k=1}^K s_k r^k + s_K r^{K+1}.$$

Laisser s'envoler $K \rightarrow \infty$ pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r) \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.$$

Enfin, montrer que le membre de droite tend vers 0 lorsque $r \rightarrow 1$.

(b) Trouver une série $\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k$ qui ne converge pas, tandis que $\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k$ existe.

(c) Montrer l'implication « Cesàro-sommable \implies Abel-sommable » :

$$\left(\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \dots + s_K}{K} = \ell \text{ existe} \right) \implies \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = \ell \text{ aussi.}$$

Indication: Vérifier qu'on peut supposer $\ell = 0$, et établir l'identité :

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k \sigma_k r^k,$$

les moyennes de Cesàro des sommes partielles de la série étant abrégées par :

$$\sigma_k := \frac{s_1 + \dots + s_k}{k} \quad (k \geq 1).$$

(d) Trouver une série $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ telle que $\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \dots + s_K}{K}$ n'existe pas, tandis que $\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k$ existe. Indication: Observer que si $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ est *Cesàro-sommable*, i.e. si $\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \dots + s_K}{K} =: \ell$ existe, alors $\frac{c_k}{k}$ tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$.

(e) Montrer que si une série $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ est *Cesàro-sommable*, et si $c_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$, c'est-à-dire si de plus $0 = \lim_{k \rightarrow \infty} k c_k$, alors $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ converge aussi vers ℓ . Indication: Établir et utiliser l'identité :

$$s_k - \sigma_k = \frac{(k-1)c_k + \dots + c_2}{k} \quad (k \geq 2).$$

(f) Montrer que si $\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k =: \ell$ existe et si $c_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$, alors $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ converge aussi vers ℓ . Indication: Estimer la différence entre $\sum_{k=1}^K c_k$ et $\sum_{k=1}^K c_k r^k$ en choisissant $r = 1 - \frac{1}{K}$.

Exercice 15. Pour $0 \leq r < 1$ et pour $\theta \in \mathbb{R}$, soit comme précédemment le noyau de Poisson :

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.$$

(a) Montrer que l'opérateur laplacien $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ s'écrit en coordonnées polaires :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

(b) Montrer que la fonction :

$$u := \frac{\partial P_r}{\partial \theta}$$

satisfait dans le disque unité ouvert $\mathbb{D} := \{x + iy \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 < 1\} = \{re^{i\theta} : 0 \leq r < 1, \theta \in \mathbb{R}\}$ l'équation :

$$0 = \Delta u.$$

(c) Montrer, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, que :

$$0 = \lim_{r \rightarrow 1} u(r, \theta).$$

Autrement dit, u est une fonction non identiquement nulle dans le disque unité \mathbb{D} solution de l'équation de Laplace $\Delta u = 0$, et qui possède pourtant une valeur au bord identiquement nulle sur le cercle unité $\mathbb{T} = \partial \mathbb{D}$.

Exercice 16. (a) Démontrer rigoureusement le Théorème 16.4, d'abord sous la forme suivante : si $f \in L^1(\mathbb{T})$ est intégrable, et si $\theta_0 \in \mathbb{T}$ est un point en lequel f est continue, alors les sommes d'Abel de f y convergent vers $f(\theta_0)$:

$$\lim_{r \rightarrow 1} A_r(f)(\theta_0) = \lim_{r \rightarrow 1} (P_r * f)(\theta_0) = f(\theta_0).$$

(b) Ensuite, démontrer complètement le Théorème 16.4, avec convergence uniforme, sous l'hypothèse que $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ est continue en tout point du cercle unité \mathbb{T} .

(c) Soit une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ qui possède, en un certain point $\theta_0 \in \mathbb{T}$, une *discontinuité de première espèce*, au sens où les deux limites à gauche et à droite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(\theta_0 + h) =: f_-(\theta_0) \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} f(\theta_0 - h) =: f_+(\theta_0)$$

existent. Montrer que :

$$\lim_{r \rightarrow 1} A_r(f)(\theta_0) = \frac{f_-(\theta_0) + f_+(\theta_0)}{2}.$$

Indication: Après les avoir justifiées, utiliser les valeurs :

$$\frac{1}{2} = \int_{-\pi}^0 P_r(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^\pi P_r(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Exercice 17. Soit $f(x) = \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$ la fonction indicatrice d'un intervalle fermé $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ avec $a < b$, définie par :

$$\mathbf{1}_{[a,b]}(x) := \begin{cases} 1 & \text{lorsque } x \in [a, b], \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

(a) Montrer par le calcul que la série de Fourier de f vaut :

$$\frac{b-a}{2\pi} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2i\pi n} e^{in\theta}.$$

(b) Montrer que si $a \neq -\pi$ ou si $b \neq \pi$, cette série de Fourier ne converge pas absolument en certains points θ . **Indication:** Il suffit de faire voir que pour de nombreuses valeurs de n , on a $|\sin(n\theta_0)| \geq c > 0$, au point central $\theta_0 := (b-a)/2$.

