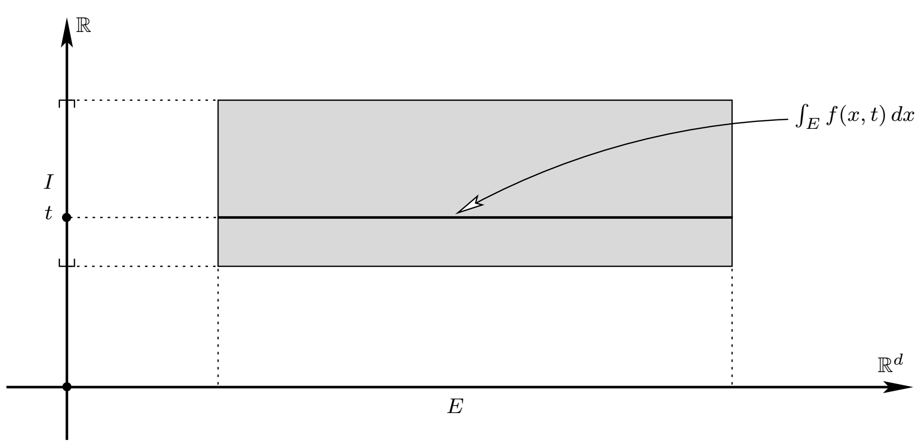
Intégrales dépendant de paramètres

François DE MARÇAY

Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

Soit un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$, soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ d'intérieur non vide et soit une fonction mesurable :

$$f\colon \quad E \times I \longrightarrow \mathbb{C}.$$



Une question naturelle qui possède des applications extrêmement nombreuses et utiles en Analyse consiste à déterminer de quelle manière l'intégrale :

$$F(t) := \int_E f(x,t)\,dx$$

dépend du paramètre t en fonction de la régularité de l'application f que l'on intègre (sur des tranches horizontales).

En fait, de telles *représentation intégrales* $F(t)$ s'avèrent constituer un outil puissant répandu pour étudier les propriétés des solutions à de nombreuses équations aux dérivées partielles, notamment issues de la physique, par exemple leur régularité, la localisation de leurs singularités, ou encore leurs propriétés asymptotiques. *C'est pourquoi ce bref chapitre simple est d'une importance absolument capitale !*

1. Continuité d'intégrales dépendant de paramètres

Dans le cadre mathématique abstrait et avancé de la théorie de l'intégration de Lebesgue, un premier énoncé fondamental est le suivant.

Théorème 1.1. [Continuité d'une intégrale à paramètre] *Si, au voisinage d'un point fixé $t_0 \in I$, les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) *pour tout $t \neq t_0$ proche de t_0, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est mesurable et Lebesgue-intégrable en la variable x sur E ;*

(2) *pour presque tout $x \in E$:*

$$\lim_{t \to t_0} f(x,t) \, = \, f(x,t_0);$$

(3) *il existe une fonction positive $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ Lebesgue-intégrable sur E qui, pour tout $t \neq t_0$ proche de t_0 et pour presque tout $x \in E$, domine uniformément :*

$$\big|f(x,t)\big| \, \leqslant \, g(x);$$

Alors premièrement la fonction :

$$x \longmapsto f(x,t_0)$$

est Lebesgue-intégrable sur E et deuxièmement surtout :

$$\lim_{t \to t_0} \int_E f(x,t)\,dx \, = \, \int_E f(x,t_0)\,dx.$$

Autrement dit, ces trois conditions garantissent que la fonction introduite ci-dessus :

$$F(t) \, = \, \int_E f(x,t)\,dx$$

est *continue* en $t = t_0$. Dans la plupart des applications utiles et intéressantes, il est en général aisé de vérifier que ces trois conditions sont effectivement satisfaites.

Démonstration. L'argument est dérisoirement simple, puisque, comme l'aura fait deviner la présence d'une fonction dominatrice g, ce résultat est une application immédiate du théorème de convergence dominée, par exemple en introduisant une suite :

$$t_n \longrightarrow t_0,$$

à laquelle est associée la suite de fonctions intégrables :

$$f_n(x) \, := \, f(x,t_n),$$

la vérification complète étant laissée en exercice d'assimilation. □

Bien entendu, l'énoncé le plus fréquemment utile dans les applications concerne une continuité en *tous* les points de l'intervalle I.

