Théorie abstraite de l'intégration
et théorème de Radon-Nikodym

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

Maintenant que nous avons établi les propriétés fondamentales des espaces mesurables $(X, \mathscr{A})$, où $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ est une σ-algèbre, munis d'une mesure μ, nous pouvons développer la généralisation de la théorie de l'intégration de Lebesgue à ce cadre abstrait. En fait, les théorèmes et les démonstrations de la théorie nouvelle sont quasiment les mêmes que ceux que nous avons détaillés pour l'intégration dans $\mathbb{R}^d$. Autrement dit, nous connaissons déjà presque tout de la théorie abstraite de l'intégration sur un espace mesuré :

$$\big(X, \mathscr{A}, \mu\big),$$

car il suffit de remplacer le dx dans les intégrales de la théorie de Lebesgue par un $d\mu$.

Aussi, nous nous contenterons de décrire les points essentiels et d'énoncer les théorèmes principaux, sans reproduire leurs démonstrations. Tout lecteur ayant bien assimilé les chapitres qui précèdent pourra, s'il le souhaite, compléter les détails.

1. Fonctions mesurables

Pour commencer, abrégeons l'ensemble étendu des nombres réels par :

$$\overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Soit X un ensemble abstrait, et soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ une σ-algèbre.

Définition 1.1. Une fonction :

$$f\colon \quad (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

est dite *mesurable* si, pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble de sous-niveau :

$$\begin{aligned} f^{-1}\big([-\infty, c[\big) &= \big\{x \in X\colon\ f(x) < c\big\} \\ &\in \mathscr{A} \end{aligned}$$

appartient à la σ-algèbre de référence. Fréquemment, f prendra en fait des valeurs finies dans $\mathbb{R}$.

Avec cette définition, les propriétés élémentaires des fonctions mesurables déjà vues dans $\mathbb{R}^d$ se généralisent aisément. Par exemple, on a stabilité sous manipulations algébriques.

Lemme 1.2. *Si $f, g\colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables, alors $f g$, puis $\alpha f + \beta g$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et aussi $|f|$, sont mesurables.* □

Les Exercices 1 et 2 proposent même d'autres propriétés élémentaires qui sont satisfaites par des applications *mesurables* à valeurs dans des espaces plus généraux que $\overline{\mathbb{R}}$.

La propriété la plus spectaculaire et la plus importante de l'ensemble des fonctions mesurables concerne les suites de fonctions.

Théorème 1.3. *Soit une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions mesurables :*

$$f_n\colon\quad \big(X,\mathscr{A}\big)\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}.$$

Alors :

$$\inf_{n\geqslant 1} f_n,\qquad \sup_{n\geqslant 1} f_n,\qquad \liminf_{n\to\infty} f_n,\qquad \limsup_{n\to\infty} f_n,$$

sont mesurables.

Si de plus $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge simplement vers une certaine fonction :

$$f_\infty(x)\,:=\,\lim_{n\to\infty} f_n(x)\qquad\qquad (\forall\,x\in X),$$

alors cette fonction-limite f_∞ est mesurable. □

Enfin, l'analogie avec la théorie de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$ demande d'étendre le concept de « *presque partout* », qui doit tenir compte de la présence d'une mesure μ sur l'espace mesurable $(X,\mathscr{A})$.

Définition 1.4. Un ensemble $A\in\mathscr{A}$ est dit *μ-négligeable* si $\mu(A)=0$.

Évidemment, tout dépend de la mesure μ : pour la mesure de Lebesgue dx sur $\mathbb{R}$, tout singleton $\{c\}$ avec $c\in\mathbb{R}$ est dx-négligeable, mais $\{c\}$ n'est sûrement pas négligeable pour la mesure de Dirac δ_c, car $\delta_c\big(\{c\}\big)=1$!

Définition 1.5. Une propriété est dite vraie *μ-presque partout* si l'ensemble des points où elle n'est pas vraie est contenu dans un ensemble μ-négligeable.

En particulier, on dit que deux fonctions $f,g\colon(X,\mathscr{A})\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ sont *égales μ-presque partout* si :

$$0\,=\,\mu\left(\big\{x\in X\colon\ f(x)\neq g(x)\big\}\right).$$

Lemme 1.6. *Si $f\colon(X,\mathscr{A})\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ est mesurable, et si $g\colon(X,\mathscr{A})\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ satisfait :*

$$f(x)\,=\,g(x)\qquad\qquad (\mu\text{-presque partout}),$$

alors g est aussi mesurable. □

2. Intégration abstraite des fonctions positives

Maintenant, pour développer la théorie de l'intégration des fonctions mesurables définies sur un espace mesuré $(X,\mathscr{A},\mu)$, il convient, comme dans $\mathbb{R}^d$, de travailler surtout avec des fonctions positives :

$$f\colon\quad\big(X,\mathscr{A}\big)\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}_+\,:=\,\mathbb{R}_+\cup\{\infty\},$$

et de démarrer avec des fonctions-types simples.

Pour nous épargner quelques complications techniques, nous ferons l'hypothèse constante que l'espace $(X,\mathscr{A},\mu)$ est σ-fini.

Définition 2.1. Une fonction *étagée positive* sur $(X, \mathscr{A}, \mu)$ est une combinaison linéaire finie :

$$f = \sum_{\text{finie}} \alpha_i \cdot \mathbf{1}_{A_i},$$

à coefficients réels positifs $\alpha_i \geqslant 0$ de fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{A_i}$ d'ensembles mesurables $A_i \in \mathscr{A}$.

Alors un résultat d'approximation extrêmement central et utile sur lequel repose la possibilité de réellement ériger une théorie de l'intégration est le suivant.

Théorème 2.2. *Si $f \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est une fonction mesurable quelconque sur un espace mesuré σ-fini $(X, \mathscr{A}, \mu)$, alors il existe une suite $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ de fonctions* étagées :

$$\varphi_k \colon \quad X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \qquad\qquad (k \geqslant 1)$$

croissante :

$$0 \leqslant \varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x) \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant 1),$$

qui converge ponctuellement vers :

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} \varphi_k(x) \qquad\qquad (\forall\, x \in X). \quad \square$$

En effet, ce résultat permet d'*étendre* la définition naturelle de l'intégrale d'une fonction étagée positive :

$$\int \bigg(\sum_{\text{finie}} \alpha_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} \bigg)\, d\mu := \sum_{\text{finie}} \alpha_i \cdot \mu\big(A_i\big)$$

— on doit démontrer que la valeur ne dépend pas de la représentation étagée choisie — aux fonctions positives quelconques, en acceptant la valeur ∞ pour l'intégrale.

Définition 2.3. Sur un espace mesuré σ-fini $(X, \mathscr{A}, \mu)$, l'*intégrale* de toute fonction mesurable positive f est le nombre appartenant à $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$:

$$\int_X f\, d\mu := \sup \bigg\{ \int_X \varphi\, d\mu \colon \;\; \varphi \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ étagée avec } \varphi \leqslant f \text{ partout} \bigg\}.$$

L'intégrale sur un sous-ensemble mesurable quelconque $A \in \mathscr{A}$ est alors définie (obtenue) en multipliant les fonctions (étagées ou non) par la fonction indicatrice de A :

$$\int_A f\, d\mu := \int_X f \cdot \mathbf{1}_A\, d\mu.$$

Toutes les propriétés élémentaires satisfaites par l'intégrale des fonctions étagées positives sont alors héritées — démonstrations analogues au cas de $\mathbb{R}^d$ — par les fonctions positives.

Proposition 2.4. *Sur un sous-ensemble mesurable $A \in \mathscr{A}$ d'un espace mesuré σ-fini $(X, \mathscr{A}, \mu)$, pour toutes fonctions mesurables $f, g \colon X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, on a :*

- $\int_A (\alpha\, f + \beta\, g)\, d\mu = \alpha \int_A f\, d\mu + \beta \int_A g\, d\mu$ *pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ *;*
- $\mu(A) = 0$ *implique* $\int_A f\, d\mu = 0$
- $\int_A f\, d\mu = 0$ *si* $f = 0$*,* μ*-presque partout sur* A *;*
- f *prend des valeurs finies* μ*-presque partout sur* A *si* $\int_A f\, d\mu < \infty$ *;*
- $B \supset A$ *avec* $B \in \mathscr{A}$ *implique* $\int_A f\, d\mu \leqslant \int_B f\, d\mu$ *;*

- $\int_A f\,d\mu \leqslant \int_A g\,d\mu$ *si* $f \leqslant g$, *μ-presque partout sur* A *;*
- $\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu$ *si* $A, B \in \mathscr{A}$ *avec* $A \cap B = \emptyset$.

Dans la suite, plusieurs notations pourront être employées pour l'intégrale :

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) \;\equiv\; \int_X f\,d\mu \;\equiv\; \int f\,d\mu \;\equiv\; \int f.$$

3. Théorèmes de convergence

Comme dans le chapitre sur l'intégrale de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$, un auxiliaire essentiel des démonstrations — éludées car très analogues — est le

Théorème 3.1. [d'Egorov] *Sur un sous-ensemble* $A \in \mathscr{A}$ *d'un espace mesuré* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *dont la mesure* $\mu(A) < \infty$ *est finie, soit une suite de fonctions mesurables positives :*

$$f_n \colon \quad A \longrightarrow \mathbb{R}_+ \qquad\qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

qui convergent μ-presque partout simplement *vers une certaine fonction-limite :*

$$f \colon \quad A \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$*, il existe un sous-ensemble* $A_\varepsilon \subset A$ *avec* $A_\varepsilon \in \mathscr{A}$*, avec :*

$$\mu\big(A_\varepsilon\big) \;\geqslant\; \mu(A) - \varepsilon,$$

et tel que :

$$f_n\big|_{A_\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{uniformément}} f\big|_{A_\varepsilon}. \qquad \square$$

Le premier théorème de convergence, probablement le plus important de tous, est le

Théorème 3.2. [de convergence monotone, Beppo-Levi] *Sur un sous-ensemble* $A \in \mathscr{A}$ *d'un espace mesuré σ-fini* $(X, \mathscr{A}, \mu)$*, soit une suite de fonctions mesurables positives :*

$$f_n \colon \quad A \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

croissante :

$$f_n(x) \;\leqslant\; f_{n+1}(x) \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in A).$$

Alors la fonction-limite $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$*, satisfait :*

$$\int_A f\,d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\,d\mu. \qquad \square$$

Le second possède un intérêt exceptionnel, en tant qu'il ne suppose rien sur la convergence de la suite de fonctions étudiée.

Théorème 3.3. [de Fatou] *Étant donné une suite quelconque* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *de fonctions mesurables positives :*

$$f_n \colon \quad A \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

définies sur un ensemble mesurable $A \in \mathscr{A}$ *d'un espace mesuré* $(X, \mathscr{A}, \mu)$*, on a toujours :*

$$\int_A \Big(\liminf_{n\to\infty} f_n\Big)\,d\mu \;\leqslant\; \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n\,d\mu. \qquad \square$$

Une application utile concerne les suites $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions convergeant simplement vers une certaine fonction-limite $f \colon A \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$: bien qu'il ne soit pas vrai en général que $\int \lim = \lim \int$ puissent être interverties, on a toutefois au moins :

$$\int_A f \, d\mu \leqslant \liminf_{n \to \infty} \int_A f_n \, d\mu.$$

Il est temps maintenant de survoler l'intégrabilité des fonctions qui prennent des valeurs réelles de signe quelconque. Rappelons que la mesurabilité des fonctions est préservée par prise de valeur absolue.