(c) Toutefois, montrer en utilisant les sommations par parties d'Abel que cette série de Fourier converge en tout point $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Que se passe-t-il lorsque $a = -\pi$ et $b = \pi$? **Indication:** Si $(a_k)_{k=1}^\infty$ et $(b_k)_{k=1}^\infty$ sont deux suites de nombres réels quelconques, alors pour tout $n \geq 2$ on a la sommation par parties :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) [b_k + \cdots + b_1] = \sum_{k=1}^n a_k b_k - a_n (b_1 + \cdots + b_n),$$

ce qui permet de déduire le *Critère de convergence d'Abel* : Si la suite $(a_k)_{k=1}^\infty$ est positive, décroissante, convergente vers zéro, et si la suite $(\sum_{k=1}^n b_k)_{n=1}^\infty$ est bornée, alors la série $\sum_{k=1}^\infty a_k b_k$ converge.

Exercice 18. [Poincaré, Wirtinger] Deux inégalités établissent une relation entre la norme intégrale L^2 d'une fonction et celle de sa dérivée.

(a) Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction T -périodique avec $T > 0$ de classe \mathcal{C}^1 de moyenne $0 = \int_0^T f(x) dx$ nulle, montrer que :

$$\int_0^T |f(x)|^2 dx \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(x)|^2 dx.$$

Indication: Utiliser Bessel, Plancherel, Parseval.

(b) Montrer qu'on a égalité lorsque, et seulement lorsque $f(x) = A \sin(\frac{2\pi}{T}x) + B \cos(\frac{2\pi}{T}x)$ avec $A, B \in \mathbb{C}$.

(c) Toujours avec f comme ci-dessus, et avec g de classe \mathcal{C}^1 et T -périodique (sans être nécessairement de moyenne nulle), montrer que :

$$\left| \int_0^T \overline{f(x)} g(x) dx \right|^2 \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f(x)|^2 dx \int_0^T |g'(x)|^2 dx.$$

(d) Sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, pour toute fonction de classe \mathcal{C}^1 satisfaisant $0 = f(a) = f(b)$, montrer que :

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

Indication: Prolonger f à l'intervalle $[2a-b, a]$ comme fonction impaire de $x-a$ sur $[2a-b, b]$, puis comme fonction T -périodique de période $T := 2(b-a)$, afin de pouvoir appliquer la question (a).

(e) Montrer qu'on a égalité lorsque, et seulement lorsque $f(x) = A \sin(\pi \frac{x-a}{b-a})$ avec $A \in \mathbb{C}$.

(f) Montrer que la constante $\frac{(b-a)^2}{\pi^2}$ ne peut pas être améliorée.

Exercice 19. Montrer que :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Indication: Partir du fait que l'intégrale de $D_n(\theta)$ sur $[-\pi, \pi]$ vaut 2π , utiliser le fait que la différence :

$$\frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} - \frac{2}{\theta}$$

est continue sur $[-\pi, \pi]$, et appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue.

Exercice 20. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique intégrable.

(a) Pour $k \in \mathbb{Z}$, montrer que :

$$\widehat{f}(k) = - \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta + \frac{\pi}{k}) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi},$$

puis que :

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\theta) - f(\theta + \frac{\pi}{k})}{2} e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

(b) Lorsque $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T})$ est α -höldérienne, avec $0 < \alpha \leq 1$, à savoir lorsqu'il existe une constante $0 \leq C < \infty$ telle que, pour tous $\theta, h \in \mathbb{R}$:

$$|f(\theta + h) - f(\theta)| \leq C |h|^\alpha,$$

montrer que :

$$\widehat{f}(k) = O\left(\frac{1}{|k|^\alpha}\right).$$

(c) Montrer que cette estimation de croissance des coefficients de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T})$ avec $0 < \alpha < 1$ ne peut pas être améliorée, en utilisant la fonction :

$$f(\theta) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\ell\alpha}} e^{i2^\ell \theta}.$$

