Faisceaux

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

Après les travaux précurseurs de Cousin sur les fonctions méromorphes à plusieurs variables, les concepts généraux de la théorie des faisceaux ont été introduits en France par Jean Leray pendant la seconde guerre mondiale, puis développés dans les années 1950-60, notamment par Henri Cartan, Jean-Pierre Serre et Alexandre Grothendieck, pour ne citer que les mathématiciens les plus connus. Les faisceaux sont rapidement devenus un outil important et reconnu en géométrie algébrique et en géométrie analytique, ainsi qu'en topologie, car ils expriment toutes les relations qui peuvent exister entre l'être global d'un objet et toutes ses caractéristiques locales ou semi-locales. On se contentera ici de développer quelques rudiments de cette théorie, notre prochain objectif étant d'utiliser son langage afin d'établir le théorème très fondamental suivant : *pour toute fonction holomorphe (resp. méromorphe) donnée sur un petit ouvert d'une surface de Riemann, il existe toujours une unique surface de Riemann qui constitue le domaine de prolongement maximal de cette fonction en tant que fonction holomorphe (resp. méromorphe).*

L'exemple de faisceau qui est à la fois le plus simple et le plus représentatif, c'est celui de l'algèbre $\mathscr{C}(X, \mathbb{C})$ des fonctions continues complexes définies sur un espace topologique X. L'objectif conceptuel est de penser le fait qu'avec une fonction continue $f\colon X \to \mathbb{C}$, toutes ses restrictions $f\big|_U\colon U \to \mathbb{C}$ à des sous-ouverts quelconques $U \subset X$ sont aussi automatiquement données : on voudrait donc comprendre $\mathscr{C}(X, \mathbb{C})$ en voyant simultanément aussi toutes ses restrictions $\mathscr{C}(U, \mathbb{C})$ à des ouverts *quelconques* $U \subset X$, et on voudrait aussi comprendre la manière dont ces restrictions dépendent des ouverts U. Certes, passer de X à ses sous-ouverts U pourrait sembler artificiel ici, mais c'est en fait *dans le sens inverse* que de très nombreux problèmes mathématiques se posent : *comment, à partir d'une collection d'objets qui sont définis seulement sur des petits ouverts, peut-on construire un objet qui est défini sur l'espace tout entier* ?

1. Préfaisceaux, faisceaux, et leurs morphismes

Classiquement, avant de parler de faisceaux, on commence par définir une notion presque amorphe tant elle est générale : la notion de *préfaisceau*, laquelle ne requiert que l'existence d'*applications de restriction*. On va voir dans un instant qu'on est parfois forcé, en partant d'un faisceau, d'aboutir à un préfaisceau qui aura perdu une partie de sa structure initiale de faisceau, donc la notion de préfaisceau n'est en rien une généralité gratuite.

Définition 1.1. Soit X un espace topologique. Un *préfaisceau* (d'ensembles) $\mathscr{F}$ sur X consiste en les données suivantes :

(i) une collection d'ensembles non vides $\mathscr{F}(U)$ associés à tout ouvert $U \subset X$ non vide ;

(ii) une collection d'applications :

$$\rho_{V,U}\colon\quad \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{F}(V)$$

associées à toute paire d'ouverts $V \subset U$ avec $\rho_{U,U} = \mathrm{Id}$ qui, pour tout triplet d'ouverts $W \subset V \subset U$, satisfait la propriété de transitivité :

$$\rho_{W,V} \circ \rho_{V,U} = \rho_{W,U}.$$

L'ensemble $\mathscr{F}(U)$ est appelé *ensemble des sections* au-dessus de U du préfaisceau $\mathscr{F}$.

La plupart du temps, le préfaisceau $\mathscr{F}$ possède une structure algébrique additionnelle. Soit $\mathbb{A}$ un anneau quelconque et soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque.

Définition 1.2. Un préfaisceau d'ensembles $\mathscr{F}$ sur X comme ci-dessus est appelé un *préfaisceau de groupes abéliens* (resp. *d'anneaux*, *de $\mathbb{A}$-modules*, *d'algèbres*, de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) si, pour tout sous-ouvert $U \subset X$, l'ensemble $\mathscr{F}(U)$ est un groupe abélien (resp. un anneau, un $\mathbb{A}$-module, une algèbre, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel) et si les applications $\rho_{U,V}$ sont des *morphismes* de la structure algébrique en question. Dans ces cas-là, on suppose alors toujours que $\mathscr{F}(\emptyset) = \{0\}$.

En voici trois exemples.

(a) Si on assigne à tout ouvert $U \subset X$ l'ensemble $\mathscr{C}(U, \mathbb{R})$ des fonctions réelles continue sur U et si $\rho_{U,V}$ désigne le morphisme évident de restriction $\mathscr{C}(V, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}(U, \mathbb{R})$, alors on obtient un préfaisceau d'algèbres sur X, que l'on peut noter $\mathscr{C}_X$.

(b) De manière similaire, si X est une variété différentielle de classe $\mathscr{C}^k$, on obtient un préfaisceau d'algèbres sur X en considérant les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ définies sur des ouverts $U \subset X$ qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$), et on peut le noter $\mathscr{C}^k_X$.

(c) Si X est une surface de Riemann, on obtient le préfaisceau des fonctions holomorphes sur X, classiquement noté $\mathscr{O}_X$.

C'est à cause de ces trois exemples que les applications $\rho_{V,U}$ ci-dessus sont classiquement (et intuitivement) considérées comme des *applications de restriction*, bien qu'en toute généralité, les ensembles $\mathscr{F}(U)$ de la définition donnée ne soient pas nécessairement des ensembles de fonctions définies sur U.

Observons que pour les trois préfaisceaux $\mathscr{C}_X$, $\mathscr{C}^k_X$ et $\mathscr{O}_X$ ci-dessus, les propriétés qui définissent les fonctions considérées sont purement locales. De plus, on se convainc aisément, en examinant la manière dont sont définies les trois sortes de fonctions en question, que ces trois préfaisceaux $\mathscr{C}_X$, $\mathscr{C}^k_X$ et $\mathscr{O}_X$ satisfont les deux propriétés additionnelles suivantes.

Définition 1.3. Un préfaisceau $\mathscr{F}$ sur un espace topologique X est dit être un *faisceau* si, pour tout ouvert $U \subset X$ et tout recouvrement :

$$\bigcup_{i \in I} U_i = U$$

de U par des sous-ouverts $U_i \subset U$, il satisfait deux conditions.

Axiome d'unicité 1.4. Les restrictions $\rho_{U_i,U}(F) = \rho_{U_i,U}(F')$ de deux sections $F, F' \in \mathscr{F}(U)$ coïncident sur chaque U_i si et seulement si $F = F'$ sur U tout entier.

Axiome de recollement 1.5. Étant donné une collection de sections $F_i \in \mathscr{F}(U_i)$ qui coïncident sur l'intersection de leurs domaines :

$$\rho_{U_i \cap U_j, U_i}(F_i) = \rho_{U_j \cap U_i, U_j}(F_j) \quad \text{dans } \mathscr{F}(U_i \cap U_j) \text{ pour tous } i, j \in I,$$

il existe une section $F \in \mathscr{F}(U)$ dont les restrictions redonnent par restriction les sections originales :

$$\rho_{U_i,U}(F) = F_i \qquad (\forall\, i \in I).$$

Cette dernière section F est alors *unique* par 1.4.

Voici deux exemples. Pour un ouvert U d'une surface de Riemann X, soit $\mathscr{O}_X^*(U)$ le groupe multiplicatif de toutes les applications holomorphes $f\colon U \to \mathbb{C}^*$. Avec l'application usuelle de restriction, $\mathscr{O}_X^*$ est un faisceau de groupes abéliens (multiplicatifs).

Le faisceau $\mathscr{M}_X^*$ est défini de manière un peu différente : pour tout ouvert $U \subset X$, le groupe $\mathscr{M}_X^*(U)$ consiste en toutes les fonctions méromorphes $f \in \mathscr{M}(U)$ qui ne s'annulent identiquement sur aucune composante connexe de U.

Tous les préfaisceaux ne satisfont pas ces deux derniers axiomes supplémentaires 1.4 et 1.5. Détaillons à cet effet un :

Exemple 1.6. [Préfaisceau constant] Soit E un ensemble arbitraire de cardinal $\geqslant 2$ qui possède un élément distingué '0' et un autre élément $e \neq 0$, par exemple un groupe abélien, un anneau, un $\mathbb{A}$-module ou un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et soit à nouveau X un espace topologique. Alors le *préfaisceau constant* $\mathscr{E}_X$ sur X est défini par :

$$\left[\begin{array}{l} \mathscr{E}_X(\emptyset) := \{0\}, \\ \mathscr{E}_X(U) := E \quad \text{pour tout ouvert non vide } U \subset X, \end{array}\right.$$

avec comme applications de restriction $\rho_{U,V} = \mathrm{Id}_E$ lorsque $\emptyset \neq U \subset V$ et $\rho_{U,V} = 0$ lorsque $U = \emptyset$. Nous affirmons maintenant que si :

$$X = V_1 \cup V_2$$

peut s'écrire comme réunion de deux ouverts *disjoints non vides* (il y a énormément d'exemples), l'axiome de recollement n'est pas satisfait.

En effet, soit $F_1 \in \mathscr{E}_X(V_1)$ définie par $F_1 := 0$ et soit $F_2 \in \mathscr{E}_X(V_2)$ définie par $F_2 := e \neq 0$. Puisque $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, on a gratuitement par définition coïncidence des restrictions à l'intersection :

$$\rho_{V_1 \cap V_2, V_1}(F_1) = 0 = \rho_{V_2 \cap V_1, V_2}(F_2).$$

S'il existait une section $G \in \mathscr{E}_X(V_1 \cup V_2)$ recollant F_1 et F_2, on devrait alors avoir :

$$0 = F_1 = \underbrace{\rho_{V_1, V_1 \cup V_2}}_{\mathrm{Id}}(G) = G,$$

$$e = F_2 = \underbrace{\rho_{V_2, V_2 \cup V_1}}_{\mathrm{Id}}(G) = G,$$

ce qui contredirait manifestement l'hypothèse $e \neq 0$. $\square$

1.7. Morphismes de préfaisceaux. Soient maintenant $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux faisceaux de groupes abéliens (ou de toute autre structure algébrique) définis sur le même espace topologique X.

Définition 1.8. Un *morphisme* de préfaisceaux sur X :

$$\varphi\colon \quad \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$$

est une collection de morphismes de groupes abéliens (ou d'une autre structure algébrique) :

$$\varphi_U\colon \quad \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{G}(U)$$

associés à *tout* sous-ouvert $U \subset X$ qui commutent avec les morphismes de restrictions, *i.e.* qui, pour toute paire d'ouverts emboîtés $V \subset U$, assurent la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho^{\mathscr{F}}_{V,U}"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\rho^{\mathscr{G}}_{V,U}"] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"'] & \mathscr{G}(V). \end{tikzcd} \tag{1.9}$$

Définition 1.10. Un morphisme de préfaisceaux $\varphi \colon \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ est dit *injectif* ou *surjectif* suivant que tous les $\varphi_U \colon \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{G}(U)$ sont injectifs ou surjectifs.

Deux préfaisceaux $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont dit *isomorphes* lorsqu'il existe un morphisme $\varphi \colon \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ qui est simultanément injectif et surjectif.

Définition 1.11. On dit que $\mathscr{F}$ est un *sous-préfaisceau* de $\mathscr{G}$ si, pour tout ouvert $U \subset X$, on a $\mathscr{F}(U) \subset \mathscr{G}(U)$ et si le morphisme $\varphi_U \colon \mathscr{F}(U) \subset \mathscr{G}(U)$ est induit par l'inclusion.