Théorème 1.2. *Si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) *pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est mesurable et Lebesgue-intégrable en la variable x sur E ;*

(2) *pour tout $x \in E$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue en la variable t sur I ;*

(3) *il existe une fonction positive $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ Lebesgue-intégrable sur E qui domine uniformément :*

$$\big|f(x,t)\big| \, \leqslant \, g(x)$$

pour presque tout $x \in E$ et pour tout $t \in I$.

Alors la fonction :

$$t \longmapsto \int_E f(x,t)\,dx$$

est continue sur l'intervalle I tout entier.

Démonstration. C'est encore un corollaire direct du Théorème de convergence dominée, et aussi un corollaire logique du théorème qui précède. □

Des énoncés analogues sont satisfaits par des intégrales :

$$F(t_1,\dots,t_r) := \int_E f(x,t_1,\dots,t_r)\,dx$$

de fonctions mesurables qui dépendent d'un nombre $r \geqslant 1$ quelconque de paramètres réels. Il peuvent être formulés (exercice d'écriture), et ils découlent essentiellement directement (pour des raisons formelles) des deux énoncés que nous venons de voir dans le cas d'un seul paramètre ($r = 1$).

2. Dérivabilité d'intégrales dépendant de paramètres

Commençons par rappeler deux résultats classique d'Analyse de niveau Licence 1 ou 2.

Théorème 2.1. [des accroissements finis] *Sur un intervalle compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, si une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, et aussi dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ — mais pas forcément $\mathscr{C}^1$ —, alors il existe au moins un élément $c \in\,]a,b[$ tel que :*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Démonstration. Cet énoncé est une conséquence du Théorème de Rolle, rappelé ci-dessous, appliqué à la fonction auxiliaire :

$$\begin{aligned} g\colon \quad [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x, \end{aligned}$$

dont la dérivée vaut :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$ □

Théorème 2.2. [de Rolle] *Sur un intervalle compact $[a,b]$ avec $-\infty < a < b < \infty$, si une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, et aussi dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, et si enfin :*

$$f(b) = f(a),$$

alors il existe au moins un élément $c \in\,]a,b[$ tel que :

$$f'(c) = 0.$$

Démonstration. En supposant f non constante, un $c \in]a,b[$ qui convient est par exemple là où f atteint un minimum ou un maximum :

$$c := \min_{[a,b]} f \qquad \text{ou} \qquad c := \max_{[a,b]} f,$$

car on sait (exercice de révision) qu'en un extremum d'une fonction dérivable, la dérivée s'annule nécessairement (sinon, s'il y avait une pente non nulle, le point en question ne serait pas un extremum). Une preuve détaillée se trouve dans les manuels. □

Voici maintenant l'énoncé que nous attendons tous, à savoir celui qui permet d'intervertir l'intégration et la dérivation partielle.

Théorème 2.3. [Dérivabilité sous le signe intégral] *Avec les mêmes notations précédemment :*

$$F(t) = \int_E f(x,t)\,dx,$$

si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(1) *pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est mesurable et Lebesgue-intégrable en la variable x sur E ;*

(2) *pour (presque) tout $x \in E$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est dérivable sur I tout entier, de dérivée :*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t);$$

(3) *il existe une fonction positive $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable Lebesgue-intégrable sur E qui domine uniformément :*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant g(x),$$

pour (presque) tout $x \in E$ et pour tout $t \in I$;

Alors en tout $t \in I$ fixé, la fonction :

$$x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$

est Lebesgue-intégrable sur E, et surtout, la fonction :

$$t \longmapsto \int_E f(x,t)\,dx$$

est dérivable sur I de dérivée égale à :

$$\frac{d}{dt}\int_E f(x,t)\,dx = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

Démonstration. Fixons donc un paramètre $t \in I$ et donnons-nous une suite quelconque $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ d'élément $t_n \in I\backslash\{t\}$ qui tendent vers :

$$t = \lim_{n\to\infty} t_n.$$

En (presque) tout point $x \in E$, les quotients différentiels $\frac{f(x,t_n)-f(x,t)}{t_n-t}$ ont alors une valeur finie qui tend par hypothèse vers :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x,t_n)-f(x,t)}{t_n-t}.$$

