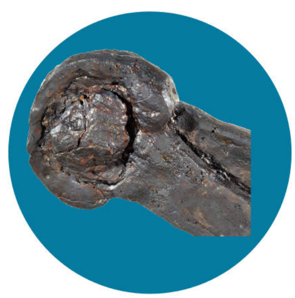
Constructions à la règle et au compas

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

> C'est au cours d'une méditation que je découvre cette chose — évidente à vrai dire pour peu qu'on se pose la question — que dans ma démarche spontanée à la découverte des choses, que ce soit en mathématiques ou ailleurs, le « ton de base » est « *yin* », « *féminin* », et aussi et surtout, que contrairement à ce qui se passe le plus souvent, je suis resté fidèle à cette nature originelle en moi, sans jamais l'infléchir ou la corriger pour me conformer aux valeurs dominantes en honneur dans les milieux environnants.
>
> Alexandre GROTHENDIECK†

1. Compas celtes (gaulois)

L'archéologie démontre qu'à partir du V$^{\text{ème}}$ siècle avant Jésus-Christ, l'art celtique a commencé à élaborer des instruments de précision pour dessiner des décors géométriques, architecturaux, artistiques.



Les premières « machines à tracer des cercles » ont disparu, et elles étaient probablement fabriquées en bois.

Mais certains compas[1] métalliques gaulois « à pas variables » se sont conservés. Voici l'un d'entre eux, retrouvé sur le site de l'*Oppidum de Bibracte*[2].

Jambes mobiles, écartement variable : le principe n'a pas évolué depuis plus de deux mille cinq cent ans !

1. Le terme est un *déverbal* — on prend le verbe, et on enlève le caractère verbal — de *compasser*, lui-même issu du bas latin *compassare* signifiant *mesurer avec le pas*, qui s'est spécialisé dans le sens actuel dès le XII$^{\text{ème}}$ siècle.

2. La ville de Bibracte était la capitale des *Éduens*, peuple celte (gaulois) qui a connu son apogée au I$^{\text{er}}$ siècle avant Jésus-Christ. Centre névralgique du pouvoir de l'aristocratie éduenne, Bibracte fut aussi un lieu d'artisanat et de commerce où se côtoyaient mineurs, forgerons, frappeurs de monnaie.

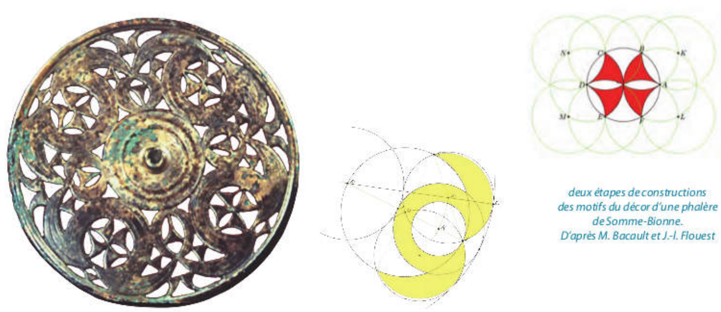
Au sommet du *Mont Beuvray* dans le Massif du Morvan, à 850 m d'altitude, cette métropole disparue était situé sur le territoire actuel des communes de Saint-Léger-sous-Beuvray (Saône-et-Loire), de Glux-en-Glenne et de Larochemillay (Nièvre).

Les compas deviennent abondants dans les fouilles archéologiques à partir de la fin du IIème avant Jésus-Christ.

Phalère de bronze ajourée dessinée au compas, de la sépulture à char de Cuperly (Marne)
Début du IVe siècle av. J. -C. Saint-Germain-en-Laye. Musée des Antiquités nationales. Dessins d'après M. Bacault et J.-l. Flouest.

Déjà au tout début de l'âge du Fer, à savoir aux Vème et IVème siècles avant J.-C., on trouve des motifs circulaires très raffinés, notamment sur des vases en céramique, sur des sculptures en os, sur des fourreaux d'épé en fer, sur des coupes à boire en or, sur des pièces de harnachement en bronze.

Rosaces, croissants, amandes, pétales, lunules, enchevêtrements élégants d'arcs de cercles : l'art de prestige fourmille de réussites esthétiques.



Phalère de bronze ajourée dessinée au compas, de la sépulture à char de Somme-Bionne (Marne).
Début du IVe siècle av. J. -C. Londres British Museum. Dessins d'après M. Bacault et J.-l. Flouest.

Comme le laisse deviner le raffinement de phalères [3] en bronze ajouré remarquablement conservées, certaines figures géométriques ne peuvent avoir été construites que sur des bases mathématiques extrêmement bien maîtrisées.

Depuis le 25 septembre 1984, le site héberge le *Musée de la civilisation celtique*, lequel retrace la vie de cette cité de quelque 5 à 10 milliers d'âmes au sein d'un oppidum fortifié que les fouilles archéologiques du mont Beuvray ont révélé peu à peu.

3. Dans l'Antiquité romaine, les *phalères* étaient des plaques métalliques brillantes utilisées comme ornement (signets d'un casque, par exemple).

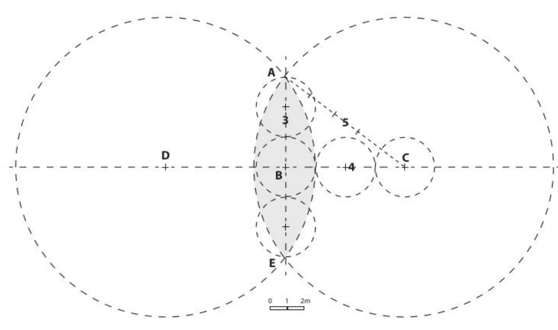
Décor ajouré en feuille d'or d'une coupe. Schwarzenbach (Allemagne). Ve siècle av. J.-C.
Schéma d'interprétation d'après Lenerz-De Wilde

Les archéologues ont pu démontrer que le découpage d'un cercle en n parties égales, pour $n = 3, 4, 5, 15$, était généralement maîtrisé par les artistes celtes.

Mais relativement peu de motifs polygonaux à six côtés réguliers (hexagonaux) semblent avoir existé, probablement parce qu'ils étaient trop simples à réaliser.

C'est le motif pentagonal régulier (cinq côtés), qui témoignait de la valeur de l'artiste, en raison de la difficulté relative d'exécution.

Comme exemple de l'excellence de l'art dès le Vème siècle avant J.-C., citons la phalère de Somme-Bionne sur-Retourne qui présente 9 demi-cercles, et dont le décor a nécessité le tracé de 120 cercles, ainsi que la phalère de Cuperly, qui a demandé 193 cercles de 8 à 10 rayons différents, soit 180 coups de compas !



Si l'utilisation du compas est flagrante dans l'art décoratif, il peut aussi, mais plus rarement, s'illustrer dans l'architecture, bien que de moindre valeur d'apparât.

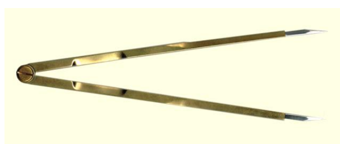
Le bassin monumental de Bibracte en est un exemple.

2. **Compas divers**

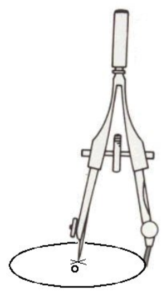
Un compas est un instrument de géométrie qui sert à tracer des cercles ou des arcs de cercle, mais aussi à comparer, à reporter ou à mesurer des distances. Il est constitué de deux branches jointes par une articulation. Les compas sont, ou ont été, utilisés en mathématiques, en architecture, en dessin industriel, en géographie.

Les Grecs attribuaient son invention à Talos, le neveu de Dédale.


Dans l'inconographie, le compas est un instrument de mesure du monde, témoin d'une concentration mathématique avisée.



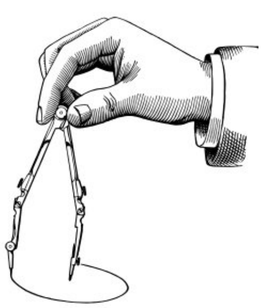





3. Prologue sur les constructions à la règle et au compas et sur les problèmes impossibles

Si l'on souhaite réussir à enseigner de belles *Mathématiques à l'École* avec une élégance proche de celle des Grecs, il importe de soigner, face à un public d'enfants attentifs et curieux, l'aspect *dynamique et esthétique* des constructions géométriques.

Les constructions de géométrie dans le plan trouvent leurs racines dans la haute Antiquité, et elles ont connu un essor spectaculaire dans les mathématiques grecques.



Les constructions à la règle et au compas occupent une place considérable dans les *Éléments d'Euclide*. Pour les mathématiciens Grecs, les cercles et les droites sont des figures *idéales*, puisqu'en elles, tous les défauts et toutes les impuretés de leurs réalisations physiques — dans le sable, au tableau, sur un papyrus — ont disparu.

Presque tous les problèmes de construction géométrique à la règle et au compas que l'on sait résoudre aujourd'hui étaient déjà parfaitement maîtrisés par les Grecs.

Euclide a fondé sa géométrie sur un système d'axiomes qui assure en particulier qu'il est toujours possible de tracer une droite passant par deux points donnés et qu'il est toujours possible de tracer un cercle de centre donné et passant par un point donné. *La géométrie d'Euclide est donc la géométrie des droites et des cercles, tracés à la règle et au compas.* L'intuition (conjecturale) d'Euclide était que tout point géométrique pouvait être construit, ou « obtenu », à l'aide de ces deux instruments. En particulier, tout « nombre » devait pouvoir être accessible comme grandeur géométrique constructible.

Mais une telle conjecture fondée sur une croyance intuitive en la puissance des objets géométriques avait déjà été remise en question chez les Grecs. On savait en effet depuis l'École de Pythagore que les nombres rationnels ne suffisent pas à exprimer toutes les longueurs géométriques, puisque la diagonale d'un carré de côté 1, qui correspond au nombre $\sqrt{2}$, ne peut jamais s'exprimer comme une fraction $\frac{p}{q}$ avec deux entiers non nuls $p, q \in \mathbb{N}^*$. Rappelons en effet :

Théorème 3.1. *Le nombre :*

$$\sqrt{2} \,=\, 1,\, 41421356237309504880 1689\cdots$$

n'est pas rationnel, à savoir plus précisément, pour tous entiers $p,\ q \in \mathbb{N}^*$*, on a :*

$$\sqrt{2} \,\neq\, \frac{p}{q}.$$

Démonstration. Ce théorème bien connu et considéré comme très élémentaire par les mathématiciens contemporains est en fait beaucoup plus subtil, complexe et puissant qu'il semble en avoir l'air.

En effet, il affirme que dans l'univers extrêmement grand de toutes les fractions rationnelles $\frac{p}{q}$, aucune ne donne la valeur exacte de $\sqrt{2}$. Ceci est quelque peu contre-intuitif, car l'on sait que les fractions rationnelles, avec de grands nombres entiers, peuvent approximer tout nombre réel à un nombre quelconque de décimales près.

Voici par exemple le développement décimal d'une fraction rationnelle de taille pas si modeste que cela :

$$\frac{12345678}{23456789} \,=\, 0,\, 5263157715\cdots.$$

Et d'ailleurs, si l'on veut par exemple capturer les 15 première décimales de :

$$\sqrt{2} \,=\, \mathbf{1},\, \mathbf{414213562373095}048801689\cdots,$$

il suffit évidemment de choisir la fraction :

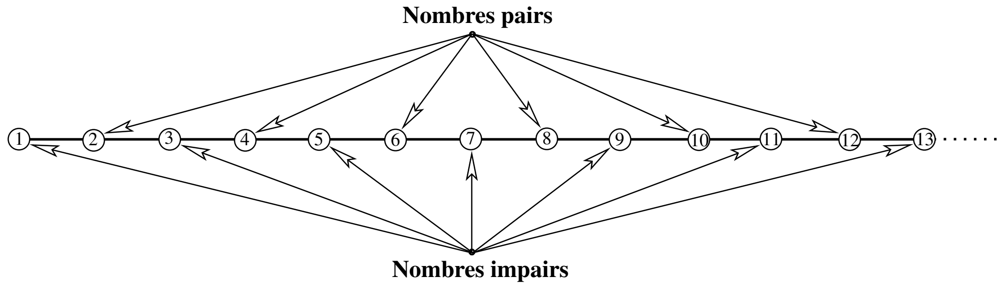
$$\frac{p}{q} := \frac{\mathbf{1414213562373095}}{\mathbf{1000000000000000}}.$$

La force du théorème, c'est que quelle que soit la complexité de deux entiers $p,\ q \in \mathbb{N}^*$, on ne pourra jamais capturer avec $\frac{p}{q}$ *toutes* les décimales de $\sqrt{2}$ *jusqu'à l'infini* !

Pour démontrer cela, supposons au contraire, en raisonnant par contradiction, qu'il soit possible de représenter :

$$\sqrt{2} \,=\, \frac{p}{q}.$$

Rappelons qu'un nombre entier $r \in \mathbb{N}^*$ quelconque est toujours soit pair, soit impair.



On peut écrire cela sous forme d'une réunion disjointe :

$$\mathbb{N}^* = \big(2\,\mathbb{N}^*\big) \cup \big(2\mathbb{N}+1\big).$$

Par définition, *être pair*, c'est être multiple de 2. Tout nombre pair $r \in 2\,\mathbb{N}^*$ est donc de la forme :

$$r = 2\,r',$$

avec $r' \in \mathbb{N}^*$. Mais à nouveau, r' est ou bien pair ou bien impair. Lorsque r' est pair, on écrit :

$$r' = 2\,r'',$$

d'où :

$$r = 2\,r' = 2\,2\,r'' = 2^2\,r''.$$

Par récurrence, on se convainc aisément que la chasse à la présence d'un facteur 2 doit se terminer, et donc, que tout nombre $r \in \mathbb{N}^*$ s'écrit de manière unique comme :

$$r = 2^a\,\overline{r},$$

avec un certain entier-exposant $a \geqslant 0$ et avec un certain reste-facteur $\overline{r} \in 2\,\mathbb{N}+1$ qui est *impair*.

Alors en revenant à la question de savoir si l'on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, décomposons de la sorte :

$$p = 2^a\,\overline{p} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad q = 2^b\,\overline{q},$$

avec $a, b \geqslant 0$ et avec deux restes-facteurs *impairs* $\overline{p}, \overline{q} \in 2\,\mathbb{N}+1$.

Par règle de simplification des fractions, lorsque $a \geqslant b$, on peut écrire :

$$\frac{p}{q} = \frac{2^a\,\overline{p}}{2^b\,\overline{q}} = \frac{2^{a-b}\,\overline{p}}{\overline{q}} = \frac{\textsf{nouveau}\,p}{\textsf{nouveau}\,q\,\textsf{impair}},$$

et de même lorsque $b \geqslant a$:

$$\frac{p}{q} = \frac{2^a\,\overline{p}}{2^b\,\overline{q}} = \frac{\overline{p}}{2^{b-a}\,\overline{q}} = \frac{\textsf{nouveau}\,p\,\textsf{impair}}{\textsf{nouveau}\,q}.$$

En résumé, nous avons donc montré que si jamais l'on pouvait écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ sous forme d'une fraction, dans les deux cas, on pourrait alors toujours se ramener à une nouvelle fraction :

$$\sqrt{2} = \frac{p'}{q'},$$

dont les deux nouveaux éléments p' et q' *ne sont pas tous les deux des nombres pairs* : au moins l'un d'eux est impair.

Et c'est là que tout va se « casser la gueule », puisqu'en élevant au carré :

$$2 = \frac{p'^2}{q'^2},$$

puis en chassant le dénominateur :

$$2\, q'^2 \;=\; p'^2,$$

on obtient une identité montrant que p'^2 est *pair*. Or on se souvient par réminiscence arithméticienne que tout nombre *impair* $1 + 2\,r$ possède un carré qui est *aussi* impair :

$$\big(1 + 2\,r\big)^2 \;=\; 1 + \underbrace{4\,r + 2^2\,r^2}_{\text{pair!}},$$

donc si p'^2 est pair, c'est que p' lui-même *doit* être pair :

$$p' \;=\; 2\,p''.$$

Mais alors l'identité laissée en chemin devient :

$$2\, q'^2 \;=\; \big(2\,p''\big)^2,$$

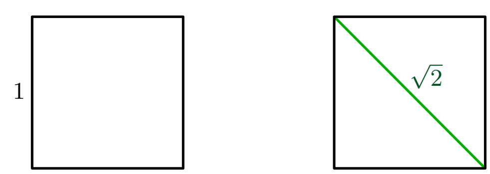
ce qui, après division par 2, fournit une identité :

$$q'^2 \;=\; 2\,p''^2,$$

qui montre que q' *doit lui aussi être pair !*

Nous débouchons donc malencontreusement sur la conséquence que p' est pair et que q' est lui aussi pair, en contradiction avec la réduction à laquelle nous étions parvenus.

Conclusion : puisque l'hypothèse $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ nous a conduit à une contradiction, c'est qu'elle est fausse, donc le Théorème est juste ! ! $\square$



Néanmoins, bien que $\sqrt{2}$ soit un nombre irrationnel, il est très facilement accessible à la règle et au compas, puisque dès qu'on possède un carré de côté 1, le compas peut être « piqué » en deux sommets diagonalement opposés dans le carré, ce qui construit $\sqrt{2}$.

Le traité géométrique des *Éléments* d'Euclide, de par sa puissance et sa nouveauté, a contribué pendant deux millénaires à engager la communauté mathématique dans la recherche de résolutions de problèmes de plus en plus difficiles, et ce avec une confiance très forte. En effet, puisque $\sqrt{2}$ est constructible à la règle et au compas, et (*voir* plus bas) puisque toutes les racines $\sqrt{n}$ sont elles aussi constructibles à la règle et au compas, pendant près de 2000 ans, les mathématiciens-géomètres ont été persuadés que la règle et le compas permettraient d'atteindre toutes les longueurs visibles naturellement dans le plan. Les géométres Grecs considéraient que la droite et le cercle sont les deux seules figures fondamentales, parfaites, idéales, et ils ne validaient un problème de construction que s'il était réalisé à la règle et au compas.

Mais historiquement parlant, *trois ou quatre* problèmes épineux ont indéfiniment résisté à l'assaut des chercheurs, amateurs ou 'professionnels', sans jamais épargner leurs souffrances.

Les plus connus de ces problèmes très difficiles sont :

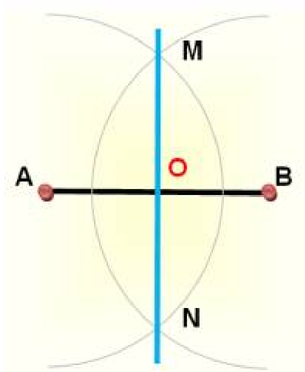
• la quadrature du cercle (le plus difficile de tous) ;

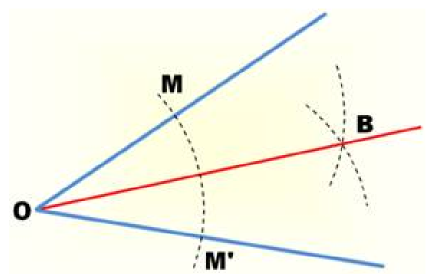
• la construction d'un polygone régulier à 7 côtés ;

• la duplication du cube (le plus 'mélancolique' de tous) ;

• la trisection de l'angle.

3.1. **Bissection et trisection d'un angle quelconque.** Il se trouve que les deux constructions les plus simples et naturelles à la règle et au compas sont :





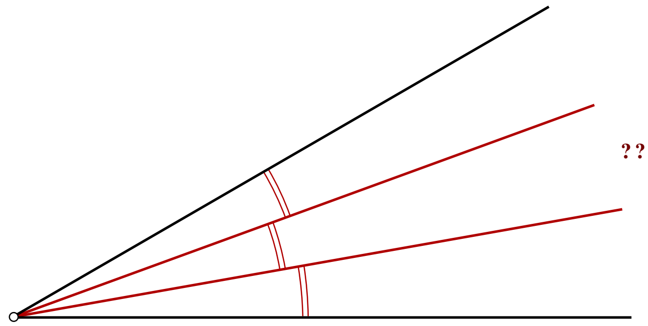
☐ la *médiatrice* d'un segment AB (nous effectuons un rappel page 18 plus bas) ;

☐ la *bissectrice* d'un angle entre deux demi-droites (nous effectuons aussi un rappel page 33 plus bas).

Ensuite, puisque après le chiffre 2, tout le monde sait — même les Australopithèques — qu'il y a le chiffre 3, il est naturel de se demander si l'on peut diviser un segment un trois parties égales ? et aussi, si l'on peut diviser un angle en trois parties égales ?

Or diviser un segment donné en trois segments de longueurs égales est assez facile avec une règle et un compas (nous effectuons aussi un rappel de cette construction page 34 plus bas).

Au contraire, *diviser un angle en trois parties égales à la règle et au compas est un problème que les Grecs n'ont pas su résoudre*.



Problème légué par les Grecs. *Peut-on toujours, à la règle et au compas, diviser un angle donné en trois parties égales ?*

C'est un des premiers problèmes qui a fait très mal pendant très longtemps.

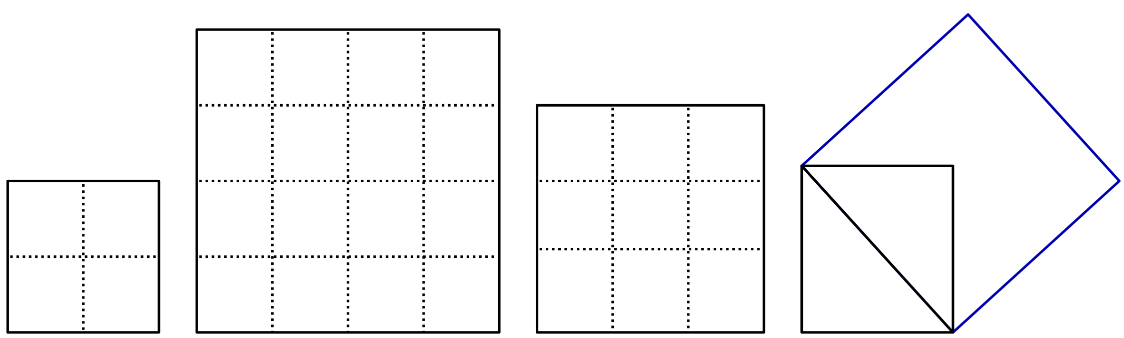
3.2. **Duplication du carré et duplication du cube.** Ensuite, étant donné un carré de côté de longueur 1, donc d'aire $1 \cdot 1 = 1$, il est facile de trouver un carré d'aire double : il suffit de tracer la diagonale, et de former (avec une règle et un compas) un nouveau carré sur cette diagonale [4].

4. Dans le dialogue socratique *Le Ménon* de Platon, Ménon est un aristocrate noble de Thessalie originaire de Pharsale, mercenaire des Perses, élève sophiste, et ami du rhéteur sophiste Gorgias.

À la demande de Socrate qui veut illustrer sa *Théorie de la réminiscence*, Ménon fait venir l'un de ses esclaves.

Socrate trace un carré dont il marque les transversales (en gras et pointillé) et il demande au jeune esclave de trouver la marche à suivre pour construire un carré dont la surface serait le double de l'original (en gras). Le côté du carré vaut 2. Il a donc une surface de 4, et il faut construire un carré dont l'aire vaut 8.

L'esclave répond qu'il faut doubler la longueur des côtés. Cette réponse erronée (pourquoi ?) constitue alors un premier pas vers la réminiscence.



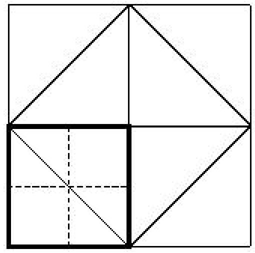
Socrate demande en effet alors à Ménon d'observer l'esclave en train de se remémorer la suite, « car c'est ainsi qu'on doit se remémorer ».

Puis pour containcre l'esclave de son erreur, Socrate trace le carré de côté double : il faut se rendre à l'évidence, son aire n'est pas deux, mais quatre fois plus grande, elle vaut $4 \cdot 4 = 16$, soit le double de 8, l'aire recherchée.

L'esclave propose alors de construire un carré dont le côté vaut 3. Mais un tel carré a une aire de 9, ce qui n'est pas non plus le résultat demandé.

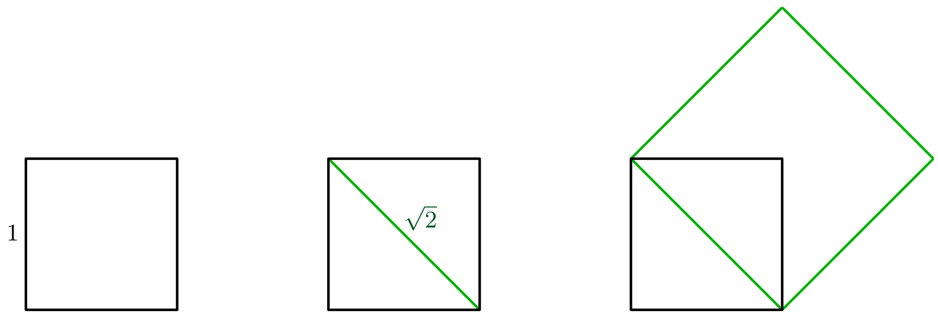
L'esclave est désormais dans l'embarras, ce qui rappelle une forme de torpeur que Ménon avait déjà éprouvée face à Socrate, lequel y fait explicitement allusion en utilisant le terme de *raie-torpille*, un poisson qui se défend en provoquant des électrochocs.