Définition 3.4. Dans un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$, sur $A \in \mathscr{A}$, une fonction mesurable :

$$f \colon \quad A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

est dite μ-*intégrable* si :

$$\int_A |f| \, d\mu < \infty.$$

En particulier, cette définition concerne les fonctions positives $A \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ considérées jusqu'à présent, mais qui n'étaient pas supposées intégrables ; en effet, on a autorisé l'intégrale d'une fonction positive à prendre la valeur ∞ afin de donner plus de flexibilité et de généralité aux théorèmes.

Le cas des fonctions à valeurs complexes :

$$f \colon \quad A \longrightarrow \mathbb{C}$$

se ramène, en considérant $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$, au cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Bien entendu, les propriétés élémentaires des fonctions intégrables proviennent de la Proposition 2.4.

Proposition 3.5. *Sur un sous-ensemble mesurable $A \in \mathscr{A}$ d'un espace mesuré σ-fini $(X, \mathscr{A}, \mu)$, pour toutes fonctions mesurables* intégrables $f, g \colon A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$*, on a :*

- *f, g prennent des valeurs finies μ-presque partout sur A ;*
- *$\int_A (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_A f \, d\mu + \beta \int_A g \, d\mu$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;*
- *$\mu(A) = 0$ implique $\int_A f \, d\mu = 0$*
- *$\int_A f \, d\mu = 0$ si $f = 0$, μ-presque partout sur A ;*
- *$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu$ si $A, B \in \mathscr{A}$ avec $A \cap B = \emptyset$;*
- *$\int_A f \, d\mu \leqslant \int_A g \, d\mu$ si $f \leqslant g$, μ-presque partout sur A, et :*

$$\left| \int_A f \, d\mu \right| \leqslant \int_A |f| \, d\mu \quad (< \infty).$$ □

Cette dernière inégalité est tellement utile et importante dans toutes les mathématiques qu'il faudrait la graver en lettres lumineuses flamboyantes au sommet de la Tour Eiffel !

Proposition 3.6. *Sur un sous-ensemble mesurable $A \in \mathscr{A}$ d'un espace mesuré σ-fini $(X, \mathscr{A}, \mu)$, pour toutes fonctions mesurables $f, g \colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on a :*

$$f = g, \; \mu\text{-presque partout} \implies \begin{cases} f \text{ est } \mu\text{-intégrable} \iff g \text{ est } \mu\text{-intégrable} \\ \text{et alors } \int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu. \end{cases}$$ □

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème-phare de toute la théorie.

Théorème 3.7. [de la convergence dominée, Lebesgue] *Sur un sous-ensemble mesurable $A \in \mathscr{A}$ d'un espace mesuré σ-fini $(X, \mathscr{A}, \mu)$, soit une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que cette suite converge simplement vers une certaine fonction-limite $f\colon A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.*

S'il existe une fonction-dominatrice mesurable $g\colon A \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ avec :

$$\big|f_n(x)\big| \leqslant g(x) \qquad\qquad (\mu\text{-presque partout, } \forall\, n \geqslant 1),$$

qui est μ-intégrable :

$$\int_A g\, d\mu < \infty,$$

alors :

$$\lim_{n \to \infty} \int_A f_n\, d\mu = \int_A f\, d\mu. \qquad \square$$

Ainsi, sous cette hypothèse d'existence d'une fonction-dominatrice positive μ-intégrable, on peut intervertir limite et intégration.

De surcroît, comme cela a été vu pour l'intégrale de Lebesgue classique dans $\mathbb{R}^d$, on a en fait mieux :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \int_A \big|f_n - f\big|\, d\mu.$$

Définition 3.8. Les classes d'équivalence, modulo égalité μ-presque partout, de fonctions μ-intégrables sur un espace mesuré σ-fini $(X, \mathscr{A}, \mu)$, forment un espace vectoriel noté :

$$L^1(X, \mu).$$

Théorème 3.9. *Cet espace $L^1(X, \mu)$ est complet.* $\square$

Enfin, pour terminer ce chapitre de survol, formulons deux généralisations des théorèmes de continuité et de dérivabilité d'intégrales dépendant de paramètres qui sont des corollaires assez directs de la convergence dominée de Lebesgue.

Théorème 3.10. *Soit un espace mesuré σ-fini $(X, \mathscr{A}, \mu)$, soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle d'intérieur non vide, soit $A \in \mathscr{A}$, et soit une fonction :*

$$f\colon \quad A \times I \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Si, en un $t_0 \in I$:

- *pour tout $t \sim t_0$ dans un voisinage de t_0, la fonction $x \longmapsto f(x, t)$ est μ-intégrable,*
- *pour tout $x \in A$, on a $\lim\limits_{t \to t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$,*
- *il existe une fonction $g\colon A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dominant $\big|f(x, t)\big| \leqslant g(x)$ pour tout $x \in A$ et tout $t \sim t_0$, avec $\int_A g\, d\mu < \infty$,*

alors la fonction $x \longrightarrow f(x, t_0)$ est μ-intégrable et :

$$\lim_{t \to t_0} \int_A f(x, t)\, d\mu = \int_A f(x, t_0)\, d\mu. \qquad \square$$

Le second résultat concerne la dérivabilité.

Théorème 3.11. *Soit un espace mesuré σ-fini $(X, \mathscr{A}, \mu)$, soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle d'intérieur non vide, soit $A \in \mathscr{A}$, et soit une fonction :*

$$f\colon \quad A \times I \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Si, en un $t_0 \in I$:

• *pour tout $t \sim t_0$ dans un voisinage de t_0, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est μ-intégrable sur A,*

• *pour tout $x \in A$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est dérivable en $t = t_0$, de dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$,*

• *il existe une fonction $g\colon A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dominant $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant g(x)$ pour tout $x \in A$ et tout $t \sim t_0$, avec $\int_A f\, d\mu < \infty$,*

alors la fonction $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$ est μ-intégrable sur A, et :

$$\frac{d}{dt} \int_A f(x,t)\, d\mu \bigg|_{t_0} = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)\, d\mu. \qquad \square$$

4. Mesure produit

Soient deux espaces mesurables $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$, avec $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ et $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(Y)$ deux σ-algèbres. Sur le produit cartésien :

$$X \times Y = \big\{(x,y)\colon\ x \in X,\ y \in Y\big\}$$

existe la famille naturelle $\mathscr{R}$ des *rectangles mesurables* (produits d'ensembles mesurables) :

$$\mathscr{R} := \big\{A \times B\colon\ A \in \mathscr{A},\ B \in \mathscr{B}\big\},$$

qui est un π-système (est stable par intersections finies), puisque :

$$\big(A_1 \times B_1\big) \cap \big(A_2 \times B_2\big) = \big(A_1 \cap A_2\big) \times \big(B_1 \cap B_2\big),$$

mais n'est pas en général une σ-algèbre.

Définition 4.1. La *σ-algèbre produit :*

$$\begin{aligned} \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} &:= \sigma\big(\mathscr{R}\big) \\ &= \sigma\Big(\big\{A \times B\colon\ A \in \mathscr{A},\ B \in \mathscr{B}\big\}\Big) \end{aligned}$$

est la σ-algèbre engendrée dans $\mathscr{P}\big(X \times Y\big)$ par les rectangles mesurables.

Dans le contexte classique, on vérifie, *cf.* l'Exercice 10, que pour tous entiers $d_1 \geqslant 1$ et $d_2 \geqslant 1$, on a :

$$\mathscr{B}_{\mathbb{R}^{d_1}} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{d_2}} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{d_1+d_2}}.$$

Maintenant, pour tout ensemble $E \subset X \times Y$, et tous $x \in X$, $y \in Y$ fixés, les sections verticale et horizontale de E sont :

$$E_x := \big\{y \in Y\colon (x,y) \in E\big\} \qquad \text{et} \qquad E^y := \big\{x \in X\colon (x,y) \in E\big\}.$$

Il est clair que si $A \in \mathscr{A}$ et $B \in \mathscr{B}$ sont des ensembles mesurables, alors :

$$\big(A \times B\big)_x = \begin{cases} B & \text{lorsque } x \in A, \\ \emptyset & \text{lorsque } x \notin A, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \big(A \times B\big)^y = \begin{cases} A & \text{lorsque } y \in B, \\ \emptyset & \text{lorsque } y \notin B. \end{cases}$$

Lemme 4.2. *Pour tout ensemble $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} = \sigma(\mathscr{R})$ dans la σ-algèbre produit, on a :*

$$\forall\, x \in X,\ E_x \in \mathscr{B} \qquad \textit{et} \qquad \forall\, y \in Y,\ E^y \in \mathscr{A}.$$

Dans la suite, nous traiterons seulement la première de deux affirmations, toutes les fois qu'elles seront visiblement symétriques.

Preuve. Fixons $x \in X$ et introduisons :

$$\mathscr{E} := \big\{ E \subset X \times Y : \ E_x \in \mathscr{B} \big\}.$$

On vérifie (exercice) que $\mathscr{E}$ est une σ-algèbre. Ensuite :

Assertion 4.3. *On a $\mathscr{R} \subset \mathscr{E}$.*

Preuve. En effet, pour $A \in \mathscr{A}$ et $B \in \mathscr{B}$, puisqu'on vient de voir que :

$$\big(A \times B\big)_x = \begin{cases} B & \text{si } x \in A, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

il est clair que $A \times B \in \mathscr{E}$. □

Par conséquent, en appliquant $\sigma(\cdot)$:

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} = \sigma(\mathscr{R}) \subset \sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{E},$$

ce qui démontre bien que tout $E \subset \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, d'où $E \in \mathscr{E}$, satisfait $E_x \in \mathscr{B}$. □

Lemme 4.4. *Pour toute application mesurable :*

$$f : \quad \big(X \times Y, \ \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}\big) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

on a :

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in X, \quad f_x : \ (Y, \mathscr{B}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \text{est mesurable,} \\ &\forall\, y \in Y, \quad f^y : \ (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \text{est mesurable.} \end{aligned}$$

Preuve. En effet, avec $x \in X$ fixé, quel que soit $c \in \mathbb{R}$:

$$\big\{ y \in Y : \ f_x(y) < c \big\} = \big\{ y \in Y : f(x, y) < c \big\} = \big(\{f < c\}\big)_x,$$

et comme $\{f < c\} \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, le lemme qui précède donne bien $\big(\{f < c\}\big)_x \in \mathscr{B}$. □

À partir de maintenant, $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$ seront supposés munis de deux mesures σ-finies μ et ν, *i.e.* :

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{n \geqslant 1} X_n, \quad X_n \subset X_{n+1}, \quad \mu\big(X_n\big) < \infty, \\ Y &= \bigcup_{n \geqslant 1} Y_n, \quad Y_n \subset Y_{n+1}, \quad \nu\big(Y_n\big) < \infty. \end{aligned}$$

Proposition 4.5. *Pour tout ensemble mesurable $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, les deux applications :*

$$\begin{aligned} (X, \mathscr{A}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \\ x &\longmapsto \nu\big(E_x\big) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} (Y, \mathscr{B}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \\ y &\longmapsto \nu\big(E^y\big) \end{aligned}$$

sont mesurables.