On vérifie alors (exercice) que la propriété de commutativité signifie : $\rho^{\mathscr{G}}_{V,U}\big(\mathscr{F}(U)\big) \subset \mathscr{F}(V)$ pour tous ouverts emboîtés $V \subset U$, et que $\rho^{\mathscr{G}}_{V,U}$ coïncide avec $\rho^{\mathscr{F}}_{V,U}$ sur $\mathscr{F}(U)$.

Si $\mathscr{F}$ est un sous-préfaisceau d'un préfaisceau $\mathscr{G}$ de groupes abéliens, on peut définir un *préfaisceau quotient* $\mathscr{H} := \mathscr{G}\big/\mathscr{F}$ en assignant à tout sous-ouvert U de X le groupe quotient :

$$\mathscr{H}(U) := \mathscr{G}(U)\big/\mathscr{F}(U).$$

D'une manière similaire, on définit le *préfaisceau noyau*, le *préfaisceau image*, et le *préfaisceau conoyau* d'un morphisme de préfaisceaux $\varphi \colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ en assignant à tout sous-ouvert U de X :

$$U \longmapsto \operatorname{Ker} \varphi_U, \qquad U \longmapsto \operatorname{Im} \varphi_U, \qquad U \longmapsto \operatorname{Coker} \varphi_U,$$

Ce sont des sous-préfaisceaux (respectivement) de $\mathscr{F}$, de $\mathscr{G}$, de $\mathscr{G}$. La somme directe $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$ de deux préfaisceaux de groupes abéliens $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ est le préfaisceau :

$$U \longmapsto \mathscr{F}(U) \oplus \mathscr{G}(U).$$

Le *produit tensoriel* $\mathscr{F} \otimes_{\mathbb{A}} \mathscr{G}$ de deux préfaisceaux de $\mathbb{A}$-modules est le préfaisceau :

$$U \longmapsto \mathscr{F}(U) \otimes_{\mathbb{A}} \mathscr{G}(U).$$

1.12. Perte de la structure de faisceau. On doit bien faire attention au fait que le préfaisceau quotient d'un faisceau par un faisceau n'est pas nécessairement un faisceau.

Exemple 1.13. Soit $S^1 \cong \mathbb{R}\big/2\pi\mathbb{Z}$ le cercle unité dans $\mathbb{C}$, soit $\mathscr{C}_{S^1}$ le faisceau abélien additif des fonctions continues sur S^1 à valeurs complexes vues comme fonctions 2π-périodiques $\mathbb{R} \ni t \longmapsto g(t) \in \mathbb{C}$, et soit $\mathscr{Z}_{S^1}$ le sous-faisceau des fonctions continues sur S^1 à valeurs dans $\mathbb{Z}$, *i.e.* des fonctions localement constantes à valeurs entières. L'application exponentielle :

$$\varphi := \mathsf{exp}(2i\pi \cdot) \colon \quad \mathscr{C}_{S^1} \longrightarrow \mathscr{C}^*_{S^1}$$

est un morphisme du faisceau $\mathscr{C}_{S^1}$ à valeurs dans le faisceau $\mathscr{C}^*_{S^1}$ des fonctions continues jamais égales à 0, et son noyau est précisément égal à $\mathscr{Z}_{S^1}$.

Pour tout ouvert $U \neq S^1$, il existe au moins un point $e^{i\theta_0} \in S^1 \backslash U$, donc puisque la fonction logarithme admet une détermination univaluée dans $\mathbb{C} \backslash \{re^{i\theta_0} \colon r \geqslant 0\}$, l'application φ_U est surjective, ce qui entraîne :

$$\mathscr{C}_{S^1}(U) \big/ \mathscr{Z}_{S_1}(U) \cong \mathscr{C}^*_{S^1}(U) \qquad (\forall\, U \neq S^1).$$

Toutefois, pour $U = S^1$, nous affirmons que :

$$\mathscr{C}_{S^1}(S^1) \big/ \mathscr{Z}_{S_1}(S^1) \ncong \mathscr{C}^*_{S^1}(S^1).$$

En effet, rappelons que le *degré* d'une application $\mathbb{R}\big/2\pi\mathbb{Z} \ni t \longmapsto g(t) \in \mathbb{C}^*$ compte le nombre (entier) de fois que cette courbe fermée tourne autour de l'origine :

$$\mathsf{deg}\, g = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g'(t)}{g(t)}\, dt,$$

et soulignons que c'est un invariant d'homotopie, pour des déformations continues de courbes demeurant dans $\mathbb{C}^*$.

Assertion 1.14. *L'application* $\varphi_{S^1} \colon \mathscr{C}_{S^1}(S^1) \longrightarrow \mathscr{C}^*_{S^1}(S^1)$ *a pour image :*

$$\varphi_{S^1}\big(\mathscr{C}_{S^1}(S^1)\big) \subset \big\{h \colon S^1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \colon \mathsf{deg}\, h = 0\big\}.$$

Démonstration. En effet, pour $t \longmapsto g(t)$ continue sur S^1, la courbe continue fermée dans $\mathbb{C}^*$:

$$t \longmapsto \varphi_{S^1}(g)(t) = \mathsf{exp}\big(2i\pi g(t)\big)$$

se rétracte homotopiquement en la famille suivante de courbes toujours à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ paramétrées continûment par $0 \leqslant s \leqslant 1$:

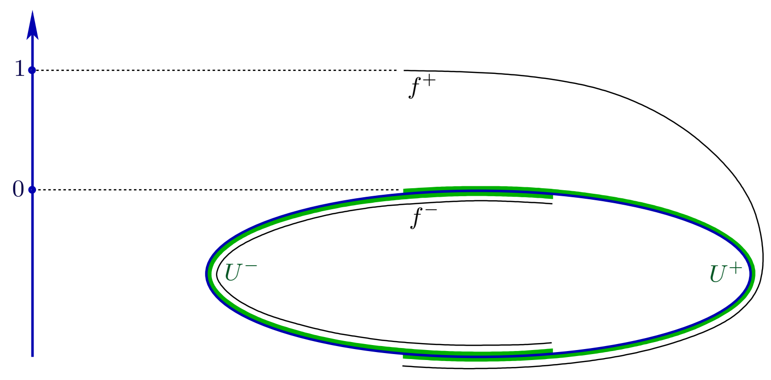
$$t \longmapsto \mathsf{exp}\big(s\, 2i\pi\, g(t)\big),$$

courbe au final constante $\equiv 1 \in \mathbb{C}^*$ pour $s = 0$, donc de degré zéro, donc par invariance $h := \varphi_{S^1}(g)$ est aussi de degré zéro. $\square$

Ainsi, φ_{S^1} n'est pas surjective, et on en déduit que le préfaisceau quotient $\mathscr{C}_{S^1}\big/\mathscr{Z}_{S^1}$ n'est pas isomorphe au faisceau $\mathscr{C}^*_{S^1}$, bien que leurs espaces de sections soit les mêmes pour tout ouvert $U \neq S^1$.

Mais cet exemple est utile surtout à cause d'une

Observation 1.15. *Le préfaisceau quotient* $\mathscr{C}_{S^1}\big/\mathscr{Z}_{S^1}$ *ne satisfait pas l'axiome de recollement 1.5.*



Démonstration. Décomposons $S^1 = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} \colon \theta \in \mathbb{R}\}$ en les deux sous-ouverts :

$$U^- := \big\{e^{i\theta} \colon \tfrac{\pi}{4} < \theta < \tfrac{7\pi}{4}\big\} \qquad \text{et} \qquad U^+ := \big\{e^{i\theta} \colon -\tfrac{3\pi}{4} < \theta < \tfrac{3\pi}{4}\big\},$$

de réunion $U^- \cup U^+ = S^1$ et dont l'intersection consiste en les *deux* intervalles ouverts disjoints :

$$U^- \cap U^+ = \big\{\big|\theta - \tfrac{3\pi}{2}\big| < \tfrac{\pi}{4}\big\} \cup \big\{\big|\theta - \tfrac{\pi}{2}\big| < \tfrac{\pi}{4}\big\}.$$

Ensuite, choisissons deux fonctions continues :

$$f^- \colon \quad U^- \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{et} \qquad f^+ \colon \quad U^+ \longrightarrow \mathbb{C},$$

en prenant simplement $f^- \equiv 0$ et en prenant f^+ quelconque satisfaisant :

$$f^+(e^{i\theta}) \equiv \begin{cases} 0 & \text{pour } \big|\theta - \frac{3\pi}{2}\big| < \frac{\pi}{4}, \\ 1 & \text{pour } \big|\theta - \frac{\pi}{2}\big| < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Alors dans le préfaisceau quotient $\mathscr{C}_{S^1} \big/ \mathscr{Z}_{S^1}$, on a :

$$f^-\big|_{U^- \cap U^+} = f^+\big|_{U^+ \cap U^-},$$

et pourtant, sur la réunion S^1 de ces deux ouverts, il n'existe pas de section globale :

$$\begin{aligned} f \in \big(\mathscr{C}_{S^1} \big/ \mathscr{Z}_{S^1}\big)(S^1) &\overset{\mathsf{def}}{=} \mathscr{C}_{S^1}(S^1) \big/ \mathscr{Z}_{S^1}(S^1) \\ &= \mathscr{C}_{S^1}(S^1) \ \operatorname{mod} \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

qui se restreindrait à U^- et à U^+ en f^- et en f^+, puisqu'une telle fonction devrait être partout continue sur S^1, ce qui est manifestement impossible en $\theta = \frac{3\pi}{4}$, comme l'a déjà fait voir la figure. □

Exemple 1.16. On peut modifier comme suit l'exemple du préfaisceau constant $\mathscr{E}_X$ donné plus haut pour E un groupe abélien afin d'en faire un vrai faisceau. Pour tout ouvert $U \subset X$, soit $\widetilde{\mathscr{E}}_X(U)$ le groupe abélien de toutes les applications $f \colon U \to E$ qui sont *localement constantes*, à savoir constantes sur les composantes connexes de U. Si U est connexe, il est clair que $\widetilde{\mathscr{E}}_X(U)$ s'identifie à E, mais lorsque U n'est pas connexe, on voit que :

$$E = \mathscr{E}_X(U) \neq \widetilde{\mathscr{E}}_X(U).$$

Pour $V \subset U$, soit $\widetilde{\mathscr{E}}_X(U) \longrightarrow \widetilde{\mathscr{E}}_X(V)$ la restriction usuelle des fonctions. On vérifie (exercice) que $\widetilde{\mathscr{E}}_X$ est un vrai faisceau sur X, appelé *faisceau des fonctions localement constantes sur X à valeurs dans E*.

Afin de réparer la non-préservation des axiomes de faisceau par passage au préfaisceau quotient, on introduit classiquement un procédé de « *faisceautisation d'un préfaisceau* », que nous allons exposer progressivement après quelques préparatifs.

2. Collection des germes d'un préfaisceau

Commençons par introduire la notion de germe qui inspecte les préfaisceaux au microscope.

