Théorie de la mesure de Borel et Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$

François DE MARÇAY

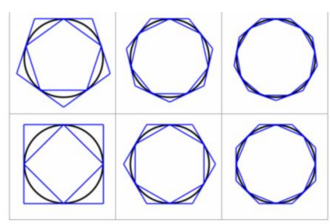
Département de Mathématiques d'Orsay

Université Paris-Saclay, France

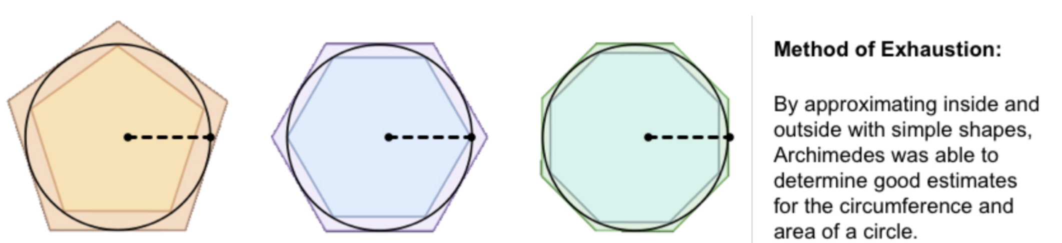
> Nous appellerons *mesurables* les ensembles dont nous pouvons définir la mesure de la manière qui a été indiquée en développant les idées qui précèdent. Mais nous affirmons cela sans prétendre qu'il soit possible d'assigner une mesure à *tous* les ensembles absolument quelconques. Émile BOREL, 1898.

1. Mesure des grandeurs : Paradoxes de l'atomisme ensembliste

Un des concepts les plus fondamentaux de la géométrie euclidienne, est celui de la *mesure des grandeurs*, et notamment, celui de longueur, d'aire, ou de volume d'un corps solide $E \subset \mathbb{R}^{1,2,3}$.



Dans l'approche antique qui remonte au moins à Archimède et à Eudoxe, on partitionne le corps à mesurer en un nombre fini de composantes que l'on réassemble afin de former un corps plus simple ayant une mesure calculable. La célèbre *méthode d'exhaustion* approxime le corps étudié par deux familles de corps inscrits et exinscrits, afin de trouver une borne inférieure et une borne supérieure de son contenu métrique, les deux familles dépendant aussi d'un paramètre qui tend vers l'infini à mesure qu'elles enserrent géométriquement de plus en plus le corps étudié.



Avec l'apparition de la *Géométrie analytique* et de la *Théorie des ensembles*, le problème de savoir comment déterminer le volume des corps quelconques et pas seulement ceux qu'affectionnaient les géomètres de l'Antiquité, en dimension arbitraire dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$, se pose naturellement, et inévitablement. Par ailleurs, nous avons vu dans un chapitre qui précède que l'idée de trancher horizontalement (Lebesgue) les hypographes $\big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \colon 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\}$ des fonctions $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, au lieu de les trancher verticalement (Cauchy, Riemann, Darboux, Jordan) conduit à se demander quelle est la *largeur totale*, ou *mesure*, de certains sous-ensembles a priori quelconques $E_{y',y''} \subset \mathbb{R}_x$ de l'axe des abscisses.

Or l'intuition physique de l'atomisme antique qui consiste à prétendre que :

$$\text{Mesurer} \overset{??}{\equiv} \text{Compter},$$

cette intuition simpliste échoue en Analyse, à cause de la *Théorie des ensembles*, car mesurer l'extension d'un corps en comptant simplement le nombre d'atomes qui le constituent conduit à des paradoxes et à des inconsistances.

En effet, si l'on s'en référait à l'atomisme mathématique, un corps solide typique serait formé d'un nombre infini non dénombrable de points, qu'on pourrait voir comme ses atomes, chacun d'entre eux étant de mesure nulle. Mais puisque le produit $\infty \cdot 0$ est en général indéterminé, il se peut fort bien que plusieurs manières de compter les atomes dans un même corps conduisent à des résultats étrangement différents.

Par exemple, les deux intervalles $[0,1]$ et $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$ sont en correspondance bijective par l'application $x \longmapsto 2\,x$, alors qu'il est immédiatement clair que la longueur du second est double de celle du premier. Autrement dit, la bijection $x \longmapsto 2\,x$ désassemble les atomes de $[0,1]$ et les réassemble en l'intervalle de longueur double $[0,2]$.

Bien sûr, on pourrait objecter ici que l'on désassemble et réassemble un nombre infini d'atomes en les *dilatant* d'un facteur 2, ce qui ne respecte en rien leur longueur. Mais il existe un phénomène réellement troublant de la *Théorie des ensembles* dans lequel le désassemblage d'atomes et leur réassemblage n'utilise *que* des applications euclidiennes de l'espace ordinaire $\mathbb{R}^3$ qui laissent invariant le volume des corps et des atomes.

Rappelons à cet effet que le groupe des déplacements euclidiens de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathsf{Eucl}\big(\mathbb{R}^3\big) := \mathbb{R}^3 \ltimes \mathsf{SO}_3(\mathbb{R}),$$

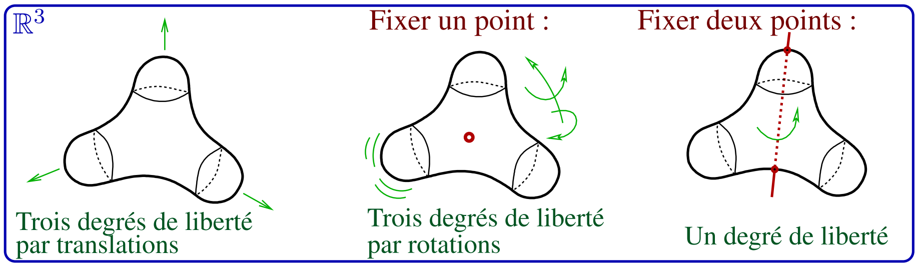
est le produit, dit *semi-direct*, du groupe évident des translations de $\mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z) \longmapsto \big(x+a,\, y+b,\, z+b\big),$$

qui est naturellement commutatif et isomorphe à $\mathbb{R}^3$, avec le groupe, dit *spécial orthogonal*, des matrices symétriques définies positives de taille 3×3 qui conservent le produit scalaire et de déterminant 1 :

$$\mathsf{SO}_3(\mathbb{R}) := \big\{g \in \mathsf{GL}_3(\mathbb{R}) \colon\; g\,{}^tg = \mathsf{Id},\; \det(g) = 1\big\}.$$

Ce groupe $\mathsf{Eucl}(\mathbb{R}^3)$ est tout simplement celui des mouvements des corps solides ordinaires dans notre espace physique favori, par exemple notre brosse à dents (la pauvre, elle est secouée !), ou notre stylo (lui au moins, il reste au sec !). Ce qui compte dans ce groupe des mouvements, c'est que *le volume des corps, et les distances entre chaque paire de points, restent invariants lors des mouvements*.