Mais selon Socrate, l'esclave a, sans s'en rendre compte, déjà parcouru du chemin : « à présent le voilà qui considère désormais qu'il est dans l'embarras, et tandis qu'il ne sait pas, au moins ne croit-il pas non plus



Alors le nouveau carré sera effectivement d'aire double :

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 = 2 \cdot 1^2.$$



Mais qu'en est-il pour un cube ?

Étant donné un cube peut-on construire un cube ayant le double du volume ? Sachant que le volume d'un cube de côté de longueur $a > 0$ vaut :

$$a^3,$$

il s'agit de construire un nouveau cube de côté $b > 0$ tel que :

$$b^3 \;=\; 2\, a^3,$$

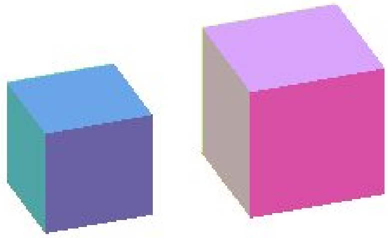
et en se ramenant à $a = 1$ après normalisation, cela revient à construire un cube de côté de longueur :

$$b \;=\; \sqrt[3]{2}.$$

qu'il sait ». Il est maintenant dans une meilleure situation qu'avant, et Ménon en convient. En particulier, cela est profitable parce que *jamais on ne cherche ce que l'on croit savoir*.

Socrate trace les diagonales. Il apparaît que le carré construit sur la diagonale du carré initial est le carré recherché. L'esclave le découvre et affirme maintenant que c'est sur cette ligne que l'on construit un carré deux fois plus grand que le premier — ce qu'il ignorait complètement un instant auparavant.

Conséquences générales sur la Théorie de la Réminiscence de Socrate. La connaissance mathématique se tire de notre propre fonds — sinon l'esclave aurait soit reçu la connaissance à un moment donné, soit il la possèderait depuis toujours. Pour posséder une connaissance, puisque la vérité est depuis toujours inscrite dans l'âme (immortelle), ce que l'on se trouve ne pas savoir à un momement donné, c'est-à-dire ce dont on ne se *souvient* pas, c'est avec assurance et confiance que l'on doit s'efforcer de le chercher et de se le remémorer. Socrate insiste sur les conséquences les meilleures selon lui : il faut oublier le scepticisme des sophistes pour lui préférer *l'ardeur et le zèle dans la recherche*.



Problème légué par les Grecs. *Peut-on toujours, à la règle et au compas, étant donné un segment de longueur* 1, *construire un segment de longueur :*

$$\sqrt[3]{2}\,?$$

L'histoire raconte que l'oracle de l'île de Délos demanda que l'on double l'autel de forme cubique dédié à Apollon afin d'apaiser la colère des Dieux et de débarrasser l'île de la peste. Les déliens (habitants de l'île de Délos) qui doublèrent alors la longueur des côtés du cube ne résolurent pas le problème puisqu'ils multiplièrent ainsi le volume de l'autel par huit. La peste redoubla d'intensité et les déliens, désemparés, allèrent trouver Platon qui leur déclara qu'il est très préjudiciable aux grecs de négliger les mathématiques et la géométrie.

Dans la célèbre gravure d'Albrecht Dürer intitulée « *Melancholia* », l'ange est figure principale de la composition. Masculin ? Féminin ? Il serait *personnification* de la géométrie et/ou de la mélancolie [5].

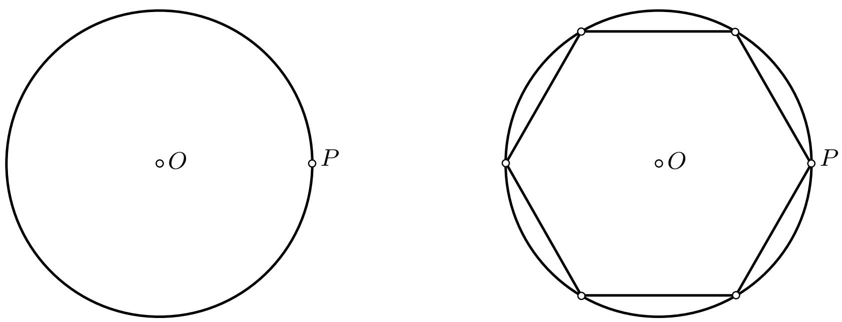
Une interprétation possible de cette gravure est la suivante. Dans un monde humain sous l'emprise des ténèbres, Dürer laisse entrevoir une aspiration vers un monde angélique éloigné, l'homme espérant accéder à une lumière divine oubliée.

5. Étymologiquement, mélancolie signifie *bile noire humeur noire*. Un tempérament mélancolique comporte parfois dépression, neurasthénie.

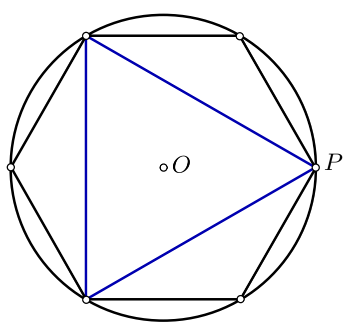
La gravure comporte aussi un aspect allégorique [6], puisque le *putto* [7] et l'ange sont deux figures allégoriques parallèles (par leurs ailes). Assis tous deux, tournés dans la même direction, ils tiennent des objets semblables, et notamment, un compas. Perchée sur une roue de meunier, ou sur une meule à aiguiser, la figure du *putto* rappelle manifestement l'imagerie de la *Rota fortuna* médiévale. Loin de se ressembler, les deux personnages s'opposent : le plus petit est occupé à griffonner, tandis que le plus grand semble avoir abandonné toute velléité.

Les outils sur le sol, près du grand ange, se rapportent au travail de la pierre, et peut-être sont ils destinés à évoquer la réduction en pierre cubique du grand polyèdre, problème vraisemblablement difficile et source de *mélancolie*.

3.3. **Pentagone régulier, heptagone régulier.** Tous les écoliers savent construire à la règle et au compas un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre O : en partant d'un point P sur le cercle, il suffit simplement de reporter 6 fois avec un compas, le rayon $\mathrm{dist}(O, P)$.



En choisissant un sommet sur deux, il est facile de déduire d'un hexagone régulier un triangle équilatéral inscrit dans le même cercle.

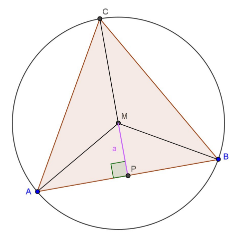


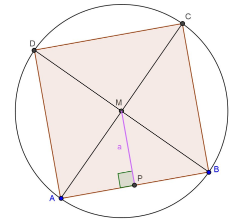
Il est facile, aussi, de construire un carré inscrit dans un cercle.

6. Dans l'Art littéraire, une *allégorie* consiste en une narration inventée, souvent accompagnée de descriptions métaphoriques dont les éléments sont cohérents, afin de représenter avec précision une idée générale de la Pensée. « *Le Roman de la Rose, longue allégorie de la conquête amoureuse* ».

Dans les Arts plastiques, l'allégorie consiste en une représentation d'entités abstraites par des êtres animés, auxquels sont associés des attributs symboliques. « *L'allégorie du Printemps, par Sandro Botticelli* ».

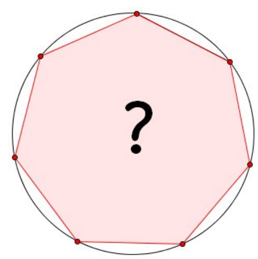
7. Jeune garçon nu représentant l'Amour, dans la peinture italienne.





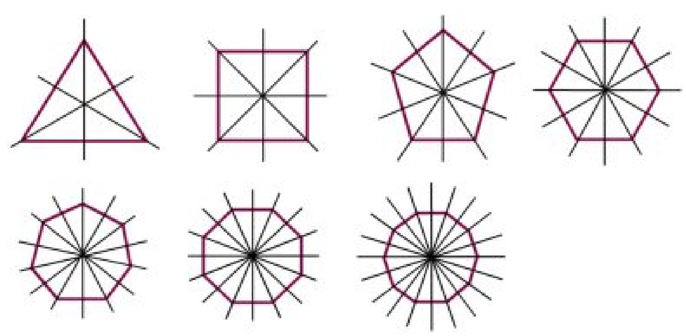
Bien que cela soit moins élémentaires, il existe plusieurs constructions à la règle et au compas d'un *pentagone* régulier — 5 côtés tous de même longueur — inscrit dans un cercle, lesquelles seront présentées ultérieurement.

Ensuite, puisque l'on sait construire des polygones réguliers inscrits dans un cercle ayant 3, 4, 5, 6 côtés, on espère pouvoir faire de même pour un polygone à 7 côtés.

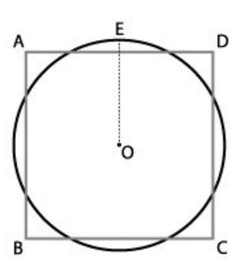


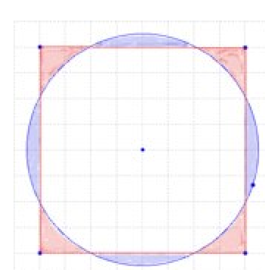
C'est encore un problème que les Grecs n'ont pas su résoudre !

Problème légué par les Grecs. *Peut-on toujours, à la règle et au compas, étant donné un cercle de rayon* 1*, construire un polygone régulier à* 7 *côtés ? à* 9 *côtés ? à* 11 *côtés ? à* 13 *côtés ? etc.*



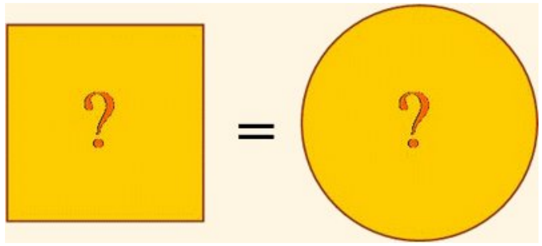
3.4. **Quadrature du cercle.** Partant d'un disque dans le plan, le problème demande de construire un carré dont l'aire est égale à celle du disque.





Le carré ayant pour côté $c > 0$ et le cercle pour rayon $r > 0$, le problème revient à résoudre — à la règle et au compas ! — l'équation :

$$c^2 = \pi r^2.$$



Grégoire de Saint-Vincent[8] était tellement passionné par le problème qu'il écrivit un ouvrage de 1000 pages, et il estimait (erronément !) l'avoir résolu.

Ce problème est resté populaire et de nombreux quadrateurs amateurs envoient encore aujourd'hui de fausses preuves aux académies scientifiques.

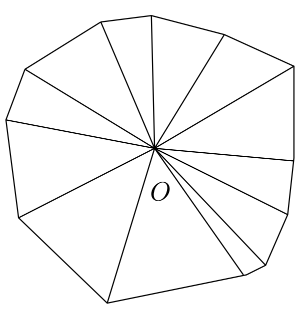
Métaphoriquement et encore de nos jours, « *Chercher la quadrature du cercle* » est une expression désignant un problème insurmontable.

En tout cas, rappelons qu'il revient au même de savoir si l'on peut construire à la règle et au compas un segment de longueur égale, non à l'aire, mais à la *circonférence* :

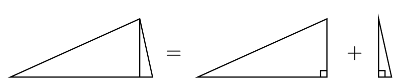
$$2\pi r,$$

d'un cercle donné de rayon $r > 0$.

En effet, c'est dans le traité d'Archimède intitulé *La Mesure du Cercle* que l'on trouve les premières démonstrations connues et rigoureuses relatives à π. Nous ne possédons d'ailleurs qu'une copie relativement tardive de ce traité et la pensée originale du savant syracusain nous est certainement parvenue déformée. Il semble que c'est Antiphon[9] qui proposa le premier de quarrer le cercle en construisant des polygones ayant un nombre de côtés de plus en plus grand. Motivé par l'échec d'Anaxagore, Antiphon prétendait avoir résolu par cela la quadrature du cercle. En effet, on sait construire un carré de même aire qu'un polygone régulier.



Pour quarrer un polygone convexe arbitraire (et en particulier un polygone régulier inscrit dans un cercle, comme Antiphon, il suffit de diviser le polygone en un nombre fini de triangles centrés un un point O. Chaque triangle est bien sûr quarrable, car il est équivalent à un rectangle d'aire égale, comme le montre d'abord la figure suivante :



et le lecteur vérifiera par lui-même que tout triangle rectangle est équivalent à un rectangle d'aire égale.

Hélas, toute la difficulté est de savoir si l'on atteint vraiment le cercle en un nombre fini d'étapes ou "à la limite", si les Grecs pouvaient donner un sens à ce terme au V^e siècle.

8. 1584–1667, jésuite, mathématicien et géomètre de l'école belge, connu pour le lien qu'il effectua entre la fonction logarithme et les aires de sections d'hyperboles.

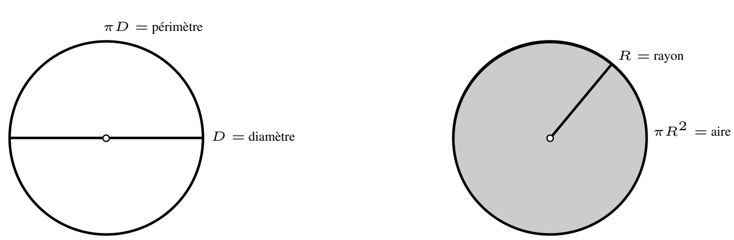
9. Grand orateur Athénien du V[ème] siècle avant J.-C., sophiste hédoniste et aristocrate convaincu.

La chose n'est pas très claire à l'époque et Antiphon soutient que puisqu'on peut quarrer individuellement chacun des polygones réguliers inscrits qui approximent le disque avec une précision arbitraire, alors on peut aussi quarrer le cercle. L'erreur qu'il commet constitue un obstacle épistémologique classique : la non-commutativité de certaines relations logiques, ici par exemple, le fait que si pour tout n, le polygone $P_{3.2^n}$ à 3.2^n côtés est quarrable, alors pour $n = \infty$, le cercle $\mathscr{C} = P_\infty$ est lui aussi quarrable ; de même, l'interversion d'une limite et d'une intégrale, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,dx$ n'est pas toujours justifiée ; et pour prendre un exemple contemporain d'Antiphon, il n'est pas vrai que $\sqrt{2}$ soit rationnel bien que $\sqrt{2}$ puisse être approché par des nombres rationnels avec une précision arbitraire...

L'idée des constructions géométriques par approximations en nombre infini est née à cette époque, et c'est Eudoxe de Cnide (408–355 avant J.-C.) puis Archimède qui poussèrent le plus loin ce qu'on appelle le *principe d'exhaustion* : en prenant un nombre assez grand de figures géométriques rectilignes qui approximent par le haut et par le bas la longueur, l'aire ou le volume d'une figure géométrique courbe, on peut calculer rigoureusement leur longueur, leur aire et leur volume : on les a *recouvertes exhaustivement* par des figures quarrables qui encadrent la figure courbe. Le calcul de π est l'exemple le plus paradigmatique de la méthode d'exhaustion.

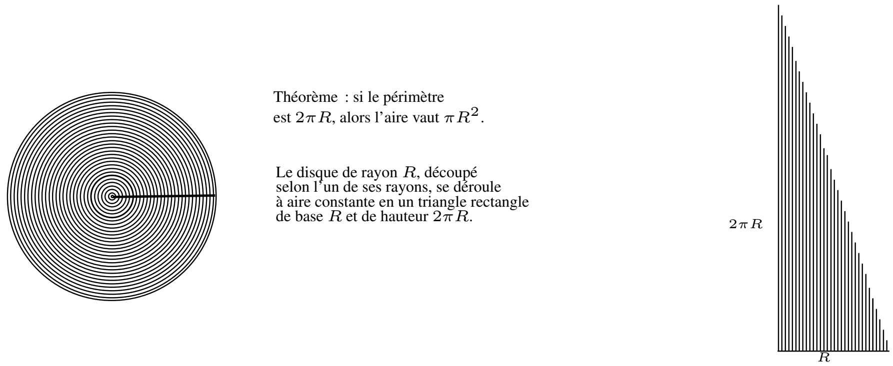
Mais nous avons oublié jusqu'à présent de définir le nombre π. Par définition, π est égal au rapport de la circonférence d'un cercle sur son diamètre. Un cercle est l'ensemble des points qui sont équidistants d'un point fixé dans le plan. Mais π est aussi le nombre égal au rapport de l'aire d'un disque sur le carré de son rayon. La définition de ce nombre cache en vérité trois théorèmes, tous démontrés rigoureusement par Archimède en utilisant la *méthode d'exhaustion* sur laquelle nous allons revenir.

Théorème 3.2. *Le rapport du périmère d'un cercle sur son diamètre est une constante qui ne dépend pas du diamètre du cercle.*



Théorème 3.3. *Le rapport de l'aire d'un disque sur le carré de son rayon est une constante qui ne dépend pas du rayon du disque.*

Théorème 3.4. *Ces deux constantes sont égales à un nombre que l'on note π.*



Je laisse au lecteur le soin de démontrer par lui-même les trois théorème ci-dessus. Nous allons maintenant voir comment l'on calcule π par la méthode d'exhaustion.

3.5. **Extension et limites des constructions à la règle et au compas.** $\boxed{\textbf{Fill ??}}$

Ensuite, il va s'agir de conceptualiser la notion de construction géométrique avec les deux moyens physiques naturels dont disposaient les Grecs, à savoir une règle et un compas, et de se poser des questions concernant la puissance de ces moyens.

En effet, les mathématiques plus récentes sont parvenues à comprendre quelle était l'extension maximale des constructions à la règle et au compas.

Commençons par présenter un catalogue de procédés de construction.

4. **Géométrie métrique dans le plan euclidien** $\mathbb{R}^2$

Soit le plan euclidien réel :

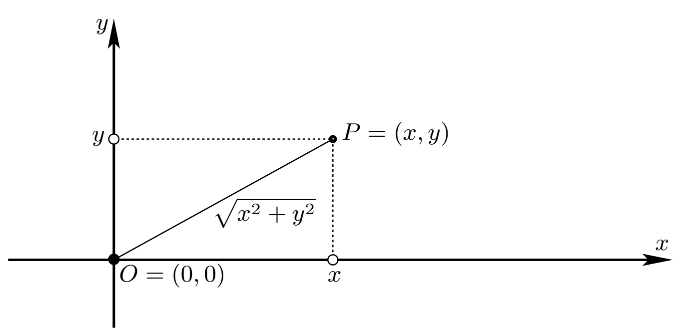
$$\mathscr{P} := \mathbb{R}^2 = \big\{(x,y)\colon\ x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\big\},$$

contenant l'origine comme point central :

$$O := (0,0).$$

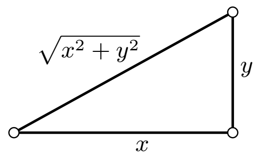
Soit $P = (x,y)$ un point quelconque de ce plan. La *distance euclidienne standard* entre O et P est définie comme étant :

$$\mathsf{dist}(O,P) := \sqrt{x^2+y^2}.$$



Lorsque le plan $\mathscr{P} = \mathbb{R}^2$ est vu comme *espace vectoriel* (espace de vecteurs), la distance entre O et P est égale à la *norme euclidienne* (longueur) du vecteur allant du point O au point P :

$$\mathsf{dist}(O,P) \,=\, \big\|\overrightarrow{OP}\big\|.$$



Et bien entendu aussi, la figure en coordonnées cartésiennes incorpore le :

Théorème de Pythagore. *Dans un triangle rectangle de côtés x et y, le carré de la longueur de l'hypothénuse et égal à la somme des carrés des deux côtés :*

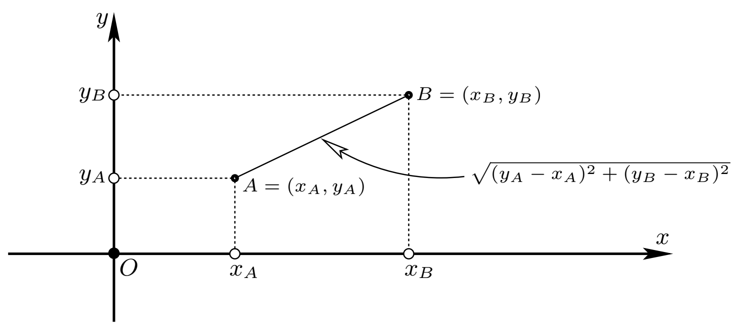
$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2+y^2. \qquad \square$$

Plus généralement, étant donné deux points quelconques de $\mathscr{P}$:

$$A = (x_A, y_A) \qquad \text{et} \qquad B = (x_B, y_B),$$

la *distance* entre A et B est la quantité :

$$\mathsf{dist}(A, B) := \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$



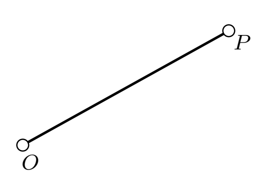
Cest aussi la *norme euclidienne* du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

À partir de maintenant, nous allons raisonner comme si tous nos objets vivaient dans le plan cartésien de coordonnées (x, y) dans $\mathbb{R}^2$, afin de nous assurer que toutes nos constructions sont bien fondées.

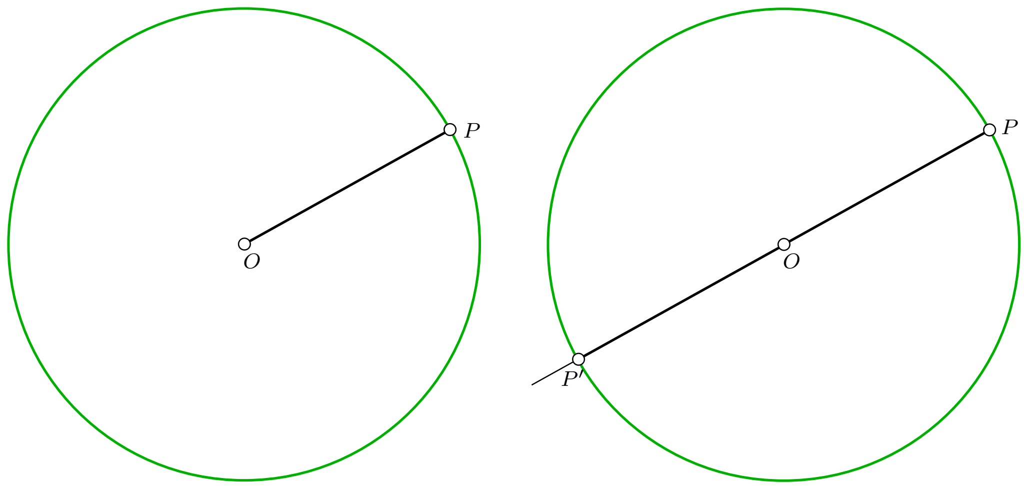
5. Symétrique d'un point par rapport à un point central

Fixons un point $O \in \mathscr{P}$. Il n'est pas nécessaire de penser que ce point O est l'origine, puisque nous allons effectuer des constructions géométriques sans utiliser de coordonnées cartésiennes (x, y), en procédant comme le faisaient Euclide et ses contemporains.

- Soit à nouveau $P \in \mathscr{P}$ un point quelconque du plan.
- Traçons le segment OP.



- Traçons le cercle de centre O passant par P.
- Traçons la droite (OP).



• Alors cette droite (OP) intersecte le cercle en un unique autre point P', appelé le *symétrique de* P *par rapport à* O.