Démonstration. Supposons temporairement que ν est *finie*, *i.e.* que $\nu(Y) < \infty$, d'où la majoration uniforme :

$$0 \leqslant \nu\big(E_x\big) \leqslant \nu(Y) < \infty \qquad (\forall\, x \in X).$$

Pour un rectangle mesurable $A \times B \in \mathscr{R}$, il est clair que :

$$\nu\big((A\times B)_x\big) \;=\; \begin{cases} \nu(B) & \text{lorsque } x \in A, \\ 0 & \text{lorsque } x \notin A, \end{cases}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\Big(x \longmapsto \nu\big((A\times B)_x\big)\Big) \;=\; \Big(x \longmapsto \nu(B)\cdot \mathbf{1}_A(x)\Big),$$

et comme $\nu(B) < \infty$, toutes ces fonctions sont étagées, donc mesurables. Si nous introduisons alors :

$$\mathscr{E} \;:=\; \big\{E \in \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}\colon\; x \longmapsto \nu(E_x) \text{ est mesurable}\big\},$$

nous venons de faire voir que :

$$\mathscr{R} \;\subset\; \mathscr{E}.$$

L'objectif est d'atteindre $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B} \subset \mathscr{E}$.

Assertion 4.6. *$\mathscr{E}$ est une classe monotone dans $X \times Y$.*

Preuve. Trois propriétés sont à vérifier.

• On a $X \times Y \in \mathscr{R} \subset \mathscr{E}$, donc $X\times Y \in \mathscr{E}$.

• Pour $E, F \in \mathscr{E}$ avec $E \subset F$, la fonction qui à $x \in X$ associe :

$$\nu\big((F\backslash E)_x\big) \;=\; \nu\big(F_x\backslash E_x\big) \;=\; \nu\big(F_x\big) - \nu\big(E_x\big),$$

est mesurable comme différence de deux fonctions mesurables à valeurs finies (bornées), donc $F\backslash E \in \mathscr{E}$ aussi.

• Pour une suite $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ avec $E_i \in \mathscr{E}$ croissante $E_i \subset E_{i+1}$, comme $(E_i)_x \subset \big(E_{i+1}\big)_x$, une proposition connue montre que la fonction qui, à $x \in X$ associe :

$$\nu\bigg(\Big(\bigcup_{i\geqslant 1} E_i\Big)_x\bigg) \;=\; \nu\Big(\bigcup_{i\geqslant 1}(E_i)_x\Big) \;=\; \lim_{i\to\infty}\nu\big((E_i)_x\big)$$

est mesurable comme limite de fonctions mesurables (Théorème 1.3), donc $\cup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{E}$ aussi. □

Or comme nous savons que $\mathscr{R}$ est un π-système, le Théorème des classes monotones vu dans le chapitre précédent offre $\mathsf{mon}(\mathscr{R}) = \sigma(\mathscr{R})$, et nous atteignons l'objectif :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathscr{R} \subset \mathscr{E} & \Longrightarrow & & \mathsf{mon}(\mathscr{R}) & \subset & \mathsf{mon}(\mathscr{E}) \\ & & & \| & & \| \\ & & \mathscr{A}\otimes\mathscr{B} \;=\; & \sigma(\mathscr{R}) & \subset & \mathscr{E}. \end{array}$$

Levons maintenant l'hypothèse temporaire, et supposons seulement que $Y = \cup_{n=1}^{\infty} Y_n$ avec $Y_n \subset Y_{n+1}$ et $\nu(Y_n) < \infty$. Pour chaque $n \geqslant 1$, introduisons la mesure :

$$\nu_n(B) \;:=\; \nu\big(B \cap Y_n\big) \qquad\qquad (B \in \mathscr{B}).$$

Comme ν_n est finie, ce qui vient d'être démontré donne la mesurabilité de $x \longmapsto \nu_n(E_x)$, quel que soit $E \in \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$, et comme :

$$\nu\big(E_x\big) \;=\; \lim_{n\to\infty}\nu_n\big(E_x\big),$$

la fonction $x \longmapsto \nu(E_x)$ est bien mesurable, en tant que limite de fonctions mesurables.

Proposition 4.7. *Étant donné deux espaces mesurés σ-finis $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$, il existe une et une seule mesure sur $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, dite* mesure-produit, *notée :*

$$\mu \otimes \nu,$$

satisfaisant :

$$(\mu \otimes \nu)\big(A \times B\big) \,=\, \mu(A)\,\nu(B) \qquad\qquad (\forall\, A \in \mathscr{A}, \forall\, B \in \mathscr{B}).$$

De plus, pour tout $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$:

$$(\mu \otimes \nu)(E) \,=\, \int_X \nu\big(E_x\big)\, d\mu \,=\, \int_Y \mu\big(E^y\big)\, d\nu.$$

Démonstration. Commençons par l'unicité. Si χ_1 et χ_2 sont deux mesures sur $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ coïncidant sur les rectangles mesurables appartenant à $\mathscr{R}$, comme $\mathscr{R}$ est un π-système, le Théorème de Dynkin vu dans le chapitre précédent donnerait directement $\chi_1 = \chi_2$ sur $\sigma(\mathscr{R}) = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, pourvu qu'on ait la finitude $\chi_1(X \times Y) = \chi_2(X \times Y) < \infty$.

Or par hypothèse de σ-finitude :

$$X \,=\, \bigcup_{n \geqslant 1} X_n \quad \text{avec} \quad X_n \subset X_{n+1} \quad \text{et} \quad \mu\big(X_n\big) < \infty,$$

$$Y \,=\, \bigcup_{n \geqslant 1} Y_n \quad \text{avec} \quad Y_n \subset Y_{n+1} \quad \text{et} \quad \nu\big(Y_n\big) < \infty,$$

donc l'ensemble produit se décompose en :

$$X \times Y \,=\, \bigcup_{n \geqslant 1} X_n \times Y_n \quad \text{avec} \quad X_n \times Y_n \subset X_{n+1} \times Y_{n+1},$$

avec :

$$\chi_1\big(X_n \times Y_n\big) \,=\, \mu\big(X_n\big) \cdot \nu\big(Y_n\big) \,=\, \chi_2\big(X_n \times Y_n\big) \,<\, \infty \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

Le Théorème de Dynkin s'applique alors pour donner la coïncidence :

$$\chi_1\big|_{X_n \times Y_n} \,=\, \chi_2\big|_{X_n \times Y_n} \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1),$$

puis $\chi_1 = \chi_2$ en faisant $n \longrightarrow \infty$.

Traitons maintenant l'existence. Soit $E \subset \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ quelconque. Grâce à la mesurabilité de $x \longmapsto \nu(E_x)$ et à celle de $y \longmapsto \mu(E^y)$ obtenues dans la proposition précédente, les intégrales :

$$\int_X \nu\big(E_x\big)\, d\mu \,=:\, \chi_1(E) \qquad \text{et} \qquad \int_Y \mu\big(E^y\big)\, d\nu \,=:\, \chi_2(E)$$

existent dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Assertion 4.8. *χ_1 et χ_2 sont deux mesures sur $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.*

Preuve. Deux propriétés sont à vérifier.

• Pour l'ensemble vide :

$$\chi_1(\emptyset) \,=\, \int_X \nu\big(\emptyset_x\big)\, d\mu \,=\, 0 \,=\, \int_Y \mu\big(\emptyset^y\big)\, d\nu \,=\, \chi_2(\emptyset).$$

• Pour une réunion disjointe, $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ avec $E_i \cap E_{i'} = \emptyset$ ($i \neq i'$), d'ensembles $E_i \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$, puisque :

$$E_x \,=\, \Big(\bigcup_{i \geqslant 1} E_i\Big)_x \,=\, \bigcup_{i \geqslant 1} \big(E_i\big)_x,$$

il vient :

$$\begin{aligned}\chi_1(E) \;=\; \int_X \nu\big(E_x\big)\,d\mu \;&=\; \int_X \nu\Big(\bigcup_{i\geqslant 1}\,\big(E_i\big)_x\Big)\,d\mu\\ &=\; \int_X \sum_{i\geqslant 1} \nu\big((E_i)_x\big)\,d\mu\\ \text{[Convergence monotone]}\qquad &=\; \sum_{i\geqslant 1} \int_X \nu\big((E_i)_x\big)\,d\mu\\ &=\; \sum_{i\geqslant 1} \chi_1\big(E_i\big). \qquad\qquad \square\end{aligned}$$

Comme ces deux mesures prolongent évidemment le produit de μ par ν sur les rectangles $A\times B$ avec $A\in\mathscr{A}$ et $B\in\mathscr{B}$:

$$\begin{aligned}\chi_1\big(A\times B\big) \;&=\; \int_X \nu\big((A\times B)_x\big)\,d\mu \;=\; \int_A \nu(B)\,d\mu \;=\; \nu(B)\,\mu(A),\\ \chi_2(A\times B) \;&=\; \int_Y \mu\big((A\times B)^y\big)\,d\nu \;=\; \int_B \mu(A)\,d\nu \;=\; \mu(A)\,\nu(B),\end{aligned}$$

ces deux mesures χ_1 et χ_2 conviennent, et donc, grâce à l'unicité démontrée en premier, nous concluons que $\chi_1 = \chi_2 =: \mu\otimes\nu$. $\square$

Comme dans $\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$, les théorèmes de permutation d'intégrales multiples s'articulent en deux moment.

Théorème 4.9. [de Tonelli abstrait] *Sur l'espace mesuré produit* $\big(X\times Y,\,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B},\mu\otimes\nu\big)$ *associé à deux espaces mesurés σ-finis* $\big(X,\mathscr{A},\mu\big)$ *et* $\big(Y,\mathscr{B},\nu\big)$*, étant donné une fonction mesurable* positive :

$$f\colon\quad \big(X\times Y,\,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}\big)\;\longrightarrow\;\mathbb{R}_+\cup\{\infty\},$$

les deux fonctions :

$$\begin{aligned}(X,\mathscr{A}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+\cup\{\infty\}\\ x &\longmapsto \int_Y f_x\,d\nu\end{aligned}\qquad\text{et}\qquad\begin{aligned}(Y,\mathscr{B}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+\cup\{\infty\}\\ y &\longmapsto \int_X f^y\,d\mu\end{aligned}$$

sont mesurables, et de plus :

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) \;=\; \int_X\bigg(\int_Y f_x\,d\nu\bigg)\,d\mu \;=\; \int_Y\bigg(\int_X f^y\,d\mu\bigg)\,d\nu.$$

Ici, ces intégrales peuvent valoir ∞.

Démonstration. Résumons les éléments argumentatifs, analogues au cas $X=\mathbb{R}^{d_1}$ et $Y=\mathbb{R}^{d_2}$.

• Pour $f=\mathbf{1}_E$ avec $E\subset\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ mesurable, tout a déjà été vu dans les deux propositions précédentes.

• Pour f étagée positive, tout en découle par linéarité.

• Pour f mesurable positive quelconque, comme il existe une suite $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ croissante $\varphi_k\leqslant\varphi_{k+1}$ de fonction étagées positives $\varphi_k\geqslant 0$ qui converge ponctuellement vers f en tout point, en un $x \in X$ fixé, le théorème de convergence monotone donne :

$$\int_Y f_x \, d\nu \;=\; \lim_{k \to \infty} \int_Y \big(\varphi_k\big)_x \, d\nu,$$

donc la fonction :

$$x \;\longmapsto\; \int_Y f_x \, d\nu$$

est mesurable, en tant que limite de fonctions mesurables.