Définition 2.1. Si $\mathscr{F}$ est un *pré*faisceau sur un espace topologique X et si $x \in X$ est un point quelconque, l'ensemble $\mathscr{F}_x$ des *germes de $\mathscr{F}$ en x* est défini comme étant la limite inductive abstraite :

$$\mathscr{F}_x := \varinjlim_{U \ni x} \big(\mathscr{F}(U),\, \rho_{\bullet,\bullet}\big),$$

c'est-à-dire plus explicitement, $\mathscr{F}_x$ est l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments appartenant à la réunion disjointe :

$$\coprod_{U\ni x} \mathscr{F}(U)\Big/ \sim_x$$

modulo '$\sim_x$' dans laquelle deux éléments :

$$F_1 \in \mathscr{F}(U_1), \quad U_1 \ni x \qquad \text{et} \qquad F_2 \in \mathscr{F}(U_2), \quad U_2 \ni x$$

sont considérés comme équivalents :

$$F_1 \sim_x F_2,$$

si et seulement si — par définition — il existe un voisinage ouvert $V \ni x$ avec $V \subset U_1 \cap U_2$ tel que :

$$\rho_{V,U_1}(F_1) = \rho_{V,U_2}(F_2).$$

Intuitivement et conceptuellement parlant, les germes sont donc des sections considérées dans un voisinage arbitrairement petit du point de référence.

Définition 2.2. Pour tout ouvert $U \subset X$ et tout point $x \in U$, on note :

$$\rho_x\colon \quad \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{F}_x$$

l'application qui assigne à toute section $F \in \mathscr{F}(U)$ sa classe d'équivalence modulo $\sim_x$. L'image $\rho_x(F)$ d'une section $F \in \mathscr{F}(U)$ est alors appelée *germe de F en x*.

Lorsque $\mathscr{F}$ est un faisceau de groupes abéliens, on vérifie pour tous $F_1, F_2 \in \mathscr{F}(U)$ que (exercice) :

$$\rho_x(F_1 \pm F_2) \ = \ \rho_x(F_1) \pm \rho_x(F_2), \tag{2.3}$$

et, pour tout sous-voisinage ouvert $x \in V \subset U$, pour toute section $F \in \mathscr{F}(U)$, que (exercice) :

$$\rho_x\big(\rho_{V,U}(F)\big) \ = \ \rho_x(F). \tag{2.4}$$

Exemple 2.5. [Germes de fonctions holomorphes] Considérons le faisceau $\mathscr{O}_X$ des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe $X \subset \mathbb{C}$. Soit $x \in X$. Alors un germe de fonction holomorphe $f_x \in \mathscr{O}_{X,x}$ est représenté par une fonction holomorphe dans un (petit) voisinage ouvert de x, et donc par conséquent, il est donné par une série entière :

$$f_x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, (z-x)^k$$

qui possède un rayon de convergence strictement positif, ce dernier pouvant toutefois être arbitrairement petit. Deux fonctions holomorphes définies dans un voisinage de x définissent le même germe dans $\mathscr{O}_{X,x}$ précisément lorsqu'elles ont le même développement de Taylor au point x. On en déduit immédiatement un énoncé crucial.

Proposition 2.6. *L'espace $\mathscr{O}_{X,x}$ des germes de fonctions holomorphes en un point x d'un ouvert $X \subset \mathbb{C}$ est isomorphe à l'anneau $\mathbb{C}\{z-x\}$ des séries entières à coefficients complexes en $z-x$ qui convergent dans un disque ouvert de rayon positif non précisé autour de x.* □

Pour tout germe $f_x \in \mathscr{O}_{X,x}$, sa valeur $f_x(x)$ en x est alors bien définie : elle ne dépend pas du choix d'un représentant. Il en va de même pour ses dérivées de tous ordres.

Proposition 2.7. *L'anneau $\mathscr{M}_x$ des germes de fonctions méromorphes en un point x d'un ouvert $X \subset \mathbb{C}$ est isomorphe à l'anneau de toutes les séries de Laurent convergentes :*

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} c_k \, (z-x)^k$$

à coefficients complexes c_k qui ont une partie principale finie, i.e. *telles que $k_0 > -\infty$.* □

De retour à la théorie générale, la vérification de l'énoncé suivant est proposée en Exercice 1.

Lemme 2.8. *Si $\mathscr{F}$ est un préfaisceau de groupes abéliens sur X, alors pour tout $x \in U$, le germe $\mathscr{F}_x$ admet une structure de groupe abélien.* □

En outre, tout morphisme de préfaisceaux induit des applications entre germes.

Proposition 2.9. *Soient deux préfaisceaux de groupes abéliens $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sur un espace topologique X, et soit $\varphi \colon \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ un morphisme. Alors en tout point $x \in X$, ce dernier induit un homomorphisme-fibre entre groupes abéliens :*

$$\begin{aligned} \varphi_x \colon \quad \mathscr{F}_x &\longrightarrow \mathscr{G}_x \\ f &\longmapsto \rho_x^{\mathscr{G}}\big(\varphi_U(F)\big), \end{aligned}$$

le résultat étant indépendant du choix d'un représentant $F \in \mathscr{F}(U)$ de $f = \rho_x^{\mathscr{F}}(F)$ avec $U \ni x$ ouvert.

Démonstration. En effet, si $F' \in \mathscr{F}(U')$ est un autre représentant, à savoir s'il existe $x \in V \subset U \cap U'$ ouvert avec :

$$\rho_{V,U}^{\mathscr{F}}(F) \;=\; \rho_{V,U'}^{\mathscr{F}}(F')$$

la commutativité des diagrammes (1.9) de morphismes donne :

$$\rho_{V,U}^{\mathscr{G}}\big(\varphi_U(F)\big) \;=\; \varphi_V\big(\rho_{V,U}^{\mathscr{F}}(F)\big) \;=\; \varphi_V\big(\rho_{V,U'}^{\mathscr{F}}(F')\big) \;=\; \rho_{V,U'}^{\mathscr{G}}\big(\varphi_{U'}(F')\big),$$

et en prenant la limite (classe d'équivalence) pour $V \longrightarrow x$, on obtient bien :

$$\rho_x^{\mathscr{G}}\big(\varphi_U(F)\big) \;=\; \rho_x^{\mathscr{G}}\big(\varphi_{U'}(F')\big).$$

Ensuite, pour ce qui est de la loi de groupe, soient $f_1, f_2 \in \mathscr{F}_x$ avec deux représentants $F_1 \in \mathscr{F}(U_1)$ et $F_2 \in \mathscr{F}(U_2)$. Comme on vient de voir que $\varphi_x(f_1)$ et $\varphi_x(f_2)$ n'en dépendent pas, on peut restreindre d'emblée F_1 et F_2 à l'intersection $V := U_1 \cap U_2$, puis calculer :

$$\begin{aligned} \varphi_x(f_1 \pm f_2) &= \rho_x^{\mathscr{G}}\big(\varphi_V(F_1 \pm F_2)\big) \\ &= \rho_x^{\mathscr{G}}\big(\varphi_V(F_1) \pm \varphi_V(F_2)\big) \\ \text{[Utiliser (2.3)]} \qquad &= \rho_x^{\mathscr{G}}\big(\varphi_V(F_1)\big) \pm \rho_x^{\mathscr{G}}\big(\varphi_V(F_2)\big) \\ &= \varphi_x(f_1) \pm \varphi_x(f_2), \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

3. Topologie sur l'espace des germes d'un préfaisceau

Soit comme précédemment $\mathscr{F}$ un préfaisceau arbitraire sur un espace topologique quelconque X. On souhaite maintenant munir la réunion disjointe des germes de $\mathscr{F}$ en tous les points x de X :

$$\coprod_{x\in X} \mathscr{F}_x$$

d'une topologie naturelle. À tout ouvert $U \subset X$ et à toute section $F \in \mathscr{F}(U)$, on associe la collection des germes de cette dernière :

$$[U, F] := \Big\{\rho_x(F) \,\in\, \textstyle\coprod_{x\in X} \mathscr{F}_x \,:\, x \in U\Big\},$$

et l'on prétend que cette (immense) collection convient.

Proposition 3.1. *Le système de tous ces ensembles $[U, F]$, où $U \subset X$ est ouvert et où $F \in \mathscr{F}(U)$, forme une base pour une topologie sur $\coprod_{x\in X} \mathscr{F}_x$.*

Démonstration. Pour s'assurer que ce système puisse bien former une base pour une topologie sur $\coprod_{x\in X} \mathscr{F}_x$, on doit premièrement vérifier que tout élément de $\coprod_{x\in X} \mathscr{F}_x$ est contenu dans au moins un $[U, F]$, ce qui provient du fait que tout germe possède un représentant local.

Deuxièmement, on se convainc par la réflexion — exercice très recommandé — que cette famille est stable par intersection :

$$[F, U] \cap [G, V] = [H, W],$$

où W est l'ensemble *ouvert* (exercice) de tous les points $x \in U \cap V$ en lesquels $\rho_x(F) = \rho_x(G)$, et où $H := \rho_{W,U}(F) = \rho_{W,V}(G)$. □

On introduit alors *deux* notations abrégées pour désigner cette réunion de fibres munie de cette topologie canonique :

$$\widetilde{\mathscr{F}} \,:=\, \mathsf{Germes}(\mathscr{F}) \,:=\, \coprod_{\substack{x\in X\\ \text{topologisée}}} \mathscr{F}_x.$$

Proposition 3.2. *La projection évidente :*

$$\pi\colon\quad \widetilde{\mathscr{F}} \longrightarrow X$$

qui envoie $\mathscr{F}_x$ sur x, est un homéomorphisme local.

Pour la notion d'*homéomorphisme local*, voir la Définition 5.2.

Démonstration. Pour tout ouvert $U \subset X$, cette projection induit en fait un homéomorphisme de l'ouvert $[U, F]$ sur l'ouvert U : elle est bijective, elle est continue, et son inverse est elle aussi continue, par définition. □

Définition 3.3. Une *section* de $\widetilde{\mathscr{F}} = \mathsf{Germes}(\mathscr{F})$ sur un ouvert $U \subset X$ est une application :

$$\sigma\colon\quad U \longrightarrow \mathsf{Germes}(\mathscr{F}) \,=\, \coprod_{\substack{x\in X\\ \text{topologisée}}} \mathscr{F}_x$$

satisfaisant $\pi \circ \sigma = \mathsf{Id}_U$, *i.e.* :

$$\sigma(x) \,\in\, \mathscr{F}_x \qquad\qquad (\forall\, x \in U),$$

et qui est *continue* pour les topologies respectives.

La continuité impose une cohérence locale entre les valeurs de σ : au voisinage d'un point x, elles doivent être données comme germes d'une même et unique section.

Lemme 3.4. *Une application ensembliste :*

$$\sigma\colon\quad U \longrightarrow \coprod_{x\in U} \mathscr{F}_x$$

satisfaisant $\sigma(x) \in \mathscr{F}_x$ *pour tout* $x \in U$ *est* continue *pour la topologie canonique sur* $\mathsf{Germes}(\mathscr{F})$ *si et seulement si :*

$$\forall\, x \in U \quad \exists\, x \in V \subset U \text{ sous-ouvert} \quad \exists\, F \in \mathscr{F}(V) \quad \Big(\forall\, y \in V \quad \sigma(y) = \rho_y(F)\Big).$$

Démonstration. En topologie générale, il y a plusieurs manières d'exprimer qu'une application $f\colon X \longrightarrow Y$ entre deux espaces topologiques est continue. Dire que l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert n'est pas adapté ici, il est préférable d'appliquer la définition équivalente :

$$\forall\, x \in X \quad \forall\, V \ni f(x) \text{ ouvert} \quad \exists\, U \ni x \text{ ouvert} \quad f(U) \subset V.$$

Or les topologies sur X et sur $\mathsf{Germes}(\mathscr{F})$ sont telles que la continuité de σ s'exprime exactement (Exercice 2) comme l'a énoncé le lemme. □

Soit toujours $\mathscr{F}$ un préfaisceau sur X. Lorsqu'on parlait de ses ensembles de sections $\mathscr{F}(U)$, le terme '*section*' devait être entendu au sens abstrait. Mais maintenant, les sections de $\mathsf{Germes}(\mathscr{F})$ sont de vraies applications entre ensembles — de même qu'en géométrie différentielle, lorsqu'on a par exemple un fibré vectoriel $\pi\colon E \longrightarrow M$ sur une variété M, ses sections $\sigma\colon U \longrightarrow E|_U$ sur des ouverts $U \subset M$ sont de vraies applications.

