Ensemble(s) de Cantor
Alias
Poussière(s) de Cantor

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Construction triadique

> Le brassage incessant de particules d'origines très diverses aboutit à une dispersion et à un mélange tels que *une poussière est un véritable complexe de toutes sortes de corps.* Les poussières constituées d'une seule catégorie d'éléments ne se rencontrent que dans des circonstances spéciales. Le plus souvent, les poussières sont composées, en proportions très variables, de particules inertes, et de particules vivantes.
> A. ASSAILLY.

L'*ensemble triadique de Cantor* joue un rôle prééminent à la fois dans la théorie abstraite des ensembles et dans l'Analyse en général, parce qu'il constitue une source presque inépuisable de contre-exemples troublants au premier abord, mais en fait très éclairants.

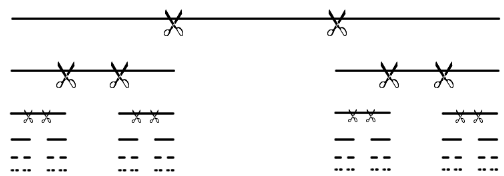
Comment est-il construit ?

Partons de l'intervalle unité dans $\mathbb{R}$:

$$C_0 := [0, 1].$$

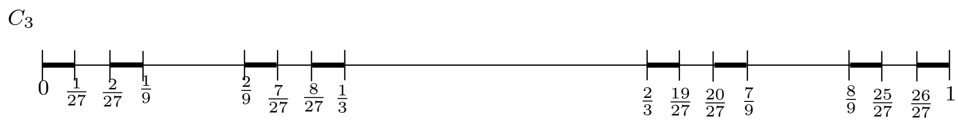
Découpons-le en trois segments d'égale longueur $\frac{1}{3}$, supprimons le morceau central, et conservons seulement les deux morceaux gauche et droite, ce qui nous donne 2^1 intervalles de longueur $\frac{1}{3}$:

$$C_1 := \left[\frac{0}{3}, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right].$$



Coupons ensuite à nouveau chacun de ces deux segments $[0, 1/3]$, $[2/3, 1]$ en trois segments égaux et supprimons le morceau central, ce qui nous donne 2^2 intervalles de longueur $\frac{1}{3^2}$:

$$C_2 := \left[\frac{0}{9}, \frac{1}{9}\right] \bigcup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \bigcup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \bigcup \left[\frac{8}{9}, \frac{9}{9}\right].$$



Coupons ensuite à nouveau chacun de ces quatre segments $[0, 1/9]$, $[2/9, 1/3]$, $[2/3, 7/9]$, $[8/9, 1]$ en trois segments égaux et supprimons le morceau central, ce qui nous donne 2^3 intervalles de longueur $\frac{1}{3^3}$:

$$C_3 := \left[\frac{0}{27}, \frac{1}{27}\right] \bigcup \left[\frac{2}{27}, \frac{3}{27}\right] \bigcup \left[\frac{6}{27}, \frac{7}{27}\right] \bigcup \left[\frac{8}{27}, \frac{9}{27}\right] \bigcup \left[\frac{18}{27}, \frac{19}{27}\right] \bigcup \left[\frac{20}{27}, \frac{21}{27}\right] \bigcup \left[\frac{24}{27}, \frac{25}{27}\right] \bigcup \left[\frac{26}{27}, \frac{27}{27}\right].$$

Itérons ces découpages, et obtenons pour tout entier $n \geqslant 0$ un certain sous-ensemble $C_n \subset [0, 1]$ constitué de 2^n intervalles fermés tous de même longueur $\frac{1}{3^n}$:

$$C_n := \left[\frac{0}{3^n}, \frac{1}{3^n}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}\right] \bigcup \cdots\cdots \bigcup \left[\frac{3^n - 3}{3^n}, \frac{3^n - 2}{3^n}\right] \bigcup \left[\frac{3^n - 1}{3^n}, \frac{3^n}{3^n}\right].$$

Nous allons montrer dans un instant comment écrire les intervalles qui composent C_n. En tout cas, on a par construction :

$$C_{n+1} \subset C_n \qquad\qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Définition 1.1. L'*ensemble triadique de Cantor* est l'intersection infinie de tous ces C_n :

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Dans un langage imagé, on appelle parfois C la *poussière de Cantor*.

Lemme 1.2. *Ce sous-ensemble $C \subset [0,1]$ est non vide, fermé, borné, donc compact.*

Démonstration. Visiblement, les deux extrémités 0 et 1 de C_0 appartiennent à tous les C_n, donc $0 \in C$ et $1 \in C$, ce qui donne $C \neq \emptyset$.