Enfin, trois applications, à $\mu \otimes \nu$, à μ, à ν, de ce même théorème de convergence monotone, prolongent à f ce résultat déjà acquis pour les fonctions étagées φ_k :

$$\begin{aligned}
\int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) \;=\; \lim_{k \to \infty} \int_{X \times Y} \varphi_k \, d(\mu \otimes \nu) \;&=\; \lim_{k \to \infty} \int_X \bigg(\int_Y \big(\varphi_k\big)_x \, d\nu \bigg) d\mu \\
&= \int_X \lim_{k \to \infty} \bigg(\int_Y \big(\varphi_k\big)_x \, d\nu \bigg) d\mu \\
&= \int_X \bigg(\int_Y \lim_{k \to \infty} \big(\varphi_k\big)_x \, d\nu \bigg) d\mu \\
&= \int_X \bigg(\int_Y f_x \, d\nu \bigg) d\mu.
\end{aligned}$$

Le résultat avec des intégrations dans l'autre sens se justifie pareillement. □

Pour conclure cette section, le théorème de Fubini ne s'intéresse qu'à des fonctions *intégrables* sur $X \times Y$, *i.e.* dont l'intégrale de la valeur absolue est *finie*.

Théorème 4.10. [de Fubini abstrait] *Sur l'espace mesuré produit* $\big(X \times Y,\, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}, \mu \otimes \nu\big)$ *associé à deux espaces mesurés* σ*-finis* $\big(X, \mathscr{A}, \mu\big)$ *et* $\big(Y, \mathscr{B}, \nu\big)$*, étant donné une fonction mesurable :*

$$f\colon \quad \big(X \times Y,\, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}\big) \;\longrightarrow\; \{-\infty\} \cup \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

intégrable :

$$\int_{X \times Y} |f| \, d(\mu \otimes \nu) \;<\; \infty,$$

pour μ*-presque tout* x*, la fonction* f_x *est* ν*-intégrable, pour* ν*-presque tout* y*, la fonction* f^y *est* μ*-intégrable, les deux intégrales correspondantes :*

$$x \;\longmapsto\; \int_Y f_x \, d\nu \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad y \;\longmapsto\; \int_X f^y \, d\mu$$

sont des fonctions intégrables sur X *et sur* Y*, et enfin :*

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) \;=\; \int_X \bigg(\int_Y f_x \, d\nu \bigg) d\mu \;=\; \int_Y \bigg(\int_X f^y \, d\mu \bigg) d\nu.$$

Démonstration. Une application à la fonction mesurable $|f|$ du Théorème de Tonelli qui précéde donne :

$$\infty \;>\; \int_{X \times Y} |f| \, d(\mu \otimes \nu) \;=\; \int_X \bigg(\underbrace{\int_Y \big|f_x\big| \, d\nu}_{\substack{\text{donc} \\ \mu\text{-presque partout } < \infty}} \bigg) d\mu \;=\; \int_Y \bigg(\underbrace{\int_X \big|f^y\big| \, d\mu}_{\substack{\text{donc} \\ \nu\text{-presque partout } < \infty}} \bigg) d\nu.$$

Ensuite, en introduisant les deux fonctions mesurables :

$$f_+ := \max\{0, f\} \qquad \text{et} \qquad f_- := -\min\{f, 0\},$$

avec :

$$f = f_+ - f_-,$$

on vérifie (exercice) que l'égalité des trois intégrales $\int_{X\times Y} = \int_X \big(\int_Y\big) = \int_Y \big(\int_X\big)$ découle du Théorème de Tonelli. □

Comme dans le cas de $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, pour calculer l'intégrale d'une fonction mesurable f sur un espace produit $X \times Y$, en la ramenant à deux calculs successifs d'intégrales, on raisonne comme suit.

• Vérifier que $|f|$ est $(\mu\otimes\nu)$-intégrable sur $X\times Y$ en choisissant la plus pratique des deux intégrales itérées dans le théorème de Tonelli :

$$\int_X \left(\int_Y |f|\, d\nu\right) d\mu \qquad \text{ou} \qquad \int_Y \left(\int_X |f|\, d\mu\right) d\nu.$$

• Calculer alors $\int_{X\times Y} f\, d(\mu\otimes\nu)$ en choisissant la plus pratique des deux intégrales itérées — souvent la même ! — dans le théorème de Fubini :

$$\int_X \left(\int_Y f\, d\nu\right) d\mu \qquad \text{ou} \qquad \int_Y \left(\int_X f\, d\mu\right) d\nu.$$ □

5. Décompositions de Hahn et de Jordan des mesures signées

Intuitivement, une mesure signée possède toutes les propriétés d'une vraie mesure $\geqslant 0$, à ceci près qu'elle est autorisée à prendre des valeurs négatives.

Définition 5.1. Sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$, avec $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ une σ-algèbre, une *mesure signée* est une fonction :

$$\mu\colon \quad \mathscr{A} \longrightarrow \,]-\infty, \infty] = \mathbb{R}\cup\{\infty\},$$

avec $\mu(\emptyset) = 0$, qui satisfait la l'additivité dénombrable disjointe :

$$\mu\Big(\bigcup_{i\geqslant 1} A_i\Big) = \sum_{i\geqslant 1} \mu(A_i),$$

quelle que soit la suite $(A_i)_{i=1}^\infty$ avec $A_i \in \mathscr{A}$ et $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$ pour tous $1 \leqslant i \neq i'$.

Observons que pour que cette égalité ait lieu, la somme $\sum_{i\geqslant 1}\mu(A_i)$ doit être indépendante de l'ordre des termes — puisque l'union $\cup_{i\geqslant 1} A_i$ l'est ! —, donc lorsque $\mu\big(\cup_{i=1}^\infty A_i\big) < \infty$, cette somme *doit* converger absolument, *voir* le Lemme 5.3 ci-dessous.

Ainsi, une mesure signée ne prend jamais la valeur $-\infty$, mais est autorisée à prendre la valeur $+\infty$. Une définition alternative peut être employée en demandant que $-\infty \leqslant \mu(A) < +\infty$ pour tout $A \in \mathscr{A}$, mais il est impossible d'autoriser les deux valeurs $-\infty$ et $+\infty$, sous peine d'incohérence arithmétique.

Comme nous le verrons, des exemples naturels de mesures signées sont donnés par :

$$\mu_f(A) := \int_A f\, d\mu \qquad\qquad (A\in\mathscr{A}),$$

où $f = f_+ - f_-$ est une fonction mesurable décomposée en partie positive $f_+ = \max\{0, f\}$ et partie négative $-f_- = \min\{f, 0\}$, en supposant $f_- \in L^1(X, \mu)$ pour garantir que $-\infty < \mu_f(A) \leqslant +\infty$, tandis que f_+ est autorisée à être d'intégrale infinie.

De nombreuses propriétés usuelles des (vraies) mesures $\geqslant 0$ considérées jusqu'à présent demeurent satisfaites par les mesures signées.

Lemme 5.2. *Étant donné une mesure signée μ sur $(X, \mathscr{A})$, pour tous $A, B \in \mathscr{A}$ avec $A \subset B$, on a :*

$$\mu(B) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \mu(A) < \infty, \\ \mu\big(B \backslash A\big) = \mu(B) - \mu(A). \end{cases}$$

Preuve. Sinon, si on avait $\mu(A) = \infty$, l'additivité :

$$\mu(B) = \underbrace{\mu(A)}_{=\infty\,?} + \underbrace{\mu\big(B \backslash A\big)}_{-\infty <}$$

impliquerait $\mu(B) = \infty$ aussi, contradiction.

Ensuite, puisque $-\infty < -\mu(A)$, on peut effectivement soustraire, l'arithmétique étant cohérente. $\square$

Lemme 5.3. *Soit $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable muni d'une mesure signée μ. Si $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ est une suite d'ensembles $A_i \in \mathscr{A}$ disjoints $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$ pour $i \neq i'$, alors :*

$$\big(-\infty <\big) \quad \mu\bigg(\bigcup_{i \geqslant 1} A_i\bigg) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i \geqslant 1} \big|\mu(A_i)\big| < \infty.$$

Preuve. En effet, en introduisant :

$$A_i^- := \begin{cases} A_i & \text{si } \mu(A_i) < 0, \\ \emptyset & \text{si } \mu(A_i) \geqslant 0, \end{cases} \qquad \text{ainsi que} \qquad A_i^+ := \begin{cases} \emptyset & \text{si } \mu(A_i) < 0, \\ A_i & \text{si } \mu(A_i) \geqslant 0, \end{cases}$$

nous avons par σ-additivité deux séries à termes de signes constants $\leqslant 0$ et $\geqslant 0$:

$$\mu\bigg(\bigcup_{i \geqslant 1} A_i^-\bigg) = \sum_{i \geqslant 1} \mu\big(A_i^-\big) \qquad \text{et} \qquad \mu\bigg(\bigcup_{i \geqslant 1} A_i^+\bigg) = \sum_{i \geqslant 1} \mu\big(A_i^+\big).$$

Abrégeons aussi :

$$A^- := \bigcup_{i \geqslant 1} A_i^-, \qquad A^+ := \bigcup_{i \geqslant 1} A_i^+, \qquad A := \bigcup_{i \geqslant 1} A_i.$$

Comme $-\infty < \mu(A^-)$, la première série à termes $\leqslant 0$ converge absolument.

L'hypothèse $\mu(A) < \infty$, l'inclusion $A^+ \subset A$, et le Lemme 5.2 donnent alors :

$$\big(-\infty <\big) \quad \mu\big(A^+\big) < \infty,$$

et donc $\sum \mu\big(A_i^+\big) < \infty$ converge aussi. Enfin :

$$\sum_{i \geqslant 1} \big|\mu(A_i)\big| = \sum_{i \geqslant 1} \big| -\mu\big(A_i^-\big)\big| + \sum_{i \geqslant 1} \mu\big(A_i^+\big) < \infty. \qquad \square$$

Puisque les arguments sont essentiellement les mêmes que pour les (vraies) mesures (à valeurs $\geqslant 0$), énonçons sans démonstration une

Proposition 5.4. *Dans un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$ muni d'une mesure signée μ, soit une suite $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ d'ensembles mesurables $A_i \in \mathscr{A}$.*

(1) *Si $A_i \subset A_{i+1}$ est croissante, alors :*

$$\mu\bigg(\bigcup_{i\geqslant 1} A_i\bigg) \,=\, \lim_{i\to\infty} \mu\big(A_i\big).$$

(2) *Si $A_i \supset A_{i+1}$ est décroissante, et si $\mu\big(A_1\big) < \infty$, alors :*

$$\mu\bigg(\bigcap_{i\geqslant 1} A_i\bigg) \,=\, \lim_{i\to\infty} \mu\big(A_i\big). \qquad \square$$

Maintenant, si μ_1 et μ_2 sont deux *vraies* mesures sur $(X, \mathscr{A})$, disons finies pour simplifier, *i.e.* $\mu_1(X) < \infty$ et $\mu_2(X) < \infty$, alors la différence :

$$\mu \,:=\, \mu_2 - \mu_1$$

est une mesure signée. L'objectif des paragraphes qui suivent est d'établir que toute mesure signée s'écrit de manière unique comme différence de deux telles mesures, maximales en un certain sens.