Indication: Vérifier d'abord que $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T})$, puis que $\widehat{f}(k) = \frac{1}{k^\alpha}$ quand $k = 2^\ell$ est une puissance de 2. Ensuite, découper :

$$f(\theta + h) - f(\theta) = \sum_{2^\ell \leq \frac{1}{|h|}} + \sum_{2^\ell > \frac{1}{|h|}}.$$

Pour estimer la première somme, utiliser la majoration $|1 - e^{i\theta}| \leq |\theta|$, valable pour θ petit. Pour estimer la seconde somme, utiliser l'inégalité triviale $|e^{i\theta} - e^{i\eta}| \leq 2$.

Exercice 21. Si f est une fonction réelle bornée monotone sur $[-\pi, \pi]$, montrer que :

$$\widehat{f}(k) = O\left(\frac{1}{|k|}\right).$$

Indication: On peut supposer que f est croissante, avec $|f| \leq M < \infty$. Commencer par vérifier que les coefficients de Fourier de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{[a,b]}$ d'un segment quelconque $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ croissent au plus en $O\left(\frac{1}{|k|}\right)$. Ensuite, montrer que toute combinaison linéaire finie de telles fonctions indicatrices :

$$\sum_{j=1}^J \lambda_j \mathbf{1}_{[a_{j-1}, a_j]},$$

avec :

$$-M \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_J \leq M,$$

et avec :

$$-\pi = a_0 < a_1 < \dots < a_{j-1} < a_j = \pi,$$

a des coefficients de Fourier qui croissent au plus en $O\left(\frac{1}{|k|}\right)$, *uniformément* en le nombre $J \geq 1$ de termes. En sommant par parties (Abel), utiliser le fait que la somme télescopique $\sum (\lambda_j - \lambda_{j-1})$ est bornée par $2M$. Enfin, approximer la fonction monotone f par de telles sommes.

Exercice 22. Montrer que les coefficients de Fourier $\widehat{f}(k)$ d'une fonction continue $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ sur le cercle unité peuvent tendre vers 0 lorsque $|k| \rightarrow \infty$ d'une manière arbitrairement lente, en montrant que pour toute suite $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ convergeant vers 0 lorsque $|k| \rightarrow \infty$, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ telle que $|\widehat{f}(k)| \geq \varepsilon_k$ pour un nombre infini de valeurs de k . Indication: Sélectionner une sous-suite $(\varepsilon_{k_n})_{n=1}^\infty$ satisfaisant $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_{k_n} < \infty$.

Exercice 23. L'objectif est de donner une preuve alternative de la Proposition 17.2, d'après laquelle les expressions :

$$\sum_{1 \leq |k| \leq K} \frac{e^{ik\theta}}{k}$$

sont bornées uniformément, indépendamment de $K \geq 1$ et de $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Si $D_k(\theta)$ désigne le noyau de Dirichlet, vérifier que :

$$\frac{1}{2i} \sum_{1 \leq |k| \leq K} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^K \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{1}{2} \int_0^\theta (D_K(t) - 1) dt.$$

(b) Conclure en utilisant le fait, déjà éclairci dans l'Exercice 19, que $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt < \infty$,

Exercice 24. Soit D_n le noyau de Dirichlet. Déterminer la constante c telle que :

$$\|D_n\|_{L^1} = \frac{4}{\pi^2} \log n + c + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Quelle serait la constante suivante dans le reste $O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{d}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$?

Exercice 25. [Phénomène de Gibbs] Soit f la fonction en dents de scie définie sur $[0, 2\pi[$ par :

$$f(\theta) := \begin{cases} 0 & \text{en } \theta = 0, \\ \frac{\pi - \theta}{2} & \text{lorsque } 0 < \theta < 2\pi, \end{cases}$$

et prolongée à \mathbb{R} tout entier par 2π -périodicité.