Mais plus généralement en fait, on se convainc en y réfléchissant que les $2 \cdot 2^n$ extrémités des 2^n intervalles qui composent C_n restent constamment dans $C_{n+1}, C_{n+2}, C_{n+3}, \dots$, et donc C contient ces $2 \cdot 2^n$ extrémités de C_n, et ce pour tout $n = 0, 1, 2, \dots$, ce qui montre encore mieux que C est (vraiment) non vide.

Enfin, chaque C_n étant fermé, puisqu'une intersection quelconque de fermés est encore fermée, on a bien que $C = \cap_n C_n$ est fermé, et C est d'ailleurs aussi trivialement borné, car contenu dans $[0,1]$. $\square$

Proposition 1.3. *Pour tout $n \geqslant 1$, l'ensemble C_n est la réunion des 2^n intervalles fermés de la forme :*

$$\left[\frac{Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^n},\ \frac{Q_{a_1,\dots,a_n}+1}{3^n}\right],$$

où les $Q_{a_1,\dots,a_n} \in \mathbb{N}$ sont tous les 2^n entiers que l'on peut écrire en base 3 sous la forme :

$$Q_{a_1,\dots,a_n} = a_1 \cdot 3^{n-1} + a_2 \cdot 3^{n-2} + \dots + a_{n-1}\, 3 + a_n \cdot 3^0,$$

avec des entrées égales à 0 ou à 2, mais jamais égales à 1 :

$$a_1 = \begin{cases} 0, \\ 2, \end{cases} \qquad a_2 = \begin{cases} 0, \\ 2, \end{cases} \qquad \cdots\cdots \qquad a_{n-1} = \begin{cases} 0, \\ 2, \end{cases} \qquad a_n = \begin{cases} 0, \\ 2. \end{cases}$$

Comme pour l'écriture décimale des nombres entiers, on peut si on le souhaite abréger l'écriture de ces $Q_{a_1,\dots,a_n}$ en base 3 simplement comme :

$$a_1\, a_2\, \cdots\, a_{n-1}\, a_n,$$

mais nous ne servirons pas de cela pour l'instant.

Démonstration. Tout d'abord concernant C_1, les quatre extrémités de ses deux intervalles sont bien de la forme annoncée :

$$C_1 = \left[\frac{0}{3},\ \frac{0+1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3},\ \frac{2+1}{3}\right].$$

Supposons maintenant le lemme vrai à un certain niveau $n \geqslant 1$, et démontrons-le au cran $n+1$. Par construction, on doit enlever le tiers central de chaque segment quelconque :

$$\left[\frac{Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^n},\ \frac{Q_{a_1,\dots,a_n}+1}{3^n}\right],$$

qui compose C_n, et pour ce faire, il est avisé de ré-écrire un tel segment général sous la forme :

$$\left[\frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^{n+1}},\,\frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}+3}{3^{n+1}}\right],$$

puisqu'alors la suppression du tiers central se fait voir aisément,

$$\left[\frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^{n+1}},\,\frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}+1}{3^{n+1}}\right]\bigcup\underbrace{\left[\frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}+1}{3^{n+1}},\,\frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}+2}{3^{n+1}}\right]}_{\text{supprimer}}\bigcup\left[\frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}+2}{3^{n+1}},\,\frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}+3}{3^{n+1}}\right].$$

Mais alors les entiers $Q_{a_1,\dots,a_n,a_{n+1}}$ des deux extrémités *gauches* des deux intervalles restants :

$$3\,Q_{a_1,\dots,a_n} = a_1\cdot 3^n + a_2\cdot 3^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\cdot 3^3 + a_n\cdot 3^1 + 0\cdot 3^0,$$
$$3\,Q_{a_1,\dots,a_n} + 2 = a_1\cdot 3^n + a_2\cdot 3^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\cdot 3^3 + a_n\cdot 3^1 + 2\cdot 3^0,$$

sont bien, pour le niveau $n+1$, de la forme générale annoncée, avec effectivement a_{n+1} égal à 0 ou à 2. □

Lemme 1.4. *La somme des longueurs des 2^n segments de longueur $\frac{1}{3^n}$ qui constituent le sous-ensemble $C_n \supset C$ contenant l'ensemble de Cantor C tend vers 0 :*

$$\frac{2^n}{3^n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et l'ensemble-limite $C = \cap_n C_n$ est de mesure nulle, au sens de la définition donnée à la fin du chapitre sur l'intégrale de Riemann.