Tout d'abord, il s'agit de localiser les lieux où μ est $\leqslant 0$, et ceux où elle est $\geqslant 0$.

Définition 5.5. Un sous-ensemble $N \subset X$ avec $N \in \mathscr{A}$ est dit *négatif pour* μ si :

$$\forall\, N' \,\subset\, N \text{ avec } N' \in \mathscr{A}, \qquad \mu(N') \,\leqslant\, 0.$$

Un sous-ensemble $O \subset X$ avec $O \in \mathscr{A}$ est dit *nul pour* μ si :

$$\forall\, O' \,\subset\, O \text{ avec } O' \in \mathscr{A}, \qquad \mu(O') \,=\, 0.$$

Un sous-ensemble $P \subset X$ avec $P \in \mathscr{A}$ est dit *positif pour* μ si :

$$\forall\, P' \,\subset\, P \text{ avec } P' \in \mathscr{A}, \qquad \mu(P') \,\geqslant\, 0.$$

L'objet du théorème suivant est de capturer de tels ensembles N, O, P, en évitant de mélanger le négatif avec le positif, sans vraiment porter attention sur les nuls.

Théorème 5.6. [de décomposition de Hahn] *Si μ est une mesure signée sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$, alors il existe deux sous-ensembles $N \subset X$ et $P \subset X$ avec $N \in \mathscr{A}$, et $P \in \mathscr{A}$ et avec :*

$$N \cup P \,=\, X, \qquad\qquad N \cap P \,=\, \emptyset,$$

tels que N est négatif pour μ, et P est positif pour μ.

Cette décomposition est essentiellement unique, au sens où pour toute autre telle paire (N', P'), les deux différences symétriques :

$$N \Delta N' \,=\, \big(N \backslash N'\big) \cup \big(N' \backslash N\big) \qquad \textit{et} \qquad P \Delta P' \,=\, \big(P \backslash P'\big) \cup \big(P' \backslash P\big)$$

sont des ensembles nuls pour μ.

Démonstration. Commençons par un résultat auxiliaire-clé.

Proposition 5.7. *Si $\mu(D) \leqslant 0$ sur un ensemble $D \in \mathscr{A}$, alors il existe un sous-ensemble $A \subset D$ négatif pour μ tel que $\mu(A) \leqslant \mu(D)$.*

Démonstration. Définissons $A_0 := D$, et supposons par récurrence que pour un entier $n \geqslant 0$, un ensemble $A_n \subset D$ a été construit. Soit :

$$\begin{aligned} t_n &:= \sup \big\{ \mu(B) \colon\ B \subset A_n \text{ avec } B \in \mathscr{A} \big\} \\ &\in [0, \infty]; \end{aligned}$$

comme $B := \emptyset$ convient, il est clair que $t_n \geqslant 0$.

Par définition de t_n, il existe $B_n \subset A_n$ avec $B_n \in \mathscr{A}$ satisfaisant :

$$\mu\big(B_n\big) \geqslant \tfrac{t_n}{2} \geqslant \min\big\{1,\, \tfrac{t_n}{2}\big\} \geqslant 0.$$

Par induction, définissons :

$$A_{n+1} := A_n \big\backslash B_n \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 0).$$

Nous affirmons alors que l'ensemble :

$$A := D \Big\backslash \bigcup_{n \geqslant 0} B_n$$

convient ; observons au passage que $A_n = D \backslash \big(B_0 \cup \cdots \cup B_{n-1} \big)$, d'où :

$$A \subset A_n.$$

En effet, comme les B_n, $n \geqslant 0$, sont mutuellement disjoints (exercice mental), la σ-additivité de μ donne, en tenant compte de $\mu(D) < \infty$ pour être autorisé à soustraire :

$$\begin{aligned} -\infty < \mu(A) &= \mu(D) - \sum_{n \geqslant 0} \mu\big(B_n\big) \\ &\leqslant \mu(D) - \sum_{n \geqslant 0} \min\big\{1,\, \tfrac{t_n}{2}\big\}, \end{aligned}$$

ce qui montre $\mu(A) \leqslant \mu(D)$.

Si A n'était *pas* un ensemble négatif pour μ, il existerait un sous-ensemble $B \subset A$ avec $B \in \mathscr{A}$ pour lequel $\mu(B) > 0$. Mais comme $A \subset A_n$, d'où $B \subset A_n$, la définition de t_n s'appliquerait pour donner :

$$0 < \mu(B) \leqslant t_n \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 0),$$

et la série à droite ci-dessus $- \sum \min\{\cdot\}$ vaudrait alors $-\infty$, ce qui contredirait avec une insolence condamnable l'hypothèse que μ ne prend jamais la valeur $-\infty$. Donc A est un ensemble négatif pour μ ! □

Pour construire l'ensemble N du Théorème 5.6, posons $N_0 := \emptyset$, et par induction, supposant N_n connu pour un entier $n \geqslant 0$, considérons :

$$s_n := \inf \big\{ \mu(D) \colon\ D \subset X \big\backslash N_n,\ D \in \mathscr{A} \big\}.$$

Cet infimum peut éventuellement valoir $-\infty$, et puisque $D = \emptyset$ convient, on a $s_n \leqslant 0$. Clairement, il existe un sous-ensemble $D_n \subset X \backslash N_n$ avec $D_n \in \mathscr{A}$ satisfaisant :

$$\mu\big(D_n\big) \leqslant \tfrac{s_n}{2} \leqslant \max\big\{ \tfrac{s_n}{2},\, -1 \big\} \leqslant 0.$$

Grâce à la Proposition 5.7, il existe un sous-ensemble $A_n \subset D_n$ avec $A_n \in \mathscr{A}$, avec $\mu(A_n) \leqslant \mu(D_n)$, tel que A_n est négatif pour μ.

Par induction, définissons :

$$N_{n+1} := N_n \cup A_n \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 0).$$

Nous affirmons alors que l'ensemble :

$$N := \bigcup_{n \geqslant 0} A_n$$

et son complémentaire $P := X \backslash N$, forment une décomposition de Hahn pour μ ; observons au passage que :

$$N_n = \emptyset \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} \qquad \text{d'où} \qquad N_n \subset N \qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

En effet, puisque les A_n, $n \geqslant 0$, sont mutuellement disjoints, on a pour tout $B \subset N$ avec $B \in \mathscr{A}$, par σ-additivité :

$$\mu(B) = \sum_{n \geqslant 0} \mu\big(B \cap A_n\big) \leqslant 0,$$

ce qui montre que N est un ensemble négatif pour μ.

Si $P = X \backslash N$ n'était *pas* un ensemble positif pour μ, il existerait $D \subset X \backslash N$ avec $D \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(D) < 0$. Mais comme $N_n \subset N$ équivaut à $X \backslash N \subset X \backslash N_n$, d'où $D \subset X \backslash N_n$, la définition de s_n s'appliquerait pour donner :

$$s_n \leqslant \mu(D) < 0 \qquad (\forall\, n \geqslant 0),$$

ce qui, via la σ-additivité de μ :

$$\begin{aligned} \mu(N) = \sum_{n \geqslant 0} \mu\big(A_n\big) &\leqslant \sum_{n \geqslant 0} \mu\big(D_n\big) \\ &\leqslant \sum_{n \geqslant 0} \max\big\{\tfrac{s_n}{2}, -1\big\} \\ &= -\infty, \end{aligned}$$

contredirait l'hypothèse que μ ne prend jamais la valeur $-\infty$. Ceci conclut la démonstration d'existence.

Soit maintenant $X = N' \cap P'$ une autre décomposition de Hahn pour μ. En partant de $X = N' \cup P'$ et de $X = N \cup P$, on intersecte avec P et avec P' :

$$P = \big(P \cap N'\big) \cup \big(P \cap P'\big) \qquad \text{et} \qquad P' = \big(P' \cap N\big) \cup \big(P' \cap P\big),$$

d'où :

$$P \backslash P' = P \cap N' \qquad \text{et} \qquad P' \backslash P = P' \cap N,$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} P \Delta P' &= \big(P \backslash P'\big) \cup \big(P' \backslash P\big) \\ &= \big(P \cap N'\big) \cup \big(P' \cap N\big) = N \Delta N', \end{aligned}$$

cette seconde différence symétrique étant analogue. Or puisque $P \cap N'$ et $P' \cap N$ sont tous deux simultanément négatifs et positifs pour μ, ils sont tous deux *nuls* pour μ — fin des raisonnements ! $\square$

Grâce à une telle décomposition de Hahn de $X = N \cup P$, nous pouvons introduire deux (vraies) mesures (à valeurs positives) :

$$\mu_-(A) := -\mu\big(A \cap N\big) \qquad \text{et} \qquad \mu_+(A) := \mu\big(A \cap P\big),$$

pour tout $A \in \mathscr{A}$, et nous observons que μ_- est à valeurs finies dans $\mathbb{R}_+$, puisque $-\infty < \mu(A \cap N)$, tandis que μ_+ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cap \{\infty\}$.

Théorème 5.8. [de décomposition de Jordan] *Étant donné une décomposition de Hahn $X = N \cup P$ pour une mesure signée μ sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$, les deux mesures $\mu_- := -\,\mu\big|_N$ et $\mu_+ := \mu\big|_P$ satisfont :*

$$\mu \,=\, \mu_+ - \mu_-,$$

et elles ne dépendent pas *de la décomposition de Hahn.*

De plus, toute autre paire (ν_-, ν_+) de mesures $\geqslant 0$ avec $\mu = \nu_+ - \nu_-$ telle qu'il existe $E \subset X$, $E \in \mathscr{A}$, avec :

$$\nu_-(E) \,=\, 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \nu_+(X \backslash E) \,=\, 0,$$

coïncide avec (μ_-, μ_+).

Sans cette condition d'existence de E, il est clair qu'aucune unicité ne peut avoir lieu — penser par exemple à $\mu = (\mu_+ + \nu) - (\mu_- + \nu)$, où ν est une mesure quelconque.

Démonstration. Soit donc (N', P') une autre décomposition de Hahn, et soient pour $A \in \mathscr{A}$:

$$\mu_-'(A) \,:=\, -\,\mu\big(A \cap N'\big) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \mu_+'(A) \,:=\, \mu\big(A \cap P'\big).$$

Grâce à l'information du théorème précédent que $N' \backslash N$ et $N \backslash N'$ sont nuls pour μ, en utilisant :

$$\begin{aligned} N' &\,=\, \big(N' \cap N\big) \cup \big(N' \backslash N\big), \\ N &\,=\, \big(N \cap N'\big) \cup \big(N \backslash N'\big), \end{aligned}$$

on calcule :

$$\begin{aligned} \mu_-'(A) \,=\, -\,\mu\big(A \cap N'\big) &\,=\, -\,\mu\big(A \cap (N' \cap N)\big) - \underline{\mu\big(A \cap (N' \backslash N)\big)}_{\circ} \\ &\,=\, -\,\mu\big(A \cap (N \cap N')\big) - \underline{\mu\big(A \cap (N \backslash N')\big)}_{\circ} \\ &\,=\, -\,\mu\big(A \cap N\big) \\ &\,=\, \mu_-(A), \end{aligned}$$

et de même pour voir que $\mu_+' = \mu_+$.