Proposition 5.1. *Le symétrique* P' *d'un point* P *par rapport à un point* O *est constructible à la règle et au compas.*

Démonstration. En effet, on a utilisé la règle pour tracer un segment, puis le compas pour tracer un cercle, et enfin la règle pour prolonger le segment. □

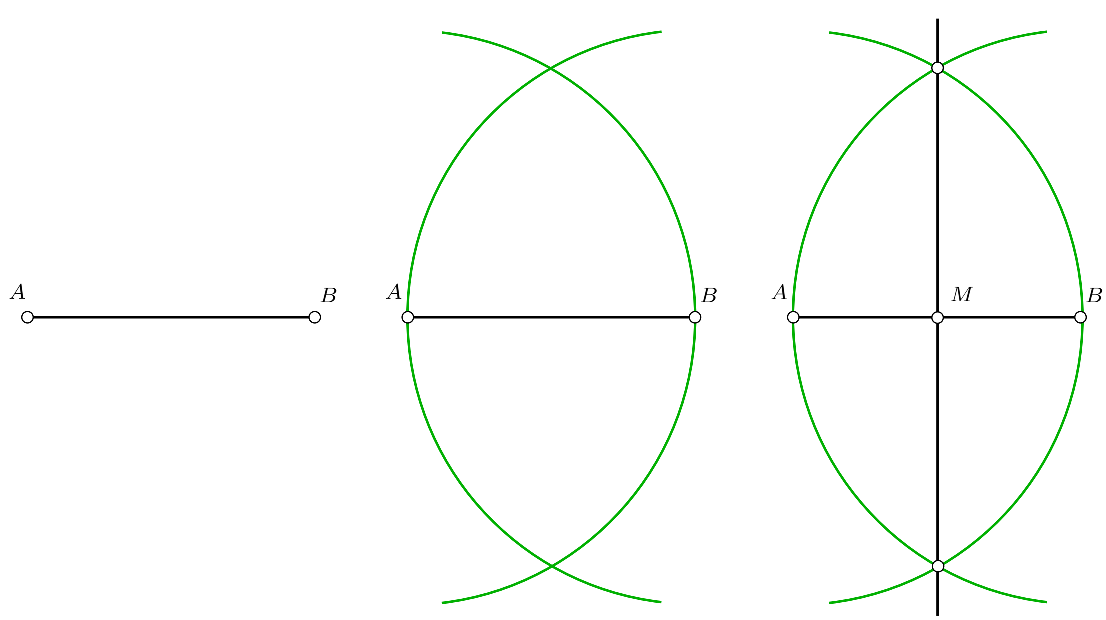
6. Médiatrice d'un segment

Soient A, B deux points quelconques distincts dans le plan $\mathscr{P}$.

Question. *Comment construire le lieu des points* $P \in \mathscr{P}$ *situés à distance égale de* A *et de* B *:*

$$\big\{P \in \mathscr{P} \colon \ \mathsf{dist}(P, A) = \mathsf{dist}(P, B)\big\} \,?$$

• Traçons le segment AB.



• Traçons le cercle de centre A passant par B.

• Traçons aussi le cercle de centre B passant par A.

• Ces deux cercles s'intersectent en deux points.

• Traçons la droite passant par ces deux points : c'est la *médiatrice* [10], le lieu des points *équidistants* (à distance égale) de A et de B, et ce lieu est une droite !

• D'ailleurs, cette droite intersecte AB en un point M, qui n'est autre que le *milieu* de AB.

Proposition 6.1. *La médiatrice :*

$$\big\{P \in \mathscr{P} : \ \mathsf{dist}(P, A) = \mathsf{dist}(P, B)\big\}$$

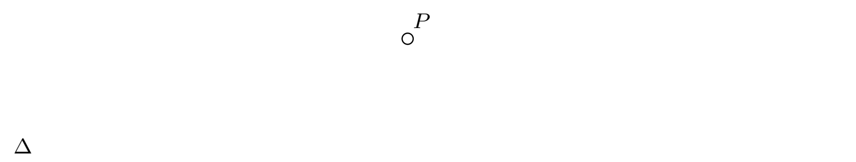
d'un segment AB quelconque dans le plan $\mathscr{P}$ est constructible à la règle et au compas. Elle est perpendiculaire à la droite (AB).

Le milieu M du segment AB est lui aussi constructible à la règle et au compas, car c'est l'intersection entre AB et sa médiatrice. □

7. Perpendiculaire à une droite, passant par un point donné

• Soit Δ une droite dans le plan $\mathscr{P}$.

• Soit $P \in \mathscr{P}$ un point quelconque *non situé* sur la droite Δ.

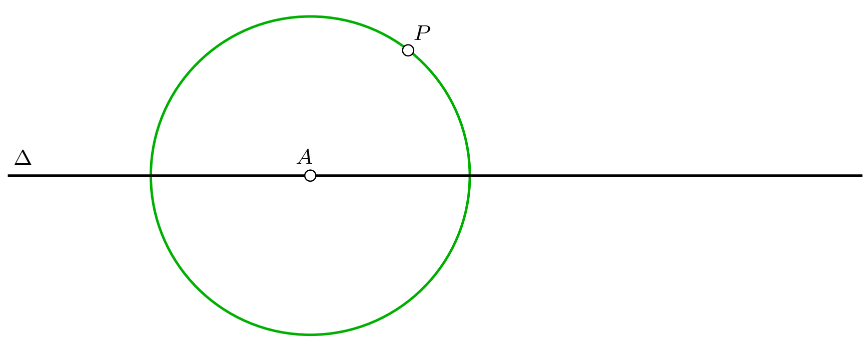


Question. *Comment construire la droite perpendiculaire à Δ qui passe par P ?*

C'est très simple.

• Choisissons au hasard un point $A \in \Delta$, pas trop éloigné de P.

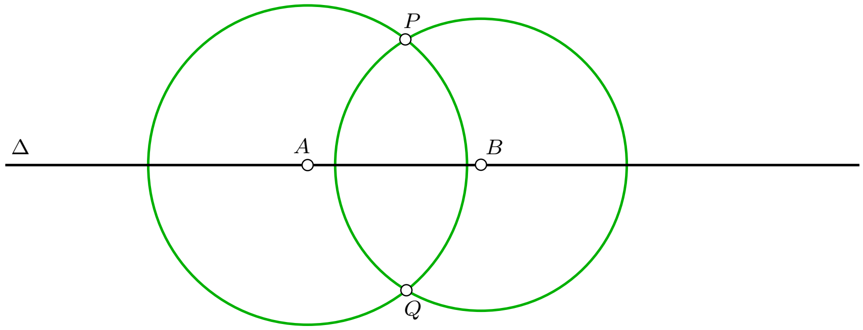
• Traçons le cercle de centre A passant par P.



• Choisissons aussi un autre point B sur la droite Δ.

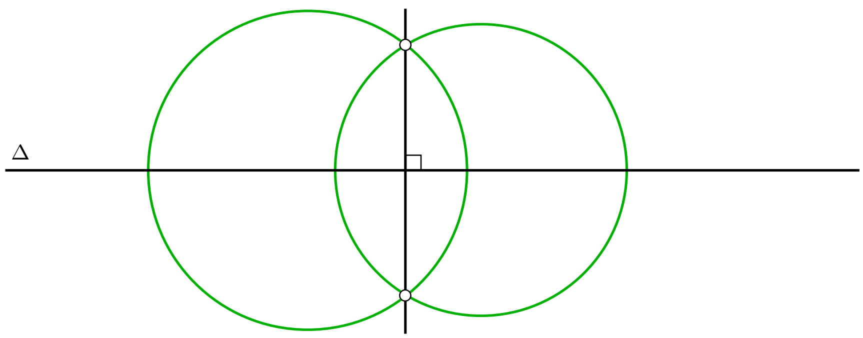
• Traçons aussi le cercle de centre B passant par P.

10. Cette construction remonte (au moins) à Œnopide de Chio, au V$^{\text{ème}}$ siècle avant J.-C..



• Ces deux cercles s'intersectent au point P (évidemment !), mais aussi en un autre point Q.

• La droite (PQ) est alors la droite recherchée, perpendiculaire à Δ passant par P.



Proposition 7.1. *La droite perpendiculaire à une droite donnée Δ passant par un point $P \notin \Delta$ est constructible à la règle et au compas.* □

8. Parallèle à une droite passant par un point donné

Soit Δ une droite dans le plan $\mathscr{P}$, et soit un point quelconque :

$$P \notin \Delta.$$

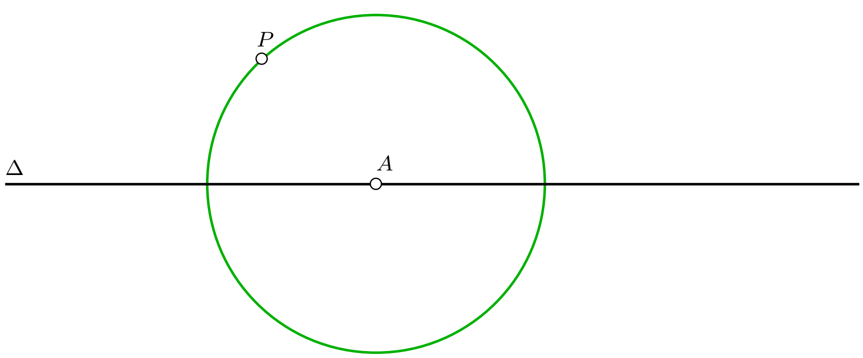
Question. *Comment construire la droite parallèle à Δ qui passe par P ?*

L'Exercice 3 propose une construction utilisant la construction des droites perpendiculaires qui vient d'être vue plus haut.

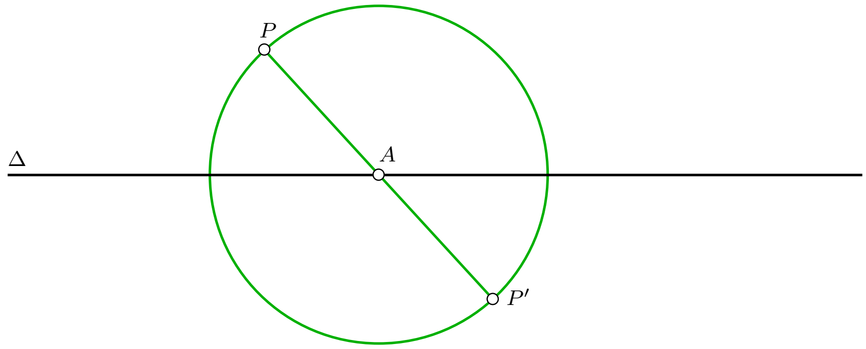
Mais il existe une méthode un peu plus rapide, et surtout, plus esthétique.

• Choisissons au hasard un point $A \in \Delta$ (pas trop loin de P).

• Traçons le cercle de centre A passant par P.

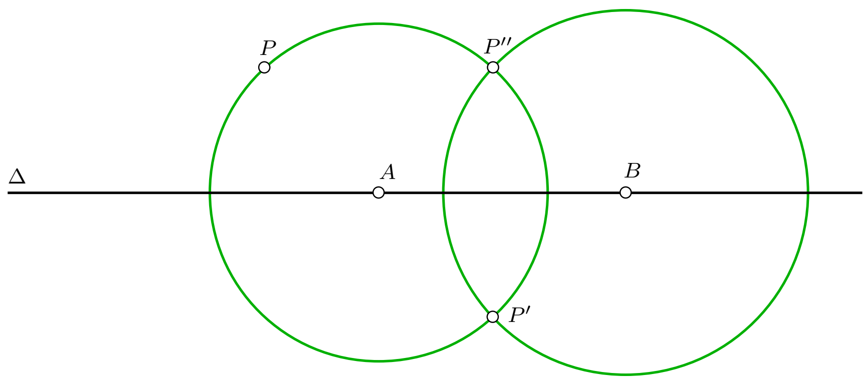


• Traçons la droite (PA), laquelle intersecte le cercle en un point P', symétrique de P par rapport à A.



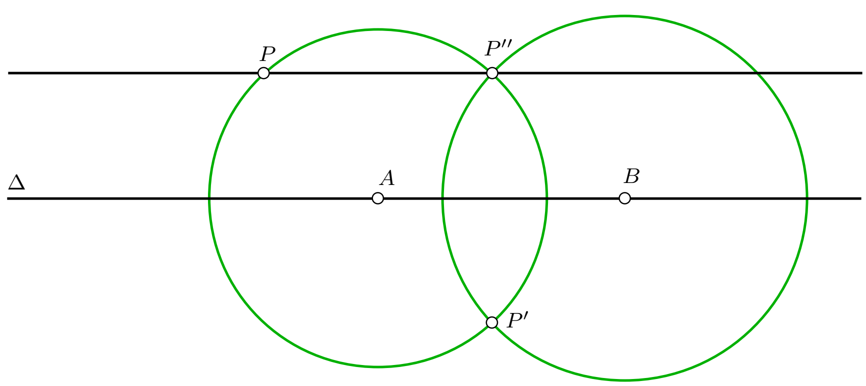
• Choissisons un autre point $B \in \Delta$ sur la droite Δ hors de l'intérieur de ce disque.

• Traçons le cercle de centre B passant par P'.



• Les deux cercles s'intersectent alors en P', et en un autre point P''.

• Alors la droite (PP'') est la parallèle à Δ passant par P.

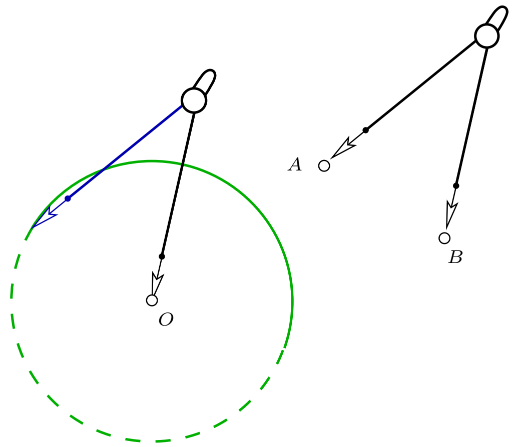


Proposition 8.1. *La droite parallèle à une droite donnée Δ passant par un point donné $P \notin \Delta$ est constructible à la règle et au compas.* □

9. Report de compas

• Soient deux point A et B dans le plan $\mathscr{P}$.

• Pointons les deux flèches du compas exactement sur A et sur B.



• Soit O un autre point du plan $\mathscr{P}$.

• À la main, déplaçons le compas, et piquons l'une de ses pointes sur O.

• Traçons le cercle de centre O et de rayon la distance entre A et B.

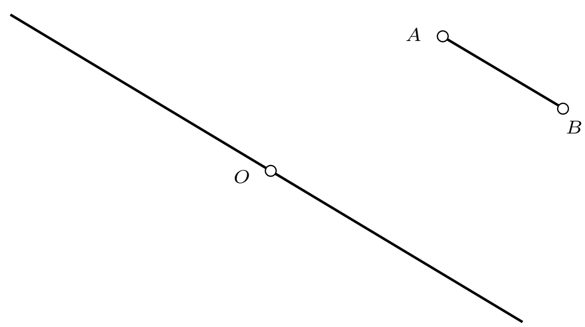
Observation. Ici, le nouveau cercle n'est pas tracé à partir de O et d'un autre point du plan que l'on connaîtrait déjà.

Question. *Mais pourrait-on quand même tracer un cercle de centre O et de rayon* $\mathsf{dist}(A, B)$ *en construisant, à la règle et au compas, un certain nouveau point situé à la bonne distance de O ?*

Nous affirmons que la réponse est : oui !

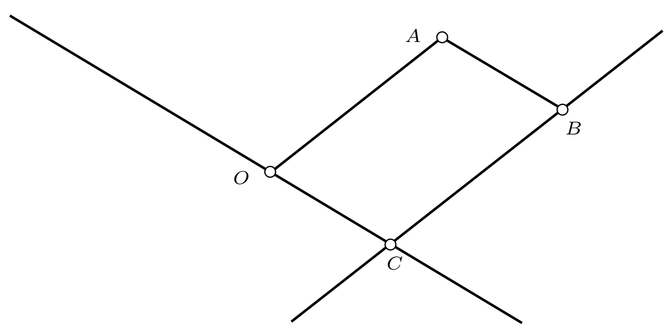
• Traçons le segment AB.

• En utilisant le procédé de la Proposition 8.1, traçons la parallèle à (AB) passant par O.



• Traçons ensuite le segment OA.

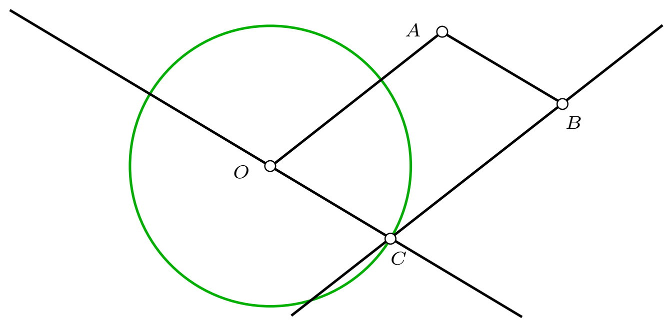
• Puis traçons la parallèle à OA passant par B.



• Cette parallèle définit un quatrième point C. Le quadrilatère $OABC$ est alors un parallélogramme :

$$(OA) \mathbin{//} (CB) \qquad \text{et} \qquad (AB) \mathbin{//} (OC).$$

• Le cercle de centre O passant par C est le cercle recherché : il est de rayon $\mathsf{dist}(A, B)$, puisque les côtés opposés d'un parallélogramme ont même longueur !



Proposition 9.1. *Dans le plan $\mathscr{P}$, étant donné deux points quelconques $A, B \in \mathscr{P}$, le cercle de centre un troisième point quelconque $O \in \mathscr{P}$ et de rayon égal à $\mathsf{dist}(A, B)$ est constructible à la règle et au compas.* □

10. Constructibilité à la règle et au compas

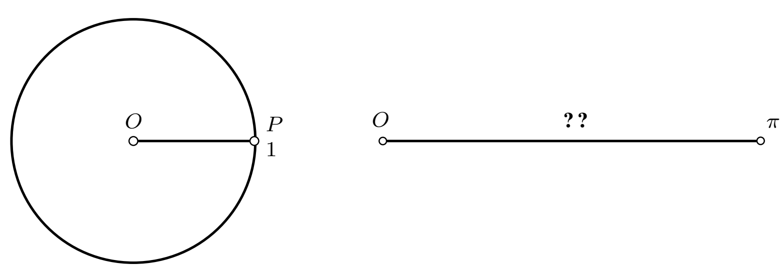
Mais au fait, *que veut dire véritablement « être constructible à la règle et au compas* ? Peut-on en donner une définition mathématique précise ?

En fait, il s'agit d'abstraire et de généraliser ce que nous venons de constater sur plusieurs constructions géométriques, constructions que la plupart d'entre nous ont déjà apprises à l'école élémentaire.

Nous allons donner dans un instant une définition mathématique abstraite de la notion de *constructibilité à la règle et au compas*, mais auparavant, rappelons pourquoi il est nécessaire d'abstraire et de généraliser.

En effet, un *Grand Problème Mathématique* qui a mobilisé l'attention de géomètres pendant des millénaires, est, nous le savons, la *Quadrature du Cercle*. Pour résoudre ce problème, d'innombrables tentatives ont existé, d'innombrables espoirs ont connu un suspens temporaire, mais tous se sont soldés par un échec [11].

Rappelons que dans sa version « calculer le périmètre du cercle », la quadrature du cercle demande si, en partant d'un cercle dans le plan, on peut construire à la règle et au compas, un segment *droit* de longeur égale à la longueur de ce cercle.



11. L'échec, en mathématiques, existe à tous les niveaux. Le niveau historique de l'échec est particulièrement élevé, puisqu'il implique souvent plusieurs générations.

On peut supposer que les unités de longueur sont telles que le cercle de départ est de longueur 1. Par définition du nombre :

$$\pi = \mathbf{3,14159265358979323846264338327950288427916939937 5},$$

la longueur du cercle est alors égale à $2\,\pi$.

Il reviendrait au même de construire à la règle et au compas un segment de longueur π, puisqu'en doublant un tel segment, il serait de longueur 2π.

Grand Problème Historique de la Quadrature du Cercle. *Dans le plan $\mathscr{P}$, étant donné un cercle $\mathscr{C}$ de rayon égal à 1, comment construire, avec une règle et un compas, un segment droit de longueur égale à π ?*

L'espoir est donc d'aplatir le demi-cercle pour le rendre droit, ce qui faciliterait grandement la mesure de sa longueur !

Une fois donné le cercle $\mathscr{C}$, prenons aussi un point quelconque $P \in \mathscr{C}$. Au départ, on dispose donc de trois objets géométriques :

☐ un cercle unité $\mathscr{C}$;

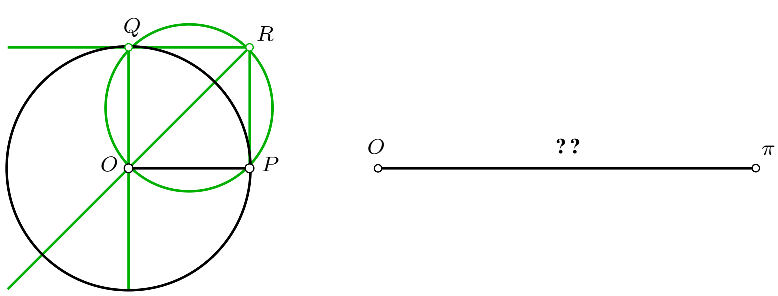
☐ le centre O de ce cercle ;

☐ un point $P \in \mathscr{C}$ sur ce cercle.

Reformulation du Problème de la Quadrature du Cercle. *En partant d'un cercle $\mathscr{C}$ de rayon 1, en connaissant son centre O, et en connaissant l'un de ses points $P \in \mathscr{C}$, comment construire en un nombre fini d'étapes avec une règle et un compas, un segment droit de longueur exactement égale au demi-périmètre $\pi = 3,1415\ldots$ de $\mathscr{C}$?*

Il faut bien comprendre qu'en partant de $\mathscr{C}$, de O, de P, on peut construire un très grand nombre de points nouveaux, et même d'ailleurs de manière presque sauvage, un nombre infini de points nouveaux. L'espoir d'atteindre le Graal : la *Quadrature du Cercle*, semble fort plausible et raisonnable !

Par exemple, on peut construire la droite perpendiculaire à la droite (OP) passant par O, laquelle coupe le cercle en un point Q, puis la droite parallèle à (OQ) passant par P, et la droite parallèle à (OP) passant par Q, ces deux droites se coupant en un point R (chouette, il y a un carré !).



Puis on peut construire le milieu du segment OR, puis tracer le cercle de diamètre OR, et ainsi de suite.

On s'imagine alors naturellement que les procédés de construction à la règle et au compas peuvent atteindre de plus en plus de points dans le plan, et on espère qu'il existe une manière d'atteindre un couple de points situés à distance exactement égale à π.

La plupart des géomètres ont pensé que si une méthode de quadrature s'avérait fausse après un examen approfondi, il devait toujours exister un moyen techniquement plus avancé d'atteindre le résultat, *puisque la richesse potentielle des constructions imaginables est infinie*.

11. **Pseudo-quadrature de Kochansky 1685**

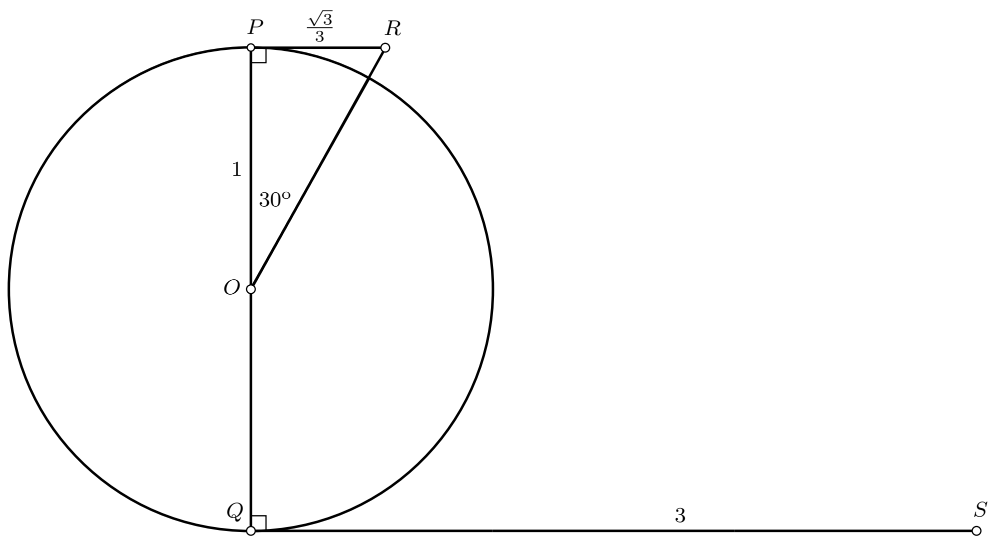
En 1685, Kochansky (1631–1700, père jésuite) a découvert la plus belle, la plus simple des presque-quadratures du cercle — quadrature en fait fausse, mais pas de beaucoup !

• Soit un cercle de centre O et de rayon 1.

• Soit P un point sur le cercle.

• Traçons la droite (OP), laquelle recoupe le cercle en un autre point Q, diamétralement opposé à P.