(a) Vérifier que :

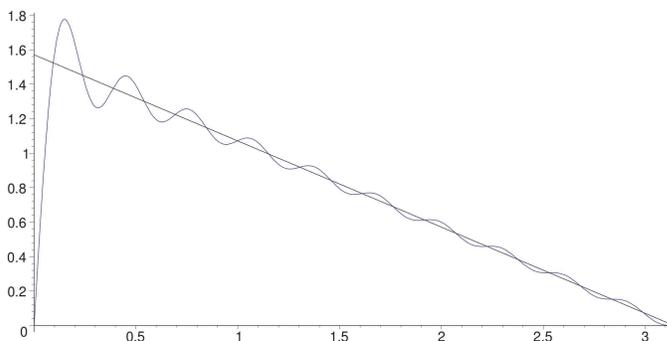
$$\pi = f_+(0) - f_-(0).$$

(b) Montrer que la série de Fourier de f est :

$$\frac{1}{2i} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k}.$$

(c) Montrer, pour tout entier $K \geq 1$, que la K -ème somme partielle $S_K(f)(\theta) = \sum_{k=1}^K \frac{\sin(k\theta)}{k}$ de cette série de Fourier satisfait :

$$\max_{0 < \theta \leq \frac{\pi}{K}} S_K(f)(\theta) - \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\pi}{2}.$$



Ce résultat est la manifestation d'un phénomène universel concernant la convergence des séries de Fourier de fonctions \mathcal{C}^1 par morceaux, au voisinage de toute discontinuité de première espèce. Lorsque K devient grand, l'amplitude des oscillations tend vers une limite strictement plus grande que l'amplitude — le saut $f_+(0) - f_-(0)$ — de la discontinuité, atteignant jusqu'à 8,9% de ce saut, alors que la largeur de la zone d'oscillation tend vers zéro, c'est-à-dire que les soubressauts s'évanouissent en se déplaçant vers le trou de la discontinuité, ce qui est nécessaire à cause du théorème de convergence de Dirichlet.

Exercice 26. L'objectif est de produire de manière très élémentaire une fonction continue qui n'est dérivable en aucun point, grâce à des « empilements fractal » de singularités non dérivables simples. Sur $[-1, 1]$, soit la fonction $\varphi(x) := |x|$ non dérivable en 0 que l'on prolonge à \mathbb{R} tout entier comme fonction périodique de période 2.

(a) Montrer que la fonction :

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$$

est continue sur \mathbb{R} .

(b) On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $m \geq 1$, soit $\delta_m := \pm \frac{1}{2} \frac{1}{4^m}$, où le signe \pm est choisi de telle sorte qu'aucun entier ne se trouve entre $4^m x_0$ et $4^m(x_0 + \delta_m)$. On considère le quotient :

$$\gamma_n := \frac{\varphi(4^n(x_0 + \delta_m)) - \varphi(4^n x_0)}{\delta_m}.$$

Montrer que si $n \geq m + 1$, on a $\gamma_n = 0$, tandis que pour $0 \leq n \leq m$, on a $|\gamma_n| \leq 4^n$ avec égalité $|\gamma_m| = 4^m$.

(c) En utilisant ce qui précède, obtenir l'estimée :

$$\left| \frac{f(x_0 + \delta_m) - f(x_0)}{\delta_m} \right| \geq \frac{1}{2} (3^m + 1).$$

(d) Conclure que f n'est pas dérivable en x_0 .

Exercice 27. [Théorème de Dirichlet original] Montrer que la série de Fourier d'une fonction continue sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ qui ne possède qu'un nombre fini de minima et de maxima converge vers la fonction en tout point, et ce, qui plus est, uniformément.

Exercice 28. L'objectif est de démontrer qu'avec $0 < \alpha < 1$ quelconque, la série trigonométrique :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha},$$

qui converge pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, n'est la série de Fourier d'aucune fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$.

(a) On introduit le noyau de Dirichlet conjugué :

$$\tilde{D}_n(\theta) := i \sum_{|k| \leq n} \text{sign}(k) e^{ik\theta} = \sum_{k=1}^n \sin(k\theta),$$

où la fonction signe est définie par :

$$\text{sign}(k) := \begin{cases} -1 & \text{lorsque } k \leq -1, \\ 0 & \text{pour } k = 0, \\ 1 & \text{lorsque } k \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que :

$$\tilde{D}_n(\theta) = \frac{\cos(\theta/2) - \cos((n + \frac{1}{2})\theta)}{\sin(\theta/2)}.$$

(b) Montrer qu'il existe une constante $0 < c < \infty$ telle que pour tout $n \geq 2$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{D}_n(\theta)| d\theta \leq c \log n.$$