Ensuite, l'hypothèse d'existence de E implique, quels que soient $F \subset E$ et $G \subset X \backslash E$ appartenant à $\mathscr{A}$, en partant de $\mu = \nu_+ - \nu_-$, que :

$$\begin{aligned} \mu(F) &\,=\, \nu_+(F) - 0 \\ &\,\geqslant\, 0, \end{aligned} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \begin{aligned} \mu(G) &\,=\, 0 - \nu_-(G) \\ &\,\leqslant\, 0, \end{aligned}$$

donc $\big(X \backslash E, E\big)$ est une décomposition de Hahn pour μ, et comme $\nu_- = -\,\mu\big|_{X \backslash E}$ et $\nu_+ = \mu\big|_E$ (exercice mental), ce qu'on vient de dire offre $\nu_- = \mu_-$ et $\nu_+ = \mu_+$. □

Ainsi, la décomposition $\mu = \mu_+ - \mu_-$ est unique en un certain sens, et on l'appelle la *décomposition de Jordan* de μ.

Définition 5.9. La *variation totale* $|\mu|$ d'une mesure signée μ sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$ est la mesure positive :

$$|\mu|(A) \,:=\, \mu_-(A) + \mu_+(A) \qquad\qquad (\forall\, A \in A).$$

L'Exercice 12 propose une définition directe de $|\mu|$ qui ne passe pas par les décompositions de Hahn et de Jordan.

Observons que $\big|\mu(A)\big| \leqslant |\mu|(A)$ pour tout $A \in \mathscr{A}$, avec égalité seulement lorsque A est ou bien négatif pour μ, ou bien positif pour μ.

Enfin, on notera que $|\mu|(A) = 0$ implique que A est un ensemble nul pour $|\mu|$, μ_-, μ_+, μ.

6. Intégrale par rapport à une mesure signée

Comme nous l'avons déjà dévoilé par anticipation plus haut, des exemples canoniques — et très nombreux ! — de mesures signées sont fournis par des intégrales indéfinies de fonctions mesurables.

Le prototype est le suivant, avec la décomposition habituelle $f = f_+ - f_-$.

Théorème 6.1. *Pour toute fonction mesurable $f = f_+ - f_-$ sur un espace mesuré $\big(X, \mathscr{A}, \mu\big)$, où $\mu \geqslant 0$ est une vraie mesure, telle que $f_- \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$, l'application :*

$$\begin{aligned} \nu_f \colon \quad \mathscr{A} &\longrightarrow \,]-\infty, \infty] \\ A &\longmapsto \int_A f \, d\mu \end{aligned}$$

est une mesure signée sur $(X, \mathscr{A})$.

Observons que l'hypothèse $\int_X |f_-| \, d\mu = \int_X f_- \, d\mu < \infty$ garantit que $-\infty < \nu(A)$ pour tout $A \subset X$ avec $A \in \mathscr{A}$.

Démonstration. Puisqu'on a de suite $\nu_f(\emptyset) = 0$, il s'agit d'établir la σ-additivité de ν_f.

Pour cela, soit $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ une suite d'ensembles $A_i \in \mathscr{A}$ disjoints, $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$ pour $i \neq i'$, et posons $A := \cup_{i=1}^{\infty} A_i$. En écrivant simultanément pour f_- et pour f_+ :

$$f_\pm \cdot \mathbf{1}_A \, = \, \sum_{i \geqslant 1} f_\pm \cdot \mathbf{1}_{A_i},$$

le théorème de convergence monotone donne :

$$\begin{aligned} \int_A f_\pm \, d\mu \, = \, \int_X \bigg(\sum_{i \geqslant 1} f_\pm \cdot \mathbf{1}_{A_i} \bigg) \, d\mu \, &= \, \sum_{i \geqslant 1} \int_X f_\pm \cdot \mathbf{1}_{A_i} \, d\mu \\ &= \, \sum_{i \geqslant 1} \int_{A_i} f_\pm \, d\mu. \end{aligned}$$

Puisque $\int_A f_-\,d\mu < \infty$, la somme des intégrales de f_- sur les A_i converge vers un nombre positif fini, et donc on peut absorber dans une somme commune :

$$\begin{aligned}
\nu_f(A) &= \int_A f_+\,d\mu - \int_A f_-\,d\mu \\
&= \underbrace{\sum_{i\geqslant 1}\int_{A_i} f_+\,d\mu}_{\in\,[0,\infty]} - \underbrace{\sum_{i\geqslant 1}\int_{A_i} f_-\,d\mu}_{\in\,[0,\infty[} \\
&= \sum_{i\geqslant 1}\bigg(\int_{A_i}\big(f_+ - f_-\big)\,d\mu\bigg) \\
&= \sum_{i\geqslant 1}\nu_f\big(A_i\big),
\end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Une décomposition de Hahn naturelle de X pour cette mesure signée ν_f est par exemple :

$$N := \big\{x\in X\colon\ f(x) < 0\big\} \qquad\text{et}\qquad P := \big\{x\in X\colon\ f(x)\geqslant 0\big\},$$

ou encore :

$$N := \big\{x\in X\colon\ f(x)\leqslant 0\big\} \qquad\text{et}\qquad P := \big\{x\in X\colon\ f(x) > 0\big\}.$$

Dans ces deux cas, la décomposition de Jordan $\nu_f = \nu_{f,+} - \nu_{f,-}$ est donnée, pour $A\in\mathscr{A}$, par :

$$\nu_{f,-}(A) := \int_A f_-\,d\mu \qquad\text{et}\qquad \nu_{f,+}(A) := \int_A f_+\,d\mu,$$

tandis que la variation totale $|\nu_f| = \nu_{f,-} + \nu_{f,+}$ vaut :

$$|\nu_f|(A) := \nu_{f,-}(A) + \nu_{f,+}(A) = \int_A f_-\,d\mu + \int_A f_+\,d\mu = \int_A |f|\,d\mu.$$

7. Continuité absolue et singularités mutuelles des mesures

Étant donné deux mesures (positives) μ et ν sur un espace mesurable $(X,\mathscr{A})$, nous allons terminer ce chapitre en dévoilant les relations qu'elles sont susceptibles d'entretenir. Deux scénarios extrêmes peuvent se produire :

(i) μ et ν sont « supportées » sur deux ensembles $E, F\in\mathscr{A}$ disjoints ;

(ii) le « support » de ν est une portion essentielle du support de μ.

Pour clarifier les idées, nous entendons ici que ν est « supportée » sur un ensemble $E\in\mathscr{A}$ si $\nu(A) = \nu(A\cap E)$, quel que soit $A\in\mathscr{A}$.

Le théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym que nous allons démontrer énonce en un sens mathématique précis que la relation la plus générale possible entre deux mesures μ et ν est une combinaison de ces deux possibilités. Venons-en aux concepts exacts.

Définition 7.1. Deux mesures signées μ et ν sur un espace mesurable $(X,\mathscr{A})$ sont dites *mutuellement singulières* s'il existe $E, F\in\mathscr{A}$ avec $\emptyset = E\cap F$ tels que, pour tout $A\in\mathscr{A}$:

$$\mu(A) = \mu\big(A\cap E\big) \qquad\text{et}\qquad \nu(A) = \nu\big(A\cap F\big),$$

ce qui sera noté :

$$\mu \perp \nu.$$

Ainsi, μ et ν sont supportées sur deux ensembles *disjoints*. Observons que l'on peut remplacer F par $X \backslash E \supset F$, ou E par $X \backslash F \supset E$, sans rien changer à cette définition (exercice mental).

Par contraste, on a une deuxième :

Définition 7.2. Une mesure signée est dite *absolument continue* par rapport à une mesure positive μ si, pour tout $A \in \mathscr{A}$:

$$\nu(A) = 0 \quad \Longleftarrow \quad \mu(A) = 0,$$

ce qui sera noté :

$$\nu \ll \mu.$$

Lemme 7.3. *Si une mesure positive μ et une mesure signée ν satisfont simultanément $\nu \perp \mu$ et $\nu \ll \mu$, alors $\nu = 0$.*

Preuve. Comme $\mu \perp \nu$, il existe $E \in \mathscr{A}$ tel que pour tout $A \in \mathscr{A}$:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\big(A \cap E\big), &\qquad \text{donc} \quad \mu\big(A \cap E^c\big) &= 0, \\ \nu(A) &= \nu\big(A \cap E^c\big), &\qquad \text{donc} \quad \nu\big(A \cap E\big) &= 0, \end{aligned}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \underline{\nu(A \cap E)}_{\circ} + \nu\big(A \cap E^c\big) \\ &= 0 + 0, \end{aligned}$$

puisque l'hypothèse $\nu \ll \mu$ offre :

$$0 = \nu\big(A \cap E^c\big) \qquad \Longleftarrow \qquad \mu\big(A \cap E^c\big) = 0. \qquad \square$$

La définition d'absolue continuité $\nu \ll \mu$ demande seulement que tout ensemble nul pour μ soit aussi nul pour ν, et semble n'avoir rien à voir avec la notion classique de continuité. Toutefois, la terminologie est justifiée par un :

Lemme 7.4. *Sur un espace mesuré $(X, \mathscr{A})$, soit une mesure positive μ, et soit une mesure signée ν telle que $|\nu|(X) < \infty$. Alors :*

$$\nu \ll \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) \;\; \Big(\forall\, A \in \mathscr{A} \quad \mu(A) \leqslant \delta \;\; \Longrightarrow \;\; \big|\nu(A)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Preuve. L'implication $\Longleftarrow$, directe (exercice mental), est vraie sans supposer $|\nu|(X) < \infty$.

Pour montrer la réciproque $\Longrightarrow$, en remplaçant ν par $|\nu|$, on peut supposer $\nu \geqslant 0$ positive, avec $\nu(X) < \infty$.

Supposons par l'absurde que :

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \Big(\exists\, A \in \mathscr{A} \quad \mu(A) \leqslant \delta \;\; \text{mais} \;\; \big|\nu(A)\big| > \varepsilon\Big).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, il existe $A_n \in \mathscr{A}$ avec $\mu(A_n) \leqslant \frac{1}{2^n}$, mais $\nu(A_n) > \varepsilon$. Introduisons alors :

$$A^* := \limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n \geqslant 1} \bigcup_{m \geqslant n} A_m,$$

et abrégeons $A_n^* := \cup_{m\geqslant n} A_m$. Comme :

$$\mu\big(A_n^*\big) \,\leqslant\, \sum_{m\geqslant n} \frac{1}{2^m} \,=\, \frac{1}{2^{n-1}} \,<\, \infty,$$

et comme la suite décroissante $\big(A_n^*\big)_{n=1}^{\infty}$ est contenue dans A_1^* avec $\mu(A_1^*) \leqslant 1$, une proposition maintes fois utilisée s'applique :

$$\mu\big(A^*\big) \,=\, \lim_{n\to\infty} \mu\big(A_n^*\big) \,=\, 0.$$

Cependant, on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$\nu\big(A_n^*\big) \,\geqslant\, \nu\big(A_n\big) \,>\, \varepsilon,$$

et comme $\nu(A_1^*) \leqslant \nu(X) < \infty$, la même proposition donne aussi :

$$\nu\big(A^*\big) \,=\, \lim_{n\to\infty} \nu\big(A_n^*\big) \,\geqslant\, \varepsilon,$$

ce qui contredit l'hypothèse « $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$ quel que soit $A \in \mathscr{A}$ ». □

8. Théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym

Grâce à ces préliminaires, nous pouvons présenter le résultat principal de ce chapitre qui dévoile la structure générale des mesures signées sur un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$.