Géométriquement, une fois que les trois degrés de libertés offerts par les translations sont épuisés, au moins un point d'un corps solide de référence devient fixe, et il reste encore *trois* degrés de libertés pour des mouvements qui laissent fixe ledit point :

□ *deux* degrés de liberté pour rotationner les autres points du corps sur des sphères de dimension 2 centrées en le point fixé ;

□ un dernier, et *un seul*, degré de liberté une fois qu'un deuxième point a été fixé, ce degré de liberté correspondant à des rotations cylindriques autour de l'unique axe passant par ces deux points.

La dimension totale du groupe des déplacements euclidiens est donc égale à :

$$\dim \mathsf{Eucl}\big(\mathbb{R}^3\big) = 3 + 2 + 1 = 6,$$

il est donc plus riche que le groupe $\mathsf{Eucl}(\mathbb{R}^2)$ des déplacements euclidiens dans le plan :

$$\mathsf{Eucl}\big(\mathbb{R}^2\big) = \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{translations}} \times \underbrace{\mathsf{SO}_2(\mathbb{R})}_{\substack{\text{rotation}\\ \text{planaires}}},$$

lequel n'est que de dimension $2 + 1 = 3$. De plus, en dimension 2, ce groupe $\mathsf{Eucl}(\mathbb{R}^2)$ est *commutatif*, alors qu'en dimension 3, le groupe $\mathsf{Eucl}(\mathbb{R}^3)$ ne l'est pas.

C'est la non-commutativité de $\mathsf{SO}_3(\mathbb{R})$ qui rend possible le théorème très troublant qui va suivre, théorème non valable en dimension 2.

Le *paradoxe de Banach-Tarski* affirme qu'il est possible de découper une boule fermée de l'espace usuel $\mathbb{R}^3$ en un nombre fini de morceaux, et de réassembler ensuite ces morceaux pour former deux boules fermées identiques à la première — phénomène extrêmement troublant ! Et nous allons voir que ce phénomène troublant force à accepter qu'il soit impossible d'attribuer un volume à *tous* les sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$.

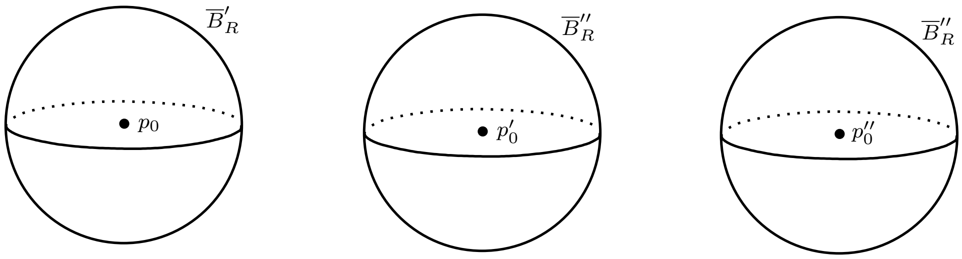
Plus précisément, dans $\mathbb{R}^3$ muni de coordonnées (x, y, z), soient les trois points :

$$p_0 := (0, 0, 0), \qquad p_0' := (3\,R, 0, 0), \qquad p_0'' := (6\,R, 0, 0),$$

et soient les trois boules fermées disjointes de même rayon $R > 0$:

$$\overline{B}_R := \overline{B}(p_0, R), \qquad \overline{B}'_R := \overline{B}(p_0', R), \qquad \overline{B}'_R := \overline{B}(p_0', R),$$

situées l'une après l'autre à distance R.



Par une formule qui remonte aux mathématiques antiques, leur volume commun vaut :

$$\mathsf{Volume}\big(\overline{B}_R\big) \,=\, \mathsf{Volume}\big(\overline{B}'_R\big) \,=\, \mathsf{Volume}\big(\overline{B}''_R\big) \,=\, \frac{4}{3}\,\pi\,R^3.$$

Théorème 1.1. [Paradoxe de Banach-Tarski] *Il existe une décomposition finie de la première boule fermée :*

$$\overline{B}_R \,=\, \bigcup_{k=1}^{n} F_k \,\cup\, \bigcup_{l=1}^{m} G_l,$$

en sous-ensembles $F_k \subset \overline{B}_R$ et $G_l \subset \overline{B}_R$ tous disjoints deux à deux :

$$\begin{aligned} F_k \cap G_l &= \emptyset && (1 \leqslant k \leqslant n;\ 1 \leqslant l \leqslant m), \\ F_{k_1} \cap F_{k_2} &= \emptyset && (1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n), \\ G_{l_1} \cap G_{l_2} &= \emptyset && (1 \leqslant l_1 < l_2 \leqslant m), \end{aligned}$$

et il existe des déplacements euclidiens :

$$\begin{aligned} T_k &\in \mathsf{Eucl}\big(\mathbb{R}^3\big) && (1 \leqslant k \leqslant n), \\ S_l &\in \mathsf{Eucl}\big(\mathbb{R}^3\big) && (1 \leqslant l \leqslant m), \end{aligned}$$

au moyen desquels la première famille reconstitue par transport une première autre boule fermée $\overline{B}'_R$ de même rayon $R > 0$, et simultanément aussi, la seconde famille reconstitue par transport une seconde autre boule fermée $\overline{B}''_R$ de même rayon $R > 0$:

$$\begin{aligned} \overline{B}'_R &= \bigcup_{k=1}^{n} T_k\big(F_k\big), \\ \overline{B}''_R &= \bigcup_{l=1}^{m} S_l\big(G_l\big), \end{aligned}$$

ces morceaux de puzzle transportés restant totalement disjoints deux à deux à l'arrivée :

$$\begin{aligned} T_{k_1}\big(F_{k_1}\big) \,\cap\, T_{k_2}\big(F_{k_1}\big) \,&=\, \emptyset && (1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n), \\ S_{l_1}\big(G_{l_1}\big) \,\cap\, S_{l_2}\big(G_{l_2}\big) \,&=\, \emptyset && (1 \leqslant l_1 < l_2 \leqslant m). \end{aligned}$$

> Ce n'est pas le sujet du tableau ni la technique du peintre qui fait la difficulté du puzzle, mais la subtilité de la découpe.
> Georges PEREC

La démonstration utilise le célèbre :

Axiome du choix. *Soit E un ensemble quelconque, et soit $E_\alpha \subset E$ une famille de sous-ensembles indexée par des indices $\alpha \in A$ appartenant à un ensemble A quelconque, pas forcément dénombrable. Alors (Axiome), il existe une* fonction de choix :

$$\alpha \longmapsto x_\alpha$$

qui spécifie un élément $x_\alpha \in E_\alpha$ de chacun de ces sous-ensembles.