De plus, l'intérieur de $C = \cap_n C_n$ est vide :

$$\mathsf{Int}\, C = \emptyset.$$

Démonstration. L'assertion sur la mesure est laissée en exercice de compréhension conceptuelle.

Par contradiction, si $\mathsf{Int}\, C$ était non vide, il contiendrait un certain intervalle ouvert $]c, d[\, \subset [0,1]$ avec $0 \leqslant c < d \leqslant 1$:

$$]c,\, d[\;\subset\; \mathsf{Int}\, C,$$

lequel serait donc de longueur *strictement positive :*

$$d - c > 0.$$

Sachant que :

$$\mathsf{Int}\, C \;\subset\; C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n,$$

un tel intervalle $]c, d[$ devrait alors être contenu dans tous les C_n :

$$]c,\, d[\;\subset\; C_n \qquad\qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Mais comme C_n est réunion d'intervalles fermés disjoints d'égale longueur $\frac{1}{3^n} \longrightarrow 0$ qui tend vers zéro, cela est absurde ! □

Rappelons maintenant plus en détail que tout entier $n \in \mathbb{N}$ admet une représentation-écriture dans une base $\beta \geqslant 2$ quelconque, par exemple la base décimale $\beta = 10$, ce qui dans le cas de la base $\beta = 3$ s'exprime par l'énoncé suivant.

Lemme 1.5. *Pour tout entier $Q \in \mathbb{N}$, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ et il existe des éléments uniques :*

$$a_1, \dots, a_n \in \big\{0,\, 1,\, 2\big\},$$

qui représentent :

$$Q = a_1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 3^1 + a_1 \cdot 3^0. \qquad \square$$

Plutôt que de démontrer cet énoncé élémentaire, illustrons-le :

$$\begin{array}{llll}
0 = 0 \cdot 3^0, & 3 = 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0, & 6 = 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0, & 9 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0, \\
1 = 1 \cdot 3^0, & 4 = 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0, & 7 = 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0, & 10 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0, \\
2 = 2 \cdot 3^0, & 5 = 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0, & 8 = 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0, & 11 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0.
\end{array}$$

De même, rappelons que tout nombre réel $c \in [0,1]$ compris entre 0 et 1 admet un développement décimal éventuellement infini :

$$c = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^i},$$

qu'on abrège habituellement en :

$$c = 0, c_1 c_2 \cdots c_n \cdots ,$$

avec $c_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. De tels développements ne sont en général *pas* uniques, puisqu'il faut accepter toutes les *égalités-ambiguïtés* du type « retenues en cascade infinie du nombre 1 » :

$$0,\, c_1 c_2 \cdots \overset{1}{c_n} \overset{1111111111}{9999999999} \cdots \;=\; 0, c_1 c_2 \cdots (c_n + 1)0000000000 \cdots ,$$

lorsque $0 \leqslant c_n \leqslant 8$.

Théorème 1.6. *Tout élément $x \in C$ de l'ensemble triadique de Cantor C s'écrit de manière* unique *sous la forme d'un « développement infini en base 3 ne contenant jamais 1 », à savoir sous la forme dite* triadique *:*

$$x \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \qquad a_i \in \big\{0,\, 2\big\},$$

avec des entiers a_i contraints à n'être égaux qu'à 0 ou à 2, mais jamais à 1.

Réciproquement, tout tel nombre réel x appartient à C.

Il importe de faire observer ici que le développement triadique d'un nombre *quelconque* $c \in [0,1]$:

$$c \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}, \qquad c_i \in \big\{0,\, 1,\, 2\big\},$$

incorpore en général des 1 !

De plus, comme le rôle que joue le nombre 9 en base 10 est joué par le nombre 2 en base 3, il se trouve pour un élément quelconque de l'ensemble de Cantor :

$$x = 0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots \;\in\; C,$$

qu'il ne peut y avoir aucune égalité-ambiguïté du type :

$$0,\, a_1 a_2 \cdots \overset{1}{a_n} \overset{1111111111}{2222222222} \cdots \;=\; 0, a_1 a_2 \cdots (a_n + 1)0000000000 \cdots ,$$

où $a_n \neq 2$, puisqu'alors $a_n = 0$, d'où $a_n + 1 = 1$, et une telle deuxième écriture *est exclue de :*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \qquad \text{avec } a_i \in \{0, 2\}.$$

Démonstration. Montrons pour commencer l'*unicité* de l'écriture. Par contradiction, supposons donc que $x \in C$ admette deux écritures différentes :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \qquad \text{et} \qquad x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i} \qquad \text{avec } a_i, \, b_i \in \{0, 2\}.$$