• Traçons la droite perpendiculaire au diamètre (PQ) passant par P



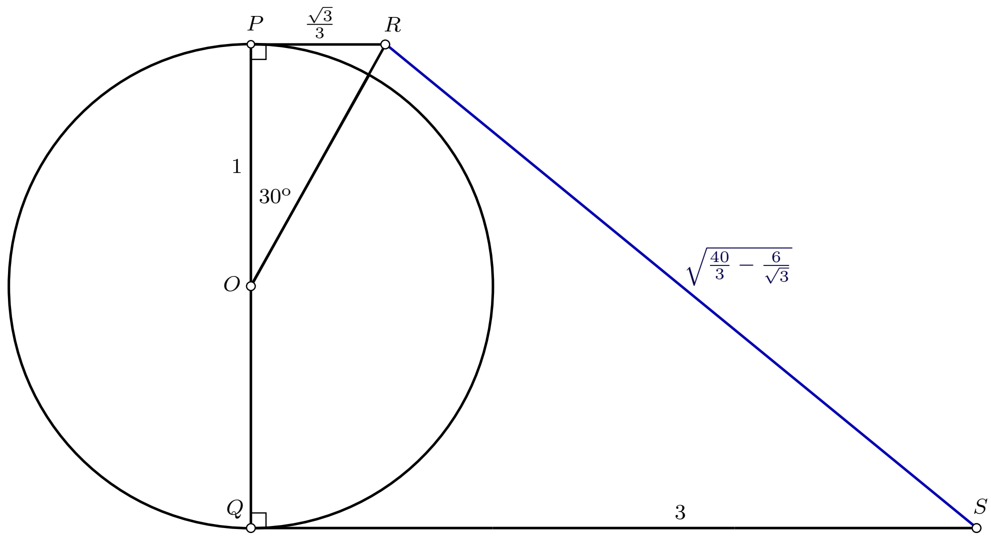
• Traçons une demi-droite partant de O qui fait un angle de 30° avec la demi-droite (OP).

• L'intersection de ces deux droites définit un point R.

• La distance PR est alors égale à $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (*voir* l'Exercice 4).

• Traçons aussi la droite perpendiculaire à (PQ) passant par Q.

• Enfin, plaçons en bas à droite un point S à distance 3 de Q.



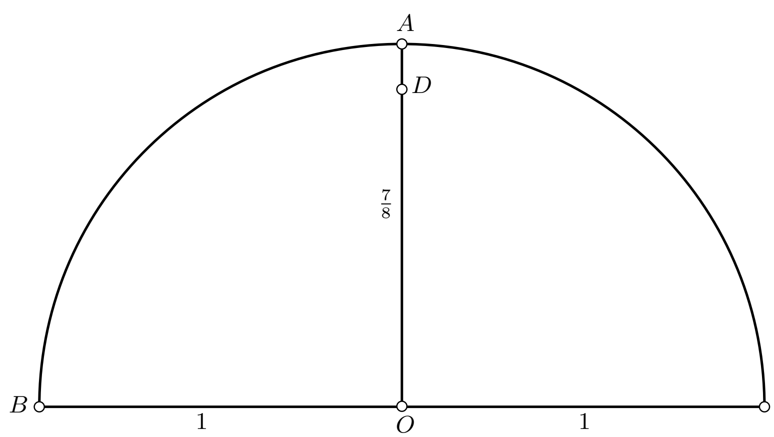
Pseudo-quadrature de Kochansky (1685). *Alors la distance de R à S est une excellente approximation du nombre π, elle vaut :*

$$\begin{aligned}\mathsf{dist}(R,S) &= \sqrt{\frac{40}{3} - \frac{6}{\sqrt{3}}} \\ &= \mathbf{3,1415}33\cdots.\end{aligned}$$

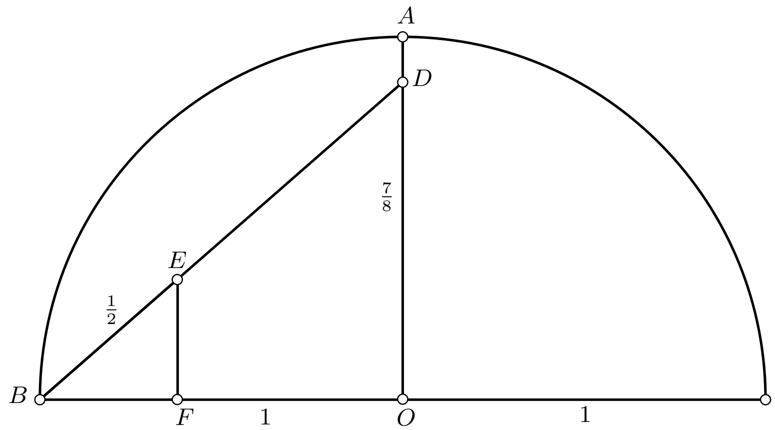
L'Exercice 4 propose de démontrer cette formule.

En 1879, Jacob de Gelder a mis au point une autre quadrature du cercle qui donne pour valeur à la demi-circonférence d'un cercle unité :

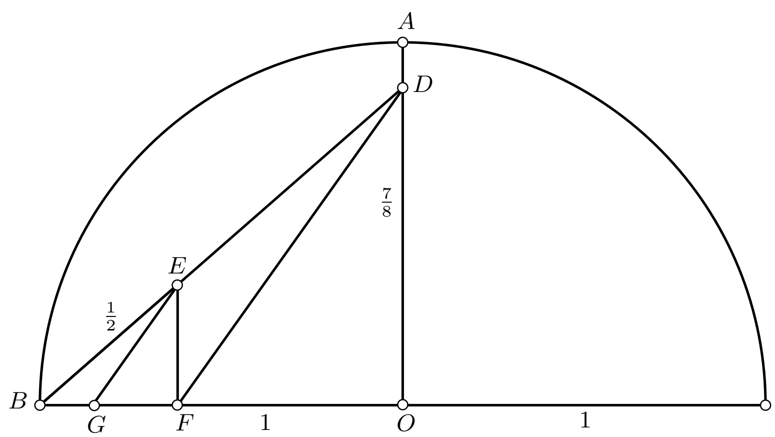
$$\begin{aligned}3 + \frac{16}{113} &= \frac{355}{113} \\ &= \mathbf{3,1415929}2\cdots.\end{aligned}$$



- Prenons un demi-cercle de centre O et de rayon 1.
- Traçons la droite perpendiculaire au diamètre passant par O.
- Cette droite intersecte le demi-cercle en un point A.
- Bien entendu, la distance OA vaut 1.
- Considérons le point D sur OA tel que $OD = \frac{7}{8}$.



- Appelons B l'un des points du diamètre, à gauche sur les figures.
- Traçons la droite BD.
- Plaçons un point E sur la droite BD à distance $\frac{1}{2}$.
- Traçons la parallèle à (OA) passant par E.



- Cette parallèle intersecte le diamètre du demi-cercle en un point F.
- Traçons enfin la parallèle à (FD) passant par E.
- Cette parallèle intersecte le diamètre du demi-cercle en un point G.

Pseudo-quadrature de Jacob de Gelder (1849). *Alors la distance de B à G est une excellente approximation du nombre $\pi - 3$, elle vaut :*

$$\begin{aligned}\mathsf{dist}(B, G) &= \frac{4^2}{8^2 + 7^2} \\ &= \frac{16}{113} \\ &= \mathbf{0,1415929}2\cdots.\end{aligned}$$

L'Exercice 5 propose de démontrer cette formule.

12. Académie Royale des Sciences de Paris Année 1775

12.1. Jalons historiques parcellaires. Aristophane (vers 444–386 avant J.-C.) raillait déjà dans sa pièce intitulée '*Les Oiseaux*' les *quarreurs de cercles*. « *Avec une règle, je vais donner la forme du carré au cercle.* »

Plusieurs mathématiciens Grecs croyaient avoir résolu la quadrature du cercle, même si leurs résultats n'étaient que de bonnes approximations. On s'est progressivement rendu compte que le problème était extraordinairement difficile, voire impossible.

Cardinal et savant renommé, Nicholas de Cusa (1404–1464) avance que 3,1423 est la valeur exacte de π, ce qui n'est pas vrai !

Joseph Scalinger tente aussi de résoudre le problème, mais toutes ses tentatives seront réfutées par Viète.

Rien n'égale la controverse extraordinaire qui opposa sur ce thème le philosophie anglais Thomas Hobbes (1588–1679) et le mathématicien John Wallis (1616–1703).

Hobbes, qui avait découvert les plaisirs de la géométrie vers l'âge de 40 ans, était en cette matière aussi passionné qu'incompétent et suffisant : il pensait que son génie universel lui ouvrirait la voie vers des découvertes mathématiques de toute première importance.

En 1665, à l'âge de 67 ans, il publia un traité qui renfermait une construction approximative de π, présentée comme une solution exacte du problème de la quadrature du cercle.

Le mathématicien (établi) John Wallis dénonça les erreurs du philosophe, ce qui engagea une polémique d'ampleur qui dura jusqu'à la mort de Hobbes, à l'âge de 91 ans.

La réponse de Hobbes à la première attaque de Wallis fut une édition anglaise de son ouvrage, d'abord publié en latin, auquel il avait ajouté un appendice intitulé *Six leçons pour le professeur de mathématiques*.

Wallis répliqua par un pamphlet intitulé *Punition à infliger à Monsieur Hobbes pour n'avoir pas appris correctement sa leçon*.

12.2. Décision de l'Académie en 1775. La maladie de ceux qui veulent absolument résoudre la quadrature du cercle a un nom latin : *morbus cyclometricus*. Cette maladie prit une telle ampleur qu'au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, l'Académie des Sciences dût réagir pour ne plus être submergée de mémoires farfelus écrits par des mathématiciens amateurs qui prétendaient résoudre le problème.

Pour justifier sa décision, l'Académie publia le texte suivant.

> L'Académie a pris, cette année, la résolution de ne plus examiner aucune solution des problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle, ou de la quadrature du cercle, ni aucune machine annoncée comme un mouvement perpétuel.
>
> Nous avons cru devoir rendre compte ici des motifs qui l'ont déterminée.
>
> Le problème de la duplication du cube a été célèbre chez lez Grecs. On prétend que l'oracle de Delos, consulté par les Athéniens sur les moyens de faire cesser la peste, leur prescrivit de consacrer au Dieu de Delos, un hôtel cubique double de celui qu'on voyait dans son temple.
>
> Le problème de la trisection de l'angle fut également célèbre chez les Anciens ; on le résolut d'abord par une construction qui renfermait la description d'une courbe du troisième degré.

Cependant, comme les Anciens ne regardaient comme géométriques que les solutions où l'on n'employait que la ligne droite et le cercle, la règle et le compas, cette expression a fait naître un préjugé, qui règne encore chez des hommes peu éclairés ; ils continuent de s'appliquer à chercher des solutions géométriques de ces problèmes ; les uns, en n'employant que la ligne et le compas, donnent des solutions erronées ; d'autres en donnent de vraies, mais, sans le savoir, ils emploient des courbes, et leurs solutions rentrent dans celles qui sont connues : tout examen est donc inutile.

Le problème de la quadrature du cercle est d'un ordre différent : la quadrature de la parabole trouvée par Archimède, celle des lunules d'Hippocrate de Chio, donnèrent des espérances de quarrer le cercle, c'est-à-dire, de connaître la mesure de sa surface : Archimède montra que ce problème, et celui de la rectification du cercle, dépendaient l'un de l'autre, et depuis, ils ont été confondus.

On ne connaît que des méthodes d'approximation pour quarrer le cercle, la première est due à Archimède ; un grand nombre de Géomètres célèbres en ont proposé de nouvelles, très ingénieuses, très simples, très commodes dans la pratique ; il est possible encore de perfectionner ces méthodes ; l'Académie n'exclut pas ce genre de recherches ; mais ce ne sont pas des méthodes d'approximations, que prétendent donner ceux qui s'occupent de la quadrature du cercle, ils aspirent à la solution rigoureuse du problème.

Une expérience de plus de soixante-dix ans, a montré à l'Académie qu'aucun de ceux qui lui envoyaient des solutions de ces problèmes, n'en connaissaient ni la nature ni les difficultés, qu'aucune des méthodes qu'ils employaient n'aurait pu les conduire à la solution quand même elle serait possible. Cette longue expérience a suffi pour convaincre l'Académie du peu d'utilité qu'il résulterait pour les Sciences de l'examen de toutes ces prétendues solutions.

D'autres considérations ont encore déterminé l'Académie. Il existe un bruit populaire que les Gouvernements ont promis des récompenses considérables à celui qui parviendrait à résoudre le problème de la quadrature du cercle ; que ce problème, est l'objet de recherches des Géomètres les plus célèbres. Sur la foi de ces bruits, une foule d'hommes beaucoup plus grande qu'on ne le croit, renonce à des occupations utiles pour se livrer à la recherche de ce problème, souvent sans l'entendre, et toujours sans avoir les connaissances nécessaires pour en tenter la solution avec succès : rien n'était plus propre à les désabuser que la déclaration que l'Académie a jugé devoir faire.

Plusieurs avaient le malheur de croire avoir réussi, ils se refusaient aux raisons avec lesquelles les géomètres attaquaient leurs solutions, souvent ils ne pouvaient les entendre, et ils finissaient par les accuser d'envie et de mauvaise foi. Quelquefois, leur opiniâtreté a dégénéré en une véritable folie. Tout attachement opiniâtre à une opinion démontrée fausse, s'il s'y joint une occupation perpétuelle du même objet, une impatience violente de la contradiction, est sans doute une véritable folie ; mais on ne la regarde point comme telle, si l'opinion qui forme cette folie ne choque pas les idées connues des hommes, si elle n'influe pas sur la conduite de la vie, si elle ne trouble pas l'ordre de la Société.

L'humanité exigeait donc que l'Académie, persuadée de l'inutilité absolue de l'examen qu'elle aurait pu faire des solutions de la quadrature du cercle, cherchât à détruire, par une déclaration publique, des opinions populaires qui ont été funestes à plusieurs familles.

La quadrature définie du cercle est le seul des problèmes rejetés par l'Académie, qui puisse donner lieu à des recherches utiles, et si un Géomètre venait à la trouver, la délibération de l'Académie ne ferait qu'augmenter sa gloire, en montrant quelle opinion les Géomètres ont de la difficulté, pour ne pas dire de l'insolubilité du problème.

13. Concept général de constructibilité à la règle et au compas

Maintenant, comment conceptualiser *en général* toutes les constructions *possibles* à la règle et au compas ?

Le problème de la quadrature du cercle part de trois données initiales :

• un point O ;

• un point P ;

• le cercle de centre O passant par P.

Toutefois, le cercle en question est une donnée secondaire, puisque dès que O et P sont donnés, on peut tracer ce cercle avec un compas.

Observation 13.1. *Pour ce qui concerne le problème de la quadrature du cercle, la donnée initiale consiste (seulement) en deux points distincts $O \neq P$ dans le plan $\mathscr{P}$.*

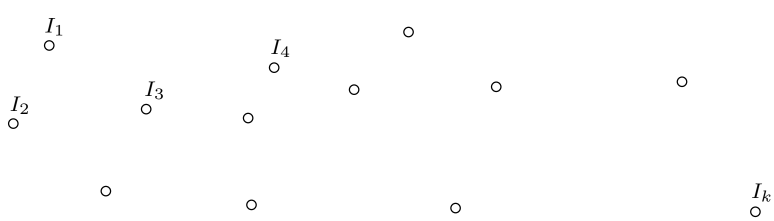
Le problème est alors de construire, à la règle et au compas, un segment droit de longueur égale à la demi-circonférence du cercle de centre O passant par P. □

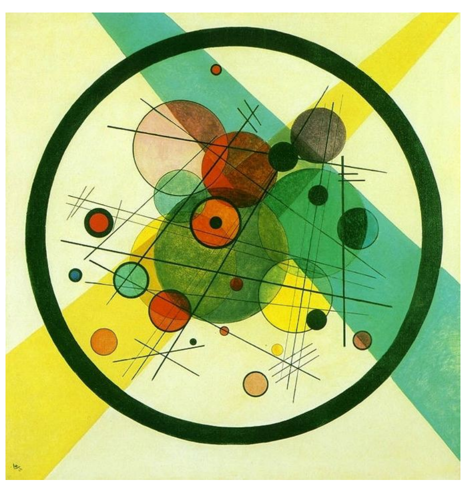
Alors comment s'imaginer des données initiales les plus générales possibles ? C'est très simple ! On s'imagine donné un *ensemble initial* $\mathscr{I}$ de points distincts :

$$\mathscr{I} := \{I_1, \dots, I_k\},$$

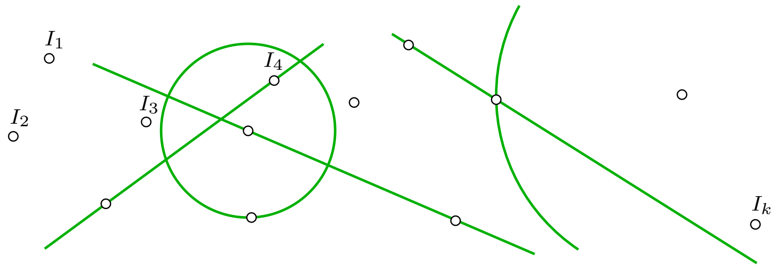
de cardinal fini $k \geqslant 2$, qui sont tous situés dans le plan :

$$I_i \in \mathscr{P} \qquad\qquad (i = 1 \cdots k).$$





Bien entendu, on peut tracer des droites et des cercles à partir de tout couple de points distincts. Plus précisément :



□ pour tous indices $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant k$, on peut tracer la droite :

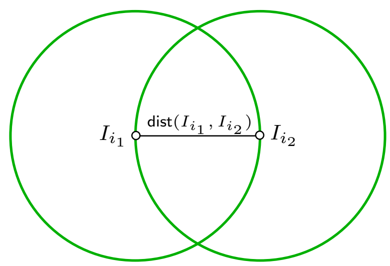
$$\big(I_{i_1}\, I_{i_2}\big);$$

□ pour tout indices $1 \leqslant i_1 \leqslant k$ et tout indices $1 \leqslant i_2 \leqslant k$ avec $i_1 \neq i_2$, on peut tracer les deux cercles de centre I_{i_1} et de centre I_{i_2} :

$$\mathscr{C}_{I_{i_1},R} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{C}_{I_{i_2},R},$$

de rayon commun égal à :

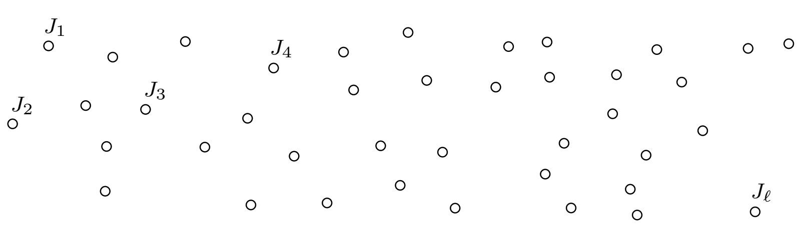
$$R = \mathsf{dist}(I_{i_1}, I_{i_2}).$$



Toutes ces droites et tous ces cercles ont alors de nombreux points d'intersection, qui constituent des points nouveaux constructibles à la règle et au compas.

À partir de cette nouvelle collection plus grande de points, on peut naturellement recommencer à tracer des droites et des cercles, qui vont à nouveau posséder de très nombreux points d'intersections, puis itérer encore et encore une production infinie de points constructibles à la règle et au compas.

Est-il possible de formuler mathématiquement ce processus indéfini de production de points constructibles ? Oui, très certainement !



À une certaine étape intermédiaire, considérons donc que les points déjà construits à la règle et au compas à partir des points initiaux $I_1, \dots, I_k$ sont des points :

$$J_1, \dots, J_k,\; J_{k+1}, \dots, J_\ell,$$

avec bien entendu :

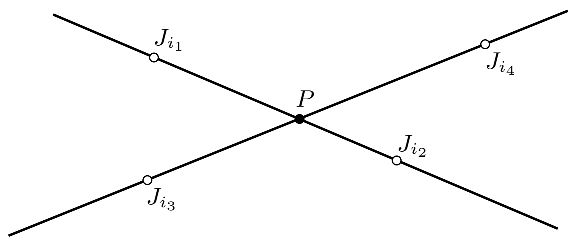
$$J_1 = I_1, \; \dots\dots, \; J_k = I_k,$$

en nombre $\ell \geqslant k$, et même souvent en nombre très grand $\ell \gg k$.

Définition 13.2. Un point $P \in \mathscr{P}$ est dit *constructible en une étape à la règle et au compas* à partir d'un ensemble intermédiaire de points déjà constructibles :

$$J_1, \dots, J_k,\ J_{k+1}, \dots, J_\ell,$$

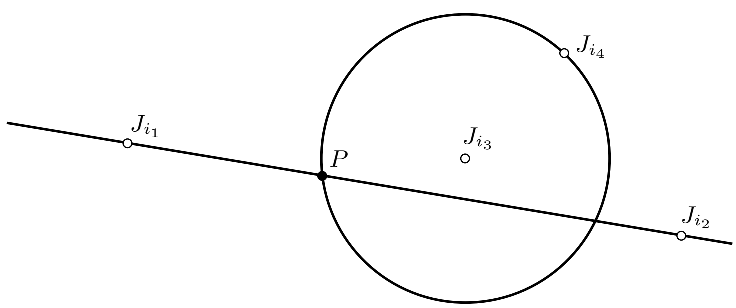
lorsque l'une des trois situations suivantes a lieu :



(1) il existe deux couples de points distincts $J_{i_1} \neq J_{i_2}$ et $J_{i_3} \neq J_{i_4}$ pour certains indices i_1, i_2, i_3, i_4 appartenant à $\{1, \dots, \ell\}$ tels que P est l'intersection des deux droites correspondantes :

$$P = \big(J_{i_1}\, J_{i_2}\big) \cap \big(J_{i_3}\, J_{i_4}\big),$$

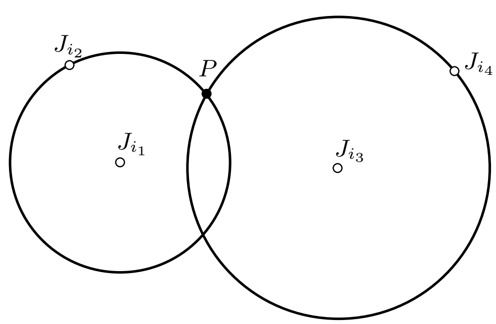
supposées *non* parallèles ;



(2) il existe deux couples de points distincts $J_{i_1} \neq J_{i_2}$ et $J_{i_3} \neq J_{i_4}$ pour certains indices i_1, i_2, i_3, i_4 appartenant à $\{1, \dots, \ell\}$ tels que P est l'intersection entre une droite correspondante et un cercle correspondant :

$$P = \big(J_{i_1}\, J_{i_2}\big) \cap \mathscr{C}_{J_{i_3}, \mathsf{dist}(J_{i_3}, J_{i_4})},$$

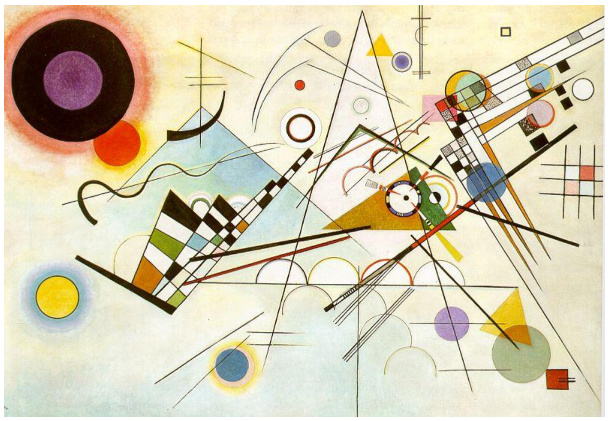
supposés d'intersection *non* vide ;



(3) il existe deux couples de points distincts $J_{i_1} \neq J_{i_2}$ et $J_{i_3} \neq J_{i_4}$ pour certains indices i_1, i_2, i_3, i_4 appartenant à $\{1, \ldots, \ell\}$ tels que P est l'intersection entre les deux cercles correspondants :

$$P = \mathscr{C}_{J_{i_1},\, \mathsf{dist}(J_{i_1}, J_{i_2})} \cap \mathscr{C}_{J_{i_3},\, \mathsf{dist}(J_{i_3}, J_{i_4})},$$

supposés d'intersection *non* vide.



Bien entendu, puisque les constructions à la règle et au compas incorporent en général plusieurs étapes, il faut encore énoncer une dernière définition.

Définition 13.3. Un point $P \in \mathscr{P}$ du plan est dit *constructible à la règle et au compas* à partir d'un ensemble de points initiaux :

$$\mathscr{I} = \{I_1, \ldots, I_k\},$$

lorsqu'il existe une suite de points :

$$M_1, \ldots, M_{n-1}, M_n \in \mathscr{P}$$

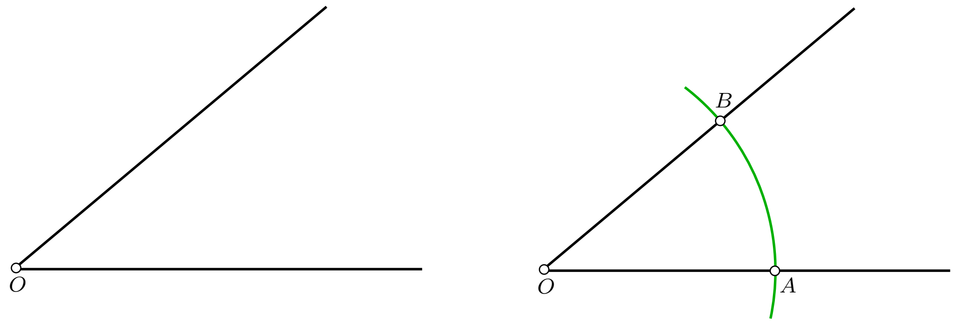
satisfaisant :

- M_1 est constructible à la règle et au compas en une seule étape à partir de $\{I_1, \ldots, I_k\}$;
- M_{l+1} est constructible à la règle et au compas en une seule étape à partir de $\{I_1, \ldots, I_k, M_1, \ldots, M_l\}$ pour tout $l = 1, \ldots, n-1$;
- $P = M_n$.