Zappons allègrement toute description de la démonstration, puisque nous n'y connaissons rien !

Ici, le paradoxe spectaculaire, c'est qu'avec seulement un puzzle fini, on peut *doubler* la mise tout en respectant le principe de conservation de la matière. En effet, il est tout à fait naturel d'admettre que le volume est préservé par des déplacements euclidiens tels que les T_k et les S_l. Mais ici, *les sous-ensembles F_k et G_l sont taillés dans la boule d'une manière suffisamment vicieuse pour que le puzzle s'auto-clone*.

> L'art du puzzle commence avec les puzzles de bois découpés à la main lorsque celui qui les fabrique entreprend de se poser toutes les questions que le joueur devra résoudre lorsque, au lieu de laisser le hasard brouiller les pistes, il entend lui substituer la ruse, le piège, l'illusion. Georges PEREC

Ce qui compte pour nous ici, c'est que ce théorème nous force à admettre qu'on ne peut pas inventer une théorie de la mesure qui permette de mesurer *tous* les sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^3$, à savoir qui nous permette de leur attribuer un *volume*.

Supposons en effet par contradiction qu'on puisse trouver une manière d'attribuer à tout $E \subset \mathbb{R}^3$ une mesure :

$$\mathsf{Volume}(E) \,\in\, \mathbb{R}_+.$$

Évidemment, il faudrait que notre théorie fantasmée retrouve le bon vieux résultat d'Archimède :

$$\mathsf{Volume}\big(\overline{B}_R\big) \;=\; \frac{4}{3}\,\pi\, R^3.$$

Évidemment, il faudrait aussi que notre théorie-mirage respecte deux axiomes absolument naturels.

Axiome 1 : *Toutes les fois que deux sous-ensembles $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^3$ sont disjoints $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, on doit avoir :*

$$\mathsf{Volume}\big(E_1 \cup E_2\big) \;=\; \mathsf{Volume}\big(E_1\big) + \mathsf{Volume}\big(E_2\big).$$

Axiome 2 : *Tout déplacement euclidien $T \in \mathsf{Eucl}(\mathbb{R}^3)$ laisse invariants les volumes :*

$$\mathsf{Volume}\big(T(E)\big) \;=\; \mathsf{Volume}(E).$$

Si nous revenons alors au Théorème de Banach-Tarski, et que nous appliquons ces axiomes, nous dérivons l'égalité :

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Volume}\big(\overline{B}_R\big) \;=\; \mathsf{Volume}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} F_k \;\cup\; \bigcup_{l=1}^{m} G_l\Big)\\
&\text{[Axiome 1]} \qquad = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{Volume}\big(F_k\big) + \sum_{l=1}^{m} \mathsf{Volume}\big(G_l\big)\\
&\text{[Axiome 2]} \qquad = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{Volume}\big(T_k(F_k)\big) + \sum_{l=1}^{m} \mathsf{Volume}\big(S_l(G_l)\big)\\
&\text{[Axiome 1]} \qquad = \mathsf{Volume}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} T_k\big(F_k\big)\Big) + \mathsf{Volume}\Big(\bigcup_{l=1}^{m} S_l\big(G_l\big)\Big)\\
&\qquad\qquad\quad\; = \mathsf{Volume}\big(\overline{B}_R'\big) + \mathsf{Volume}\big(\overline{B}_R''\big),
\end{aligned}$$

ce qui revient à dire que :

$$\frac{4}{3}\,\pi\,R^3\;=\;\frac{4}{3}\,\pi\,R^3+\frac{4}{3}\,\pi\,R^3,$$

absurdité qui choque au plus haut point, l'équation $1 = 1 + 1$ étant la pire qu'on puisse obtenir en mathématiques !

Conséquence dialectique incontournable. *Il faut accepter qu'aucune théorie puisse mesurer le volume de* tous *les sous-ensembles de* $\mathbb{R}^d$.

Il faut donc *abandonner* l'objectif illusoire de mesurer tous les sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^d$. À la place, il va falloir accepter de résoudre le problème d'attribuer une mesure ou un volume *seulement* à une certaine classe de sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$, qu'on appellera les sous-ensembles *mesurables*.

Le *Problème de la mesure* se divisera alors en plusieurs sous-problèmes :

• Que signifie, pour un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$, d'être *mesurable* ?

• Si un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable, comment définir le nombre réel positif $\mathsf{mesure}(E) \in \mathbb{R}_+$?

• Quelles propriétés belles et naturelles ou axiomes beaux et naturels la théorie doit-elle satisfaire ?

Bien entendu, ces questions sont formulées d'une manière essentiellement *ouverte*, et donc, il n'existe pas une manière unique d'y répondre. En particulier, on peut étendre la classe des ensembles mesurables au prix de perdre une ou plusieurs belles propriétés naturelles, par exemple l'additivité finie ou infinie dénombrable, ou encore l'invariance par translation, propriétés dont néanmoins nous disposerons entièrement dans la belle théorie de Lebesgue.

Dans l'état actuel de l'art des cours de L3 en France et dans le monde, nous pouvons proposer deux réponses standard à ces questions.

La première réponse, c'est le concept de *mesure de Jordan* d'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$. Nous savons déjà que ce concept est intimement relié à l'intégrabilité au sens de Riemann, car l'hypographe (orienté) d'une fonction bornée est Jordan-mesurable si et et seulement si ladite fonction est Riemann-intégrable. Cette théorie de Riemann-Jordan est suffisamment élémentaire pour être enseignée dans les cours de L2 à l'université ou en mathernelle supérieure, et elle est suffisante lorsqu'il s'agit de mesurer la plupart des ensembles ordinaires de la géométrie classique.