Si on note n le plus petit entier i tel que $a_i \neq b_i$, on peut supposer (exercice mental) que $a_n = 0$ et $b_n = 2$. Mais alors on peut soumettre à une *majoration* la première écriture de x en termes des a_i :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{0}{3^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{2}{3^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}, \end{aligned}$$

tandis que la deuxième écriture de x en termes des b_i peut être soumise à une *minoration :*

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{3^i} + \frac{2}{3^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i} \\ {}_{[a_1 = b_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}]} \qquad &\geqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{2}{3^n}, \end{aligned}$$

et ces deux inégalités mises ensemble sont absurdes (vérification visuelle).

Montrons ensuite que tous les nombres de la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

appartiennent bel et bien à C. En effet, si, pour tout entier $n \geqslant 1$ fixé, on découpe :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \\ &= \frac{1}{3^n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i \, 3^n}{3^i}}_{=: Q_{a_1, \dots, a_n}} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}}_{\text{reste}}, \end{aligned}$$

et si on introduit le nombre entier :

$$Q_{a_1,\dots,a_n} := a_1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_n \cdot 3^0,$$

alors puisque le terme-reste est majoré par :

$$\begin{aligned}\mathsf{reste} &\leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \\ &= \frac{1}{3^n},\end{aligned}$$

il est manifestement clair que l'on a bien :

$$\begin{aligned}x &= \frac{Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^n} + \mathsf{reste} \\ &\in \bigg[\frac{Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^n},\ \frac{Q_{a_1,\dots,a_n}+1}{3^n}\bigg].\end{aligned}$$

Montrons pour terminer qu'un élément quelconque $x \in C$ s'écrit effectivement sous la forme annoncée. Par hypothèse, donc :

$$x \in C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n,$$

ce qui veut dire en particulier que, pour $n \in \mathbb{N}$ arbitraire fixé, on a :

$$x \in C_{n+1} \subset C_n.$$

Par conséquent, x appartient à l'un des deux intervalles de C_{n+1} qui est contenu dans un des intervalles de C_n, à savoir il existe :

$$Q_{b_1,\dots,b_n,b_{n+1}} = b_1 \cdot 3^n + \cdots + b_n \cdot 3^1 + b_{n+1} \cdot 3^0, \qquad\qquad b_1,\dots,b_n,b_{n+1} \in \big\{0,\,2\big\},$$

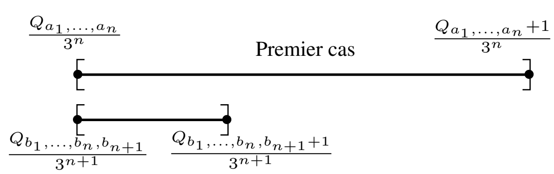
et il existe :

$$Q_{a_1,\dots,a_n} = a_1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_n \cdot 3^0, \qquad\qquad a_1,\dots,a_n \in \big\{0,\,2\big\},$$

tels que :

$$x \in \bigg[\frac{Q_{b_1,\dots,b_n,b_{n+1}}}{3^{n+1}},\ \frac{Q_{b_1,\dots,b_n,b_{n+1}}+1}{3^{n+1}+1}\bigg] \subset \bigg[\frac{Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^n},\ \frac{Q_{a_1,\dots,a_n}+1}{3^n}\bigg].$$

Mais par construction, le b-intervalle est l'un des deux tiers gauche et droite de l'a-intervalle, et donc deux cas peuvent se produire.



Premier cas : l'extrémité gauche du b-intervalle coïncide avec l'extrémité gauche de l'a-intervalle :

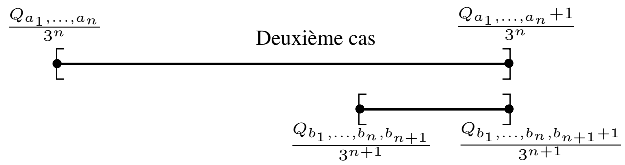
$$\frac{Q_{b_1,\dots,b_n,b_{n+1}}}{3^{n+1}} = \frac{Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^n},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{b_1 \cdot 3^n + \cdots + b_n \cdot 3^1 + b_{n+1} \cdot 3^0}{3^{n+1}} = \frac{a_1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_n \cdot 3^0}{3^n},$$

ce qui implique (exercice mental) :

$$b_1 = a_1, \ \ldots, \ b_n = a_n, \ b_{n+1} = 0.$$



Deuxième cas : l'extrémité gauche du b-intervalle coïncide avec le point situé au $2/3$ de l'a-intervalle :