Au-delà des mesures $\nu_f(A) := \int_A f\, d\mu$ obtenues par intégration de fonction mesurables $f \geqslant 0$, nous pouvons dorénavant aussi regarder les fonctions de signe quelconque $f = f_+ - f_-$ qui sont *intégrables au sens étendu*, à savoir qui satisfont, avec $f_- = -\min\{f, 0\}$ et $f_+ = \max\{0, f\}$:

$$\int_X f_-\, d\mu \,<\, \infty \qquad\qquad \text{mais possiblement} \qquad\qquad \int_X f_+\, d\mu \,=\, \infty,$$

et alors l'application :

$$\begin{aligned} \nu_f \colon \quad \mathscr{A} &\longrightarrow \,]-\infty, \infty] \\ A &\longmapsto \int_A f\, d\mu \end{aligned}$$

s'avère être encore une mesure signée, d'après le Théorème 6.1.

Au sujet d'une mesure signée quelconque ν, le théorème profond qui suit affirme alors qu'on peut extraire une telle mesure ν_f, maximale en un certain sens, afin que le reste $\nu - \nu_f$ devienne singulier par rapport à μ.

Théorème 8.1. [Lebesgue, Radon, Nikodym] *Sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$ muni d'une mesure positive σ-finie $\mu \geqslant 0$, soit ν une autre mesure, éventuellement signée, avec $|\nu|$ aussi σ-finie. Alors il existe deux uniques mesures signées ν_a et ν_s sur $(X, \mathscr{A})$ telles que :*

$$\nu \,=\, \nu_a + \nu_s, \qquad\qquad \nu_a \,\ll\, \mu, \qquad\qquad \nu_s \perp \mu.$$

De plus, il existe une unique fonction mesurable $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, intégrable au sens étendu, telle que :

$$\nu(A) \,=\, \int_A f\, d\mu \qquad\qquad (\forall\, A \in \mathscr{A}).$$

Enfin, lorsque $\nu \geqslant 0$ est une (vraie) mesure, $\nu_a \geqslant 0$ et $\nu_s \geqslant 0$ sont des mesures, et $f \geqslant 0$.

Démonstration. Traitons d'abord les deux assertions d'unicité, faciles.

Premièrement, si $\nu_a + \nu_s = \nu = \nu_a' + \nu_s'$, alors la mesure $\nu_a - \nu_a' = \nu_s' - \nu_s$ est à la fois absolument continue et singulière par rapport à μ, donc le Lemme 7.3 montre qu'elle s'annule, *i.e.* $\nu_a = \nu_a'$ et $\nu_s = \nu_s'$.

Deuxièmement, si $\nu_a(A) = \int_A f\,d\mu = \int_A f'\,d\mu$, alors en choisissant $A := \{f > f'\}$, on obtient $\int_A (f - f')\,d\mu = 0$, ce qui exige $0 = \mu(A) = \mu\big(\{f > f'\}\big)$, et de même $0 = \mu\big(\{f' > f\}\big)$ en intervertissant $f \longleftrightarrow f'$, et donc $f = f'$, ce μ-presque partout.

Traitons maintenant l'existence de ν_a et de ν_s, délicates.

Temporairement, faisons l'hypothèse que μ et ν sont des mesures positives et finies :

$$\mu \geqslant 0, \quad \mu(X) < \infty \qquad \text{et} \qquad \nu \geqslant 0, \quad \nu(X) < \infty.$$

Introduisons l'ensemble-clé :

$$\mathscr{K} := \Big\{ f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \text{ mesurable}\colon \int_A f\,d\mu \leqslant \nu(A) \text{ pour tout } A \in \mathscr{A} \Big\}.$$

L'argument consiste à trouver $f \in \mathscr{K}$ qui maximise $\int f\,d\mu$, de façon à « extraire » autant que possible de la mesure signée ν au moyen de $\int f\,d\mu$, pour obtenir ν_a, et espérer ensuite que le reste $\nu_s := \nu - \nu_a$ sera singulier par rapport à μ.

Tout d'abord, $\mathscr{K} \neq \emptyset$, puisque $\mathscr{K}$ contient la fonction $f = 0$. Soit le réel :

$$\alpha := \sup\Big\{ \int_X f\,d\mu\colon\ f \in \mathscr{K} \Big\},$$

qui est fini, car $0 \leqslant \alpha \leqslant \nu(X) < \infty$. Soit aussi une suite maximisante $(f_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions $f_n \in \mathscr{K}$ telles que :

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \qquad \text{et} \qquad \int_X f_n\,d\mu \leqslant \int_X f_{n+1}\,d\mu.$$

Pour $n \geqslant 1$, posons $g_n := \max\big\{f_1, \dots, f_n\big\} \geqslant 0$. Tout ensemble mesurable $A \in \mathscr{A}$ se décompose en $\cup_{i=1}^n A_i = A$ au moyen des ensembles disjoints :

$$A_1 := \big\{g_n = f_1\big\}, \quad A_2 := \big\{g_n = f_2\big\}\big\backslash A_1, \ \dots\dots, \ A_n := \big\{g_n = f_n\big\}\big\backslash\big(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}\big),$$

ce qui permet, via un calcul :

$$\begin{aligned} \int_A g_n\,d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} g_n\,d\mu &= \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f_i\,d\mu \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \nu\big(A_i\big) = \nu(A), \end{aligned}$$

de voir que $g_n \in \mathscr{K}$. Or comme la suite de fonctions positives $(g_n)_{n=1}^\infty$ est croissante, sa limite $f := \lim_{n\to\infty} g_n$ existe en tant que fonction mesurable $X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, et par convergence monotone, on obtient pour tout $A \in \mathscr{A}$:

$$\int_A f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n\,d\mu \leqslant \nu(A),$$

ce qui montre que $f \in \mathscr{K}$, d'où $\int_X f\,d\mu \leqslant \alpha$.

Enfin par construction :

$$\begin{aligned}\int_X f\,d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_X g_n\,d\mu\\ &\geqslant \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \alpha,\end{aligned}$$

et en conclusion :

$$\int_X f\,d\mu = \alpha = \sup_{h\in\mathscr{K}}\int_X h\,d\mu.$$

Évidemment, $f\in L^1(X,\mathscr{A},\mu)$, car $\int_X f\,d\mu\leqslant\nu(X)<\infty$, et donc nous pouvons introduire la mesure visiblement absolument continue par rapport à μ :

$$\nu_a(A) := \int_A f\,d\mu \qquad\qquad (A\in\mathscr{A}).$$

Pour terminer la démonstration, il reste à établir que la mesure-reste :

$$\nu_s := \nu-\nu_a,$$

positive et finie (exercice mental), est singulière par rapport à μ.

À cette fin, quel que soit $n\geqslant 1$ entier, introduisons la mesure signée auxiliaire :

$$\lambda_n := \nu_s-\tfrac{1}{n}\,\mu,$$

et considérons la décomposition de Hahn $X=N_n\cup P_n$ de X par rapport à λ_n, à savoir $\lambda_n\big|_{N_n}$ est négative, et $\lambda_n\big|_{P_n}$ est positive.

Assertion 8.2. *Quel que soit $n\geqslant 1$, la fonction $h_n := f+\frac{1}{n}\mathbf{1}_{P_n}$ appartient à $\mathscr{K}$.*

Preuve. En effet, pour tout $A\in\mathscr{A}$, on vérifie par le calcul que :

$$\begin{aligned}\int_A h_n\,d\mu &= \int_A f\,d\mu+\frac{1}{n}\,\mu\big(A\cap P_n\big)\\ &= \nu_a(A)+\nu_s\big(A\cap P_n\big)-\lambda_n\big(A\cap P_n\big)\\ &= \nu(A)-\nu_s(A)+\nu_s\big(A\cap P_n\big)-\lambda_n\big(A\cap P_n\big)\\ &= \nu(A)-\nu_s\big(A\cap N_n\big)-\lambda_n\big(A\cap P\big)\\ &\leqslant \nu(A),\end{aligned}$$

car ν_s est une (vraie) mesure, et car la restriction $\lambda_n\big|_{P_n}$ est positive. □

Puisque $h_n\in\mathscr{K}$, on doit avoir :

$$\begin{aligned}\alpha \geqslant \int_X h_n\,d\mu &= \int_X f\,d\mu+\frac{1}{n}\,\mu\big(P_n\big)\\ &= \alpha+\frac{1}{n}\,\mu\big(P_n\big),\end{aligned}$$

ce qui force $\mu(P_n)=0$. Par conséquent, la réunion $P:=\cup_{n=1}^{\infty}P_n$ satisfait aussi $\mu(P)=0$, donc μ est supportée sur $X\backslash P$. Nous affirmons alors que ν_s est supportée sur P.

En effet, comme $X\backslash P\subset X\backslash P_n=N_n$, on a $\lambda_n(X\backslash P)\leqslant 0$, et donc :

$$\nu_s\big(X\backslash P\big) \leqslant \tfrac{1}{n}\,\mu\big(X\backslash P\big),$$

d'où $\nu_s(X\backslash P)=0$ en faisant $n\longrightarrow\infty$. En conclusion, on a bien $\nu_s\perp\mu$.

Ensuite, toujours avec $\mu \geqslant 0$ et $\nu \geqslant 0$, levons l'hypothèse temporaire que ces deux mesures $\mu(X) < \infty$ et $\nu(X) < \infty$ sont finies, et supposons à la place leur σ-finitude :

$$X = \bigcup_{n \geqslant 1} X_n \qquad \text{avec} \qquad \mu\big(X_n\big) < \infty \qquad \text{et} \qquad \nu\big(X_n\big) < \infty \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

En restriction à chaque X_n, nous pouvons introduire les mesures finies :

$$\mu_n(A) := \mu\big(A \cap X_n\big) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \nu_n(A) := \nu\big(A \cap X_n\big),$$

et ce que nous venons de démontrer décompose chaque :

$$\nu_n = \nu_{n,a} + \nu_{n,s}, \qquad\qquad \nu_{n,a} \ll \mu, \qquad\qquad \nu_{n,s} \perp \mu,$$

le tout étant escorté par de superbes fonctions intégrables $f_n \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ représentant $\nu_{n,a}(A) = \int_A f_n \, d\mu$.

Il suffit alors de prendre :

$$f := \sum_{n \geqslant 1} f_n, \qquad\qquad \nu_a := \sum_{n \geqslant 1} \nu_{n,a}, \qquad\qquad \nu_s := \sum_{n \geqslant 1} \nu_{n,s},$$

les détails de vérification formelle étant directs.

Lorsque ν est une mesure *signée*, $|\nu|$ étant supposée σ-finie, il suffit d'appliquer tout cela aux deux composantes $\nu_+ - \nu_- = \nu$ de la décomposition de Jordan de ν — détails tout aussi directs, *ma jolie !* $\square$

9. Exercices

Exercice 1. Soient $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$ deux ensembles munis de σ-algèbres. Une application $\psi \colon X \longrightarrow Y$ est dite $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$-*mesurable* si :

$$\forall\, B \in \mathscr{B}, \quad \psi^{-1}(B) \in \mathscr{A}.$$

(a) Soit $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}$ une sous-collection qui engendre :

$$\mathscr{B} = \sigma\big(\mathscr{B}_1\big).$$

Montrer que ψ est mesurable si et seulement si $\psi^{-1}(B_1) \in \mathscr{A}$ pour tout $B_1 \in \mathscr{B}_1$.