Cependant, quand on se tourne vers les ensembles du type de ceux qui apparaissent réellement dans l'Analyse moderne, et en particulier, quand on se tourne vers les ensembles qui apparaissent comme *limites* d'autres ensembles (en des sens divers et variés), on constate que le concept de Jordan-mesurabilité devient inadéquat et trop faible, et donc, qu'il doit être étendu et renforcé théoriquement.

C'est ainsi que nous parvenons naturellement à la *deuxième* réponse générale connue aux questions ouvertes qui précèdent : la *Théorie de la Mesure de Borel et de Lebesgue*, laquelle peut être vue comme une *complétion de la théorie de Cauchy-Riemann-Darboux-Jordan*. En effet, dans la théorie de Lebesgue, on conserve toutes les propriétés naturelles dont jouit la mesure de Jordan, mais on admet crucialement la propriété additionnelle que la théorie reste stable par passages infinis à la limite. Notamment, nous allons découvrir ensemble certains théorèmes de convergence, tels que le *Théorème de convergence monotone*, ou le très célèbre *Théorème de la convergence dominée*, qui n'étaient pas vrais dans la théorie plus faible, mais qui s'avèreront illuminants de simplicité « biblique ».

2. Brève description du contenu de ce chapitre

En dimension quelconque $d \geqslant 1$, ce chapitre est consacré à la construction de la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$, et à l'étude de la classe des ensembles mesurables qui en résulte. Après quelques préliminaires élémentaires, nous donnons la première définition importante, celle de *mesure extérieure* d'un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$. Grâce à cette notion, nous pouvons alors définir les ensembles qui sont *mesurables* (au sens de Lebesgue), et nous nous restreignons alors à ne considérer que les ensembles mesurables, car ceux qui ne sont pas mesurables sont assez rares, plutôt pathologiques d'ailleurs, et en fait peu étudiés en Analyse.

Ensuite, nous établissons un résultat absolument fondamental : la collection des sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^d$ est stable par passage au complémentaire, et par réunions dénombrables. De plus, la mesure est additive par réunions disjointes dénombrables.

Au-delà, le concept de *fonction mesurable* est un avatar naturel de l'idée d'ensemble mesurable, de manière similaire au fait que le concept de fonction continue est en relation naturelle avec les ensembles ouverts, ou fermés. Mais le concept de fonction mesurable est plus étendu, car la classe des fonctions mesurables est stable par passage aux suites qui convergent simplement, pas nécessairement uniformément.

Enfin, nous proposons deux théorèmes simples qui mettent en lumière l'importance des cubes et des rectangles pour la géométrie des ensembles ouverts quelconques : dans $\mathbb{R}$, tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints, tandis qu'en dimension supérieure dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 2$, tout ouvert est « *presque* » réunion disjointe de cubes fermés, au sens où seulement leurs bords peuvent s'intersecter. Ces deux théorèmes motiveront la définition du concept crucial de *mesure extérieure*, qui sera étudié en détail.

3. Exhaustion des ouverts de $\mathbb{R}^d$

Commençons par décrire la structure des ensembles ouverts en termes d'intervalles, de carrés, de cubes. Le cas de la dimension 1 présente une simplicité particulière.

Théorème 3.1. *Tout sous-ensemble ouvert :*

$$\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^1$$

s'écrit de manière unique *comme réunion* dénombrable *d'intervalles ouverts* disjoints.

Démonstration. Pour tout point $x \in \mathscr{O}$, introduisons le plus grand intervalle ouvert $x \in I_x \subset \mathscr{O}$ contenant x et contenu dans l'ouvert. Plus précisément, puisque $\mathscr{O}$ est ouvert, on est sûr que x est contenu dans un certain petit intervalle ouvert assez petit pour être contenu dans $\mathscr{O}$, et donc, si on introduit les deux nombres réels :

$$a_x := \inf\big\{a < x \colon \,]a, x[\, \subset \mathscr{O}\big\} \qquad \text{et} \qquad b_x := \sup\big\{b > x \colon \,]x, b[\, \subset \mathscr{O}\big\},$$

on est sûr que $a_x < x < b_x$, sachant qu'il est éventuellement possible que $a_x = -\infty$, ou que $b_x = \infty$.

Si donc nous abrégeons :

$$I_x := \,]a_x, b_x[,$$

alors par construction $\{x\} \subset I_x \subset \mathscr{O}_x$, et par conséquent :

$$\mathscr{O} = \bigcup_{x\in\mathscr{O}} \{x\} = \bigcup_{x\in\mathscr{O}} I_x.$$

Maintenant, que se passe-t-il lorsque deux tels intervalles I_{x_1} et I_{x_2} s'intersectent ? Clairement, leur réunion $I_{x_1} \cup I_{x_2}$, qui est alors aussi un intervalle ouvert, est contenue dans $\mathscr{O}$, et elle contient à la fois le point x_1 et le point x_2. Mais puisque par définition I_{x_1} et I_{x_2} sont maximaux, on doit avoir simultanément :

$$\big(I_{x_1} \cup I_{x_2}\big) \subset I_{x_1} \qquad \text{et} \qquad \big(I_{x_1} \cup I_{x_2}\big) \subset I_{x_2},$$

et ceci ne peut avoir lieu qu'avec $I_{x_1} = I_{x_2}$. En définitive, dans la collection de tous ces intervalles canoniques :

$$\big\{I_x\colon\, x \in \mathscr{O}\big\},$$

deux quelconques d'entre eux doivent toujours être disjoints.

Il reste seulement à faire comprendre pourquoi il apparaît un nombre fini ou infini dénombrable de tels intervalles canoniques I_x. Or chaque intervalle I_x contient au moins un (en fait plusieurs) nombre(s) rationnel(s). Comme deux intervalles différents sont disjoints, les nombres rationnels qu'ils contiennent sont distincts. Or $\mathbb{Q}$ est dénombrable, donc la collection des I_x est elle aussi dénombrable. □

Naturellement, si un ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}$ est représenté comme réunion dénombrable disjointe d'intervalles ouverts I_j :

$$\mathscr{O} = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j,$$

la mesure de $\mathscr{O}$ devra très vraisemblablement être égale à :

$$m(\mathscr{O}) := \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|.$$

Comme cette représentation est unique, nous pourrions parfaitement prendre ceci comme définition de la mesure. Nous observerions alors que toutes les fois que deux ouverts $\mathscr{O}_1 \subset \mathbb{R}$ et $\mathscr{O}_2 \subset \mathbb{R}$ sont disjoints, la mesure de leur réunion serait la somme de leurs mesures.