$$\frac{Q_{b_1,\ldots,b_n,b_{n+1}}}{3^{n+1}} = \frac{Q_{a_1,\ldots,a_n}}{3^n} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{3^n},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{b_1 \cdot 3^n + \cdots + b_n \cdot 3^1 + b_{n+1} \cdot 3^0}{3^{n+1}} = \frac{a_1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_n \cdot 3^0}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}},$$

ce qui implique (exercice mental) :

$$b_1 = a_1, \ \ldots, \ b_n = a_n, \ b_{n+1} = 2.$$

Dans les deux cas, les n premières b-entrées demeurent égales aux a-entrées, et la $n+1$-ème b_{n+1} est égale soit à 0, soit à 2. Ceci montre qu'à $x \in C$ est associée une unique série infinie :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \qquad\qquad \text{avec } \ a_i \in \big\{0, \, 2\big\},$$

et comme une telle série est convergente (exercice), c'est que x est égal à elle. □

Dans l'Exercice 3, on démontre que l'ensemble de Cantor, ainsi que ses généralisations, est totalement discontinu. L'énoncé suivant confirme que C est bel est bien non vide, et même très « gros », du point de vue de la théorie des ensembles.

Proposition 1.7. *L'ensemble triadique de Cantor* $C \subset [0,1]$ *est non-dénombrable, de cardinal égal à celui de* $[0,1]$.

Démonstration. La théorie élémentaire des cardinaux étant supposée connue, l'application qui à un élément quelconque de C :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

associe le nombre de $[0,1]$ dont l'écriture dyadique (en base deux) est :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\widetilde{a}_i}{2^i} \qquad\qquad \text{avec } \ \widetilde{a}_i := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \ a_i = 0, \\ 1 & \text{lorsque } \ a_i = 2, \end{cases}$$

est *surjective*. Donc C se surjecte sur $[0,1]$, et comme $[0,1]$ est équipotent à $\mathbb{R}$ (exercice de révision), *i.e.* de même cardinal, ceci démontre bien que C est non dénombrable. □

En résumé, donc, tout le paradoxe dans la nature de l'ensemble de Cantor $C \subset [0,1]$, c'est qu'il est :

□ à la fois « *négligeable* » comme de la poussière éparse, au sens où il ne contient aucun intervalle, il est totalement discontinu, il est de mesure nulle ;

☐ à la fois « *substantiel* » du point de vue de la théorie des ensembles, car il contient « autant de points » que l'intervalle $[0, 1]$.

C'est grâce à ces deux propriétés contrastées qu'on peut se servir de C ou de ses avatars pour élaborer des (contre-)exemples mathématiques déterminants qui jouent le rôle de carrefours dialectiques cruciaux pour toute l'orientation *en profondeur* de la théorie de la mesure due à Borel et à Lebesgue, théorie que nous allons bientôt (re)développer ensemble dans le chapitre qui suit.

2. Insuffisance de la théorie de l'intégrale de Riemann : Preuve par un exemple

Modifions maintenant la construction de l'ensemble triadique de Cantor $C \subset [0, 1]$ afin que la somme des longueurs des 2^n intervalles résiduels de longueur $\frac{1}{3^n}$ qui constituent C_n, à savoir la quantité $\frac{2^n}{3^n} \longrightarrow 0$, ne tende *plus* vers zéro, fait qui impliquait en particulier que C était de mesure nulle, au sens de la définition utilisée à la fin du chapitre sur l'intégrale de Riemann.

Autrement dit, cherchons à construire un certain nouveau sous-ensemble de type « poussière » :

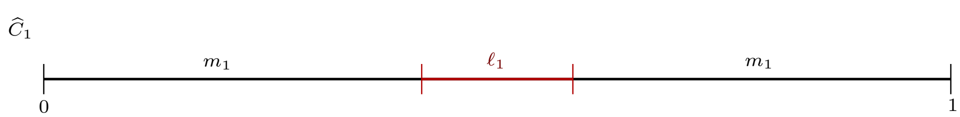
$$\widehat{C} \subset [0, 1],$$

mais qui ne sera plus de mesure nulle. Utilisons ensuite un tel sous-ensemble pathologique $\widehat{C} \subset [0, 1]$ pour construire une fonction bornée :

$$\widehat{f} \colon \quad [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

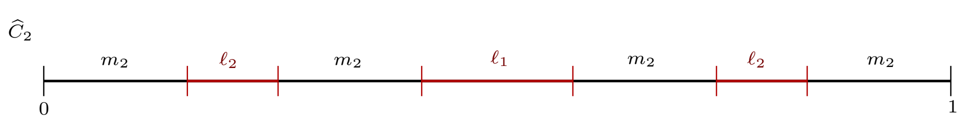
dont les points de discontinuité sont exactement les points de $\widehat{C}$, ce qui offrira un exemple de fonction qui n'est pas Riemann-intégrable, puisque nous savons qu'une fonction est Riemann-intégrable si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle.