Par conséquent, pour toute paire d'ouverts emboîtés $V \subset U \subset X$, et pour toute section :

$$\sigma\colon\quad U \longrightarrow \coprod_{\substack{x\in U\\ \text{topologisée}}} \mathscr{F}_x,$$

il est possible d'opérer une *restriction* au sens conventionnel :

$$\sigma\big|_V\colon\quad V \longrightarrow \coprod_{\substack{x\in V\\ \text{topologisée}}} \mathscr{F}_x,$$

et puisque ces restrictions sont ce à quoi on pense, on ne les notera pas $\rho_{V,U}(\bullet)$, mais bien $(\bullet)\big|_V$.

Lemme 3.5. *À tout* pré*faisceau* $\mathscr{F}$ *sur un espace topologique* X *est associé :*

$$\widetilde{\mathscr{F}} := \mathsf{Germes}(\mathscr{F}) = \coprod_{\substack{x\in X\\ \text{topologisée}}} \mathscr{F}_x$$

qui est aussi un préfaisceau pour la collection suivante d'ensembles associés aux ouverts $U \subset X$ *:*

$$U \longmapsto \widetilde{\mathscr{F}}(U) := \big\{\text{sections continues } \sigma\colon\, U \longrightarrow \widetilde{\mathscr{F}} \text{ avec } \pi\circ\sigma = \mathsf{Id}_U\big\}.$$

Démonstration. Le fait que, pour tous ouverts $W \subset V \subset U$, on a :

$$\sigma\big|_W = \big(\sigma|_V\big)\big|_W,$$

provient instantanément du caractère ensembliste de l'opération de restriction. □

Dans la suite, l'objectif sera d'établir que Germes$(\mathscr{F})$ est même un *faisceau*. Jusqu'à présent, on n'a parlé que de préfaisceaux d'ensembles, mais quand des structures algébriques sont présentes, quelque chose doit être démontré.

Lemme 3.6. *Si $\mathscr{F}$ est un* pré*faisceau de groupes abéliens, alors $\widetilde{\mathscr{F}}$ est aussi un préfaisceau de groupes abéliens.*

Démonstration. Soit $U \subset X$ ouvert. Pour toute paire de sections :

$$\sigma_1,\, \sigma_2 \;\in\; \Gamma\big(U, \widetilde{\mathscr{F}}\big),$$

on doit faire voir que $\sigma_1 \pm \sigma_2$ appartient encore à $\Gamma\big(U, \widetilde{\mathscr{F}}\big)$, le point étant de vérifier sa continuité.

Soit un point quelconque $x \in U$. La continuité en x de σ_1, σ_2 s'exprime, d'après le Lemme 3.4, par l'existence de deux sous-ouverts $x \in V_1 \subset U$ et $x \in V_2 \subset U$ et de deux sections :

$$F_1 \,\in\, \mathscr{F}(U_1) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad F_2 \,\in\, \mathscr{F}(U_2)$$

satisfaisant :

$$\begin{aligned} \sigma_1(y) \;&=\; \rho_y(F_1) && {\scriptstyle (\forall\, y \in V_1)}, \\ \sigma_2(y) \;&=\; \rho_y(F_2) && {\scriptstyle (\forall\, y \in V_2)}. \end{aligned}$$

Prenons l'intersection $V := V_1 \cap V_2 \subset U$ et utilisons (2.4) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \sigma_1(y) \;&=\; \rho_y(F_1) \;=\; \rho_y\big(\rho_{V,U_1}(F_1)\big), \\ \sigma_2(y) \;&=\; \rho_y(F_2) \;=\; \rho_y\big(\rho_{V,U_2}(F_2)\big). \end{aligned}$$

Si donc nous introduisons

$$\rho_{V,U_1}(F_1) \pm \rho_{V,U_2}(F_2) \;=:\; G \;\in\; \mathscr{F}(V),$$

qui *est* une section du faisceau de groupes abéliens $\mathscr{F}$, alors en tout point $y \in V$:

$$\begin{aligned} \sigma_1(y) \pm \sigma_2(y) \;&=\; \rho_y\big(\rho_{V,U_1}(F_1)\big) \pm \rho_y\big(\rho_{V,U_2}(F_2)\big) \\ &=\; \rho_y\Big(\rho_{V,U_1}(F_1) \pm \rho_{V,U_2}(F_2)\Big) \\ &=\; \rho_y(G), \end{aligned}$$

ce qui démontre bien la continuité de $\sigma_1 \pm \sigma_2$ en $x \in V \subset U$, donc partout. □

Comme en géométrie (algébrique, arithmétique, différentielle), on notera :

$$\Gamma\big(U, \widetilde{\mathscr{F}}\big)$$

l'espace des sections de $\widetilde{\mathscr{F}}$ sur $U \subset X$ ouvert. De plus, le germe en un point $x \in U$ d'une section $\sigma \in \Gamma(U, \widetilde{\mathscr{F}})$ sera noté comme en géométrie sans lettre ρ, juste avec $_x$ en indice inférieur :

$$\sigma_x \;:=\; \text{germe de}\, \sigma \,\text{en}\, x. \tag{3.7}$$

3.8. Principe d'identité et séparation de la topologie. Les propriétés des fonctions holomorphes ou méromorphes sur une variété complexe motivent la définition générale suivante.

Définition 3.9. Un préfaisceau $\mathscr{F}$ sur un espace topologique X est dit satisfaire le *principe d'identité germique* si pour tout ouvert *connexe* $U \subset X$, pour toute paire de sections $F, G \in \mathscr{F}(U)$ dont les germes coïncident en au moins un point un point $x \in U$:

$$\rho_x(F) = \rho_x(G),$$

on a nécessairement $F = G$.

Théorème 3.10. *Soit X un espace topologique localement connexe séparé et soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau sur X qui satisfait le principe d'identité germique. Alors l'espace topologique* $\mathsf{Germes}(\mathscr{F}) = \coprod_{x \in X} \mathscr{F}_x$ *est séparé.*

Démonstration. Soient $F_x \in \mathscr{F}_x$ et $G_y \in \mathscr{F}_y$ deux éléments distincts : $F_x \neq G_y$, de cet espace $\mathsf{Germes}\,(\mathscr{F})$. L'objectif et de trouver deux voisinages ouverts disjoints de F_x et de G_y.

PREMIER CAS. Lorsque $\pi(F_x) = x \neq y = \pi(G_y)$, il suffit, puisque X a été supposé séparé, de prendre deux voisinages ouverts $U \ni x$ et $V \ni y$ qui sont disjoints : $U \cap V = \emptyset$, et d'observer que $\pi^{-1}(U)$ et $\pi^{-1}(V)$ sont alors automatiquement deux voisinages ouverts disjoints de F_x et de G_y.

DEUXIÈME CAS. Supposons maintenant que $y = x$. Soient alors $F \in \mathscr{F}(U)$ et $G \in \mathscr{F}(V)$ deux représentants des germes distincts $F_x \neq G_x$, à savoir satisfaisant :

$$\rho_x(F) = F_x \qquad \text{et} \qquad \rho_x(G) = G_x,$$

où U et V sont deux voisinages ouverts de x. Soit ensuite $W \subset U \cap V$ un voisinage ouvert *connexe* (il en existe par hypothèse) de x. Alors les deux ouverts de $\mathsf{Germes}\,(\mathscr{F})$:

$$\big[W,\, \rho_{W,U}(F)\big] \qquad \text{et} \qquad \big[W,\, \rho_{W,V}(G)\big]$$

sont des voisinages de F_x et de G_x, respectivement. Nous affirmons que leur intersection est vide. Sinon, il existerait un élément :

$$H_z \in \big[W,\, \rho_{W,U}(F)\big] \cap \big[W,\, \rho_{W,V}(G)\big]$$

et en sa projection $\pi(H_z) = z \in W$, les deux représentants satisferaient :

$$H = \rho_z(F) = \rho_z(G),$$

ce qui impliquerait grâce au principe d'identité germique que :

$$\rho_{W,U}(F) = \rho_{W,V}(G),$$

d'où immédiatement $F_x = G_x$ par définition des germes : contradiction ! $\square$

4. Faisceautisation des préfaisceaux

Au début de ce chapitre, nous avons adopté une terminologie qui décidait d'appeler « *sections* » les éléments $\mathscr{F}(U)$ d'un préfaisceau $\mathscr{F}$ associés à un ouvert U d'un espace topologique X. Or nous l'avons déjà dit, le terme « *section* » possède déjà — en topologie et géométrie différentielle par exemple — un sens plus spécifique : si $\pi\colon E \to M$ est un espace fibré (principal, vectoriel, *etc.*) au-dessus d'une variété lisse M, une *section* de π au-dessus d'un ouvert $U \subset M$ est — d'après une définition standard universellement admise — une application lisse $\sigma\colon U \to E$ « allant dans le sens inverse de π » qui envoie chaque point $x \in U$ dans la fibre $E_x := \pi^{-1}(x)$ « située au-dessus de lui », à savoir brièvement, une application qui satisfait $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_U$.

Or un préfaisceau $\mathscr{F}$ n'associe pas nécessairement en général à un ouvert $U \subset X$ un espace d'applications de U à valeurs dans un autre espace : $\mathscr{F}(U)$ est supposé être juste un ensemble, c'est *a priori* très abstrait. Aussi la terminologie « *sections* » pour désigner les éléments de $\mathscr{F}(U)$ est-elle légèrement en décalage avec certains autres usages.

Mais en vérité, la plupart des (pré)faisceaux que l'on rencontre dans la vie mathématique ordinaire sont de vrais espaces de « *sections* », et c'est pour cette raison que l'on s'autorise une légère confusion de langage lorsqu'on introduit la notion de préfaisceau. En effet, si M est une variété réelle de classe $\mathscr{C}^\infty$, le faisceau des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur M possède comme « *sections* » sur un ouvert quelconque $U \subset M$ les fonctions $f \in \mathscr{C}^\infty(U, \mathbb{R})$; de même, le faisceau des k-formes différentielles de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur M possède comme « *sections* » les applications $\omega \in \mathscr{C}^\infty\big(U,\, \Lambda^k T_M^*\big)$. Ce sont bien des applications définies sur des ouverts $U \subset M$. Classiquement, on utilise alors la lettre grecque « Γ » pour désigner de tels espaces de « sections » :

$$\Gamma(U, \mathscr{C}_M^\infty) \equiv \mathscr{C}^\infty(U, \mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad \Gamma(U, \Lambda^k T_M^*) \equiv \mathscr{C}^\infty\big(U,\, \Lambda^k T_M^*\big).$$

La morale de cette discussion, c'est que lorsqu'on peut interpréter un préfaisceau comme espace de « *vraies sections-applications* », alors le préfaisceau en question s'avère être un faisceau, puisque les sections, en tant qu'*applications*, satisfont automatiquement les deux axiomes d'unicité 1.4 et de recollement 1.5. C'est alors tout le sens du théorème que voici de remplacer un préfaiseau quelconque $\mathscr{F}$ par un espace de vraies sections-applications :

$$U \longmapsto \Gamma\big(U,\, \mathsf{Germes}\,(\mathscr{F})\big)$$

afin de le transformer en un vrai faisceau (*i.e.* de le « faisceautiser »), les axiomes 1.4 et 1.5 étant alors automatiquement satisfaits comme nous venons de le dire.