Toutefois, bien que cette toute première approche suffise pour parler de la mesure des ouverts, il n'est pas immédiatement clair qu'elle permette d'embrasser des ensembles « plus complexes » que les ouverts.

Qui plus est, quand on passe aux dimensions supérieures $d \geqslant 2$, on rencontre des complications même lorsqu'il s'agit de définir la mesure des ensembles ouverts $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d$, car d'après l'Exercice 9, l'analogue direct du Théorème qui précède n'est *pas* valable en dimension $d \geqslant 2$!

Heureusement, en acceptant l'infini dénombrable, nous disposons d'un résultat-substitut qui sera suffisamment bon pour l'érection de la théorie.

Théorème 3.2. *Tout sous-ensemble ouvert :*

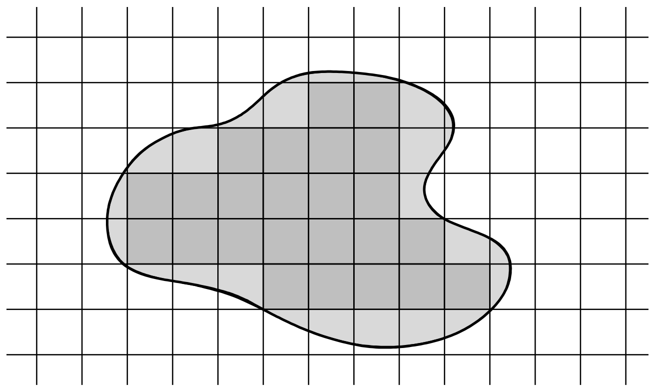
$$\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d \qquad {\scriptstyle (d \geqslant 1)}$$

peut être représenté — d'une manière qui n'est en général pas unique en dimension $d \geqslant 2$ — comme réunion dénombrable de cubes fermés presque disjoints.

Démonstration. Ainsi, nous devons construire une collection dénombrable $\mathscr{Q}$ de cubes fermés $Q \subset \mathscr{O}$ dont les intérieurs $\mathrm{Int}\, Q$ sont deux à deux disjoints et qui remplissent :

$$\mathscr{O} = \bigcup_{Q \in \mathscr{Q}} Q.$$

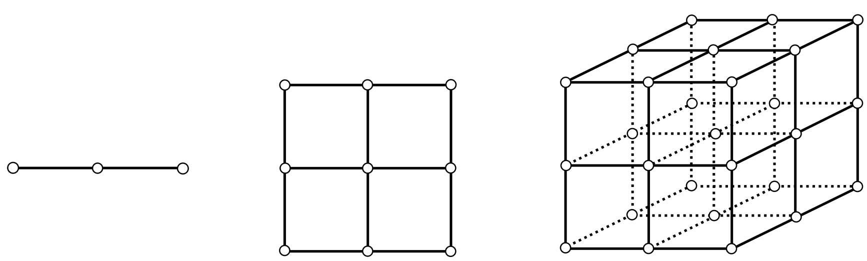
À la première étape, nous formons la grille de $\mathbb{R}^d$ constituée de tous les cubes fermés de côtés constants égaux à 1 et dont les sommets se trouvent aux points entiers du réseau $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$.



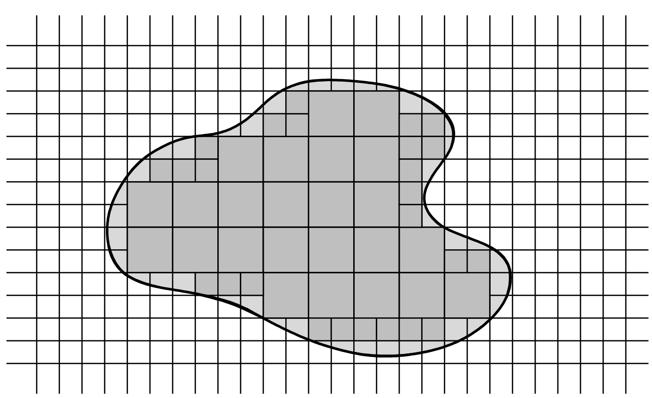
Nous acceptons, ou nous plaçons en attente, ou nous rejetons, les cubes fermés Q de cette grille initiale en appliquant la règle suivante :

- lorsque Q est entièrement contenu dans $\mathscr{O}$, nous l'acceptons ;
- lorsque Q intersecte à la fois l'ouvert $\mathscr{O}$ et son complémentaire $\mathbb{R}^d \backslash \mathscr{O}$, nous le plaçons en attente ;
- lorsque Q est entièrement contenu dans le complémentaire $\mathbb{R}^d \backslash \mathscr{O}$, nous le rejetons.

À la seconde étape, nous bissectons le réseau en remplaçant $\mathbb{Z}^d$ par $\left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right)^d$.



Cette opération fragmente chaque cube initial en 2^d cubes fermés presque disjoints.



Ensuite, nous répétons la même règle d'acceptation, de mise en attente, ou de rejet des nouveaux cubes de longueur moitié qui ne sont pas contenus dans ceux qui ont déjà été acceptés.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, nous considérons le réseau $\left(\frac{1}{2^k}\mathbb{Z}\right)^d$ obtenu par divisions dyadiques successives, et nous itérons la procédure.

Au final, nous obtenons une collection infinie dénombrable de cubes fermés qui sont mutuellement presque disjoints.

Nous afirmons alors que la réunion de tous ces cubes remplit $\mathscr{O}$.

En effet, étant donné un point quelconque $x \in \mathscr{O}$, puisqu'une boule ouverte assez petite centrée en x reste contenue dans l'ouvert $\mathscr{O}$, on peut trouver un cube fermé de côté $\frac{1}{2^k}$ qui est entièrement contenu dans une telle boule, donc dans $\mathscr{O}$. Par construction, ou bien un tel cube doit être accepté à la k-ème étape, ou (mieux encore), il est contenu dans un cube de côté $\frac{1}{2^j} > \frac{1}{2^k}$ qui a été accepté à une j-ème étape antérieure. $\square$

À nouveau, lorsqu'on peut exhauster $\mathscr{O} = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ avec des cubes ou des rectangles R_j qui sont presque disjoints, il est tout à fait raisonnable d'assigner à $\mathscr{O}$ la mesure :

$$\sum_{j=1}^{\infty} |R_j|.$$

Oui, cela est naturel, car le volume des bords des rectangles est manifestement nul, et l'intersection entre les rectangles ne consiste qu'en certaines parties de tels bords.