La formule des accroissement finis assure alors qu'il existe au moins un élément s_n situé entre t_n et t tel que :

$$\frac{f(x,t_n)-f(x,t)}{t_n-t} = \frac{\partial f}{\partial t}(x,s_n).$$

Grâce à l'hypothèse **(2)**, la suite de fonctions intégrables sur E :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}(x, s_n)\right)_{n=1}^{\infty}$$

vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée, d'où nous déduisons que la fonction-limite :

$$\begin{aligned} x \longmapsto & \lim_{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_n) \\ = & \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \end{aligned}$$

est Lebesgue-intégrable sur E, et aussi que l'on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_n)\, dx & \overset{\text{CD}}{=} \int_E \lim_{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_n)\, dx \\ & = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, dx. \end{aligned}$$

Mais comme $t_n \neq t$ pour tout $n \geqslant 1$, on peut grâce à la linéarité de l'intégrale développer les quotients différentiels finis :

$$\begin{aligned} \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_n) & = \int_E \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\, dx \\ & = \frac{1}{t_n - t} \left\{ \int_E f(x, t_n)\, dx - \int_E f(x, t)\, dx. \right\}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration (exercice visuel). □

Par exemple, ce théorème permet d'établir que la *Fonction Gamma d'Euler*, définie par :

$$\Gamma(y) := \int_0^\infty e^{-x}\, x^{y-1}\, dx$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, \infty[$, et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, sa dérivée k-ème vaut :

$$\Gamma^{(k)}(y) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{y-1} \big(\log x\big)^k\, dx.$$

De même, à partir de la formule élémentaire valable pour $y > 0$ réel :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{\pi}{2y},$$

on obtient par dérivation, pour tout entier $n \geqslant 2$, que (exercice) :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + y^2)^n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-4)} \cdot \frac{1}{y^{2n-1}}.$$

Outre la continuité et la dérivabilité des intégrales dépendant d'un ou de plusieurs paramètres, il est également extrêmement utile dans de nombreuses applications de connaître la régularité d'une intégrale :

$$F(z) := \int_E f(x, z)\, dx$$

d'une fonction $f \colon E \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ qui dépend *holomorphiquement* d'un paramètre $z \in \mathbb{C}$, où $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert.

Rappelons à cet effet rapidement qu'une fonction :

$$h\colon \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dite *analytique* si elle est développable en série entière convergente au voisinage de tout point $z_0 \in \Omega$, c'est-à-dire si :

$$\forall\, z_0 \in \Omega \quad \exists\, r_0 > 0,\;\; r_0 < \mathsf{dist}(z_0, \partial\Omega), \quad \forall\, |z - z_0| < r_0 \quad h(z) \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n \,\big(z - z_0\big)^n$$

la série $\sum a_n (z - z_0)^n$ étant convergente dans le disque $\{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < r_0\}$. On démontre — et nous admettrons ce résultat ici — que les fonctions analytiques sont indéfiniment dérivables et que leurs dérivées de tous ordres par rappport à z :

$$\frac{\partial^k h}{\partial z^k}(z) \qquad\qquad (k \geqslant 1)$$

demeurent analytiques dans le même ouvert Ω. Citons alors sans démonstration le résultat suivant.

Théorème 2.4. [Analyticité d'une intégrale dépendant d'un paramètre complexe] *Avec les notations qui précèdent :*

$$F(z) \,:=\, \int_E f(x,z)\, dx,$$

E étant un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$, si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(1) *pour tout $z \in \Omega$, la fonction $x \longmapsto f(x,z)$ est Lebesgue-intégrable en la variable x sur E ;*

(2) *pour tout $x \in E$, la fonction $z \longmapsto f(x,z)$ est analytique dans Ω ;*

(3) *il existe une fonction positive $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ Lebesgue-intégrable sur E qui domine uniformément :*

$$\big|f(x,z)\big| \,\leqslant\, g(x),$$

pour tout $x \in E$ et tout $t \in I$;

Alors la fonction :

$$z \,\longmapsto\, \int_E f(x,z)\, dx$$

est analytique dans Ω de dérivées k-èmes d'ordre quelconque égales à :

$$\frac{d^k}{dz^k} \int_E f(x,z)\, dx \,=\, \int_E \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(x,z)\, dx.$$

Par exemple, la fonction Γ d'Euler complexe définie pour $z \in \mathbb{C}$ par :

$$\Gamma(z) \,:=\, \int_0^\infty e^{-x}\, x^{z-1}\, dx$$

est analytique dans le demi-plan complexe $\big\{z \in \mathbb{C}\colon\; \mathrm{Re}\, z > 0\big\}$.