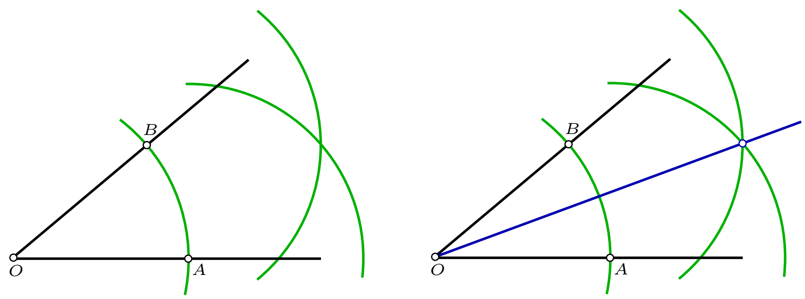
D'autres constructions à la règle et au compas que nous n'avons pas encore détaillées sont possibles et classiques. Elle permettent d'enrichir la production de points P constructibles.

14. Bissectrice d'un angle entre deux demi-droites

- Soit un point O dans le plan euclidien $\mathscr{P}$.
- Soient deux demi-droites issues de O, qui forment un angle quelconque.



À partir de O, traçons un cercle de rayon égal à la distance entre deux points déjà connus [12].



• Ensuite, traçons deux cercles *de même rayon* de centre A et de centre B.

• Ces deux cercles s'intersectent, quitte à agrandir leur rayon commun [13]

• La bissectrice de l'angle en question est alors la droite passant par O et ce point d'intersection.

Proposition 14.1. *Dans le plan $\mathscr{P}$, étant donné un angle quelconque entre deux demi-droites, la bissectrice de cet angle est constructible à la règle et au compas.* □

15. Division rationnelle d'un segment

Soit AB un segment dans le plan $\mathscr{P}$.

Question. *Peut-on toujours partager un segment quelconque AB en un nombre quelconque $n \geqslant 2$ de parties de longueurs égales ?*

Bien entendu, pour $n = 2$, il suffit d'appliquer la construction de la médiatrice du segment AB, qui l'intersecte en son *milieu*.

Ce qui est remarquable, c'est que la division en $n \geqslant 2$ parties égales est *toujours* possible.

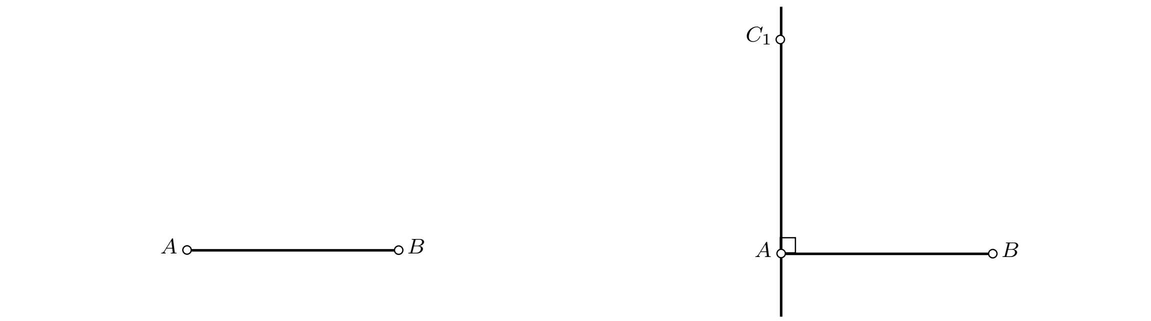
• Traçons la perpendiculaire à la droite (AB) passant par A.

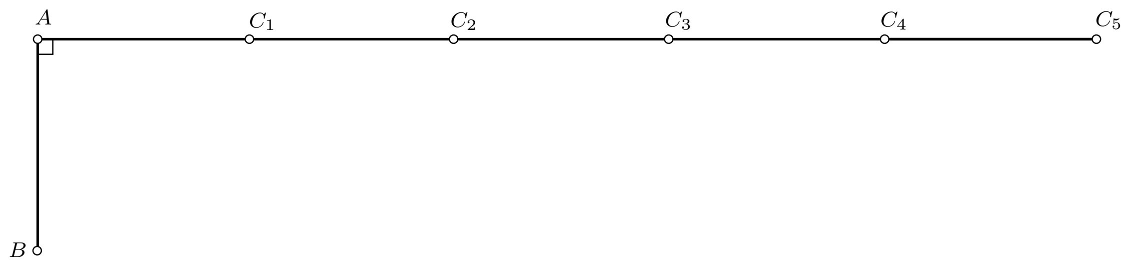
• Reportons la distance AB sur cette perpendiculaire, ce qui crée un point C_1 tel que :

$$\mathsf{dist}(A, C_1) = \mathsf{dist}(A, B).$$

12. Attention ! À l'École, nous avons appris qu'il suffit de tracer un cercle de centre O et de rayon choisi au hasard pour réussir construire la bissectrice d'un angle (*cf.* ce qui va suivre). Mais le principe des constructions à la règle et au compas exige que tout cercle tracé soit de rayon égal à la distance entre deux points déjà connus. Heureusement, cela est toujours possible, puisque le nombre de points initiaux est toujours $k \geqslant 2$.

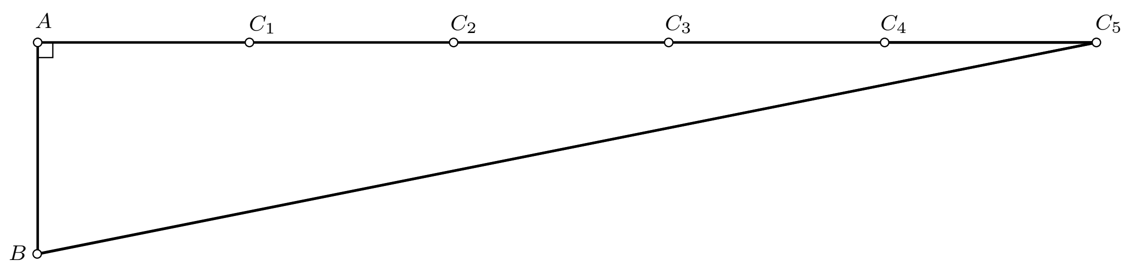
13. Doubler, tripler, quadrupler, *etc.*, un segment est toujours possible à la règle et au compas.



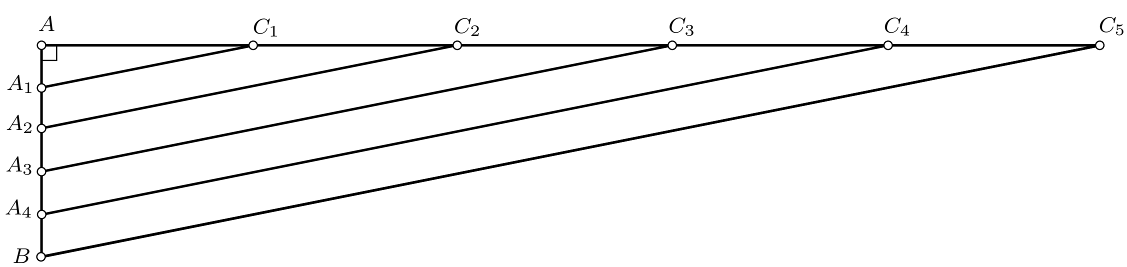


• Effectuons une rotation de la figure.

• Illustrons le procédé pour $n = 5$ seulement : traçons quatre points supplémentaires C_2, C_3, C_4, C_5 à distances successives égales.



• Traçons le segment BC_5.



• Traçons enfin les quatre parallèles à la droite (BC_5) passant par C_4, C_3, C_2, C_1.

• Ces quatre parallèles intersectent le segment AB en quatre nouveaux points A_4, A_3, A_2, A_1.

• Alors :

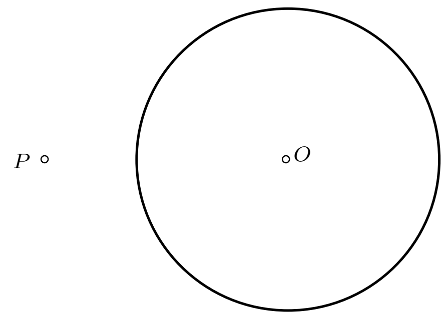
$$\mathsf{dist}(A, A_1) = \mathsf{dist}(A_1, A_2) = \mathsf{dist}(A_2, A_3) = \mathsf{dist}(A_3, A_4) = \mathsf{dist}(A_4, B).$$

Proposition 15.1. *Dans le plan $\mathscr{P}$, étant donné un segment AB quelconque et un entier $n \geqslant 2$ quelconque, on peut toujours diviser à la règle et au compas le segment AB en n parties d'égales longueurs.* $\square$

16. **Tangentes à un cercle passant par un point donné**

Dans le plan $\mathscr{P}$, soit un cercle de centre O et soit un point P à l'extérieur du disque intérieur au cercle.

Question. *Comment tracer les deux tangentes au cercle passant par* P *?*

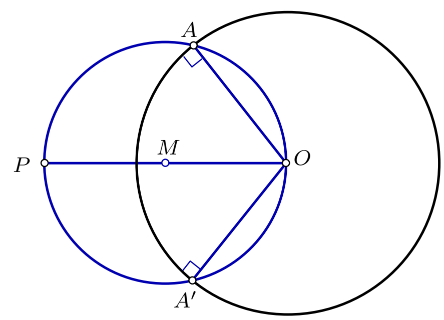


Le principe de construction repose sur le fait que les deux tangentes en question passent par deux points du cercle où elles sont perpendiculaires aux rayons correspondondans.

• Traçons en effet le segment PO.

• Traçons le milieu M du segment PO.

• Traçons le cercle de centre M passant par P et par O.

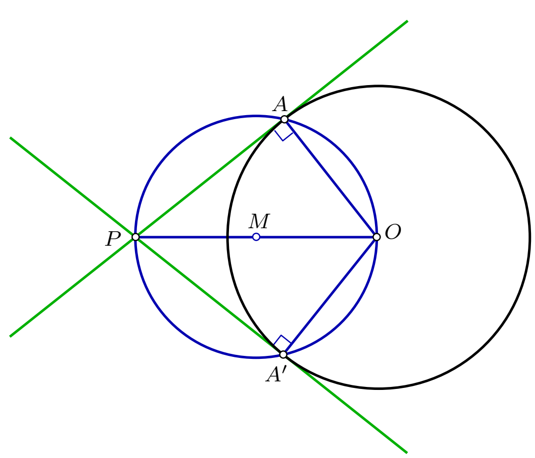


• Ce deuxième cercle intersecte le cercle donné en deux points A et A'.

• Les deux triangles PAO et $PA'O$ étant rectangles en A et en A', les deux droites :

$$(PA) \qquad \text{et} \qquad (PA')$$

sont alors tangentes au cercle donné au départ.



Proposition 16.1. *Dans le plan $\mathscr{P}$, étant donné un cercle quelconque, et un point quelconque P hors du disque délimité par le cercle, on peut toujours tracer les deux tangentes au cercle passant par P à la règle et au compas.* □

17. Questions concernant les points du plan constructibles

L'objectif maintenant est d'analyser en profondeur la :

Question 17.1. *En partant de deux points O et I dans le plan euclidien $\mathscr{P}$, tous les autres points $P \in \mathscr{P}$ sont-ils constructibles à la règle et au compas ?*

Et si la réponse est négative, alors une nouvelle interrogation surgit instantanément :

Question 17.2. *Quel est exactement l'ensemble des points P du plan euclidien $\mathscr{P}$ qui sont constructibles à la règle et au compas ?*

Nous avons déjà vu que les points constructibles à la règle et au compas sont extrêmement nombreux, et qu'ils ont tendance à proliférer de manière exponentielle, plus encore que les petits lapins de Fibonacci. Historiquement, on a longtemps cru qu'une telle prolifération de points constructibles à la règle et au compas laissait entier l'espoir d'atteindre un jour, par exemple, la quadrature du cercle, la trisection d'un angle quelconque, ou la duplication d'un cube.

Mais si l'on souhaite effectivement déterminer quel est exactement l'ensemble des points constructibles, *il est nécessaire d'adopter un point de vue entièrement nouveau, à savoir il faut traduire la propriété d'être constructible à la règle et au compas dans un langage algébrique sur les nombres*.

Or c'est Descartes qui a inauguré la transsubstantiation magique de la Géométrie en de l'Algèbre, à savoir l'*algébrisation de la géométrie*. Voici ce que Descartes dit à ce sujet.

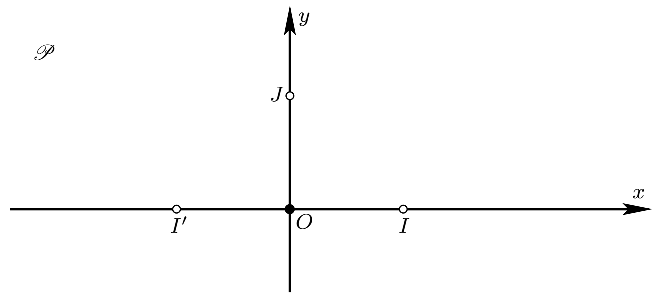
> Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connoître la longueur de quelques lignes droites pour les construire. Descartes

> Et comme l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division, ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche pour les préparer à être connues, que de leur en ajouter d'autres, ou en ôter. Descartes

Nous allons voir que la plupart des problèmes de construction, y compris ceux que les Grecs ne sont pas parvenus à résoudre, se ramènent à des problèmes qui concernent en fait, non pas la géométrie, mais les *nombres réels x sur la droite réelle* $\mathbb{R}$, en partant bien sûr des deux nombres 0 et 1 qui correspondent à un point O et à un point $I \neq O$.

18. Axes, repères, nombres réels constructibles

Dans le plan euclidien $\mathscr{P}$, soit donc un premier point O que l'on prend pour origine, et soit I un deuxième point distinct, tous deux pris comme départ absolu des constructions à la règle et au compas.



• Traçons la droite (OI).

• Prenons cette droite (OI) comme « axes des x ».

• Construisons le point I' symétrique de I par rapport à O.

• Construisons la médiatrice du segment $[I'I]$, qui est la droite orthogonale à $(I'I)$ passant par O.

• Construisons un point J sur cette médiatrice à égale distance $OJ = OI$.

• Prenons enfin O, I, J comme repère orthonormé du plan $\mathscr{P}$, la droite OJ étant l'« axe des y ».

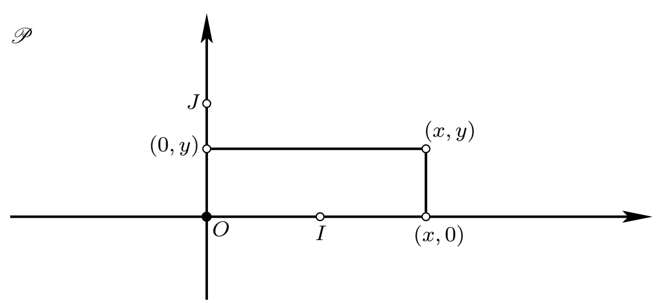
Grâce à ces deux axes, tout point $P \in \mathscr{P}$ est repéré de manière unique par deux coordonnées réelles :

$$P \longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

et on écrira d'ailleurs :

$$P = (x, y),$$

en identifiant, comme aimait à le faire Descartes, les points à leurs coordonnées.



Terminologie 18.1. En sous-entendant la mention « à la règle et au compas », on appellera parfois *points constructibles* — tout court — les points $P \in \mathscr{P}$ qui sont constructibles en partant de O et de I, au sens de la Définition (13.3).

L'idée nouvelle, maintenant, c'est de ramener la théorie des constructions dans un espace à deux dimensions à une théorie plus simple, valable dans un espace à une seule dimension.

Définition 18.2. Un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est dit *constructible* si le point de coordonnées $(x, 0)$ sur l'axe horizontal (OI) dans le repère O, I, J est constructible (à la règle et au compas).

Le lecteur se convaincra (exercice) qu'il reviendrait au même de demander que le point de coordonnées $(0, x)$ sur l'axe vertical (OJ) soit constructible à la règle et au compas, sachant d'ailleurs (solution de l'exercice) que l'on a plus généralement une :

Proposition 18.3. *Un point $P \in \mathscr{P}$ de coordonnées (x, y) est constructible à la règle et au compas si et seulement si ses deux coordonnées $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ sont des nombres réels constructibles.*

Démonstration. Si le point $P = (x, y)$ est constructible, on trace *à la règle et au compas* la parallèle à (OJ) passant par P, droite verticale qui intersecte alors l'axe (OI) en le point *constructible :*

$$(x, 0),$$

ce qui veut justement dire d'après la définition qui précède que $x \in \mathbb{R}$ est un *nombre* constructible. De même, la parallèle à (OI) passant par P intersecte (OJ) en le point *constructible :*

$$(0, y).$$

Réciproquement, si les deux points $(x, 0)$ et $(0, y)$ sont constructibles, alors le point (x, y) est lui aussi constructible (à la règle et au compas), puisqu'il se situe à l'intersection (unique) entre la perpendiculaire à (OI) passant par $(x, 0)$ et la perpendiculaire à (OJ) passant par $(0, x)$. $\square$

Proposition 18.4. *Pour tous entiers relatifs $m, n \in \mathbb{Z}$, les points :*

$$(m, n)$$

sont constructibles à la règle et au compas.

Démonstration. Arguments laissés en exercice de compréhension aux étudiants consciencieux. $\square$

Corollaire 18.5. *Tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$ sont des nombres réels constructibles.* $\square$

En vérité, ce corollaire est une évidence, puisqu'il suffit de reporter $|n|$ fois la distance OI en partant de O, dans la direction de I lorsque $n \geqslant 1$, et dans la direction opposée lorsque $n \leqslant -1$.

Un résultat qui nous fait avancer réellement vers une conceptualisation de ce que sont les points constructibles est le suivant.

Proposition 18.6. *Les nombres rationnels :*

$$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \qquad\qquad {\scriptstyle (p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*)}$$

sont tous constructibles.

Démonstration. D'après les raisonnements qui précédent, il suffit de faire voir que tous les points du plan ayant pour coordonnées :

$$\left(\frac{p}{q},\, 0\right) \qquad\qquad {\scriptstyle (p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*)}$$

sont constructibles à la règle et au compas. Or nous savons déjà que les points de coordonnées $(p, 0)$ sont constructibles, et nous avons vu dans la Section 15 comment partager un segment quelconque en un nombre arbitraire $q \geqslant 1$ de parties d'égales longueurs. $\square$

Corollaire 18.7. *Tous les points du plan euclidien dont les deux coordonnées sont rationnelles :*

$$\left(\frac{p}{q},\, \frac{r}{s}\right) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \qquad\qquad {\scriptstyle (p, r \in \mathbb{Z},\ q, s \in \mathbb{N}^*)}$$

sont constructibles à la règle et au compas.

Démonstration. Ceci découle de la proposition vue à l'instant et des résultats déjà acquis (exercice de compréhension). □

19. Densité des nombres réels constructibles et des points constructibles

Au stade que nous venons d'atteindre, souvenons-nous que l'ensemble des nombres rationnels est *dense* dans l'ensemble des nombres réels :

$$\text{fermeture topologique de } \mathbb{Q} = \mathbb{R},$$

ce qui veut dire que tout nombre réel peut être approximé par des nombres rationnels avec une précision arbitrairement grande :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad \text{tel que} \quad \left| x - \frac{p}{q} \right| \leqslant \varepsilon.$$

Alors le fait que tous les points $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ dont les deux cordonnées sont des nombres rationnels sont constructibles à la règle et au compas montre que l'ensemble des points constructibles à la règle et au compas est *dense* dans l'ensemble de tous les points du plan. Autrement dit :

Théorème 19.1. *Pour tout point $P \in \mathscr{P}$ dans le plan euclidien, il existe une suite de points $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ constructibles à la règle et au compas qui convergent vers :*

$$P = \lim_{n \to \infty} C_n. \qquad \square$$

Question 19.2. Cela assure-t-il que tout point $p \in \mathscr{P}$ est constructible à la règle et au compas ?

Pas forcément, puisque dans toute construction à la règle et au compas, on demande que le nombre d'étapes reste *fini*, tandis que lorsque $n \to \infty$, pour de telles suites de points constructibles $C_n \longrightarrow P$, le nombre d'étapes intermédiaires nécessaires jusqu'à construire C_n peut lui aussi tendre vers l'infini.

À vrai dire, le fait que l'ensemble des points constructibles recouvre le plan comme un nuage de points dense explique que certains mathématiciens amateurs, par exemple ceux qui continuent encore de nos jours à rechercher la quadrature du cercle, découvrent fréquemment des constructions approchées très précises. De telles constructions sont quelquefois élégantes, comme le sont par exemples celles qui sont dues à Dürer ou à Ramanujan.

20. Structure algébrique des nombres constructibles

Maintenant, le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ des nombres constructibles possède une structure algébrique remarquable.

Théorème 20.1. *Si deux nombres réels $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ sont constructibles, alors les quatre nombres :*

$$
\begin{aligned}
& x+y, \\
& x-y, \\
& x\,y, \\
& \frac{x}{y} \qquad\qquad \text{(lorsque } y{\neq}0)
\end{aligned}
$$

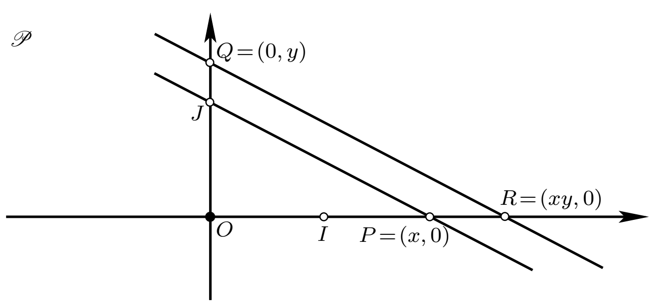
sont aussi constructibles. Autrement dit, l'ensemble des nombres constructibles possède une structure de corps commutatif.

Démonstration. Pour la somme $x+y$ et pour la soustraction $x-y$, il suffit de procéder par report de compas, ce qui est autorisé grâce à la Section 9.

Pour le produit $x\,y$, quitte à effectuer des symétries centrales, on peut supposer que $x > 0$ et que $y > 0$. Comme x et y sont constructibles, les deux points situés sur les axes de coordonnées :

$$P := (x, 0) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad Q := (0, y)$$

sont constructibles à la règle et au compas.



Traçons alors la parallèle à la droite (JP) qui passe par Q, droite qui intersecte (OI) en un certain point R.

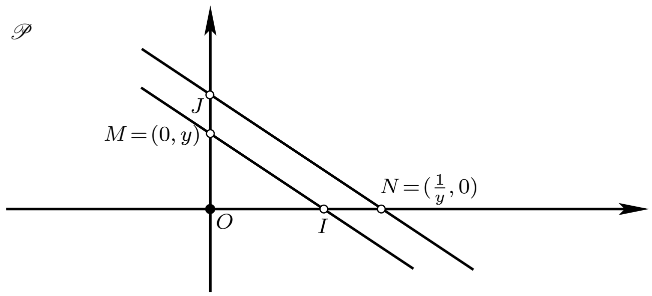
Grâce au Théorème de Thalès, on a alors :

$$\frac{\overline{OR}}{x} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OJ}} = \frac{y}{1},$$

ce qui veut justement dire que le point R est à la distance souhaitée de O :

$$OR = xy.$$

Enfin, pour le quotient $\frac{x}{y}$, à nouveau, on peut supposer que $x > 0$ et que $y > 0$, mais alors puisqu'on vient de voir comment construire un produit quelconque de nombres constructibles, il suffirait de savoir comment construire l'inverse $\frac{1}{y}$ d'un nombre constructible $y > 0$ quelconque.



Et c'est encore le Théorème de Thalès qui va fournir la solution : en partant du point constructible :

$$M := (0, y),$$

on trace la parallèle à (MI) passant par $J = (0, 1)$, et on vérifie (exercice) que :

$$ON = \left(\frac{1}{y},\, 0\right),$$

ce qui conclut la démonstration. □

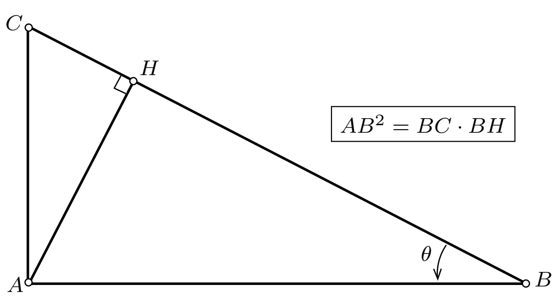
Montrons maintenant que les extractions de racines carrées peuvent être naturellement traduites dans le monde idéal de la règle et du compas.