Toutefois, nous devons observer qu'une difficulté logique demeure : les décompositions en rectangles n'ont en général rien d'unique, et donc il n'est pas immédiatement clair que la somme $\sum_{j=1}^{\infty} |R_j|$ est indépendante des décompositions !

Aussi dans $\mathbb{R}^d$ en dimension $d \geqslant 2$, la notion d'aire, de volume, d'hypervolume, est-elle plus subtile qu'il n'y paraît, même seulement pour ce qui concerne les sous-ensembles ouverts.

En fait, la théorie générale que nous allons développer dans ce chapitre va effectivement nous offrir un concept du volume qui est cohérent avec les décompositions d'ouverts en réunions dénombrables de rectangles, heureusement !

4. Concept de mesure extérieure

La notion de mesure extérieure est le premier concept important dont on a besoin pour développer une *Théorie de la mesure*. Nous commençons par une définition, suivie d'une liste de propriétés fondamentales. Pour donner l'idée en mots, la *mesure extérieure* $m^*(\cdot)$ assigne à *tout* sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$ une première notion de taille supérieure minimale, laquelle sera notée :

$$m^*(E).$$

De nombreux exemples nous convaincrons que cette notion coïncide avec ce que balbutiait notre intuition jusqu'à présent.

Mais attention ! *Mesure extérieure* n'est pas *Mesure !* Car la mesure extérieure va échouer à satisfaire la propriété très désirable d'additivité lorsqu'on prend des réunions finies d'ensembles disjoints. Ce ne sera que dans la section suivante que nous pourrons remédier à ce problème central, lorsque nous discuterons en détail d'un autre concept-clé de la théorie, celui d'*ensemble mesurable*.

Comme son nom l'indique, la *mesure extérieure* tente de décrire le volume d'un ensemble E en l'approximant depuis l'extérieur. Plus précisément, E est recouvert par des cubes de plus en plus fins, avec de moins en moins d'intersections entre eux, et on imagine que le « *volume extérieur* » de E devrait devenir de plus en plus proche de la somme des volumes des cubes couvrants.

Définition 4.1. [Borel, Lebesgue] Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble quelconque, la *mesure extérieure* de E est le nombre réel :

$$m^*(E) \,=\, \inf \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big|,$$

où l'infimum est pris sur tous les recouvrements *infinis dénombrables* :

$$E \,\subset\, \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,$$

par des cubes fermés Q_j, pas forcément disjoints. En fait, ce nombre positif $m^*(E)$ n'est pas toujours fini, il peut être infini, et c'est pourquoi on admet en général qu'il appartienne à $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$:

$$0 \,\leqslant\, m^*(E) \,\leqslant\, \infty.$$

Tout d'abord, contrairement au concept de *mesure extérieure de Jordan* m_J^* qui se limitait à des recouvrement *finis* $E \subset \bigcup_{j=1}^{J} Q_j$, il importe au plus haut point de faire observer ici que la définition admet des recouvrements *infinis dénombrables*. La différence entre les deux théories a déjà été signalée dans un chapitre qui précède, mais il ne sera pas inutile de revoir les contrastes flagrants dans l'Exercice 11.

Par ailleurs, on peut modifier la définition en remplaçant les cubes couvrants par des rectangles couvrants, voire même par des boules couvrantes. Le cas des rectangles s'avère donner une théorie en tout point équivalente (Exercice 12). Le cas des boules aussi, mais l'équivalence est plus subtile.

C'est donc avec cette première définition que la théorie amorce son décollage.

Lemme 4.2. [Monotonie] *Si* $E_1 \subset E_2$*, alors* $m^*\big(E_1\big) \leqslant m^*\big(E_2\big)$.

Démonstration. Tout recouvrement de E_2 est un recouvrement de E_1, donc quand on prend l'infimum sur les recouvrements de E_1, comme il y a *a priori* plus de recouvrements que ceux qui proviennent de E_2, l'infimum est en général inférieur. □

Nous commençons l'étude en fournissant de nombreux exemples d'ensembles dont la mesure extérieure peut être aisément calculée, et nous vérifions que les résultats obtenus correspondent à notre intuition de la longueur, de l'aire, du volume.

Lemme 4.3. *La mesure extérieure d'un point vaut* 0.

Démonstration. En effet, un point est un cube fermé de côté 0, qui se recouvre lui-même, et qui est de volume 0. □

Bien entendu aussi, la mesure extérieure de l'ensemble vide $\emptyset$ vaut aussi 0.

Lemme 4.4. *La mesure extérieure* $m^*(Q)$ *d'un cube* fermé $Q \subset \mathbb{R}^d$ *est égale à son volume* $|Q|$.

Démonstration. En effet, puisque Q se recouvre lui-même, on doit avoir :

$$m^*(Q) \leqslant |Q|.$$

Pour ce qui est de l'inégalité inverse, considérons un recouvrement dénombrable arbitraire :

$$Q \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$$

par des cubes fermés Q_j. Il suffit de montrer que :

$$|Q| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|,$$

puisqu'alors en prenant l'infimum comme le stipule la Définition 4.1, on obtiendra bien l'inégalité inverse :

$$|Q| \leqslant m^*(Q).$$

Fixons $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et choisissons, pour tout $j \geqslant 1$, un cube ouvert :

$$S_j \supset Q_j,$$

suffisamment resserré autour de Q_j pour que :

$$\big|S_j\big| \leqslant (1+\varepsilon)\,\big|Q_j\big|,$$

ce qui est possible (exercice). Mais alors Q est recouvert par la réunion infinie dénombrable des *ouverts* S_j, réunion dont on peut extraire une famille couvrante finie, grâce au Lemme de Heine-Borel-Lebesgue, ce qui, après une renumérotation éventuelle des indices, nous donne :

$$Q \subset \bigcup_{j=1}^{J} S_j.$$

Alors un lemme élémentaire du chapitre sur la mesure de Jordan assure que :

$$|Q| \leqslant \sum_{j=1}^{J} \big|S_j\big|,$$

inégalité que nous pouvons instantanément enchaîner :

$$\begin{aligned}\big|Q\big| &\leqslant (1+\varepsilon) \sum_{j=1}^{N} \big|Q_j\big| \\ &\leqslant (1+\varepsilon) \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big|.\end{aligned}$$

Mais puisque $\varepsilon > 0$ était arbitrairement petit, nous atteignons l'inégalité désirée. □