L'idée de la nouvelle recette est simple : perforer pas à pas les intervalles, en ajustant la taille des trous pour que la somme totale des longueurs des intervalles supprimés ne tende *pas* vers 1.



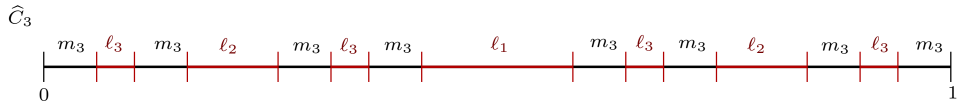
Autrement dit, et plus précisément, partons de l'intervalle $[0, 1]$, perforons un sous-intervalle ouvert situé centralement de longueur $0 < \ell_1 < 1$, et notons m_1 l'égale longueur des deux intervalles fermés restants :

$$1 = 2^0 \, \ell_1 + 2^1 \, m_1.$$



Ensuite, perforons chacun de ces deux intervalles restants en deux intervalles ouverts de longueur $0 < \ell_2 < \frac{1}{2}\, m_1$ situés centralement avec :

$$\begin{aligned} m_1 &= \ell_2 + 2\, m_2, \\ 1 &= \ell_1 + 2\, \ell_2 + 2^2\, m_2. \end{aligned}$$



Itérons ce processus, et pour chaque entier $n \geqslant 1$ en supposant $\widehat{C}_n$ construit, supprimons 2^n intervalles ouverts de longueur $0 < \ell_{n+1} < \frac{1}{2}\, m_n$ situés centralement dans chacun des 2^n intervalles fermés restants d'égale longueur m_n :

$$\begin{aligned} m_n &= \ell_{n+1} + 2\, m_{n+1}, \\ 1 &= \ell_1 + 2^1\, \ell_2 + \cdots + 2^n\, \ell_{n+1} + 2^{n+1}\, m_{n+1}, \end{aligned}$$

ce qui donne un certain sous-ensemble :

$$\widehat{C}_{n+1} \subset \widehat{C}_n \subset [0,1].$$

Définissons enfin l'ensemble de Cantor généralisé :

$$\widehat{C} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \widehat{C}_n,$$

qui est non vide, fermé, borné, donc compact.

Afin d'obtenir ainsi un ensemble $\widehat{C}$ qui soit de mesure positive, ajustons le choix des 2^{n-1} longueurs enlevées $\ell_n > 0$ à chaque étape de telle sorte que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\, \ell_n < 1.$$

Sous cette hypothèse, on démontre effectivement dans l'Exercice 4 que $\widehat{C} \subset [0,1]$ n'est *pas* un sous-ensemble de mesure 0.

Théorème 2.1. *Il existe une suite de fonctions continues :*

$$f_n\colon \quad [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad (n \geqslant 1)$$

avec :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1 \qquad\qquad (\forall\, x \in [0,1]),$$

telle qu'en tout point fixé $x \in [0,1]$, la suite réelle $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ est monotone décroissante, de telle sorte que la fonction-limite simple :

$$\widehat{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existe et est bien définie, mais est extrêmement discontinue, et plus précisément, est non-continue en tout *point $x \in \widehat{C}$.*

En particulier, donc, cette fonction-limite $\widehat{f}$ n'est pas Riemann-intégrable, puisque l'ensemble de ses points de discontinuité, qui contient $\widehat{C}$, n'est *pas* de mesure 0.

Toutefois, par simple intégration des inégalités fonctionnelles :

$$0 \leqslant f_{n+1} \leqslant f_n,$$

on déduit les inégalités numériques :

$$0 \leqslant \int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,dx,$$

qui montrent que la suite de nombre réels positifs :