Théorème 20.2. *Si $x > 0$ est un nombre réel strictement positif constructible, alors sa racine carrée :*

$$\sqrt{x}$$

et aussi un nombre constructible.

Démonstration. Nous allons avoir besoin d'un résultat connu de géométrie du triangle qui s'illustre comme suit.



Dans le plan euclidien $\mathscr{P}$, étant donné un triangle non aplati ABC qui est rectangle en A, si H désigne le pied de la hauteur issue de A, alors on a :

$$(*) \qquad AB^2 \,=\, BC \cdot BH,$$

une identité classique qui résulte de deux expressions du cosinus de l'angle en B :

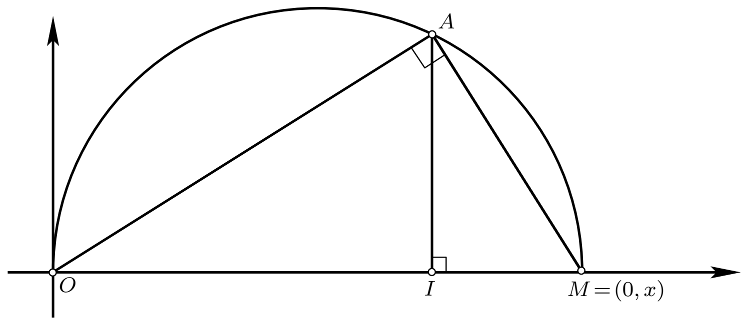
$$\angle(BC,\, BA) \,=:\, \theta,$$

à savoir (exercice visuel) :

$$\cos\theta \,=\, \frac{BA}{BC} \,=\, \frac{BH}{AB}.$$

On construit alors $\sqrt{x}$ comme suit. Quitte à utiliser à l'avance la construction qui permet d'inverser $x \longmapsto \frac{1}{x}$, on peut supposer que :

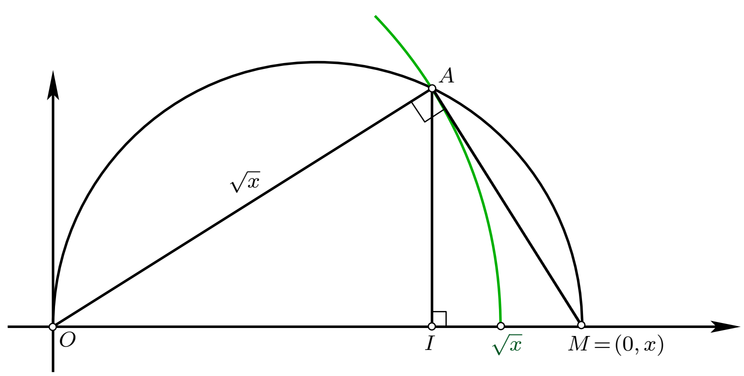
$$x > 1.$$



• Plaçons le point constructible $M := (x, 0)$ sur l'axe horizontal (OI).
• Traçons le demi-cercle de diamètre le segment $[OM]$ qui est situé dans le demi-plan supérieur.
• Traçons la droite perpendiculaire à (OM) qui passe par I.
• Cette droite perpendiculaire intersecte le demi-cercle en un certain point A.
• Le triangle OAM est alors rectangle en A (exercice de révision).
• Grâce à l'identité $(*)$ rappelée à l'instant ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned} OA^2 &= OI \cdot OM \\ &= 1 \cdot x, \end{aligned}$$

ce qui veut justement dire que $OA = \sqrt{x}$.



Pour terminer réellement la démonstration et construire un point de l'axe horizontal (OI) situé à distance $\sqrt{x}$ de O, il suffit de tracer le cercle de centre O passant par A, cercle qui intersectera effectivement (OI) en le point constructible $(\sqrt{x}, 0)$. □

Grâce à ce théorème, au-delà des nombres entiers rationnels, toutes les racines carrées de nombres entiers ou rationnels sont constructibles à la règle et au compas, par exemple :

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad \sqrt{5}, \quad \sqrt{7}, \quad \sqrt{\frac{25}{37}}, \quad \sqrt{\frac{2015}{561}}, \quad \ldots\ldots.$$

Qui plus est, en itérant un nombre fini de fois quelconque, des additions, des soustractions, des multiplications, des quotients, et des racines carrées, opérations qu'on est autorisé à effectuer dans n'importe quel ordre, on obtient toujours des nombres constructibles.

En particulier, le *nombre d'or :*

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

est constructible, ou encore les nombres :

$$\sqrt{1+\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{\frac{1+\tau^3}{325-\sqrt{57}+\tau}},$$

et cætera.

Corollaire 20.3. *Les deux racines réelles d'un trinôme du second degré non dégénéré :*

$$a\,x^2 + b\,x + c$$

dont trois les coefficients a, b, c sont des nombres constructibles satisfaisant :

$$b^2 - 4\,a\,c > 0,$$

à savoir les deux nombres :

$$\frac{-\,b+\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a} \qquad \text{et} \qquad \frac{-\,b-\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a},$$

sont toujours constructibles à la règle et au compas.

Démonstration. En effet, les deux expressions explicites de ces racines incorporent des opérations algébriques emboîtées dont nous venons justement de voir qu'elles possèdent toutes une traduction en termes de constructions à la règle et au compas. □

Or pour anticiper quelque peu ce qui va suivre, dévoilons d'ores et déjà que la prise de racines d'équations algébriques du second degré est essentiellement la seule chose qu'il est possible de faire à la règle et au compas.

Il y a une raison à la fois simple et profonde à ce phénomène, qui se décline en trois items qui correspondent exactement aux trois possibilités de construire des points nouveaux en une étape, *cf.* la Définition (13.2) :

(1) intersecter deux droites revient à résoudre une équation linéaire ;

(2) intersecter une droite et un cercle revient à résoudre une équation algébrique de degré 2 ;

(3) intersecter deux cercles revient *aussi* à résoudre une équation algébrique de degré 2.

Mais il va encore falloir réfléchir et travailler avant de comprendre réellement pourquoi les constructions à la règle et au compas se réduisent toujours, d'un point de vue algébrique, à prendre un nombre fini de fois des racines carrées.

21. Analyse algébrique des constructions en une étape

En tout cas, nous venons de démontrer qu'en partant de nombres constructibles, on peut toujours produire une ribambelle de nouveaux nombres constructibles grâce aux cinq opérations cartésiennes :

$$+, \qquad -, \qquad \times, \qquad -, \qquad \sqrt{},$$

et à cause de cela, nous nous trouvons quelque peu embarassés par toute cette liberté de construire et de construire encore, sans jamais savoir à quel moment tout cela va se terminer, sans jamais savoir à quoi tout cela aboutit en fin de compte.

Dans la pensée mathématique, il s'est produit une tournant fantastique et d'une nature essentiellement philosophique lorsqu'on a commencé à vouloir comprendre quelle est l'extension maximale d'un procédé de construction géométrique. On a alors été amené à conceptualiser la totalité des constructions géométriques possibles, comme si on pouvait se placer à un endroit surélevé du monde où l'infini était donné sous forme achevée — ce à quoi, soit dit en passant, la philosophie des Grecs se refusait farouchement.

Le théorème qui va suivre élève alors d'emblée la pensée mathématique à un niveau de généralité remarquable, niveau qui n'a été compris et admis, dans l'histoire des mathématiques, qu'à la fin du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. En effet, dans ce théorème, nous allons conceptualiser qu'un ensemble de points constructibles nous est donné, en totalité, qu'il est présent, qu'il est accessible.

Or comme nous venons de voir que l'ensemble des nombres constructibles est un corps, corps qui est de plus stable par prise de racines carrées, nous pouvons nous imaginer que nous travaillons avec le corps :

$$\mathbb{K}_{\mathsf{constr}}$$

de tous les nombres qui sont constructibles à la règle et au compas (bien que nous ne sachions pas encore à quoi ressemble réellement ce corps).

Mais comme nous n'avons toujours pas terminé les considérations au sujet de la quadrature du cercle, de la duplication du cube, de la trisection de l'angle, de l'heptagone régulier, nous pouvons aussi nous imaginer que nous partons d'un corps de nombres constructibles qui est *intermédiaire* entre le corps des nombres rationnels (que nous savons constructibles) et le corps de *tous* les nombres constructibles :

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{K}_{\mathsf{constr}}.$$

Nous pouvons même, encore plus généralement, nous imaginer dans le théorème suivant, que $\mathbb{K}$ est un corps arbitraire, sans aucune relation avec les constructions à la règle et au compas.

Théorème 21.1. *Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de nombres qui est un* corps*, au sens définitionnel où, pour tous $x, y \in \mathbb{K}$, on a encore :*

$$x + y \in \mathbb{K}, \qquad x - y \in \mathbb{K}, \qquad x\,y \in \mathbb{K}, \qquad \tfrac{x}{y} \in \mathbb{K} \qquad {\scriptstyle (y \neq 0)}.$$

Soit aussi $d \in \mathbb{K}$ un élément fixé de $\mathbb{K}$ qui est strictement positif :

$$d > 0.$$

Alors l'ensemble noté :

$$\mathbb{K}\big(\sqrt{d}\big) := \big\{a + b\sqrt{d}\colon\ a \in \mathbb{K},\, b \in \mathbb{K}\big\},$$

des combinaisons linéaires d'éléments de K avec l'élément $\sqrt{d}$, est encore un sous-corps de $\mathbb{R}$, et il satisfait :

$$\mathbb{K} \subset \mathbb{K}\big(\sqrt{d}\big).$$

De plus, $\mathbb{K}(\sqrt{d})$ est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ qui contient à la fois $\mathbb{K}$ et le nombre $\sqrt{d}$.

Grâce à ce théorème, nous allons mieux comprendre la manipulation algébrique des expressions qui incorporent des racines carrées, et donc aussi, nous allons mieux comprendre ce que sont les nombres constructibles à la règle et au compas.

Démonstration. Si par hasard on a :

$$\sqrt{d} \in \mathbb{K},$$

alors il est clair (exercice mental) que $\mathbb{K}(\sqrt{d}) = \mathbb{K}$, situation dégénérée que nous excluons dorénavant. Autrement dit, nous suppsons maintenant que :

$$\sqrt{d} \notin \mathbb{K}.$$

Il s'agit donc de montrer que $\mathbb{K}(\sqrt{d})$ est stable par les quatre opérations algébriques standard :

$$+, \qquad -, \qquad \times, \qquad -.$$

Pour l'addition et pour la soustraction, la vérification — fort simple — est laissée au lecteur-étudiant.

Pour vérifier que le produit de deux éléments quelconques :

$$a + b\sqrt{d} \qquad \text{et} \qquad a' + b'\sqrt{d}$$

appartenant à $\mathbb{K}(\sqrt{d})$ appartient encore à $\mathbb{K}(\sqrt{d})$, si l'on tient compte de l'identité qui définit la racine carrée :

$$\sqrt{d}\sqrt{d} = d,$$

il suffit de développer :

$$\begin{aligned} \big(a + b\sqrt{d}\big) \cdot \big(a' + b'\sqrt{d}\big) &= a\,a' + a\,b'\sqrt{d} + b\sqrt{d}\,a' + b\sqrt{d}\,b'\sqrt{d} \\ &= \big(\underbrace{a\,a' + d\,b\,b'}_{=:\,a''\,\in\,\mathbb{K}}\big) + \big(\underbrace{a\,b' + b\,a'}_{=:\,b''\,\in\,\mathbb{K}}\big)\sqrt{d} \\ &=: a'' + b''\sqrt{d}, \end{aligned}$$

ce qui fournit bien une représentation sous la forme d'un élément de $\mathbb{K}(\sqrt{d})$, puisque a'' et b'' appartiennent à $\mathbb{K}$ grâce à sa structure de corps.

Il reste seulement à montrer que l'inverse d'un élément quelconque $a + \sqrt{d}$ de $\mathbb{K}$, supposé non nul, appartient encore à $\mathbb{K}$, mais nous connaissons tous déjà l'astuce qui consiste à multiplier numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée afin de faire disparaître la racine carrée au dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a + b\sqrt{d}} &= \frac{1}{a + b\sqrt{d}}\,\frac{a - b\sqrt{d}}{a - b\sqrt{d}} \\ &= \frac{a - b\sqrt{d}}{a^2 - d\,b^2} \\ &= \frac{a}{a^2 - d\,b^2} - \frac{b}{a^2 - d\,b^2}\sqrt{d}, \end{aligned}$$

ce calcul étant justifié puisque nous nous sommes ramenés à la situation où $\sqrt{d} \notin \mathbb{K}$, ce qui garantit que $a - b\sqrt{d} \neq 0$ (exercice : vérifier cela en raisonnant par l'absurde).

Enfin, la dernière affirmation du Théorème 21.1 constitue l'Exercice 6. $\square$

Maintenant, revenons à notre problème initial, celui de comprendre ce qui se passe réellement lorsqu'on effectue à la règle et au compas des constructions de points supplémentaires à partir de points déjà connus. Puisque nous savons que les nombres constructibles restent constructibles après effectuation des quatre opérations algébriques standard, nous pouvons toujours nous imaginer, à un niveau intermédiaire donné, que l'ensemble des nombres connus forme déjà un corps, en tout cas, un certain corps *intermédiaire :*

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{K}_{\mathsf{constr}},$$

entre celui des nombres rationnels et celui de tous les nombres constructibles.

Imaginons-nous alors connu un ensemble peut-être grand, mais *fini*, de points :

$$O, \ I, \ P_2, \ P_3, \ P_4, \ \dots, \ P_n,$$

construits à partir des deux points de départ absolu :

$$O = P_0 \qquad \text{et} \qquad I = P_1,$$

points dont toutes les coordonnées :

$$P_k = (x_k, y_k) \qquad {\scriptstyle (k=0,1,2,3,\dots,n)},$$

sont des nombres constructibles :

$$x_k, \, y_k \, \in \, \mathbb{K},$$

qui appartiennent à un certain sous-corps constructible $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$.

Souvenons-nous alors que d'après la Définition 13.2, les points constructibles en une étape se situent toujours à l'intersection entre :

(1) deux droites tracées entre certains points P_k ;

(2) une droite et un cercle tracés entre certains points P_k ;

(3) deux cercles tracés entre certains points P_k.

Or les points connus $0, I, P_1, \dots, P_n$ sont par hypothèses supposés à coordonnées (x_k, y_k) appartenant au corps $\mathbb{K}$. Donc il est naturel d'attendre que les équations cartésiennes des droites et des cercles concernés auront toutes des coefficients qui appartiennent à $\mathbb{K}$ et c'est justement ce que les deux lemmes suivants affirment.

Lemme 21.2. *Toute droite passant par deux points distincts P_{k_1} et P_{k_2} à coordonnées dans un corps $\mathbb{K}$ possède une équation cartésienne de la forme :*

$$0 \, = \, a\,X + b\,Y + c,$$

où $a, b, c \in \mathbb{K}$ sont certains éléments du corps.

Démonstration. Comment écrire l'équation cartésienne de la droite joignant deux points distincts :

$$P_{k_1} = \big(x_{k_1}, \, y_{k_1}\big) \qquad \text{et} \qquad P_{k_2} = \big(x_{k_2}, \, y_{k_2}\big) \, ?$$

La méthode est la suivante. Cette droite est dirigée par le vecteur non nul :

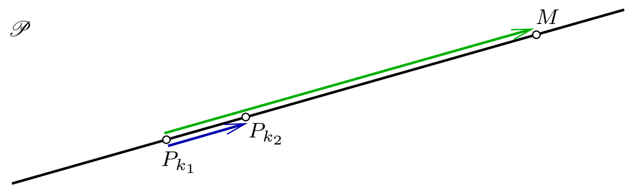
$$\overrightarrow{P_{k_1} P_{k_2}},$$

et alors demander qu'un point quelconque du plan :

$$M \, = \, (X, Y)$$

appartienne à la droite $\big(P_{k_1} P_{k_2}\big)$, cela revient à demander que les deux vecteurs suivants soient parallèles :

$$\overrightarrow{P_{k_1} M} \ /\!\!/ \ \overrightarrow{P_{k_1} P_{k_2}}.$$



Comme ces deux vecteurs ont pour coordonnées :

$$\big(X - x_{k_1},\, Y - y_{k_1}\big) \qquad\quad \text{et} \qquad\quad \big(x_{k_2} - x_{k_1},\, y_{k_2} - y_{k_1}\big),$$

le parallélisme s'exprime en disant qu'il existe un facteur de dilatation $\lambda \in \mathbb{R}$ entre les deux vecteurs, à savoir satisfaisant :

$$\begin{aligned} X - x_{k_1} &= \lambda\,\big(x_{k_2} - x_{k_1}\big), \\ Y - y_{k_1} &= \lambda\,\big(y_{k_2} - y_{k_1}\big). \end{aligned}$$

Pour faire disparaître λ de ces deux équations, multiplions simplement la première par $(y_{k_2} - y_{k_1})$ et la seconde par $(x_{k_2} - x_{k_1})$:

$$\begin{aligned} \Big[X - x_{k_1} &= \lambda\,\big(x_{k_2} - x_{k_1}\big)\Big] \times \big(y_{k_2} - y_{k_1}\big) \\ \Big[Y - y_{k_1} &= \lambda\,\big(y_{k_2} - y_{k_1}\big)\Big] \times \big(x_{k_2} - x_{k_1}\big). \end{aligned}$$

puis soustrayons les deux équations ainsi obtenues, ce qui annihile les termes de droite :

$$\big[X - x_{k_1}\big]\big(y_{k_2} - y_{k_1}\big) - \big[Y - y_{k_1}\big]\big(x_{k_2} - x_{k_1}\big) = 0,$$

et il ne reste plus qu'à réorganiser (exercice) pour obtenir l'équation suivante :

$$X\,\underbrace{\big(y_{k_2} - y_{k_1}\big)}_{=:\,a\,\in\,\mathbb{K}} + \underbrace{Y\,\big(-\,x_{k_2} + x_{k_1}\big)}_{=:\,b\,\in\,\mathbb{K}}\underbrace{-x_{k_1}\,y_{k_2} + \underline{x_{k_1}\,y_{k_1}} + y_{k_1}\,x_{k_2} - \underline{x_{k_1}\,y_{k_1}}}_{=:\,c\,\in\,\mathbb{K}}.$$

On voit ainsi apparaître trois nouvelles constantes :

$$a,\;\; b,\;\; c \;\;\in\;\; \mathbb{K},$$

lesquelles appartiennent toutes à $\mathbb{K}$, puisque $\mathbb{K}$ est un corps, et puisque, par hypothèse :

$$x_{k_1},\;\; y_{k_1},\;\; x_{k_2},\;\; y_{k_2},\;\; \in\;\; \mathbb{K},$$

ce qui conclut les arguments. □

Le deuxième lemme est entièrement analogue.

Lemme 21.3. *Tout cercle centré en un point P_{k_1} et passant par un autre point P_{k_2} à coordonnées dans $\mathbb{K}$, possède une équation cartésienne de la forme :*

$$0 = X^2 + Y^2 + e\,x + f\,y + g,$$

où $e, f, g \in \mathbb{K}$ sont certains éléments du corps.

Démonstration. Le cercle de centre P_{k_1} passant par P_{k_2} est le lieu des points M situés à distance euclidienne constante, à savoir qui satisfont :

$$\overrightarrow{P_{k_1}M}^2 = \overrightarrow{P_{k_1}P_{k_2}}^2.$$

Mais en revenant aux coordonnées déjà vues de ces deux vecteurs :

$$\big(X - x_{k_1},\, Y - y_{k_1}\big) \qquad\quad \text{et} \qquad\quad \big(x_{k_2} - x_{k_1},\, y_{k_2} - y_{k_1}\big),$$

cette égalité de distances au carré s'écrit simplement :

$$\big(X - x_{k_1}\big)^2 + \big(Y - y_{k_1}\big)^2 \;=\; \big(x_{k_2} - x_{k_1}\big)^2 + \big(y_{k_2} - y_{k_1}\big)^2,$$

et si on la développe :

$$X^2 - 2\,x_{k_1}\,X + x_{k_1}^2 + Y^2 - 2\,y_{k_1}\,Y + y_{k_1}^2 \;=\; x_{k_2}^2 - 2\,x_{k_2}\,x_{k_1} + x_{k_1}^2 + y_{k_2}^2 - 2\,y_{k_2}\,y_{k_1} + y_{k_1}^2,$$

puis si on la réorganise après avoir patiemment chassé les termes qui s'annihilent (exercice visuel), on obtient l'équation d'un cercle :

$$0 \;=\; X^2 + Y^2 \underbrace{-2\,x_{k_1}}_{=:\,e\,\in\,\mathbb{K}} X \underbrace{-2\,y_{k_1}}_{=:\,f\,\in\,\mathbb{K}} Y \underbrace{-x_{k_2}^2 + 2\,x_{k_2}\,x_{k_1} - y_{k_2}^2 + 2\,y_{k_2}\,y_{k_1}}_{=:\,g\,\in\,\mathbb{K}},$$

dont les trois constantes :

$$e, \;\; f, \;\; g, \;\; \in \;\; \mathbb{K}$$

appartiennent effectivement à $\mathbb{K}$, puisque par hypothèse :

$$x_{k_1}, \;\; y_{k_1}, \;\; x_{k_2}, \;\; y_{k_2}, \;\; \in \;\; \mathbb{K},$$

et puisque $\mathbb{K}$ est un corps. □

Ensuite, le résultat crucial suivant dévoile l'effet de toute construction à la règle et au compas en une étape : on y voit qu'une telle construction revient *toujours* à admettre l'extraction d'une racine carrée.

Théorème 21.4. *En partant d'un ensemble fini quelconque de points :*

$$O, \;\; I, \;\; P_2, \;\; \dots, \;\; P_n$$

dont toutes les coordonnées :

$$P_k = (x_k, y_k) \;\in\; \mathbb{K} \times \mathbb{K} \qquad\qquad {\scriptstyle (k\,=\,0,\,1\,\cdots\,n)}$$

appartiennent à un certain sous-corps $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$*, si un point supplémentaire :*

$$M = (x, y)$$

est obtenu par construction à la règle et au compas en une seule étape, alors il existe toujours un élément :

$$d \;\in\; \mathbb{K}$$

tel que :

$$x \;\in\; \mathbb{K}\big(\sqrt{d}\big) \qquad\quad \text{et} \qquad\quad y \;\in\; \mathbb{K}\big(\sqrt{d}\big).$$

Démonstration. Par définition, M se situe à l'intersection, ou bien de deux droites, ou bien d'une droite et d'un cercle, ou bien de deux cercles, ces figures étant tracées à partir des points $O, I, P_2, \dots, P_n$ suivant les règles habituelles. Il y a donc, nous le savons, trois cas à considérer.

Premier Cas. Lorsque le point M se situe à l'intersection de deux droites non parallèles tracées entre deux paires de points P_k, nous savons grâce à un lemme qui précède que les équations de ces deux droites s'écrivent toujours sous une forme du type :

$$0 \;=\; a_1\,X + b_1\,Y + c_1,$$
$$0 \;=\; a_2\,X + b_2\,Y + c_2,$$

avec des coefficients qui appartiennent tous au corps :

$$a_1, \;\; b_1, \;\; c_1, \;\; a_2, \;\; b_2, \;\; c_2, \;\; \in \;\; \mathbb{K}.$$

Or puisque ces deux droites sont supposées non parallèles, nous avons là affaire à un système linéaire à deux inconnues dont la solution unique est donnée par les formules (exercice : vérifier que X et Y sont bien solutions du système) :

$$X = \frac{b_1\,c_2 - b_2\,c_1}{a_1\,b_2 - a_2\,b_1} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad Y = \frac{-\,a_1\,c_2 + a_2\,c_1}{a_1\,b_2 - a_2\,b_1},$$

le dénominateur commun de ces deux expressions ne s'annulant pas, ce qui donne les deux coordonnées de l'unique point d'intersection entre les deux droites en question.

Mais par hypothèse, $\mathbb{K}$ est un corps ! Donc ces deux fractions rationnelles constituent des nombres qui appartiennent encore à $\mathbb{K}$. Pour satisfaire la conclusion du théorème, il suffit alors de choisir :

$$d := 1,$$

et de conclure alors que X et Y appartiennent bien à $\mathbb{K}(\sqrt{1}) = \mathbb{K}$.

Le cas de deux droites qui s'intersectent est donc, en un certain sens, un cas *dégénéré*, au sens où il n'est pas besoin d'extraire une racine carrée. Mais dans les deux cas suivants, cela sera nécessaire.

Deuxième Cas. Lorsque le point M se situe à l'intersection entre une droite et un cercle tracés à partir de certains points P_k, nous savons que les deux équations cartésiennes concernées s'écrivent toujours sous une forme du type :

$$\begin{aligned} 0 &= a\,X + b\,Y + c, \\ 0 &= X^2 + Y^2 + e\,X + f\,Y + g, \end{aligned}$$

avec des coefficients qui appartiennent tous au corps :

$$a, \ b, \ c, \ e, \ f, \ g \ \in \ \mathbb{K}.$$

Puisque la droite est une vraie droite, l'un au moins des deux coefficients a ou b est non nul. Pour fixer les idées, supposons par exemple que $b \neq 0$ — le cas $a \neq 0$ est entièrement similaire, quitte à échanger $X \longleftrightarrow Y$.