Lemme 4.5. *La mesure extérieure $m^*(Q)$ d'un cube* ouvert $Q \subset \mathbb{R}^d$ *est aussi égale à son volume $|Q|$.*

Démonstration. Puisque $Q \subset \overline{Q}$ est couvert par son adhérence, et puisque :

$$\big|\overline{Q}\big| = |Q|,$$

on voit immédiatement que :

$$m^*(Q) \leqslant |Q|.$$

Pour ce qui est de l'inégalité inverse, si $Q_0 \subset Q$ est un cube fermé contenu dans Q, le lemme qui précède a déjà fait voir que :

$$\big|Q_0\big| = m^*(Q_0),$$

tandis que le Lemme 4.2 de monotonie donne :

$$m^*(Q_0) \leqslant m^*(Q),$$

c'est-à-dire :

$$\big|Q_0\big| \leqslant m^*(Q).$$

Mais comme on peut choisir Q_0 remplissant de plus en plus Q avec un volume qui tend vers celui de Q, on obtient bien l'inégalité inverse voulue :

$$|Q| \leqslant m^*(Q). \qquad \square$$

Lemme 4.6. *La mesure extérieure $m^*(R)$ d'un rectangle $R \subset \mathbb{R}^d$, ouvert ou fermé, est tout aussi égale à son volume $|R|$.*

Démonstration. Traitons seulement le cas d'un rectangle fermé. En augmentant très légèrement la taille d'une famille dénombrable de cubes fermés qui recouvrent R pour en faire des cubes ouverts, et en extrayant un recouvrement fini comme dans le Lemme 4.4, on démontre tout d'abord (exercice de vérification) que :

$$|R| \leqslant m^*(R).$$

Ensuite, pour ce qui est de l'inégalité inverse, avec $k \geqslant 1$ entier, formons la grille $\left(\frac{1}{k}\,\mathbb{Z}\right)^d \subset \mathbb{R}^d$ constituée de cubes fermés presque disjoints de côtés tous égaux à $\frac{1}{k}$. Si donc nous introduisons alors les deux ensembles :

$$\mathscr{Q} := \Big\{\text{cubes fermés de côté } \tfrac{1}{k} \text{ entièrement contenus dans } R\Big\},$$

$$\mathscr{Q}' := \Big\{\text{cubes fermés de côté } \tfrac{1}{k} \text{ rencontrant } R \text{ et } \mathbb{R}^d \backslash R\Big\},$$

il est logiquement clair que :

$$R \subset \bigcup_{Q \in (\mathscr{Q} \cup \mathscr{Q}')} Q.$$

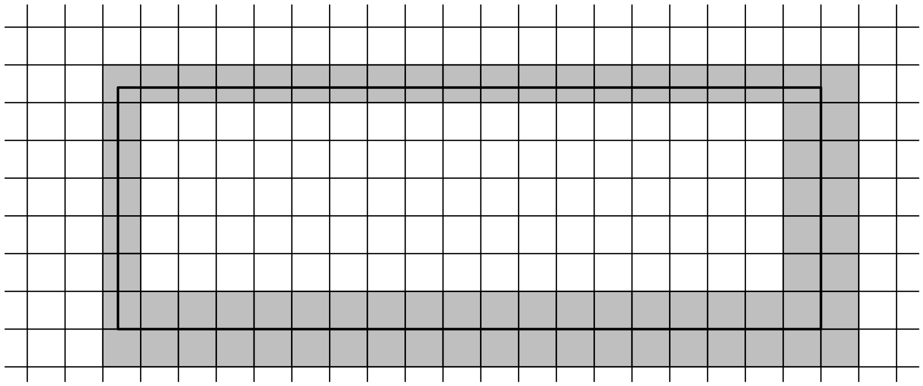
Mais comme :

$$\bigcup_{Q \in \mathscr{Q}} Q \subset R,$$

un argument simple (exercice) montre que :

$$\sum_{Q \in \mathscr{Q}} |Q| \leqslant |R|.$$

Assertion 4.7. *Il existe une constante $C_{R,d} > 0$ qui dépend du rectangle et de la dimension $d \geqslant 1$ telle que le nombre de cubes fermés de côté $\frac{1}{k}$ rencontrant R et $\mathbb{R}^d \backslash R$ est borné par $C_{d,R} \cdot k^{d-1}$.*



Autrement dit, le nombre de cubes rencontrant le rectangle et son complémentaire croît à la même puissance $(\cdot)^{d-1}$ que le *périmètre* du rectangle.

Démonstration. En effet, on vérifie (exercice) que ces cubes sont tous contenus dans l'ensemble de type anneau :

$$\Big\{x \in \mathbb{R}^d \colon \ \mathsf{dist}(x, Q) \leqslant \tfrac{1}{k}\Big\} \Big\backslash \Big\{x \in Q \colon \ \mathsf{dist}(x, \mathbb{R}^d \backslash Q) \geqslant \tfrac{1}{k}\Big\},$$

et que cet ensemble, qui n'est autre qu'un épaississement du bord du rectangle de dimension $d-1$, est effectivement recouvert par un nombre de cubes $\leqslant C_{d,R} \cdot k^{d-1}$. □

Comme chaque cube de côté $\frac{1}{k}$ est de volume $\frac{1}{k^d}$, on déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{Q \in \mathscr{Q}'} |Q| &= \frac{1}{k^d}\, \mathrm{O}\big(k^{d-1}\big) \\ &= \mathrm{O}\big(\tfrac{1}{k}\big) \end{aligned}$$

Donc au total :

$$\sum_{Q \in (\mathscr{Q} \cup \mathscr{Q}')} |Q| \leqslant |R| + \mathrm{O}\big(\tfrac{1}{k}\big),$$

et en laissant $k \to \infty$, on obtient bien l'inégalité inverse $m^*(R) \leqslant |R|$. □

Lemme 4.8. *La mesure extérieure de $\mathbb{R}^d$ est infinie :*

$$m^*(\mathbb{R}^d) = \infty.$$

Démonstration. En effet, tout recouvrement de $\mathbb{R}^d$ doit constituer aussi un recouvrement des cubes $[-R,\, R]^d$ pour $R > 0$ arbitrairement grand, et alors par monotonie de $m^*(\cdot)$:

$$\begin{aligned} m^*(\mathbb{R}^d) &\geqslant m^*\big([-R,\, R]\big) \\ &= \big(2\,R\big)^d \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} \infty, \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Lemme 4.9. *L'ensemble triadique standard de Cantor $C \subset [0,1]$ a pour mesure extérieure* 0.