Prenons alors le temps d'énoncer un théorème très progressif et très détaillé qui résume ce qui a déjà été vu avant qu'y apparaissent les informations nouvelles attendues.

Théorème 4.1. [Faisceautisation d'un préfaisceau] *Sur un espace topologique X quelconque (pas nécessairement séparé), à tout un* préfaisceau *(d'ensembles, de groupes abéliens, d'espaces vectoriels) $\mathscr{F}$ sur X est associée de manière canonique la réunion disjointe des germes de $\mathscr{F}$ en tous les points $x \in X$:*

$$\widetilde{\mathscr{F}} := \coprod_{\substack{x \in X \\ \mathsf{topologis\acute{e}e}}} \mathscr{F}_x,$$

munie de la topologie dont une base d'ouverts est constituée (par définition) de tous les ensembles :

$$[U, F] := \big\{\rho_x(F) \in \widetilde{\mathscr{F}} \colon\; x \in U\big\},$$

où $U \subset X$ est un ouvert quelconque et où $F \in \mathscr{F}(U)$ est une section arbitraire.

Alors (Proposition 3.2) avec cette topologie, la projection évidente :

$$\pi \colon \quad \widetilde{\mathscr{F}} \longrightarrow X$$

qui envoie $\mathscr{F}_x$ sur x est un homéomorphisme local.

De plus et surtout, le préfaisceau des (vraies) sections continues de cette projection π :

$$U \longmapsto \Gamma\big(U,\, \widetilde{\mathscr{F}}\big) := \big\{\text{sections continues } \sigma \colon\, U \longrightarrow \widetilde{\mathscr{F}} \text{ telles que } \pi \circ \sigma = \mathsf{Id}_U\big\}$$

constitue un vrai faisceau, et les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) *$\widetilde{\mathscr{F}}$ possède les mêmes germes que $\mathscr{F}$ en tout point $x \in X$:*

$$\widetilde{\mathscr{F}}_x = \mathscr{F}_x;$$

(ii) *il existe un morphisme canonique de* préfaisceaux *:*

$$\gamma\colon \quad \mathscr{F} \longrightarrow \widetilde{\mathscr{F}}$$

défini, pour tout ouvert $U \subset X$, par :

$$\begin{aligned} \gamma_U\colon \quad \mathscr{F}(U) &\longrightarrow \Gamma\big(U, \widetilde{\mathscr{F}}\big) \\ F &\longmapsto \big(U \ni x \longmapsto \rho_x(F) \in \mathscr{F}_x\big); \end{aligned} \tag{4.2}$$

(iii) *ce morphisme γ est un isomorphisme lorsque et seulement lorsque $\mathscr{F}$ était un faisceau au départ.*

Démonstration. Afin de ne pas trop embrumer les idées directrices actives qui seules réussissent à propulser la pensée vers l'élégance et la limpidité qu'elle désire de tout son être, nous nous contenterons, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, de traiter seulement le cas de (pré)faisceaux de groupes abéliens.

Comme le Lemme 3.6 a déjà fait voir que $\widetilde{\mathscr{F}}$ est un préfaisceau de groupes abéliens, il s'agit d'établir que $\widetilde{\mathscr{F}}$ satisfait l'Axiome 1.4 d'unicité et l'Axiome 1.5 de recollement.

Or l'unicité provient directement du fait que les sections de $\widetilde{\mathscr{F}}$ sont de vraies applications entre ensembles, puisque si $U = \cup_{i \in I} U_i$ est un recouvrement ouvert d'un certain ouvert $U \subset X$, et si deux sections :

$$\sigma \in \Gamma\big(U, \widetilde{\mathscr{F}}\big) \qquad \text{et} \qquad \sigma' \in \Gamma\big(U, \widetilde{\mathscr{F}}\big),$$

coïncident entre elles après restriction à tous les U_i :

$$\sigma\big|_{U_i} = \sigma'\big|_{U_i} \qquad\qquad (\forall\, i \in I),$$

alors il est absolument instantanément clair comme l'éclair que $\sigma = \sigma'$!

Pour le recollement, soit à nouveau $U = \cup_{i \in I} U_i$ un recouvrement ouvert d'un ouvert quelconque $U \subset X$, et soient des sections continues $\sigma_i \in \Gamma(U_i, \widetilde{\mathscr{F}})$ coïncidant sur les intersections d'ouverts :

$$\sigma_i\big|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j\big|_{U_j \cap U_i}, \tag{4.3}$$

pour tous $i, j \in I$.

Pour tout $x \in U$, il existe (au moins) un indice $i(x) \in I$ tel que $x \in U_{i(x)}$, et au moyen de la section continue associée $\sigma_{i(x)} \in \Gamma(U_{i(x)}, \widetilde{\mathscr{F}})$, définissons une section globale sur U :

$$\begin{aligned} \sigma\colon \quad U &\longrightarrow \widetilde{\mathscr{F}} \\ x &\longmapsto \sigma_{i(x)}(x), \end{aligned}$$

dont la valeur ne dépend en fait pas du choix d'un indice $i(x)$, puisque lorsque $x \in U_{i'(x)}$ pour tout autre indice $i'(x) \in I$, l'hypothèse (4.3) garantit justement que $\sigma_{i'(x)}(x) = \sigma_{i(x)}(x)$. Il s'agit d'argumenter que σ est *continue*.

Observons au passage qu'en tout autre point $y \in U_{i(x)}$, il découle aussi de $y \in U_{i(y)}$ que :

$$\sigma(y) = \sigma_{i(y)}(y) = \sigma_{i(x)}(y). \tag{4.4}$$

Maintenant, soit $x \in U$, et soit $i(x) \in I$ avec $x \in U_{i(x)}$. On regarde la section $\sigma_{i(x)} \in \Gamma\big(U_{i(x)}, \widetilde{\mathscr{F}}\big)$, qui est par hypothèse continue, ce qui veut dire qu'il existe un sous-ouvert $x \in V \subset U_{i(x)}$ et il existe $F \in \mathscr{F}(V)$ tels que :

$$\sigma_{i(x)}(y) \,=\, \rho_y(F) \qquad\qquad (\forall\, y \in V).$$

Mais l'observation 4.4 qui signifie $\sigma\big|_{U_{i(x)}} = \sigma_{i(x)}$ et qui devient après restriction à V :

$$\sigma\big|_V \,=\, \sigma_{i(x)}\big|_V,$$

fournit précisément une représentation :

$$\sigma(y) \,=\, \sigma_{i(x)}(y) \,=\, \rho_y(F) \qquad\qquad (\forall\, y \in V),$$

qui exprime la continuité voulue de σ, ce qui achève de prouver que $\widetilde{\mathscr{F}}$ est un faisceau.

À présent, commençons par établir **(ii)** avant **(i)**. Soit $U \subset X$ un ouvert, et soit comme en (4.2) :

$$\begin{aligned} \gamma_U\colon \quad \mathscr{F}(U) &\longrightarrow \Gamma\big(U, \widetilde{\mathscr{F}}\big) \\ F &\longmapsto \big(U \ni x \longmapsto \rho_x(F) \in \mathscr{F}_x\big). \end{aligned}$$

Comme la section $x \longmapsto \rho_x(F)$ est continue d'après le critère du Lemme 3.4, il est clair que γ_U est à valeurs dans $\Gamma(U, \widetilde{\mathscr{F}})$. Il s'agit de vérifier que γ est un morphisme de faisceaux de groupes abéliens.

Tout d'abord, vérifions que γ_U est un homomorphisme de groupes abéliens, à savoir pour $F_1, F_2 \in \mathscr{F}(U)$, montrons qu'on a additivité $\gamma_U(F_1 \pm F_2) = \gamma_U(F_1) \pm \gamma_U(F_1)$. En introduisant la restriction :

$$\widetilde{\mathscr{F}}\big|_U \,:=\, \coprod_{\substack{x \in U \\ \text{topologisée}}} \mathscr{F}_x,$$

on calcule :

$$\begin{aligned} \gamma_U\big(F_1 \pm F_2\big) \,&=\, \begin{pmatrix} U \,\longrightarrow\, \widetilde{\mathscr{F}}\big|_U \\ x \,\longmapsto\, \rho_x(F_1 \pm F_2) \end{pmatrix} \\ \text{[Utiliser (2.3)]} \qquad &=\, \Big(x \,\longmapsto\, \rho_x(F_1) \pm \rho_x(F_2)\Big) \\ &=\, \gamma_U(F_1) \pm \gamma_U(F_2), \end{aligned}$$

ce qui montre qu'on a bien additivité.

Ensuite, établissons la commutativité du diagramme correspondant à (1.9) pour toute paire d'ouverts $V \subset U$:

(4.5)
$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\gamma_U"] \arrow[d, "\rho^{\mathscr{F}}_{V,U}"'] & \Gamma(U, \widetilde{\mathscr{F}}) \arrow[d, "\bullet|_V"] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\gamma_V"'] & \Gamma(V, \widetilde{\mathscr{F}}). \end{tikzcd}$$

En effet, pour tout $F \in \mathscr{F}(U)$, on calcule :

$$\begin{aligned}
\gamma_V\big(\rho_{V,U}^{\mathscr{F}}(F)\big) &= \left(\begin{array}{rcl} V & \longrightarrow & \widetilde{\mathscr{F}}\big|_V \\ x & \longmapsto & \underbrace{\rho_x\big(\rho_{V,U}^{\mathscr{F}}(F)\big)}_{=\rho_x(F) \text{ par } (2.4)} \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \widetilde{\mathscr{F}}\big|_U \\ x & \longmapsto & \rho_x(F) \end{array}\right)\Bigg|_V \\
&= \gamma_U\big|_V,
\end{aligned}$$

ce qui est la commutativité !

Traitons maintenant **(i)**. Fixons un point $x \in X$, rappelons la notation (3.7) pour le germe d'une section de $\widetilde{\mathscr{F}}$, et introduisons une application qui formera un isomorphisme $\mathscr{F}_x \cong \widetilde{\mathscr{F}_x}$:

$$\begin{aligned}
\Lambda\colon \quad \mathscr{F}_x &\longrightarrow \widetilde{\mathscr{F}_x} \\
f &\longmapsto \text{germe en } x \text{ de la section continue } \Big(U \ni y \longmapsto \rho_y(F) \in \widetilde{\mathscr{F}}\big|_U\Big) \\
&= \big(y \longmapsto \rho_y(F)\big)_x,
\end{aligned}$$

où le germe $f = \rho_x(F) \in \mathscr{F}_x$ est représenté par une section $F \in \mathscr{F}(U)$ dans un ouvert $U \ni x$.