La première équation peut alors être résolue par rapport à Y :

$$Y = p\,X + q,$$

avec deux élément $p, q \in \mathbb{K}$ dans le corps (exercice). Grâce à cette résolution, on peut alors remplacer Y par sa valeur dans la seconde équation, ce qui donne :

$$\begin{aligned} 0 &= X^2 + \big(p\,X + q\big)^2 + e\,X + f\,\big(p\,X + q\big) + g \\ &= (1 + p^2)\,X^2 + \big(2\,pq + e + fp\big)\,X + q^2 + fq + g \\ &=: \alpha\,X^2 + \beta\,X + \gamma, \end{aligned}$$

les trois nouveaux coefficients appartenant au corps :

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma \ \in \ \mathbb{K},$$

et le coefficient dominant étant non nul :

$$\alpha \neq 0,$$

puisqu'il est égal au nombre strictement positif $1 + p^2$.

Nous sommes donc naturellement conduits à résoudre une équation du second degré, et c'est là que gît la raison profonde qui explique pourquoi on doit successivement extraire des racines carrées lorsqu'on effectue des constructions à la règle et au compas.

Trois sous-cas sont alors à distinguer, suivant la valeur du *discriminant* de cette équation du second degré en X :

$$\beta^2 - 4\,\alpha\gamma < 0, \qquad \beta^2 - 4\,\alpha\gamma = 0, \qquad \beta^2 - 4\,\alpha\gamma > 0.$$

Dans le premier sous-cas, aucune solution n'existe ; géométriquement, cela signifie que le cercle et la droite ne s'intersectent pas, et nous savons bien qu'un rayon lumineux divin peut traverser l'univers sans rencontrer notre Terre.

Dans le deuxième sous-cas, une unique solution existe :

$$X \,=\, \frac{-\beta}{2\,\alpha} \,\in\, \mathbb{K},$$

solution qui appartient à $\mathbb{K}$, puisque $\mathbb{K}$ est un corps ; géométriquement, cela signifie que la droite est *tangente* au cercle et l'intersecte en un seul point. Enfin, la deuxième coordonnée :

$$Y \,=\, -\,p\,\frac{\beta}{2\,\alpha} + q$$

de ce point d'intersection appartient elle aussi au corps $\mathbb{K}$.

Dans le troisième sous-cas, *deux* solutions existent, qui sont données par des formules connues depuis plus de quatre mille ans :

$$X_1 \,=\, \frac{-\,\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\,\alpha\gamma}}{2\,\alpha} \qquad \text{et} \qquad X_2 \,=\, \frac{-\,\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\,\alpha\gamma}}{2\,\alpha},$$

et c'est justement là qu'apparaît la racine carrée d'un élément du corps $\mathbb{K}$. Si donc l'on introduit le nombre :

$$d \,:=\, \beta^2 - 4\,\alpha\gamma \,\in\, \mathbb{K}$$

qui appartient au corps, on se convainc mentalement que les deux racines X_1 et X_2 appartiennent au sur-corps :

$$\mathbb{K}\big(\sqrt{d}\big).$$

Enfin, les deux deuxièmes coordonnées correspondantes :

$$\begin{aligned} Y_1 \,&=\, p\,X_1 + q & \text{et} \qquad Y_2 \,&=\, p\,X_2 + q \\ &=\, p\left(\frac{-\,\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\,\alpha\gamma}}{2\,\alpha}\right) + q & \text{et} \qquad &=\, p\left(\frac{-\,\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\,\alpha\gamma}}{2\,\alpha}\right) + q \end{aligned}$$

appartiennent elles aussi au sur-corps $\mathbb{K}\big(\sqrt{d}\big)$.

Troisième Cas. Lorsque le point M se situe à l'intersection entre deux cercles tracés à partir de certains points P_k, nous savons que les deux équations cartésiennes concernées s'écrivent toujours sous une forme du type :

$$\begin{aligned} 0 \,&=\, X^2 + Y^2 + e_1\,X + f_1\,Y + g_1, \\ 0 \,&=\, X^2 + Y^2 + e_2\,X + f_2\,Y + g_2, \end{aligned}$$

avec des coefficients qui appartiennent tous au corps :

$$e_1,\;\; f_1,\;\; g_1,\;\; e_2,\;\; f_2,\;\; g_2 \;\in\; \mathbb{K}.$$

Mais si on soustrait la seconde équation à la première, les termes de degré deux $X^2 + Y^2$ disparaissent :

$$\begin{aligned} 0 \,&=\, (e_1 - e_2)\,X + (f_1 - f_2)\,Y + (g_1 - g_2) \\ 0 \,&=\, X^2 + Y^2 + e_2\,X + f_2\,Y + g_2, \end{aligned}$$

et l'on se retrouve exactement dans la situation du Deuxième Cas, où il s'agissait d'intersecter une droite avec un cercle. Les mêmes raisonnements s'appliquent, et la démonstration se termine sans effort supplémentaire. □

Grâce au théorème qui précède, nous pouvons enfin voir qu'un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est constuctible si et seulement si, il existe un nombre fini d'intersections successives de droites et de cercles au cours desquelles on est amené, la plupart du temps, à admettre l'extraction d'une racine carrée.

Le théorème qui suit est l'aboutissement remarquable de toute la théorie, et il a fallu des millénaires de réflexions mathématiques pour que les hommes de science atteignent ce niveau de compréhension.

Théorème 21.5. *Un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est constructible — à la règle et au compas — si et seulement si il existe une suite finie :*

$$\mathbb{K}_0, \ \mathbb{K}_1, \ \ldots, \ \mathbb{K}_r$$

de sous-corps de $\mathbb{R}$ satisfaisant les trois conditions suivantes :

(i) $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$;

(ii) $\mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \cdots \subset \mathbb{K}_r$*, et plus précisément, pour chaque indice $i = 1, \ldots, r$, il existe :*

$$d_i \in K_{i-1}$$

tel que :

$$\mathbb{K}_i = \mathbb{K}_{i-1}\big(\sqrt{d_i}\big);$$

(iii) $x \in \mathbb{K}_r$.

Démonstration. Grâce à tous les résultats qui précèdent, le théorème est en fait déjà quasiment établi, il suffit simplement maintenant de bien résumer, de bien comprendre et de bien synthétiser tout ce qui a été acquis et vu.

Dans un premier sens d'implication, si un nombre $x \in \mathbb{R}$ est constructible, *i.e.* si le point $(x, 0)$ est constructible à la règle et au compas, par définition, cela veut dire qu'en partant des deux points initiaux O et I qui correspondent au corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, le point $(x, 0)$ est obtenu après un nombre fini d'intersections de droites et de cercles, et nous venons justement de voir dans le théorème qui précède, qu'à chaque telle étape simple, cela revient à ajouter la racine carrée $\sqrt{d_i}$ d'un nombre déjà construit.

L'implication inverse est plus simple : en partant de $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$, si l'on a une suite de corps $\mathbb{K}_i = \mathbb{K}_{i-1}\big(\sqrt{d_i}\big)$ emboîtés les uns dans les autres pour lesquels on extrait successivement des racines carrées, puisque nous avons démontré dans le Théorème 20.2 que la racine carrée d'un nombre constructible est toujours elle aussi constructible, il est évident que le nombre final $x \in \mathbb{K}_r$ est constructible. □

22. Impossibilité de la duplication du cube

Comme nous l'avons déjà fait comprendre au début de ce chapitre, le problème de la duplication du cube à la règle et au compas revient à trouver un procédé de construction du nombre :

$$\sqrt[3]{2},$$

en partant de l'origine O et d'un point I situé à distance 1 de O. Dans ce cours réservé aux candidats au professorat des écoles, nous sommes enfin parvenus à un point remarquable, puisque nous sommes maintenant en mesure d'*expliquer mathématiquement pourquoi les Grecs et les mathématiciens qui les ont suivis ne sont jamais parvenus à résoudre le problème de la duplication du cube*.

En effet, nous sommes maintenant assez avancés pour *démontrer rigoureusement* que ce problème est totalement impossible.

Pour commencer, rappelons que par définition, le nombre racine cubique de deux : $\sqrt[3]{2}$ est l'unique nombre réel positif dont le cube vaut l'unité :

$$\big(\sqrt[3]{2}\big)^3 = 1,$$

et c'est du *cube* qu'il s'agit, pas du *carré* qui concernait la racine classique $\sqrt{2}$. En tout cas, à l'apéritif, démontrons au moins que :

Théorème 22.1. *Le nombre $\sqrt[3]{2}$ est irrationnel, à savoir pour tous entiers $p, q \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\sqrt[3]{2} \neq \frac{p}{q}.$$

Démonstration. En s'inspirant de la démonstration déjà vue au début de ce chapitre de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, supposons par l'absurde que l'on puisse représenter $\sqrt[3]{2}$ sous forme d'une telle fraction rationnelle :

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}.$$

Sans perte de généralité, on peut aussi supposer que cette fraction est *réduite*, à savoir, on peut supposer que les deux entiers p et q sont premiers entre eux :

$$p \wedge q = 1.$$

En élevant au cube l'identité et en chassant le dénominateur, on déduit l'identité fondamentale entre nombres entiers :

$$2\,q^3 = p^3.$$

Cette identité montre que p est forcément pair :

$$p = 2\,p',$$

car si p était impair, donc de la forme :

$$p = 1 + 2\,\overline{p},$$

en appliquant le développement classique :

$$\big(a+b\big)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3,$$

le cube de p serait aussi impair :

$$p^3 = 1^3 + \underbrace{3 \cdot 1^2\,(2\,\overline{p}) + 3 \cdot 1\,(2\,\overline{p})^2 + (2\,\overline{p})^3}_{\text{nombre pair}}.$$

Ensuite, après remplacement de $p = 2\,p'$, l'identité fondamentale devient :

$$2\,q^3 = 8\,p'^3,$$

i.e. en divisant par 2 :

$$q^3 = 4\,p'^3.$$

Pour la même raison, ceci force q à être lui aussi pair :

$$q = 2\,q',$$

mais alors $p = 2\,p'$ et $q = 2\,q'$ ne sont plus premiers entre eux, ce qui est une contradiction concluant la démonstration. □

Théorème 22.2. *Le nombre $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible à la règle et au compas, et la duplication du cube est impossible.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\sqrt[3]{2}$ soit constructible. D'après le Théorème 21.5, il existe une suite de sous-corps de $\mathbb{R}$ emboîtés les uns dans les autres :

$$\mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \cdots \subset \mathbb{K}_r,$$

partant de $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$, satisfaisant :

$$\mathbb{K}_i = \mathbb{K}_{i-1}\big(\sqrt{d_i}\big) \qquad\qquad {\scriptstyle (i=1\cdots r)},$$

pour certains éléments $d_i \in \mathbb{K}_{i-1}$, telle que le dernier corps :

$$\mathbb{K}_r \ni \sqrt[3]{2}$$

contienne la racine troisième de 2. Or le lemme crucial suivant va permettre de montrer que cela est impossible (les arguments se poursuivront après sa démonstration indépendante).

Lemme 22.3. *Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ un sous-corps quelconque, et soit $d \in \mathbb{K}$ un nombre > 0. Si on a :*

$$\sqrt[3]{2} \in \mathbb{K}\big(\sqrt{d}\big),$$

alors en fait :

$$\sqrt[3]{2} \in \mathbb{K}.$$

Démonstration. En effet, le résultat est évident lorsque l'élément $d \in \mathbb{K}$ a sa racine carrée $\sqrt{d} \in \mathbb{K}$ qui appartient encore à $\mathbb{K}$, puisqu'alors dans cette circonstance dégénérée on aura trivialement $\mathbb{K}\big(\sqrt{d}\big) = \mathbb{K}$.

Supposons donc sans perte de généralité que :

$$\sqrt{d} \notin \mathbb{K}.$$

Si donc :

$$\sqrt[3]{2} \in \mathbb{K}\big(\sqrt{d}\big),$$

ceci veut par définition dire qu'il existe deux éléments $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$ tels qu'on puisse écrire :

$$\sqrt[3]{2} = a + b\,\sqrt{d}.$$

Immédiatement, on est tenté d'élever cette relation au cube, ce qui donne, en détaillant les calculs :

$$\begin{aligned}\big(\sqrt[3]{2}\big)^3 &= \big(a + b\,\sqrt{d}\big)^3 \\ &= a^3 + 3\,a^2\,b\,\sqrt{d} + 3\,a\,\big(b\sqrt{d}\big)^2 + \big(b\,\sqrt{d}\big)^3 \\ &= \big(a^3 + 3\,a\,b^2\,d\big) + \big(3\,a^2\,b + b^3\,d\big)\,\sqrt{d},\end{aligned}$$

la dernière ligne consistant à réorganiser les termes en regroupant à la fin ceux qui sont multiples de $\sqrt{d}$.

En abrégé, on obtient donc une relation de la forme :

$$2 = A + B\,\sqrt{2},$$

avec $A \in \mathbb{K}$ et $B \in \mathbb{K}$, à savoir :

$$0 = (A - 2) + B\,\sqrt{d}.$$

Or puisque nous nous sommes ramenés à raisonner en supposant que :

$$\sqrt{d} \notin \mathbb{K},$$

nous affirmons qu'il découle de cette identité que :

$$B = 0,$$

car sinon, si on avait au contraire $B \neq 0$, on pourrait résoudre :

$$\sqrt{d} = \frac{-A+2}{B},$$

et le membre de droite appartiendrait à $\mathbb{K}$, puisque $\mathbb{K}$ est un corps, ce qui voudrait dire que $\sqrt{d} \in \mathbb{K}$, mais c'est justement ce qu'on avait exclu à l'avance !

Donc $B = 0$, et si nous revenons à l'expression de B, cela signifie que :

$$3\,a^2\,b + b^3\,d = 0,$$

à savoir après factorisation :

$$0 = b\,\big(\underbrace{3\,a^2 + b^2\,d}_{\text{nombre} > 0}\big).$$

Mais comme a et b ne peuvent pas être tous deux égaux à 0 — puisque nous sommes partis de $\sqrt[3]{2} = a + b\,\sqrt{d}$, nombre strictement positif —, on a toujours que le deuxième facteur ci-dessus est strictement positif.

Comme par magie, cela force b à être égal à zéro :

$$b = 0,$$

donc en revenant à ce dont nous sommes partis, cela nous ramène à :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2} &= a + \mathbf{0} \cdot \sqrt{d} \\ &= a \in \mathbb{K},\end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\sqrt[3]{2}$ appartient en fait au corps de départ $\mathbb{K}$, comme l'affirmait le lemme. □

La démonstration du théorème de l'impossibilité de la duplication du cube est maintenant presque achevée, puisque ce lemme crucial nous permet d'abord de conclure, en partant du haut, à savoir en partant de :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2} &\in \mathbb{K}_r \\ &= \mathbb{K}_{r-1}\big(\sqrt{d_r}\big),\end{aligned}$$

qu'on a en fait :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2} &\in \mathbb{K}_{r-1} \\ &= \mathbb{K}_{r-2}\big(\sqrt{d_{r-1}}\big),\end{aligned}$$

et ensuite, en réappliquant le même lemme, on peut encore redescendre d'un cran :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2} &\in \mathbb{K}_{r-2} \\ &= \mathbb{K}_{r-3}\big(\sqrt{d_{r-2}}\big),\end{aligned}$$

et ainsi de suite en cascade jusqu'à être rabattu sur le sol des nombres rationnels :

$$\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q},$$

ce qui est une contradiction, puisque nous avons déjà vu que $\sqrt[3]{2}$ n'est *pas* un nombre rationnel ! □

23. Théorème de Mohr et Mascheroni

En géométrie classique plane, le théorème de Mohr Mascheroni, démontré par Georg Mohr en 1672 et par Lorenzo Mascheroni en 1797, affirme que :

Théorème 23.1. *Si la construction géométrique d'un nouveau point est possible à la règle et au compas, alors elle est possible en utilisant seulement le compas, les reports de compas, c'est-à-dire les mouvements manuels dans l'espace, étant autorisés.*

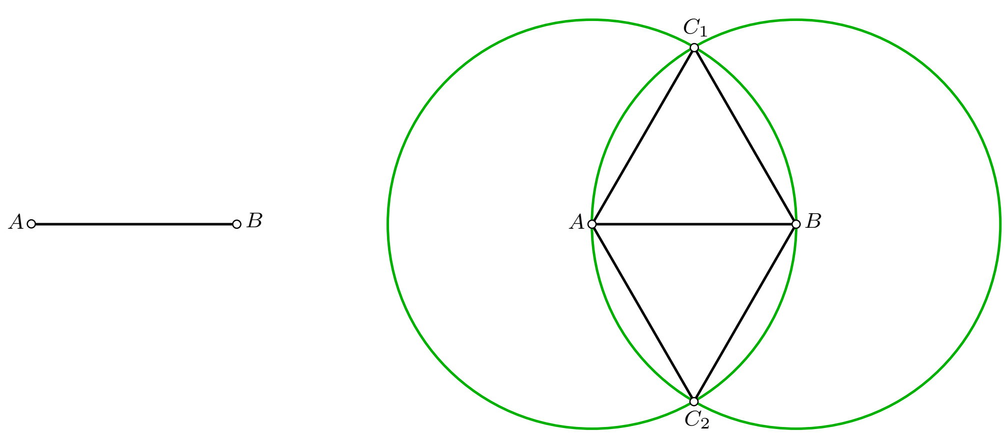
Évidemment, le tracé effectif des droites est impossible au moyen du compas seul, mais, comme nous l'avons vu, ce qui compte, dans les constructions géométriques, ce sont les *points d'intersection*.

Dans ce théorème, donc, est considéré comme constructible tout point d'intersection de deux cercles dont les centres sont des points déjà construits et dont les rayons sont des distances entre des points déjà construits.

En 1994, Norbert Hungerbühler, propose une courte démonstration en quatre pages de ce théorème, et il montre que l'on peut construire l'intersection de deux cercles, d'un cercle et d'une droite et de deux droites.

24. Triangle équilatéral, carré, hexagone régulier, octogone régulier

24.1. Construction de deux triangles équilatéraux de côté donné. Dans le plan $\mathscr{P}$, soit un segment AB.



Question. *Comment construire les deux triangles équilatéraux de côté AB ?*

• Traçons le cercle de centre A passant par B.

• Traçons le cercle de centre B passant par A.

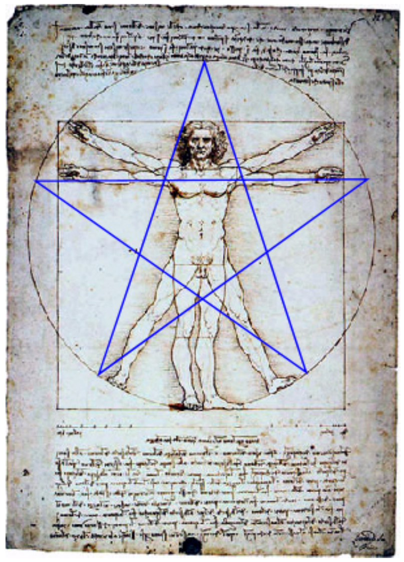
• Ces deux cercles s'intersectent en deux points C_1 et C_2.

• Le triangle ABC_1 est équilatéral.

• Le triangle ABC_2 est équilatéral.

Proposition 24.1. [Proposition 1 du Livre I des Éléments d'Euclide] *Dans le plan $\mathscr{P}$, étant donné un segment AB, les deux triangles équilatéraux ayant AB comme côté sont constructibles à la règle et au compas.* □

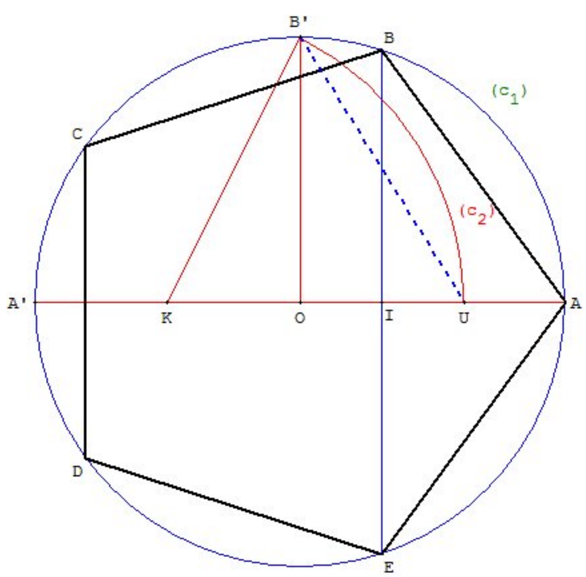
25. Construction d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle



Le centre du corps humain est en outre par nature le nombril ; de fait, si l'on couche un homme sur le dos, mains et jambes écartées, et qu'on pointe un compas sur son nombril, on touchera tangentiellement, en décrivant un cercle, l'extrémité des doigts de ses deux mains et de ses orteils. Mais ce n'est pas tout : de même que la figure de la circonférence se réalise dans le corps, de même on y découvrira le schéma du carré. Si en effet mesure est prise d'un homme depuis la plante des pieds jusqu'au sommet de la tête et qu'on reporte cette mesure sur la ligne définie par ses mains tendues, la largeur se trouvera être égale à la hauteur, comme sur les aires carrées à l'équerre. Vitruve, De Architectura, III, 1, 3.

Soit un cercle (c_1) dans le plan euclidien $\mathscr{P}$, dont le centre O est connu.

Question. *Comment construire, à la règle et au compas, un pentagone inscrit dans un cercle donné, pentagone qui soit régulier au sens où tous ses côtés aient la même longueur ?*



- Donnons-nous donc un cercle (c_1) de centre O, passant aussi par un autre point A.

• Traçons la droite $(A'A)$, où A' est le symétrique de A par rapport à O.

• Traçons la médiatrice du segment $[A'A]$, qui est la droite perpendiculaire à $(A'A)$ passant par le point O, situé au milieu de $[A'A]$.

• Traçons le point K qui se situe au milieu du segment $[A'O]$, par exemple en construisant la médiatrice de $(A'O)$, non représentée sur la figure.

• Cette médiatrice intersecte le cercle (c_1) en un point B'.

• Traçons en pointillés une partie du *cercle de Ptolémée* (c_2) de centre K et de rayon KB'.

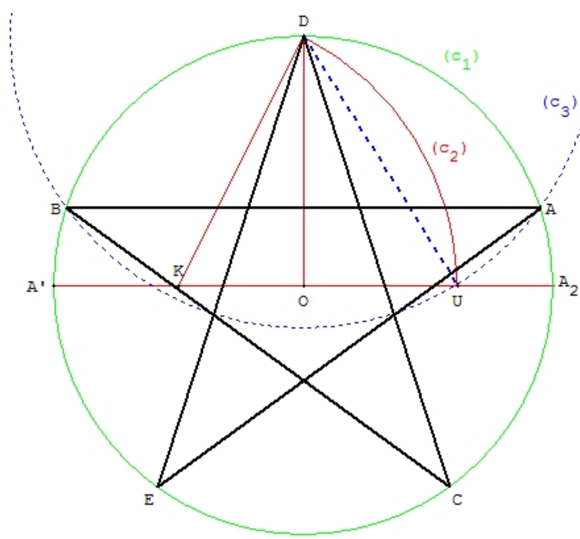
• Ce deuxième cercle intersecte alors le segment $[OA]$ en un point U.

• Traçons enfin la médiatrice du segment $[OU]$.

• Cette médiatrice, qui passe par le milieu I de $[OU]$, intersecte alors le cercle initial (c_1) en deux points symétriques par rapport à l'axe $[A'A]$, à savoir les deux points B et E sur la figure.

• La solution est maintenant trouvée : il suffit de reporter 5 fois le segment $[AB]$ au moyen d'un compas pour construire le pentagone régulier inscrit dans le cercle et partant du point A.

Question. *Comment construire, à la règle et au compas, un pentagone étoilé régulier ?*



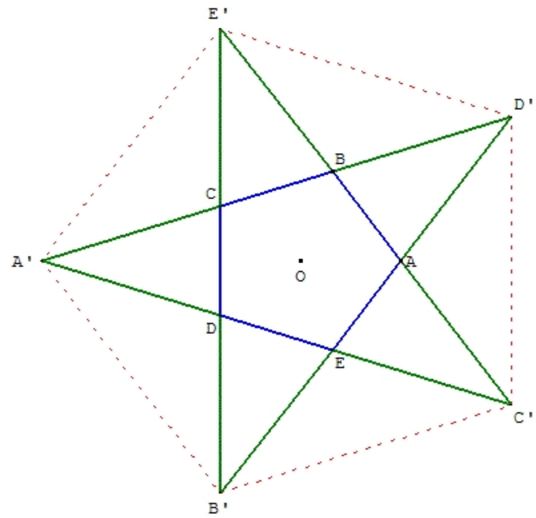
• À partir d'un rayon $[OD]$ et du diamètre perpendiculaire $[A'A_2]$, traçons en utilisant ce qui précède le cercle de Ptolémée (c_2) passant par D, de centre le point K situé au milieu de $[OA']$.