(b) Soient $(X, \mathscr{T})$ et $(Y, \mathscr{U})$ deux ensembles munis de topologies $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ et $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(Y)$, et soient les σ-algèbres boréliennes associées $\mathscr{B}_X$ et $\mathscr{B}_Y$. Vérifier que les fonctions continues $X \longrightarrow Y$ sont $(\mathscr{B}_X, \mathscr{B}_Y)$-mesurables.

(c) Si $\psi \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (Y, \mathscr{B})$ et $\chi \colon (Y, \mathscr{B}) \longrightarrow (Z, \mathscr{C})$ sont mesurables, montrer que leur composition $\chi \circ \psi \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (Z, \mathscr{C})$ est aussi mesurable.

(d) Si $\psi \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (Y, \mathscr{U})$ à valeurs dans un espace topologique est mesurable, et si $\chi \colon (Y, \mathscr{U}) \longrightarrow (Z, \mathscr{V})$ est continue, montrer que $\chi \circ \psi \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (Z, \mathscr{V})$ est mesurable.

(e) Si $f_1 \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables, montrer que $(f_1, f_2) \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'est aussi.

Exercice 2. Soit $\psi \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (Y, \mathscr{B})$ une application mesurable entre deux espaces mesurables. Si μ est une mesure sur $(X, \mathscr{A})$, on définit la *mesure-image* μ_ψ sur $(Y, \mathscr{B})$ par :

$$\mu(B) := \mu\big(\psi^{-1}(B)\big) \qquad\qquad (\forall\, B \in \mathscr{B}).$$

Démontrer que μ_ψ est effectivement une mesure sur $(Y, \mathscr{B})$.

Exercice 3. On désigne la partie entière d'un réel $x \in \mathbb{R}$ par $\mathsf{Ent}(x)$.

(a) Montrer que la fonction :

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \mathsf{Ent}(x) & \text{si } 0 \leqslant x < 5, \\ 3 & \text{si } 5 \leqslant x, \end{cases}$$

est étagée.

(b) Montrer que la fonction $x \longmapsto \mathsf{Ent}(x)$ n'est *pas* étagée.

Exercice 4. Soit $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable, soit μ une mesure sur $(X, \mathscr{A})$, et soit $f\colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. Montrer que l'on a pour tout réel $c > 0$:

$$\mu\big(\{x \in X\colon\ f(x) \geqslant c\}\big) \ \leqslant\ \frac{\int_X f\, d\mu}{c}.$$

Exercice 5. **(a)** Sur un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$, pour une fonction étagée quelconque $\varphi = \sum_{\mathsf{finie}} \alpha_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$, où $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, avec $A_i \in \mathscr{A}$ et $\mu(A_i) < \infty$, montrer que l'application :

$$\nu_\varphi\colon \quad A \longmapsto \int_A \varphi\, d\mu$$

est une mesure sur $(X, \mathscr{A})$.

(b) Si $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ est μ-intégrable, montrer que cette mesure ν_φ est finie, puis traiter la réciproque.

(c) Pour toute autre fonction mesurable g, montrer que :

$$\int_X g\, d\nu_\varphi \ =\ \int_X g\, f\, d\mu.$$

Exercice 6. Sur un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$, montrer que toute suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions $f_n\colon X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ vérifie :

$$\int_X \bigg(\sum_{n\geqslant 1} f_n\bigg)\, d\mu \ =\ \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n\, d\mu.$$

Exercice 7. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions mesurables intégrables $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

(a) S'il existe une fonction $g\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable intégrable telle que $g \leqslant f_n$ pour tout $n \geqslant 1$, montrer que le Théorème 3.3 de Fatou est encore vrai :

$$\int_X \Big(\liminf_{n\to\infty} f_n\Big)\, d\mu \ \leqslant\ \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

(b) Si inversement $f_n \leqslant g$, montrer que :

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \ \leqslant\ \int_X \Big(\limsup_{n\to\infty} f_n\Big)\, d\mu.$$

Exercice 8. Soient deux espaces mesurables $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$, avec $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ et $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(Y)$ deux σ-algèbres, et soit $\psi\colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (Y, \mathscr{B})$ une application mesurable.

L'Exercice 2 a associé à toute mesure μ sur $(X, \mathscr{A})$ une mesure-image μ_ψ sur $(Y, \mathscr{B})$.

(a) Démontrer que pour toute fonction mesurable $g\colon (Y, \mathscr{B}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$:

$$g \circ \psi \text{ est } \mu\text{-intégrable} \qquad \Longleftrightarrow \qquad g \text{ est } \mu_\psi\text{-intégrable.}$$

Indication: Supposer d'abord g à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, puis travailler avec des fonctions étagées.

(b) Dans ces circonstances, montrer que :

$$\int_X g \circ \psi\, d\mu \ =\ \int_Y g\, d\mu_\psi.$$

Exercice 9. Sur un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$, soit une fonction mesurable $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$. Si $\big|\int_X f\, d\mu\big| = \int_X |f|\, d\mu$, montrer qu'il existe une constante $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $|\alpha| = 1$ telle que $\alpha\, f = |f|$, ce μ-presque partout.

Exercice 10. Soient $\mathscr{B}_\mathbb{R}$ et $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^2}$ les σ-algèbres des boréliens dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^2$, respectivement. Établir la coïncidence entre la σ-algèbre produit $\mathscr{B}_\mathbb{R} \otimes \mathscr{B}_\mathbb{R}$ et :

$$\mathscr{B}_{\mathbb{R}^2} \ =\ \mathscr{B}_\mathbb{R} \otimes \mathscr{B}_\mathbb{R}.$$

Exercice 11. Sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$, soient une (vraie) mesure μ, et soient ν, ν_1, ν_2 des mesures signées. Montrer les quatre propriétés suivantes.

(a) Si $\nu_1 \perp \mu$ et $\nu_2 \perp \mu$, alors $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.

(b) Si $\nu_1 \ll \mu$ et $\nu_2 \ll \mu$, alors $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$.

(c) $\nu_1 \perp \nu_2$ implique $|\nu_1| \perp |\nu_2|$.

(d) $\nu \ll |\nu|$.

Exercice 12. Étant donné une mesure signée ν sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$, on définit la *variation totale* $|\nu|$ de ν par :

$$|\nu|(A) := \sup \sum_{i=1}^{\infty} \big|\nu\big(A_i\big)\big|,$$

où le supremum est pris sur toutes les partitions :

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \qquad\qquad (A_i \in \mathscr{A},\ A_i \cap A_{i'} = \emptyset, \forall\, i \neq i').$$

(a) Montrer que $|\nu|$ est une (vraie) mesure, *i.e.* à valeurs à $\geqslant 0$, sur $(X, \mathscr{A})$, en établissant successivement :

$$\sum_{i \geqslant 1} |\nu|\big(A_i\big) \leqslant |\nu|(A) \qquad \text{puis} \qquad |\nu|(A) \leqslant \sum_{i \geqslant 1} |\nu|\big(A_i\big).$$

(b) On définit la *variation positive* et la *variation négative* de ν par :

$$\nu_+ := \tfrac{1}{2}\big(|\nu| + \nu\big) \qquad \text{et} \qquad \nu_- := \tfrac{1}{2}\big(|\nu| - \nu\big).$$

Montrer que la décomposition de Jordan de ν est :

$$\nu = \nu_+ - \nu_-.$$

(c) On dit que ν est σ*-finie* si $|\nu|$ l'est. Montrer que ceci implique que ν_- et ν_+ sont aussi σ-finies.

Exercice 13. Sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$, soit une mesure signée μ, et soit $\mu = \mu_+ - \mu_-$ sa décomposition de Jordan.

(a) Montrer qu'un ensemble $E \in \mathscr{A}$ est négatif pour μ si et seulement si $\mu_+(E) = 0$.

(b) Montrer qu'un ensemble $F \in \mathscr{A}$ est positif pour μ si et seulement si $\mu_-(F) = 0$.

Exercice 14. Soit μ une mesure signée sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$, et soit $\mu = \mu_+ - \mu_-$ sa décomposition de Jordan.

(a) Montrer que $L^1(X, \mathscr{A}, |\mu|) = L^1(X, \mathscr{A}, \mu_-) \cap L^1(X, \mathscr{A}, \mu_+)$.

(b) Pour $f \in L^1(X, \mathscr{A}, |\mu|)$, quel que soit $A \in \mathscr{A}$, montrer que :

$$\left| \int_A f\, d\mu \right| \leqslant \int_A |f|\, d|\mu|.$$

(c) Soit une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $f_n \in L^1\big(X, \mathscr{A}, |\mu|\big)$ satisfaisant :

$$\big|f_n\big| \leqslant g \qquad\qquad (|\mu|\text{-presque partout}),$$

pour une certaine fonction $g \in L^1(X, \mathscr{A}, |\mu|)$ à valeurs $\geqslant 0$. Montrer que si $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ tend $|\mu|$-presque partout vers une fonction mesurable f, alors $f \in L^1(X, \mathscr{A}, |\mu|)$, et :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \int_X \big|f_n - f\big|\, d|\mu|.$$

Exercice 15. Soient $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$ deus espaces mesurables, soit μ une mesure signée sur $(X, \mathscr{A})$, et soit $\psi \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (Y, \mathscr{B})$ une application mesurable.

(a) Démontrer que l'application :

$$\begin{aligned} \mu_\psi \colon \quad \mathscr{B} &\longrightarrow\ ]-\infty, \infty] \\ B &\longmapsto \mu\big(\psi^{-1}(B)\big) \end{aligned}$$

est une mesure signée sur $(Y, \mathscr{B})$.

(b) Si $f\colon Y \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est $\mathscr{B}$-mesurable telle que $f \circ \psi \in L^1(|\mu|)$, montrer que $f \in L^1\big(|\mu_\psi|\big)$, et établir la formule de transfert d'intégrales :

$$\int_X f \circ \psi \, d\mu \,=\, \int_Y f \, d\mu_\psi.$$

Exercice 16. Sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$ muni d'une mesure positive μ et d'une mesure signée ν de décomposition de Jordan $\nu = \nu_+ - \nu_-$, établir les deux équivalences :

$$\big(\nu \ll \mu\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\nu_- \ll \mu \text{ et } \nu_+ \ll \mu\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(|\nu| \ll \mu\big).$$

Exercice 17. L'objectif est d'établir une caractérisation de la mesure de Lebesgue : *Si μ est une mesure sur la σ-algèbre $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$ des boréliens de $\mathbb{R}^d$ qui est invariante par translation et finie sur les compacts, alors μ est une multiple de la mesure de Borel-Lebesgue $m = dx$.*

(a) Soit Q_a un translaté quelconque du cube ouvert $\{0 < x_1, \dots, x_d < a\}$ de côté $a > 0$. En posant $c := \mu(Q_1)$, montrer que $\mu\big(Q_{\frac{1}{n}}\big) = \frac{c}{n^d}$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

(b) Montrer qu'il existe une fonction localement Lebesgue-intégrable $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\mu(E) = \int_E f \, dx$, pour tout $E \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$.

(c) En déduire que $\mu = c\, m$.

Exercice 18. EE