$$\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)_{n=1}^{\infty}$$

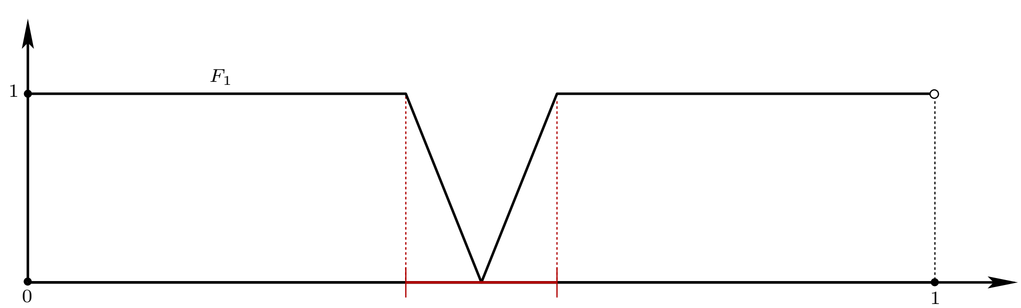
admet forcément une limite, puisqu'elle est décroissante. Alors toute l'insatisfaction théorique que l'on doit ressentir vis-à-vis de la théorie de l'intégration au sens de Riemann provient du fait que l'on est incapable d'intervertir $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ limite et intégrale :

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx}_{\text{nombre qui existe tout à fait}} \overset{??}{=} \overbrace{\int_0^1}^{\text{concept d'intégrale insuffisant}} \underbrace{\widehat{f}(x)}_{\text{fonction qui existe tout à fait}}\,dx,$$

simplement parce que le concept d'intégrale riemannienne est trop faible pour intégrer les fonctions telles que cette fonction-limite un peu pathologique $\widehat{f}$. Or dans la belle théorie de Lebesgue, les fonctions telles que $\widehat{f}$ apparaîtront naturellement comme mesurables puis intégrables, et l'interversion $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ qu'on adore reviendra vers nous auréolée de toute sa splendeur commutative.

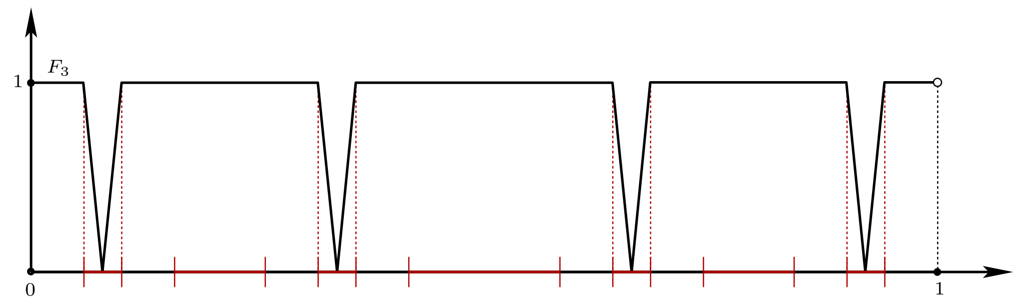
Démonstration. Les arguments seront partiellement laissés en exercice au lecteur. Soit donc $\widehat{C}$ l'ensemble de Cantor généralisé construit il y a quelques instants, lequel est donc de mesure positive :

$$m(\widehat{C}) > 0.$$



Soit $F_1 \colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ la fonction continue affine par morceaux telle que $F_1 = 1$ dans le complémentaire du premier intervalle supprimé, et telle que $F_1 = 0$ au centre de cet intervalle.

De manière similaire, soit $F_2\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ la fonction continue affine par morceaux telle que $F_2 = 1$ dans le complémentaire des deux intervalles supprimés à la deuxième étape, et telle que $F_2 = 0$ aux deux points qui sont centres des ces deux intervalles.



Pour tout entier $n \geqslant 3$, définissons par récurrence une fonction F_n continue affine par morceaux qui généralise F_1 et F_2.

Introduisons alors la suite de fonctions $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ définie comme produit des n premières fonctions F_k :

$$f_n \,:=\, F_1 \cdot F_2 \cdots F_n \qquad\qquad (n \geqslant 1).$$

On se convains alors (exercice) de la véracité des faits suivants :

(a) Pour tout $x \in [0,1]$ fixé, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ converge vers une certaine limite qu'on notera $\widehat{f}(x) \in [0,1]$.

(a) Cette fonction-limite $\widehat{f}$ est discontinue en tout point $x \in \widehat{C}$. Indication: Observer que $\widehat{f}(x) = 1$ lorsque $x \in \widehat{C}$ et trouver une suite de points $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, mais qui satisfait $\widehat{f}(x_n) = 0$. □

3. Exercices

Exercice 1. Vérifier rigoureusement que l'ensemble triadique standard de Cantor $C \subset [0,1]$ est de mesure 0 au sens de la définition donnée à la fin du chapitre sur l'intégrale de Riemann.