Assertion 4.6. *Le résultat ne dépend pas du choix d'un représentant.*

Démonstration. Si $f = \rho_x(F) = \rho_x(F')$, on peut supposer après prise d'intersection et restriction que $F \in \mathscr{F}(V)$ et $F' \in \mathscr{F}(V)$ sont définies dans un seul et même ouvert $V \ni x$. Alors les deux sections :

$$V \ni y \longmapsto \rho_y(F) \in \widetilde{\mathscr{F}}\big|_V \qquad \text{et} \qquad V \ni y \longmapsto \rho_y(F') \in \widetilde{\mathscr{F}}\big|_V$$

coïncident au voisinage de x, donc ont même germe en x au sens (3.7). □

Assertion 4.7. *L'application Λ est un homomorphisme de groupes.*

Démonstration. Soient $f, g \in \mathscr{F}_x$ représentés par $f = \rho_x(F)$ et $g = \rho_x(G)$ dans un seul et même ouvert $V \ni x$. Alors $F + G$ représente le germe $f \pm g$, *i.e.* $f \pm g = \rho_x(F + G)$, donc :

$$\begin{aligned}
\Lambda(f+g) &= \Big(y \longmapsto \rho_y(F \pm G)\Big)_x \\
&= \Big(y \longmapsto \rho_y(F) \pm \rho_y(G)\Big)_x \\
&= \Big(y \longmapsto \rho_y(F)\Big)_x \pm \Big(y \longmapsto \rho_y(G)\Big)_x \\
&= \Lambda(f) \pm \Lambda(g),
\end{aligned}$$

et c'est ce qu'il fallait. □

Assertion 4.8. *L'homomorphisme Λ est injectif.*

Démonstration. En effet, soit $f \in \mathscr{F}_x$ avec $\Lambda(f) = 0$, représenté $f = \rho_x(F)$ par $F \in \mathscr{F}(U)$ dans un ouvert $U \ni x$. Or comme $0 = \Lambda(f)$ s'exprime par :

$$0 = \big(y \longmapsto \rho_y(F)\big)_x,$$

en particulier au point $y = x$, il vient $\rho_x(F) = f = 0$. □

Assertion 4.9. *L'homomorphisme Λ est surjectif.*

Démonstration. Par définition, un élément $g \in \widetilde{\mathscr{F}_x}$, c'est un germe $g = \sigma_x$ en x d'une section σ définie près de x, continue à valeurs dans $\widetilde{\mathscr{F}}$. Donc après rétrécissement d'ouvert, il existe $V \ni x$ ouvert, il existe $F \in \mathscr{F}(V)$ tels que :

$$g = \Big(V \ni y \longmapsto \rho_y(F) \in \widetilde{\mathscr{F}}\big|_V\Big)_x.$$

Mais alors $f := \rho_x(F)$ satisfait naturellement $\Lambda(f) = g$. □

Il reste encore à établir **(iii)**, à savoir l'équivalence :

$$\mathscr{F} \text{ est un faisceau } \iff \gamma\colon\ \mathscr{F} \longrightarrow \widetilde{\mathscr{F}} \text{ est un isomorphisme de préfaisceaux.}$$

L'implication '$\Longleftarrow$' se voit directement, par mentalisation de ce qui précède.

Traitons donc '$\Longrightarrow$'. L'hypothèse est que $\mathscr{F}$ est un faisceau. Le but est de montrer que pour tout ouvert $U \subset X$, l'application :

$$\begin{aligned} \gamma_U\colon\quad \mathscr{F}(U) &\longrightarrow \Gamma\big(U, \widetilde{\mathscr{F}}\big) \\ F &\longmapsto \Big(U \ni x \longmapsto \rho_x(F) \in \mathscr{F}_x\Big) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Si donc $\sigma \in \Gamma\big(U, \widetilde{\mathscr{F}}\big)$ est une section quelconque, nous devons montrer qu'il existe une *unique* section $F \in \mathscr{F}(U)$ antécédante, *i.e.* telle que $\gamma_U(F) = \sigma$.

D'après le Lemme 3.4, le fait que σ est continue s'exprime comme suit :

$$\forall\, x \in U \quad \exists\, x \in V_x \subset U \text{ sous-ouvert} \quad \exists\, F_x \in \mathscr{F}(V_x) \quad \Big(\forall\, y \in V_x \quad \sigma(y) = \rho_y(F_x)\Big),$$

d'où :

$$\sigma(x) = \rho_x(F_x). \tag{4.10}$$

Clairement, ceci produit un recouvrement ouvert de :

$$U = \bigcup_{x \in U} V_x.$$

Assertion 4.11. *Pour tous $x, x' \in U$:*

$$\rho_{V_x \cap V_{x'},\, V_x}\big(F_x\big) = \rho_{V_{x'} \cap V_x,\, V_{x'}}\big(F_{x'}\big).$$

Démonstration. En tout point $y \in V_x \cap V_{x'}$, on déduit de la continuité exprimée à l'instant que les deux germes en y de F_x et de $F_{x'}$ coïncident :

$$\rho_y\big(F_x\big) = \sigma(y) = \rho_y\big(F_{x'}\big),$$

ce qui veut dire qu'il existe un sous-ouvert :

$$y \in W_{x,x',y} \subset V_x \cap V_{x'},$$

en restriction auquel :

$$\rho_{W_{x,x',y},\, V_x \cap V_{x'}}\big(F_x\big) = \rho_{W_{x,x',y},\, V_{x'} \cap V_x}\big(F_{x'}\big).$$

Clairement, ceci produit un recouvrement ouvert de :

$$V_x \cap V_{x'} \;=\; \bigcup_{y \in V_x \cap V_{x'}} W_{x,x',y},$$

et ces conditions de coïncidence alliées à l'Axiome 1.4 d'unicité satisfait par le faisceau $\mathscr{F}$ donnent :

$$\rho_{V_x \cap V_{x'},\, V_x}\big(F_x\big) \;=\; \rho_{V_{x'} \cap V_x,\, V_{x'}}\big(F_{x'}\big),$$

et c'est exactement ce qui avait été asserté ! □

Ensuite presque instantanément, comme $\mathscr{F}$ est un (vrai) faisceau, l'Axiome 1.5 de recollement s'applique à ces coïncidences pour fournir une — unique par 1.4 — section $F \in \mathscr{F}(U)$ telle que :

$$\rho_{V_x,U}\big(F\big) \;=\; F_x \qquad\qquad (\forall\, x \in U),$$

d'où :

$$\rho_x(F) \;=\; \rho_x\big(\rho_{V_x,U}(F)\big) \;=\; \rho_x(F_x). \tag{4.12}$$

Maintenant, en revenant à la définition (4.2), un calcul synthétique terminal :

$$\begin{aligned}
\gamma_U(F) \;&=\; \begin{pmatrix} U \longrightarrow \widetilde{\mathscr{F}}\big|_U \\ x \longmapsto \rho_x(F) \end{pmatrix} \\
\text{[Appliquer 4.12]} \qquad &=\; \begin{pmatrix} U \longrightarrow \widetilde{\mathscr{F}}\big|_U \\ x \longmapsto \rho_x(F_x) \end{pmatrix} \\
\text{[Appliquer 4.10]} \qquad &=\; \begin{pmatrix} U \longrightarrow \widetilde{\mathscr{F}}\big|_U \\ x \longmapsto \sigma(x) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

montre qu'on a bien $\gamma_U(F) = \sigma$.

La démonstration — étendue et enrichie d'abstractions psychédéliques — du Théorème de faisceautisation d'un préfaisceau est (enfin !) achevée. □

Terminologie 4.13. On dit que $\widetilde{\mathscr{F}}$ est le *faisceau associé* au préfaisceau $\mathscr{F}$.

Exemple 4.14. [Faisceau constant associé au préfaisceau constant] Comme dans l'Exemple 1.6, soit X un espace topologique, et soit E un ensemble avec $\mathsf{Card}\, E \geqslant 2$.

Quel est le faisceau associé $\widetilde{\mathscr{E}}_X$ au préfaisceau constant $\mathscr{E}_X$?

Une section du préfaisceau constant $\mathscr{E}_X$ sur un ouvert $\emptyset \neq U \subset X$ est un élément unique $e \in \mathscr{E}_X(U) = E$, donc on peut identifier :

$$\mathscr{E}_X(U) \;=\; \big\{\text{applications } \sigma \colon U \longrightarrow E \text{ constantes}\big\}.$$

Lorsque X n'est pas connexe, l'Exemple 1.6 a fait voir que $U \longmapsto \mathscr{E}_X(U)$ n'est jamais un faisceau.

En tout cas, les germes du faisceau associé $\widetilde{\mathscr{E}}_X$ en un point arbitraire $x \in X$ sont constamment égaux (exercice) à :

$$\widetilde{\mathscr{E}}_{X,x} \;=\; \mathscr{E}_{X,x} \;=\; E \qquad\qquad (\forall\, x \in X).$$

Des définitions et propriétés vues plus haut se déduit une description agréable des espaces de sections continues $\sigma \colon U \longrightarrow \widetilde{\mathscr{E}}_X$

Assertion 4.15. *On a :*

$$\Gamma\big(U, \widetilde{\mathscr{E}_X}\big) \;=\; \Big\{\text{applications } \sigma\colon U \longrightarrow E \;\; \underbrace{\text{localement constantes}}_{\substack{\text{i.e. constantes} \\ \text{sur les composantes connexes de } U}}\Big\}.$$

De plus, la topologie canonique sur :

$$\widetilde{\mathscr{E}_X} \;=\; \mathsf{Germes}\big(\mathscr{E}_X\big) \;=\; \coprod_{\substack{x\in X \\ \text{topologisée}}} \mathscr{E}_{X,x}$$

induit sur les fibres $\widetilde{\mathscr{E}}_{X,x} = E$ la topologie discrète : tout singleton $e \in E$ est un ouvert.

Démonstration. Voir l'Exercice 4. □

En définitive, c'est l'ensemble des applications *localement constantes* $U \longrightarrow E$ qui est le bon vrai faisceau qu'il faut considérer et introduire.

Notation 4.16. Le *faisceau constant* de base X et de fibre E — à ne pas confondre avec le préfaisceau constant $\mathscr{E}_X$ — sera noté :

$$E_X \;:=\; \widetilde{\mathscr{E}_X},$$

par exemple $\mathbb{Z}_X$, $\mathbb{R}_X$, $\mathbb{C}_X$, et ses espaces de sections seront notés $\Gamma(U, E_X)$.

Parfois, au-delà de l'exemple essentiellement trivial du (pré)faisceau constant, il est (vraiment) nécessaire de passer au faisceau associé $\widetilde{\mathscr{F}}$ à un préfaisceau $\mathscr{F}$, notamment lorsque le préfaisceau en question provient d'opérations naturelles sans être un faisceau : l'Exercice 15 montre par exemple qu'une difficulté se produit lorsqu'on cherche à introduire l'*image inverse* d'un faisceau.

Quand $\mathscr{F} \cong \widetilde{\mathscr{F}}$ est un faisceau, nous venons de voir qu'il est muni d'une topologie canonique faisant de la projection :

$$\pi\colon \quad \widetilde{\mathscr{F}} \longrightarrow X$$

un homéomorphisme local surjectif. Ce fait va nous conduire à re-définir le concept de faisceau d'une manière différente (Définition 5.3) équivalente, et qui aura l'avantage de « rendre » les germes du faisceau, « visibles » comme *fibres* d'une certaine application continue.

5. Définition du concept de faisceau comme espace étalé

La théorie des faisceaux la plus générale possible peut en effet être reformulée dans le cadre « amorphe » des espaces topologiques quelconques. Commençons par rappeler deux notions topologiques « primitives » utiles.

Définition 5.1. Soient X et Y deux espaces topologiques, et soit $\tau\colon Y \longrightarrow X$ une application continue. Si $x \in X$ est un point, la *fibre* de x est l'ensemble :

$$\tau^{-1}(x) \;=\; \big\{y \in Y\colon\; \tau(y) = x\big\}.$$

Définition 5.2. Une application $\tau\colon Y \longrightarrow X$ entre deux espaces topologiques est un *homéomorphisme local* si tout point $y \in Y$ possède un voisinage ouvert V dont l'image $\tau(V) =: U \subset X$ est ouverte dans X tel que la restriction :

$$\tau\big|_V\colon \quad V \longrightarrow U$$

est un homéomorphisme.

Dans quelques instants, nous allons voir que la définition suivante de la notion de faisceau est équivalente à celle qui a déjà été vue plus haut.