3. Exercices

Exercice 1. Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ d'intérieur non vide, soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soient deux fonctions $u, v\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant :

- f est continue sur $\mathbb{R} \times I$;
- la dérivée partielle $(x,t) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ existe et est continue sur $\mathbb{R} \times I$;
- u et v sont dérivables sur I ;

Montrer que la fonction $G\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$G(t) := \int_{u(t)}^{v(t)} f(x,t)\, dx$$

est bien définie, qu'elle est dérivable sur I, et enfin, que sa dérivée vaut :

$$G'(t) = \int_{u(t)}^{v(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx + f\big(v(t),t\big) \cdot v'(t) - f\big(u(t),t\big) \cdot u'(t).$$

Exercice 2. En discutant les cas $a \leqslant 1$ et $a > 1$, étudier :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n e^{-ax}\, dx.$$

Exercice 3. Soit une fonction mesurable intégrable $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Avec un paramètre $t > 0$, on introduit :

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\sqrt{1 + t\, f(x)^2}}\, dx.$$

(a) Montrer que F prend des valeurs finies, qu'elle est continue, et que $0 = \lim_{t\to\infty} F(t)$.
(b) Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \infty[$.
(c) Montrer l'existence de la dérivée à droite de F en 0 :

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{F(t) - F(0)}{t},$$

dans $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}_-$.
(d) Quelle condition nécessaire et suffisante f doit-elle satisfaire pour que F soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \infty[$?

Exercice 4. [Fonction gamma d'Euler et formule de Stirling] Pour $s > 0$, soit la fonction :

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1}\, e^{-x}\, dx.$$

(a) Montrer, pour $s > 0$, que l'intégrale a un sens, à savoir que les deux limites suivantes existent :

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ >}} \int_\delta^1 x^{s-1}\, e^{-x}\, dx \qquad \text{et} \qquad \lim_{\mathrm{M}\to\infty} \int_1^{\mathrm{M}} x^{s-1}\, e^{-x}\, dx.$$

(b) Montrer que Γ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, \infty[$.
(c) Déterminer $\lim_{s \overset{>}{\to} 0} \Gamma(s)$ ainsi que $\lim_{s\to\infty} \Gamma(s)$.
(d) Montrer que $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$ pour tout $s > 0$, puis, pour $n \geqslant 1$ entier, montrer que $\Gamma(n+1) = n!$.
(e) En utilisant la valeur de $\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi x^2}\, dx = 1$, calculer :

$$\Gamma\big(\tfrac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi} \qquad \text{et} \qquad \Gamma\big(\tfrac{3}{2}\big) = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(f) Montrer que :

$$\int_0^n x^{s-1} \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n dx = \frac{n!\, n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma(s).$$

Indication: Comparer $(1 - \frac{x}{n})^n$ et e^{-x} lorsque $x \in [0, n]$.
(g) Montrer, à l'aide d'un changement de variable, que :

$$\Gamma(s+1) = s^s\, \sqrt{s}\, e^{-s} \int_{-\sqrt{s}}^\infty F(s,u)\, du,$$

avec :

$$F(s,u) := \left(1 + \frac{u}{\sqrt{s}}\right)^s e^{-u\sqrt{s}}.$$

(h) Déterminer la limite ponctuelle simple, lorsque $s \longrightarrow \infty$, de $F(s,u)$.

(i) Établir l'inégalité $\log(1+t) \leqslant t - \frac{t^2}{2}$ pour $-1 < t \leqslant 0$.

(j) En utilisant $\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, calculer :

$$\lim_{s \to \infty} \int_{-\sqrt{s}}^{0} F(s,u)\,du.$$

(k) Montrer que $F(s,u) \leqslant (1+u)\,e^{-u}$ pour tout $s \geqslant 1$ et tout $u \geqslant 0$.

(l) Trouver :

$$\lim_{s \to \infty} \int_{0}^{\infty} F(s,u)\,du = \sqrt{2\pi}.$$

(m) En déduire la *formule de Stirling* qui offre une asymptotique pour la factorielle d'un entier :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \qquad (n \longrightarrow \infty).$$