Exercice 2. Montrer que l'ensemble triadique standard de Cantor est *parfait*, à savoir qu'aucun de ses points n'est isolé.

Exercice 3. **[Ensembles de Cantor de dissection constante]** Soit l'intervalle unité $[0,1] \subset \mathbb{R}$, et soit un nombre réel fixé ξ avec $0 < \xi < 1$. Le cas $\xi = \frac{1}{3}$ va correspondre à l'ensemble triadique standard de Cantor.

À l'étape 1 de la construction, on supprime de $[0,1]$ l'intervalle ouvert de longueur ξ situé centralement à distance égale de 0 et de 1. À l'étape 2, on supprime de même de chacun des deux intervalles restants l'intervalle ouvert situé centralement de longueur relative ξ, à savoir de longueur $\xi\,\frac{1-\xi}{2}$. On itère la construction pour tout entier $n \geqslant 1$. On note C_ξ l'intersection infinie des ensembles ainsi construits.

(a) Montrer que le complémentaire de C_ξ dans $[0,1]$ est réunion d'une infinité dénombrable d'intervalles ouverts dont la somme totale des longueurs vaut 1.

(b) Montrer que C_ξ est *totalement discontinu*, à savoir que la composante connexe de chacun de ses points $x \in C_\xi$ est réduite au singleton $\{x\}$.

Exercice 4. Soit $\widehat{C} \subset [0,1]$ le sous-ensemble de type Cantor qui est construit en supprimant, à la n-ème étape, 2^{n-1} intervalles ouverts situés centralement tous de longueur ℓ_n avec toujours :

$$\ell_1 + 2\,\ell_2 + \cdots + 2^{n-1}\,\ell_n \;<\; 1.$$

(a) Si ces longueurs ℓ_n sont choisies de telle sorte qu'à l'infini, on ait toujours :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\,\ell_n \;<\; 1,$$

montrer que $\widehat{C}$ n'est *pas* de mesure nulle. *Nota Bene :* avec les outils de la *Théorie de la mesure* qui seront développés au chapitre suivant, on peut établir que $\widehat{C}$ est mesurable, de mesure positive égale à :

$$\begin{aligned} m\big(\widehat{C}\big) &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}\,\ell_k \\ &> 0. \end{aligned}$$

(b) Montrer que pour tout $x \in \widehat{C}$, il existe une suite de points $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers x telle que :

$$x_n \notin \widehat{C}_n,$$

et avec de plus $x_n \in I_n$, où I_n est un sous-intervalle du complémentaire $[0,1]\backslash\widehat{C}$ dont la longueur $|I_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tend vers zéro.

(c) Montrer que cet ensemble $\widehat{C}$ est parfait, et qu'il ne contient aucun intervalle ouvert.

(d) Montrer que $\widehat{C}$ est non-dénombrable.

Exercice 5. Établir rigoureusement les assertions sur lesquelles repose la démonstration du Théorème 2.1.

Exercice 6. [Fonction de Cantor-Lebesgue] Sur l'ensemble triadique standard de Cantor $C \subset [0,1]$ dont les éléments s'écrivent sous forme triadique :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \qquad\qquad \text{avec } \; a_i \in \big\{0,\,2\big\},$$

soit la fonction définie par :

$$F(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}, \qquad\qquad \text{où } \; b_i := \frac{a_i}{2}.$$

(a) Montrer que F est bien définie, satisfait $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$, et qu'elle est continue $C \longrightarrow [0,1]$, lorsque C est muni de la topologie induite par son plongement $C \hookrightarrow \mathbb{R}$.

(b) Montrer rigoureusement que $F\colon C \longrightarrow [0,1]$ est surjective, à savoir que pour tout $y \in [0,1]$, il existe $x \in C$ tel que $F(x) = y$.

(c) Montrer qu'un intervalle ouvert $]a,b[$ qui est une composante connexe du complémentaire $[0,1]\backslash C$ est une composante connexe du complémentaire $[0,1]\backslash C_n$ d'un certain C_n. Montrer ensuite que $a, b \in C$ et que $F(a) = F(b)$.

(d) On note encore F le prolongement de F à tout l'intervalle $[0,1]$ qui est constant sur tous les intervalles $]a,b[$ de cette nature, défini par $F(x) := F(a) = F(b)$ pour tout $x \in]a,b[$. Montrer que ce prolongement constitue une fonction continue $[0,1] \longrightarrow [0,1]$.

(e) Montrer que F est dérivable en tout point $x \in [0,1]\backslash C$.

(f) Montrer que F n'est dérivable en aucun point de C.

Exercice 7. EE