Définition 5.3. Un *faisceau* $\mathscr{S}$ sur X est un espace topologique $\mathscr{S}$ muni d'une application continue :

$$\tau\colon\quad \mathscr{S} \longrightarrow X$$

qui est *surjective* et qui est un homéomorphisme local. Les fibres d'un faisceau sont alors notées :

$$\mathscr{S}_x := \tau^{-1}(x).$$

On dit aussi que $\mathscr{S}$ est un *espace étalé* au-dessus de X.

Pour l'instant, travaillons avec cette nouvelle définition. La plupart du temps, un faisceau possède une structure algébrique naturelle, la plus « simple » étant celle de groupe abélien.

Définition 5.4. Si, en tout point $x \in X$, la fibre $\mathscr{S}_x$ d'un faisceau $\tau\colon \mathscr{S} \longrightarrow X$ est un groupe abélien, et si, sur le *produit fibré* :

$$\mathscr{S} \times_X \mathscr{S} := \big\{(s_1, s_2) \in \mathscr{S} \times \mathscr{S} \colon\ \tau(s_1) = \tau(s_2)\big\},$$

les deux opérations algébriques :

$$\begin{aligned} \mathscr{S} \times_X \mathscr{S} &\longrightarrow \mathscr{S} \\ (s_1, s_2) &\longmapsto s_1 \pm s_2 \end{aligned}$$

sont continues, on dit que $\mathscr{S}$ est un *faisceau de groupes abéliens*.

En demandant que les opérations algébriques qui correspondent aux notions de groupes, d'anneaux, ou de corps, soient continues, on définit de manière similaire et aisément énonçable (exercice) les concepts de *faisceaux de groupes*, *d'anneaux*, ou *de corps*.

Exemple 5.5. [Faisceau constant, bis] Considérons $\mathbb{C}$ muni de la topologie discrète, et introduisons le produit :

$$\mathbb{C}_X := X \times \mathbb{C},$$

avec la projection $\tau\colon \mathbb{C}_X \longrightarrow X$ sur son premier facteur. Alors $\mathbb{C}_X$ est un faisceau de corps sur X (exercice), de fibres $(\mathbb{C}_X)_x \equiv \mathbb{C}$ constamment égales à $\mathbb{C}$, quel que soit $x \in X$. De manière similaire, on définit les faisceaux constants $\mathbb{R}_X \longrightarrow X$ et $\mathbb{Z}_X \longrightarrow X$.

Définition 5.6. Sur un ouvert $U \subset X$, une *section* σ d'un faisceau $\tau\colon \mathscr{S} \longrightarrow X$ est une application *continue :*

$$\sigma\colon\quad U \longrightarrow \mathscr{S}$$

satisfaisant $\tau \circ \sigma = \mathsf{Id}_U$. La collection de ces sections sera notée :

$$\Gamma(U, \mathscr{S}).$$

Les sections du faisceau constant $\mathbb{C}_X$ sont alors les applications localement constantes $U \longrightarrow \mathbb{C}$, *i.e.* constantes sur les composantes connexes de $U \subset \mathbb{C}$.

Lemme 5.7. *Si $\mathscr{S}$ est un faisceau de groupes abéliens sur X, et si $U \subset X$ est ouvert, alors pour toute paire de sections $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(U, \mathscr{S})$, on a $\sigma_1 \pm \sigma_2 \in \Gamma(U, \mathscr{S})$.*

Démonstration. Cela provient de la continuité demandée par la Définition 5.4. □

Lemme 5.8. *Sur tout ouvert $U \subset X$, l'application zéro :*

$$U \ni x \longmapsto 0_x \in \mathscr{S}_x$$

est une section continue, i.e. *appartient à* $\Gamma(U, \mathscr{S})$.

Démonstration. Soit $x \in U$ quelconque. Dans un voisinage ouvert $x \in U' \subset U$, soit une section continue quelconque $\sigma \in \Gamma(U', \mathscr{S})$. Alors $\sigma - \sigma = 0$ est continue. □

Soit un point $s \in \mathscr{S}$, et soit $x := \tau(s)$. Comme τ est un homéomorphisme local, il existe un ouvert $s \in V \subset \mathscr{S}$ tel que :

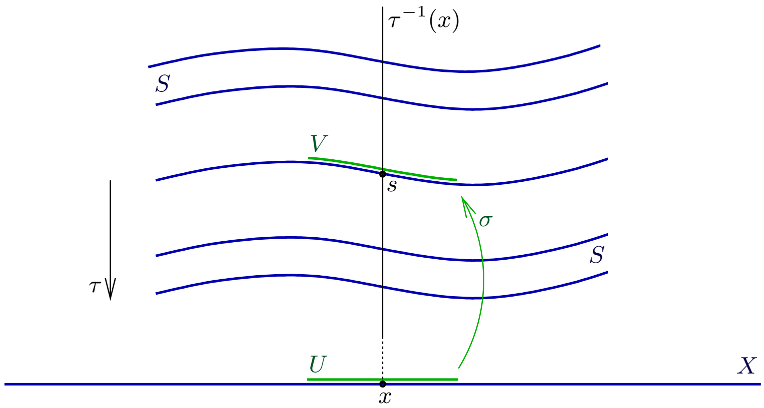
$$\tau\big|_V : \quad V \longrightarrow U := \tau(V) \subset X$$

est un homéomorphisme. Par conséquent :

$$\sigma := \big(\tau|_V\big)^{-1} : \quad U \longrightarrow V$$

est une section, $V = \sigma(U)$ est un voisinage ouvert de s, et σ est un homéomorphisme.

Proposition 5.9. *Pour tout $x \in X$, la topologie induite sur la fibre $\mathscr{S}_x = \tau^{-1}(x)$ est* discrète.



Démonstration. Les ouverts de la topologie induite sur $\tau^{-1}(x)$ sont de la forme $V \cap \tau^{-1}(x)$, où V est un ouvert de $\mathscr{S}$.

Soit un point $s \in \tau^{-1}(x)$ quelconque. Comme τ est un homéomorphisme local, il existe un ouvert $s \in V \subset \mathscr{S}$ tel que :

$$\tau\big|_V : \quad V \xrightarrow{\sim} \tau(V) =: U \subset X$$

est un homémorphisme, donc est bijectif. Pour tout autre point $s' \in V \cap \tau^{-1}(x)$, on a :

$$\tau(s') = x = \tau(s),$$

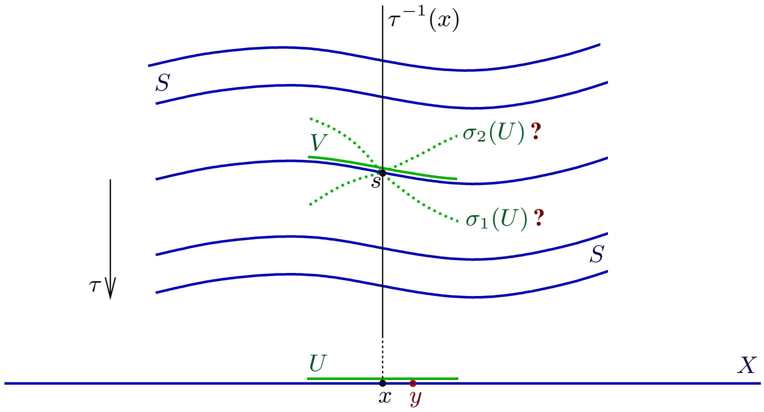
d'où en fait $s' = s$ car τ est en particulier injectif. Ainsi :

$$\{s\} = V \cap \tau^{-1}(x),$$

ce qui montre bien que les ouverts de $\tau^{-1}(x)$ sont des *singletons*. □

Proposition 5.10. *Pour tout ouvert $U \subset X$, pour toute paire de sections (continues) $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(U, \mathscr{S})$, en tout point $x \in U$, on a :*

$$\sigma_1(x) = \sigma_2(x) \iff \exists\, x \in U' \subset U \text{ sous-ouvert avec } \sigma_1\big|_{U'} = \sigma_2\big|_{U'}.$$



Démonstration. Posons :

$$s := \sigma_1(x) = \sigma_2(x) \in \tau^{-1}(x) \subset \mathscr{S}.$$

Soit un ouvert $s \in V \subset \mathscr{S}$ en restriction auquel la projection est un homéomorphisme :

$$\tau\big|_V \colon \quad V \xrightarrow{\sim} \tau(V) := U \subset X.$$

Les deux sections $\sigma_1, \sigma_2 \colon U \longrightarrow \mathscr{S}$ avec $\sigma_1(x) = \sigma_2(x) = s$ sont *continues*, donc il existe un sous-ouvert $x \in U' \subset U$ tel que :

$$\sigma_1(U') \subset V \qquad \text{et} \qquad \sigma_2(U') \subset V.$$

De plus, comme σ_1 et σ_2 sont des sections, elles satisfont pour tout $y \in U'$:

$$\tau \circ \sigma_1(y) = y = \tau \circ \sigma_2(y),$$

et comme $\tau|_V$ est en particulier injectif, on déduit :

$$\sigma_1(y) = \sigma_2(y) \qquad\qquad (\forall\, y \in U'),$$

ce qu'il fallait. □

Théorème 5.11. *Un faisceau au sens de la Définition 1.3 est un faisceau au sens de la Définition 5.3, et inversement.*

Démonstration. Soit donc $\mathscr{F}$ un faisceau au sens 1.3. Alors par le Théorème 4.1, $\mathscr{F} \cong \widetilde{\mathscr{F}}$ s'identifie à son faisceautisé, la projection :

$$\pi \colon \quad \widetilde{\mathscr{F}} \longrightarrow X$$

est un homéomorphisme local, et pour tout ouvert $U \subset X$, les espaces de sections respectifs s'identifient :

$$\mathscr{F}(U) \cong \Gamma\big(U, \widetilde{\mathscr{F}}\big),$$

donc les Définitions 5.3 et 5.6 sont satisfaites.

Inversement, soit $\tau \colon \mathscr{S} \longrightarrow X$ un homéomorphisme local surjectif, comme en 5.3. Alors le préfaisceau :

$$U \longmapsto \Gamma\big(U, \mathscr{S}\big) = \big\{\sigma \colon U \longrightarrow \mathscr{S} \text{ continues}\big\}$$

est un faisceau $\mathscr{F}'$ au sens 1.3 (exercice) avec germes égaux aux τ-fibres :

$$\mathscr{F}'_x = \tau^{-1}(x) \qquad\qquad (\forall\, x \in X),$$

et on se convainc (exercice) que :

$$\mathscr{F}' \cong \widetilde{\mathscr{F}'} \cong \mathscr{S},$$

ce qui conclut. □

Dans la suite, les faisceaux seront envisagés et étudiés selon ces deux perspectives équivantes : à la fois comme espaces de sections, et comme espaces étalés.

6. Exercices

Exercice 1. En raisonnant rigoureusement avec les classes d'équivalence, établir le Lemme 2.8.

Exercice 2. Vérifier en détail le Lemme 3.4.

Exercice 3. Soit X un espace topologique quelconque.
(a) Définir la notion de (pré)faisceau d'anneaux commutatifs unitaires $\mathscr{A}_X$ sur X.
(b) Définir la notion de (pré)faisceau de $\mathscr{A}_X$-modules $\mathscr{P}_X$ sur X.
(c) Définir la somme directe $\mathscr{P}_X \oplus \mathscr{Q}_X$ de deux préfaisceaux de $\mathscr{A}_X$-modules.
(d) Cette somme directe $\mathscr{P}_X \oplus \mathscr{Q}_X$ est-elle un faisceau ?
(e) Définir la notion de sous-faisceau de $\mathscr{A}_X$-modules $\mathscr{Q}_X \subset \mathscr{P}_X$.