(c) Montrer, pour toute fonction intégrable $f \in L^1(\mathbb{T})$, que :

$$(f * \tilde{D}_n)(0) = O(\log n).$$

(d) Aboutir à la contradiction :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = O(\log n).$$

Exercice 29. Soit p/q un nombre rationnel avec p et q deux entiers premiers entre eux, et, sans perte de généralité, avec $q \geq 1$. On définit une suite de nombres réels appartenant à $[0, 1[$ par :

$$\xi_k := \langle kp/q \rangle,$$

où $\langle y \rangle := y - [y] = y - \text{Ent } y$ est la partie fractionnaire d'un nombre réel quelconque $y \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ est équirépartie sur les q points de la forme :

$$0, \quad 1/q, \quad 2/q, \quad \dots, \quad (q-1)/q,$$

à savoir précisément, montrer que pour tout entier $0 \leq a < q$, on a :

$$\frac{\text{Card}\{k : 1 \leq k \leq n, \langle kp/q \rangle = a/q\}}{n} = \frac{1}{q} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Indication: En utilisant une identité de Bézout $1 = rp + sq$ avec $r, s \in \mathbb{Z}$, montrer que pour tout entier $l \geq 0$ il existe un unique entier k satisfaisant les deux conditions :

- $lq \leq k \leq (l+1)q$,
- $\langle kp/q \rangle = a/q$.

Ensuite, diviser $n \gg 1$ par q :

$$n = sq + r,$$

avec $s \geq 0$ et $0 \leq r < q$, et établir que :

$$s \leq \text{Card}\{k : 1 \leq k \leq n, \langle k p/q \rangle = a/q\} \leq s + 1.$$

Exercice 30. Montrer que la suite $(\gamma_k)_{k=1}^{\infty}$, où γ_k est la partie fractionnaire de :

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^k$$

n'est pas équidistribuée dans $[0, 1[$. Indication: Montrer que :

$$u_k := \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^k$$

est solution de la récurrence de Fibonacci :

$$u_{k+2} = u_{k+1} + u_k,$$

avec conditions initiales $u_0 = 2$ et $u_1 = 1$.

Exercice 31. Montrer la réciproque du théorème de Weyl : si une suite de nombres réels ξ_1, ξ_2, \dots dans $[0, 1[$ est équidistribuée, alors pour tout entier $\ell \in \mathbb{Z}^*$:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi \ell \xi_k}.$$

Indication: Il suffit de montrer que pour toute fonction continue sur $[0, 1[$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx,$$

et on pourra commencer par vérifier cela dans le cas où f est la fonction indicatrice d'un intervalle $[a, b] \subset [0, 1[$.

Exercice 32. Montrer que pour tout réel $a \neq 0$, et tout réel $0 < \sigma < 1$, la suite des parties fractionnaires :

$$\langle a 1^\sigma \rangle, \quad \langle a 2^\sigma \rangle, \quad \dots, \quad \langle a k^\sigma \rangle, \quad \dots,$$

est équidistribuée dans $[0, 1[$. Indication: Établir que pour tout réel $b \neq 0$:

$$\sum_{k=1}^n e^{2i\pi b k^\sigma} = O(n^\sigma) + O(n^{1-\sigma}),$$

en montrant tout d'abord que :

$$\sum_{k=1}^n e^{2i\pi b k^\sigma} - \int_1^n e^{2i\pi b x^\sigma} dx = O\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1-\sigma}}\right).$$

Exercice 33. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la suite des parties fractionnaires :

$$\langle a \log 1 \rangle, \quad \langle a \log 2 \rangle, \quad \langle a \log 3 \rangle, \quad \dots, \quad \langle a \log k \rangle, \quad \dots,$$

n'est pas équidistribuée dans $[0, 1[$. Indication: Comparer la somme $\sum_{k=1}^n e^{2i\pi b \log k}$ avec une intégrale.

Exercice 34. Soit f une fonction périodique sur \mathbb{R} de période 1, et soit $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite qui est équidistribuée dans $[0, 1[$.

(a) Lorsque f est continue de moyenne $\int_0^1 f(x) dx = 0$ nulle, montrer que l'on a uniformément en x :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x + \xi_k).$$

Indication: Établir d'abord cela lorsque f est un polynôme trigonométrique.

(b) Lorsque f est seulement Riemann-intégrable sur $[0, 1]$ et à nouveau de moyenne $\int_0^1 f(x) dx = 0$ nulle, montrer que :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x + \xi_k) \right|^2 dx.$$