• Comme précédemment, ce cercle coupe $[OA_2]$ en un certain point U.

• Traçons ensuite le cercle (c_3) de centre D, passant par U.

• Les points d'intersection des cercles (c_1) et (c_3) déterminent le côté $[AB]$ de l'étoile.

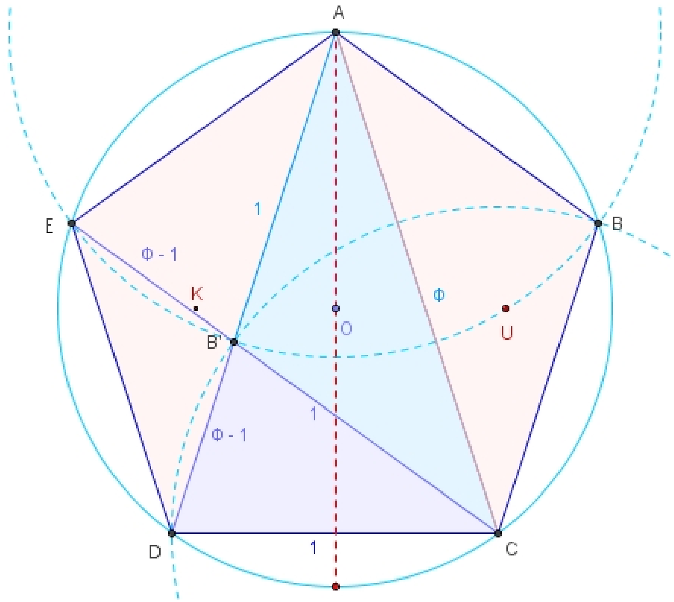
• En partant de D, il suffit alors de reporter cinq fois la longueur AB pour tracer les deux autres sommets C et E sur le cercle (c_1).



Dans la figure ci-dessus, les points A', C', E', B', D', nommés dans cet ordre, sont les sommets d'un polygone régulier étoilé appelé *pentagramme*. Ce pentagramme de Pythagore était le sceau secret des pythagoriciens, qui y voyaient un signe d'harmonie et de perfection.

Lorsqu'il est dans un cercle, le pentagramme est nommé *pentacle*.

25.1. **Pentagone régulier et nombre d'or.** Mentionnons sans démonstration une autre propriété des pentagones réguliers.



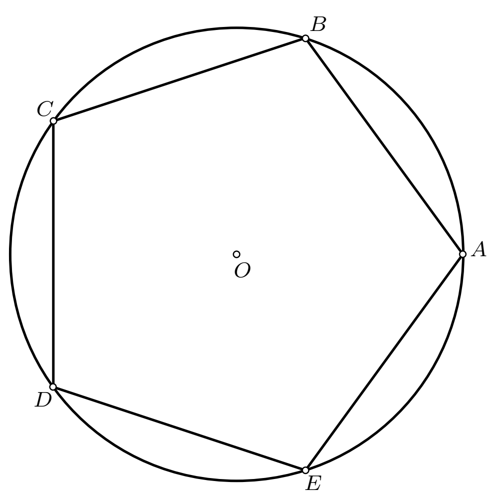
• Les diagonales $[AC]$ et $[AD]$ partagent le pentagone régulier en trois triangles isocèles.

• Les longeurs de ces deux diagonales AD et AC sont égales au *nombre d'or :*

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

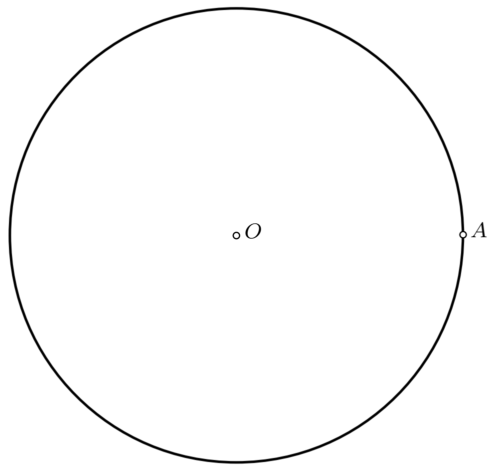
26. Aspects mathématiques des pentagones réguliers inscrits

Supposons qu'un pentagone régulier $ABCDE$:



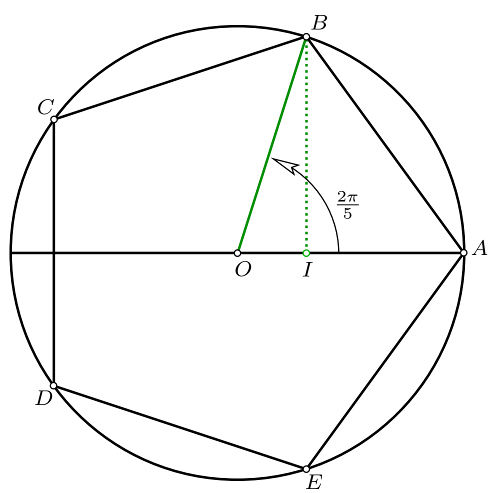
soit déjà construit dans un cercle de centre O passant par A, et analysons, réfléchissons, afin de comprendre les aspects mathématiques impliqués.

Question. *Comment démontrer, mathématiquement, que la construction d'un pentagone régulier est possible avec une règle et un compas, en appliquant le Théorème 21.5 fondamental ?*



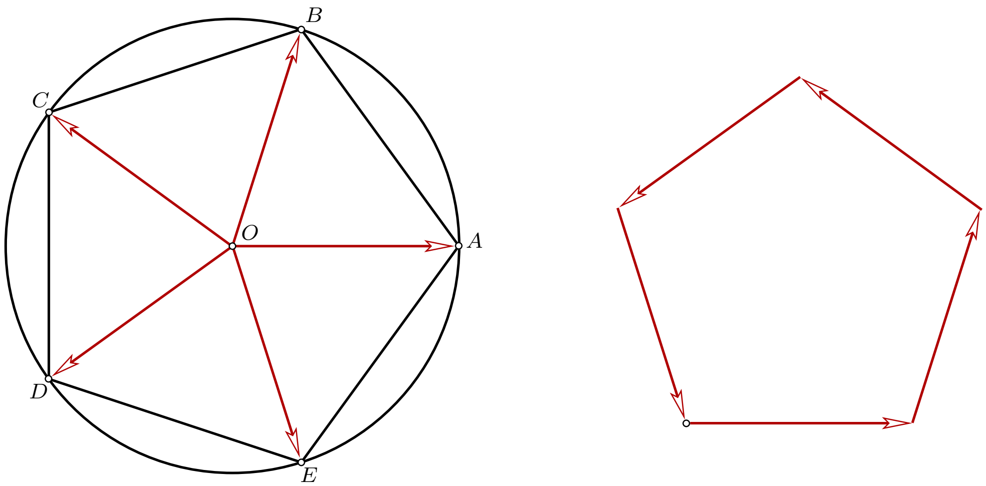
• Donnons-nous donc un cercle de centre un point O du plan passant par un autre point A du plan.

• Si un pentagone régulier $ABCDE$ inscrit dans le cercle existe, alors tous les angles au centre qui sont délimités par deux côtés successifs sont égaux entre eux.



• Puisque le tour complet vaut 2π radians, chaque angle au centre vaut donc un cinquième de 2π :

$$\frac{2\pi}{5} = \angle\big(OA,\,OB\big) = \angle\big(OB,\,OC\big) = \angle\big(OC,\,OD\big) = \angle\big(OD,\,OE\big) = \angle\big(OE,\,OA\big).$$



Lemme 26.1. *La somme des cinq vecteurs issus du centre O et aboutissant aux cinq sommets d'un polygone régulier s'annule toujours :*

$$0 \,=\, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}.$$

Démonstration. Puisque le polygone est régulier, la symétrie (pivotement) du plan par rapport à la droite (OA) transforme le point B en le point E, et transforme le point C en le point E, comme on s'en convainc en regardant droit dans les yeux la figure qui précède.

À travers cette symétrie, le vecteur :

$$\overrightarrow{V} \,:=\, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$$

se transforme donc en le vecteur :

$$\overrightarrow{V}' \,:=\, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OB},$$

qui est égal au vecteur $\overrightarrow{V}$, puisque l'addition est commutative !

Comme les seuls vecteurs qui restent invariants par rapport à la symétrie d'axe la droite (OA) sont les vecteurs contenus dans cette droite, le vecteur $\overrightarrow{V}$ doit appartenir à la droite (OA).

Mais on peut effectuer le même raisonnement en regardant les symétries d'axes (OB), d'axe OC, d'axe (OD), d'axe (OE), et on obtiendra de même que le vecteur $\overrightarrow{V}$ appartient simultanément aux cinq droites :

$$(OA), \qquad (OB), \qquad (OC), \qquad (OD), \qquad (OE).$$

Comme ces cinq droites s'intersectent seulement au point O, le vecteur $\overrightarrow{V}$ doit effectivement être le vecteur nul $\overrightarrow{0}$. □

En écrivant que l'abscisse de $\overrightarrow{V}$ est égale à 0, on obtient (exercice) la relation :

$$0 \,=\, 1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5}.$$

Mais la formule de trigonométrie connue :

$$\cos 2\,\theta \,=\, 2\,\big(\cos\theta\big)^2 - 1,$$

donne ici pour $\theta = \frac{2\pi}{5}$ la relation :

$$0 \;=\; 1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 4\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2,$$

ce qui fait que le nombre inconnu :

$$a \;:=\; \cos\frac{2\pi}{5}$$

est solution de l'équation du second degré :

$$0 \;=\; 1 + 2\,a + 4\,a^2.$$

Alors la formule de résolution bien connue donne la solution :

$$a \;=\; \cos\frac{2\pi}{5} \;=\; \frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$

Théorème 26.2. *La construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon* 1 *n'exige que deux extractions de racine carrée, en partant de :*

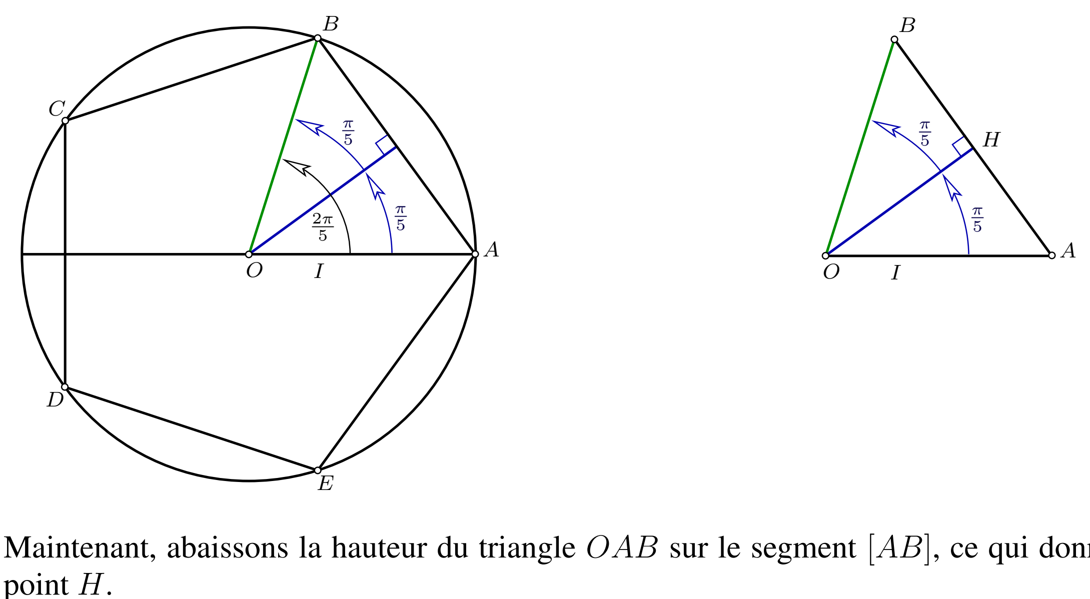
$$\sqrt{5},$$

et les cinq côtés du pentagone sont de longueur égale à :

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \;=\; 1,1755705045\cdots.$$

Démonstration. L'angle au centre que fait un côté quelconque du polygone vaut par exemple :

$$\angle\big(OA,\,OB\big) \;=\; \frac{2\pi}{5}.$$



Maintenant, abaissons la hauteur du triangle OAB sur le segment $[AB]$, ce qui donne un point H.

Puisque $OA = OB = 1$, ce triangle est *isocèle*, et alors l'angle est bissecté (divisé en deux parties égales) :

$$\frac{\pi}{5} \;=\; \angle\big(OA,\,OH\big) \;=\; \angle\big(OH,\,OB\big).$$

Or par définition du sinus :

$$\sin\frac{\pi}{5} = \frac{HB}{OB} = \frac{HB}{1}.$$

Mais comme nous venons de voir que :

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

nous pouvons utiliser la formule connue :

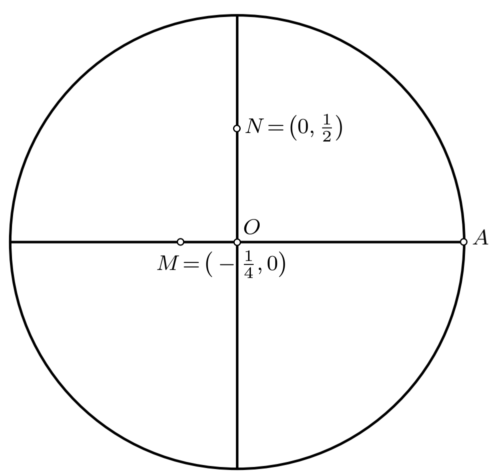
$$\big(\sin\theta\big)^2 = \frac{1-\cos 2\,\theta}{2},$$

pour trouver :

$$\begin{aligned}
AB &= 2\,HB \\
&= 2\sin\frac{\pi}{5} \\
&= 2\sqrt{\frac{1-\cos\frac{2\pi}{5}}{2}} \\
&= 2\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}} \\
&= 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \\
&= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat annoncé. □

26.1. **Méthode des tangentes à un cercle.** Voici maintenant la construction d'un pentagone régulier qui est inspirée du théorème qui précède. Nous laissons en exercice la vérification que cette construction est correspond bien au théorème.



- Partons d'un cercle de centre O passant par un point A.
- Déclarons l'unité de longueur dans le plan de manière à ce que $OA = 1$.

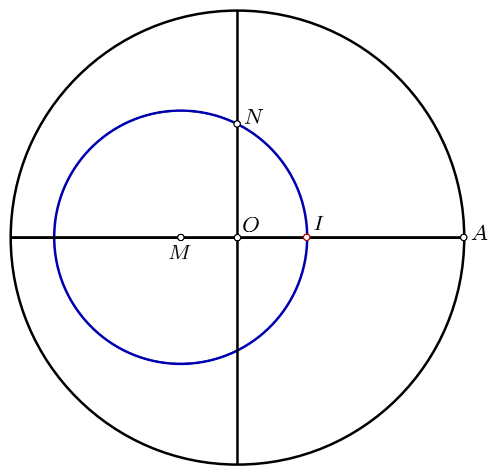
• Traçons la droite (OA), considérée comme axe des abscisses, et traçons la perpendiculaire passant par O, considérée comme axe des ordonnées.

• Traçons le point :

$$M := \left(-\frac{1}{4}, 0\right).$$

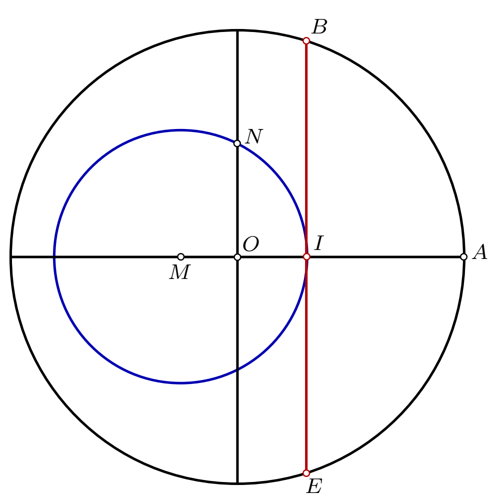
• Traçons le point :

$$N := \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

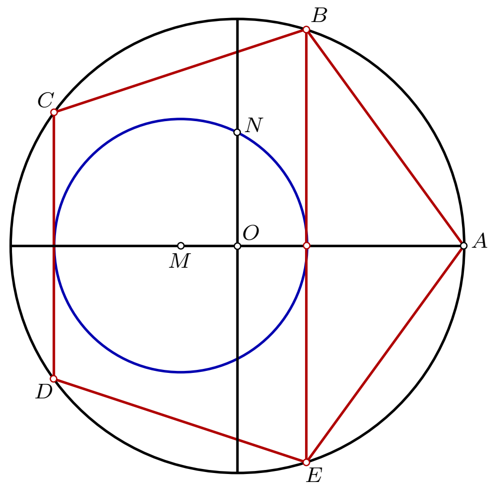


• Traçons le cercle de centre M passant par N.

• Ce cercle intersecte le segment $[OA]$ en un certain point I.

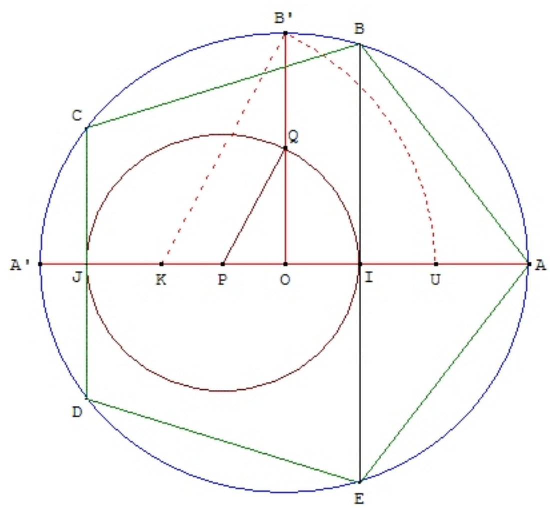


• Traçons la droite perpendiculaire à (OA) passant par ce point I.



• Cette perpendiculaire intersecte le cercle en deux points B et E.

• La solution est maintenant trouvée : avec un compas, il suffit de reporter cinq fois la distance AB pour construire le pentagone régulier inscrit dans le cercle et partant de A. Voici d'ailleurs aussi une figure globale, tout à fait équivalente :



27. Exercices

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un nombre entier qui n'est pas un carré parfait, à savoir qui n'est pas de la forme $n = k^2$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit, $\sqrt{n}$ n'appartient *pas* à $\mathbb{N}$, *i.e.* on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

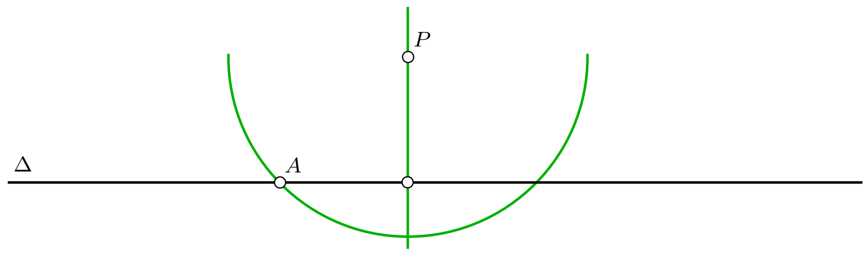
$$\sqrt{n} \neq k.$$

Afin de généraliser le Théorème 3.1 valable pour $n = 2$, montrer que $\sqrt{n}$ n'appartient alors pas non plus à $\mathbb{Q}_+^*$, *i.e.* montrer que pour tous entiers $p, q \in \mathbb{N}_*$, on a :

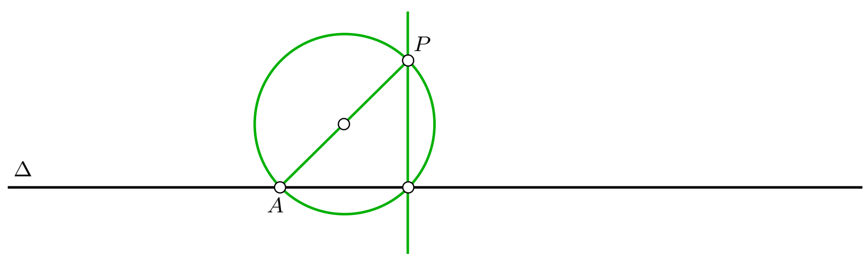
$$\sqrt{n} \neq \frac{p}{q}.$$

Indication: On peut supposer que $\frac{p}{q}$ est sous forme *irréductible*, *i.e.* que $1 = \mathrm{pgcd}(p, q)$. Écrire alors $p^2 = n\, q^2$, vérifier que q divise $p^2 = p \cdot p$, utiliser le Lemme de Gauss, d'après lequel, si un entier $x \geqslant 1$ divise le produit $y\, z$ de deux entiers $y, z \geqslant 1$, et si $1 = \mathrm{pgcd}(x, y)$, alors nécessairement, x doit diviser z, et en déduire que $q = 1$.

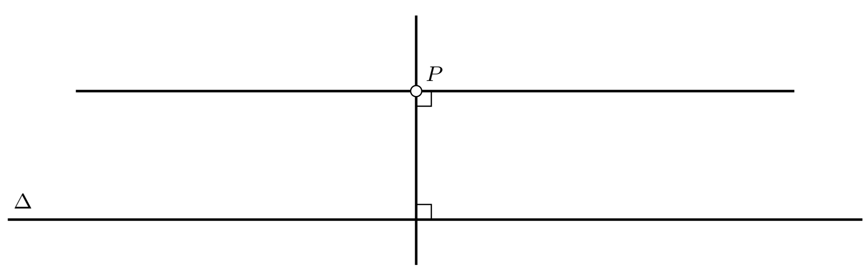
Exercice 2. Dans le plan $\mathscr{P}$, pour construire la perpendiculaire à une droite Δ qui passe par un point $P \notin \Delta$, deux méthodes différentes de celle de la Proposition 7.1 sont possibles. Examiner la première figure suivante, et détailler le procédé de construction en langage mathématique.



Faire de même pour la deuxième figure suivante.



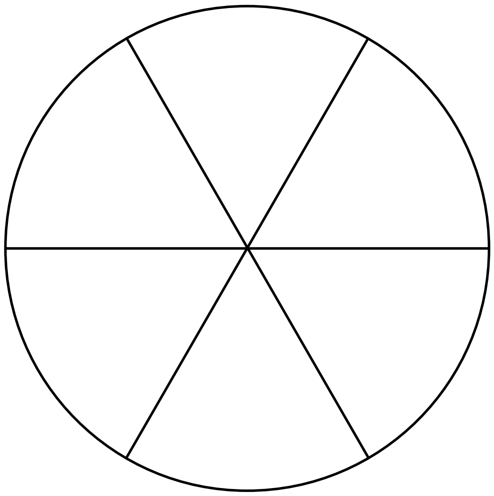
Exercice 3. Dans le plan $\mathscr{P}$, construire la parallèle à une droite Δ qui passe par un point $P \notin \Delta$ en s'inspirant de la figure suivante.

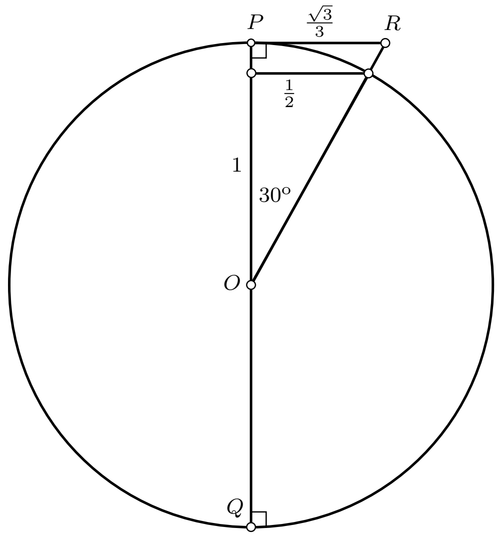


Exercice 4. **(a)** En appliquant le Théorème de Pythagore, démontrer la formule de la pseudo-quadrature de Kochansky, page 26.
Indication: La tangente de l'angle $30^{\text{o}} = \frac{\pi}{6}$ vaut :

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(b) Vérifier que la demi-droite partant de O et faisant un angle de $30^{\text{o}} = \frac{\pi}{6}$ avec OP est constructible à la règle et au compas.
Indication: Expliquer la figure suivante et s'en inspirer.





Exercice 5. En appliquant les Théorèmes de Thalès et de Pythagore, démontrer la formule de la pseudo-quadrature de Jacob de Gelder, page 27.

Exercice 6. Établir la dernière affirmation du Théorème 21.1.

RÉFÉRENCES

[1] Carréga, Jean-Claude : *Théorie des corps. La règle et le compas*, Paris, Hermann, 1981.

[2] Krop, André : *La quadrature du cercle et le nombre* π, Éditions Ellipses, Paris, 2005.

[3] Perrin, Daniel : *Mathématiques d'école. Nombres, mesures, et géométrie*, Cassini, Paris, 2011.