Exercice 4. Démontrer l'Assertion 4.15.

Exercice 5. Comme dans l'Exercice 3, soient $\mathscr{Q}_X \subset \mathscr{P}_X$ des (sous-)faisceaux de $\mathscr{A}_X$-modules. On introduit le préfaisceau :

$$U \longmapsto \mathscr{P}_X(U)\big/\mathscr{Q}_X(U) \qquad\qquad (U \subset X \text{ ouvert}),$$

qui n'est en général pas un faisceau, comme l'a fait voir l'Observation 1.15. On introduit donc le faisceau associé par le Théorème 4.1 à ce préfaisceau, que l'on note $\mathscr{P}\big/\mathscr{Q}$.
(a) Vérifier que l'on a :

$$\big(\mathscr{P}\big/\mathscr{Q}\big)_x \cong \mathscr{P}_x\big/\mathscr{Q}_x \qquad\qquad (\forall\, x \in X).$$

(b) Lorsque $U \longmapsto \mathscr{P}_X(U)\big/\mathscr{Q}_X(U)$ n'est pas un faisceau, vérifier qu'il existe $U \subset X$ ouvert tel que :

$$\big(\mathscr{P}\big/\mathscr{Q}\big)(U) \ncong \mathscr{P}(U)\big/\mathscr{Q}(U).$$

(c) On considère l'espace topologique $X := \mathbb{R}$ muni de sa topologie standard, et, comme dans les Exemples 4.14 et 5.5 mais avec $E = \mathbb{Z}$, le *faisceau constant* $\mathbb{Z}_{\mathbb{R}}$. Avec le doubleton $\{0,1\} \subset \mathbb{R}$, pour $U \subset \mathbb{R}$ ouvert, on introduit :

$$\mathbb{Z}_{\mathbb{R}\langle 0,1\rangle}(U) := \big\{f\colon U \longrightarrow \mathbb{Z} \text{ localement constantes : } f(0)=0 \text{ si } 0 \in U,\ f(1)=0 \text{ si } 0 \in U\big\}.$$

Vérifier que $U \longmapsto \mathbb{Z}_{\mathbb{R}\langle 0,1\rangle}(U)$ constitue un faiceau.
(d) Montrer que :

$$\Gamma\big(\mathbb{R}, \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}\big)\Big/\Gamma\big(\mathbb{R},\, \mathbb{Z}_{\mathbb{R}\langle 0,1\rangle}\big) \cong \mathbb{Z}/\{0\} = \mathbb{Z}.$$

(e) Montrer que :

$$\Gamma\Big(\mathbb{R},\, \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}/\mathbb{Z}_{\mathbb{R}\langle 0,1\rangle}\Big) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

et interpréter.

Exercice 6. Pour $U \subset \mathbb{C}$ ouvert, soit $\mathscr{G}(U)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions holomorphes bornées $f\colon U \to \mathbb{C}$. Pour un couple d'ouverts $U \subset V$, soit $\mathscr{G}(V) \longrightarrow \mathscr{G}(U)$ l'application usuelle de restriction. Montrer que le préfaisceau $\mathscr{G}$ satisfait l'axiome d'unicité 1.4, mais pas l'axiome de recollement 1.5.

Exercice 7. Pour $U \subset \mathbb{C}$ ouvert, soit $\mathscr{O}_{\mathbb{C}}(U)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur U, et soit $\mathscr{O}_{\mathbb{C}}^*(U)$ le sous-ensemble des fonctions holomorphes nulle part égales à zéro. On pose :

$$\mathscr{F}(U) := \mathscr{O}_{\mathbb{C}}^*(U)\big/\exp\big(\mathscr{O}_{\mathbb{C}}(U)\big).$$

Montrer que $U \longmapsto \mathscr{F}(U)$, muni des applications usuelles de restriction, est un préfaisceau qui ne satisfait pas l'axiome d'unicité 1.4.

Exercice 8. Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, avec $n \geqslant 1$. Pour $U \subset \Omega$ ouvert, soit :

$$\mathscr{O}_\Omega(U) \,:=\, \big\{f\colon U \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphe}\big\}.$$

(a) Montrer que $U \longmapsto \mathscr{O}_\Omega(U)$ constitue un faisceau d'anneaux commutatifs unitaires.

(b) En un point $z_0 \in \Omega$, identifier le germe $\mathscr{O}_{\Omega,z_0}$.

(c) Montrer que $\mathscr{O}_{\Omega,z_0}$ est un anneau *local*, *i.e.* n'ayant qu'un unique idéal maximal, lequel sera noté $\mathfrak{m}_{\Omega,z_0}$.

(d) Pour $k \geqslant 1$ entier, décrire explicitement :

$$\big(\mathfrak{m}_{\Omega,z_0}\big)^k \qquad \text{ainsi que :} \qquad \mathscr{O}_{\Omega,z_0}\Big/\big(\mathfrak{m}_{\Omega,z_0}\big)^k.$$

(e) La topologie sur Germes $\mathscr{O}_\Omega$ est-elle séparée ?

Exercice 9. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, ouvert. Soit $E \subset \Omega$ un sous-ensemble quelconque. On définit le *faisceau d'idéaux* $\mathscr{I}_E$ de E, pour tout sous-ouvert $U \subset \Omega$, par :

$$\mathscr{I}_E(U) \,:=\, \big\{f \in \mathscr{O}(U)\colon\; f(z) = 0,\; \forall\, z \,\in\, E \cap U\big\}.$$

(a) Montrer que $U \longmapsto \mathscr{I}_E(U)$ constitue un faisceau.

(b) Montrer que chaque germe $\mathscr{I}_{E,z_0}$ en un point $z_0 \in \Omega$ est un idéal de l'anneau $\mathscr{O}_{\Omega,z_0}$.

(c) Lorsque $E = \{a\}$ se réduit à un point-singleton unique $a \in \Omega$, calculer les germes $\mathscr{I}_{E,z}$ en tout point $z \in \Omega$.

Exercice 10. Soit X un espace topologique. Pour $U \subset X$ ouvert, soit le préfaisceau :

$$\mathscr{F}(U) \,:=\, \big\{\text{fonctions } F\colon U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ bornées : } -\infty \,<\, \inf_U f \,\leqslant\, \sup_U f \,<\, \infty\big\}.$$

(a) Vérifier que $\mathscr{F}$ n'est pas en général un faisceau.

(b) Montrer que le préfaisceau associé $\widetilde{\mathscr{F}}$ est le faisceau des fonctions localement bornées sur X.

(c) Montrer que $\widetilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F}$ si et seulement si, de tout recouvrement de X par une famille d'ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini, *i.e.* X est un espace topologique compact.

Exercice 11. [Faisceau gratte-ciel] Soit X un espace topologique séparé (Hausdorff), soit $x_0 \in X$ un point fixé, soit E un ensemble quelconque, et soit $e \in E$ un élément fixé. Pour $U \subset X$ ouvert, soit :

$$\mathscr{E}_{\uparrow x_0 \uparrow}(U) \,:=\, \begin{cases} E & \text{lorsque } U \ni x_0, \\ \{e\} & \text{lorsque } U \not\ni x_0, \end{cases}$$

et, pour $V \subset U \subset X$ sous-ouverts :

$$\rho_{V,U} \,:=\, \begin{cases} \mathsf{Id}_E & \text{lorsque } x_0 \in V \subset U, \\ E \longrightarrow \{e\} & \text{lorsque } x_0 \notin V. \end{cases}$$

(a) Montrer que $\mathscr{E}_{\uparrow x_0 \uparrow}$ est un faisceau d'ensembles.

(b) Montrer que ses germes en des points $x \in X$ sont :

$$\big(\mathscr{E}_{\uparrow x_0 \uparrow}\big)_x \,=\, \begin{cases} \{e\} & \text{lorsque } x \neq x_0, \\ E & \text{lorsque } x = x_0. \end{cases}$$

Exercice 12. Soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau arbitraire sur un espace topologique quelconque X. Montrer que le faisceau canoniquement associé à $\mathscr{F}$:

$$\widetilde{\mathscr{F}} \,=\, \coprod_{\substack{x \in X \\ \text{topologisée}}} \mathscr{F}_x,$$

qui vient accompagné d'un morphisme de préfaisceaux naturel :

$$\gamma\colon\;\; \mathscr{F} \longrightarrow \widetilde{\mathscr{F}},$$

est caractérisé par la propriété universelle suivante. Pour tout morphisme de préfaisceaux sur X :

$$\varphi\colon\; \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$$

dont l'espace image $\mathscr{G}$ est un *vrai* faisceau, il existe un unique morphisme de faisceaux (en pointillés) qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathscr{G} \\ \widetilde{\mathscr{F}}. \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

Exercice 13. Soit $\varphi\colon \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ un morphisme de faisceaux sur un espace topologique X pour une certaine structure algébrique (groupes abéliens, anneaux, $\mathbb{A}$-modules, $\mathbb{A}$-algèbres, $\mathbb{K}$-espaces vectoriels). On rappelle que par la Proposition 2.9, φ induit, pour tout $x \in X$, un morphisme entre germes $\varphi_x\colon \mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{G}_x$.

(a) Montrer que φ est injectif si et seulement si φ_x est injectif pour tout $x \in X$.

(b) Montrer que φ est un isomorphisme si et seulement si φ_x est un isomorphisme pour tout $x \in X$.

(c) Soit $X := \mathbb{C}\backslash\{0\}$, soit $\mathscr{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X, et soit $\mathscr{O}_X^*$ le faisceau des fonctions holomorphes nulle part égales à zéro. Montrer que l'application exponentielle $\varphi\colon \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_X^*$ est surjective sur les germes.

(d) Montrer enfin que $\varphi(X)$ n'est pas surjective, et interpréter cela.

Exercice 14. [Image directe d'un faisceau] Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques, et soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau d'ensembles sur X.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, squiggly] \arrow[d, dotted] & f_*\mathscr{F} \arrow[d, dotted] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Pour tout ouvert $V \subset Y$, on introduit :

$$f_*(\mathscr{F})(V) := \mathscr{F}\big(f^1(V)\big).$$

(a) Montrer que $V \longmapsto f_*(\mathscr{F})(V)$ constitue un préfaisceau sur Y.

(b) Lorsque $\mathscr{F}$ est un faisceau, montrer que $f_*(\mathscr{F})$ est un faisceau.

Exercice 15. [Image inverse d'un faisceau] Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques, et soit $\mathscr{G}$ un préfaisceau d'ensembles sur Y.

$$\begin{tikzcd} f^{-1}\mathscr{G} \arrow[d, dotted] & \mathscr{G} \arrow[l, squiggly] \arrow[d, dotted] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Pour $U \subset X$ ouvert, on introduit :

$$f^{-1}\mathscr{G}(U) := \varinjlim_{\substack{W \supset f(U) \\ \text{ouvert}}} \mathscr{G}(W).$$

(a) Montrer que $U \longmapsto f^{-1}\mathscr{G}(U)$ constitue un préfaisceau sur X.

(b) Lorsque $\mathscr{G}$ est un faisceau (sur Y), montrer par un exemple que ce procédé ne fournit pas en général un faisceau (sur X).

(b) Comment, alors, définir un faisceau sur X, aussi noté $f^{-1}\mathscr{G}$, de manière naturelle ?

Exercice 16. Montrer que la topologie canonique sur l'espace des germes $\mathsf{Germes}(\mathscr{C}_{\mathbb{R}}^{\infty})$ du faisceau $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}^{\infty}$ des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbb{R}$ n'est pas séparée (Hausdorff).

Exercice 17. EE