Démonstration. En effet, par construction $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ où chaque C_k est réunion de 2^k intervalles fermés d'égale longueur $\frac{1}{3^k}$ que l'on peut prendre comme recouvrement, d'où :

$$m^*(C) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui conclut. □

5. Propriétés de la mesure extérieure

Les exemples qui précèdent ont quelque peu étayé l'intuition primitive que l'on a pu se former intérieurement concernant la mesure extérieure. Ici, nous engageons une étude des propriétés générales de la mesure extérieure dont nous aurons besoin dans ce qui suit.

Tout d'abord, reformulons précisément ce que dit la Définition 4.1 : *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un recouvrement dénombrable :*

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$$

par des cubes fermés Q_j *dont la somme des volumes est à peine supérieure à* $m^*(E)$ *:*

$$m^*(E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{m^*(Q_j)}_{=|Q_j|} \leqslant m^*(E) + \varepsilon.$$

Proposition 5.1. [Sous-additivité dénombrable] *Si un ensemble* $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ *est réunion dénombrable quelconque d'ensembles* $E_j \subset \mathbb{R}^d$, *alors :*

$$m^*(E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m^*\big(E_j\big).$$

Plus spécialement, lorsque la réunion $E = \bigcup_{j=1}^{J} E_j$ *est finie, on a de même :*

$$m^*(E) \leqslant \sum_{j=1}^{J} m^*\big(E_j\big).$$

Démonstration. Bien entendu, on peut supposer que pour tout $j \geqslant 1$:

$$m^*\big(E_j\big) < \infty,$$

sinon l'inégalité à démontrer est trivialement satisfaite. Par définition, pour tout $j \geqslant 1$ et tout $\varepsilon_j > 0$ de la forme :

$$\varepsilon_j := \frac{\varepsilon}{2^j},$$

il existe un recouvrement de E_j :

$$E_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{j,k},$$

par des cubes fermés $Q_{j,1}, Q_{j,2}, \dots$ dont la somme totale des volumes satisfait :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big|Q_{j,k}\big| \leqslant m^*\big(E_j\big) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Alors E est contenu dans la réunion double :

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{j,k},$$

et l'on peut alors majorer :

$$
\begin{aligned}
m^*(E) &\leqslant m^*\bigg(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{j,k}\bigg) \\
\text{[Ces cubes se recouvrent eux-mêmes !]} \qquad &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \big|Q_{j,k}\big| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \bigg(m^*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\bigg) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} m^*\big(E_j\big) + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Comme le choix de $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit est libre, cette inégalité conclut. Le cas d'une réunion finie, plus simple, s'ensuit. □

Proposition 5.2. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble quelconque, alors :*

$$
m^*(E) = \inf_{\substack{\mathscr{O}\supset E \\ \mathscr{O}\text{ ouvert}}} m^*(\mathscr{O}),
$$

où l'infimum est pris sur tous les ensembles ouverts $\mathscr{O}$ qui contiennent E.

Démonstration. La propriété de monotonie de la mesure extérieure appliquée à toutes les inclusions $E \subset \mathscr{O}$ donne :

$$
m^*(E) \leqslant \inf_{\substack{\mathscr{O}\supset E \\ \mathscr{O}\text{ ouvert}}} m^*(\mathscr{O}).
$$

Pour ce qui est de l'inclusion inverse, avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, choisissons des cubes fermés Q_j tels que :

$$
E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,
$$

et tels que :

$$
\sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big| \leqslant m^*(E) + \frac{\varepsilon}{2}.
$$

Pour tout $j \geqslant 1$, soit aussi $Q_j^0 \supset Q_j$ un cube ouvert contenant Q_j tel que :

$$
\big|Q_j^0\big| \leqslant \big|Q_j\big| + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.
$$

Alors la réunion infinie :

$$
\mathscr{O} := \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^0
$$

constitue un ouvert qui contient E, et grâce à la Proposition 5.1 de sous-additivité dénombrable qui précède, on peut estimer sa mesure extérieure :

$$\begin{aligned} m^*(\mathscr{O}) &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m^*\big(Q_j^0\big) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j^0\big| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left(\big|Q_j\big| + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant m^*(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme le choix de $\varepsilon > 0$ est libre, on obtient bien l'inégalité inverse $\inf\, m^*(\mathscr{O}) \leqslant m^*(E)$. □

Dans ses hypothèses, l'énoncé suivant impose une restriction qui n'est pas anodine.

Proposition 5.3. *Étant donné deux sous-ensembles $E_1 \subset \mathbb{R}^d$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^d$ situés à distance* strictement positive *l'un de l'autre :*

$$\mathsf{dist}\big(E_1, E_2\big) \,>\, 0,$$

la mesure extérieure de leur réunion $E := E_1 \cup E_2$ est la somme de leurs mesures extérieures :

$$m^*(E) \,=\, m^*\big(E_1\big) + m^*\big(E_2\big).$$

En effet, on peut trouver des exemples d'ensembles disjoints E_1 et E_2 n'étant pas à distance strictement positive l'un de l'autre mais qui violent cette égalité naturelle. Heureusement, nous verrons dans peu de temps que cette égalité naturelle sera satisfaite, sans l'hypothèse $\mathsf{dist}\big(E_1, E_2\big) > 0$, par les sous-ensembles disjoints $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^d$ qui seront catégorisés comme *mesurables*.

Démonstration. En tout cas, comme la Proposition 5.1 de sous-additivité finie donne d'abord sans effort :

$$m^*(E) \,\leqslant\, m^*\big(E_1\big) + m^*\big(E_2\big),$$

il s'agit essentiellement de raisonner pour établir l'inégalité inverse.

À cette fin, prenons d'abord $\delta > 0$ tel que :

$$\mathsf{dist}\big(E_1, E_2) \geqslant \delta > 0.$$

Ensuite, choisissons un recouvrement de E :

$$E \,\subset\, \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$$

par des cubes fermés qui satisfait :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big| \,\leqslant\, m^*(E) + \varepsilon.$$

Quitte à subdiviser un certain nombre de fois chacun des cubes Q_j, on peut supposer que leurs diamètres sont tous inférieurs à $\delta/3$. Une fois cette opération effectuée, on est certain que *chaque Q_j ne peut intersecter qu'un seul des deux sous-ensembles E_1 et E_2 à la fois*.

Si donc nous décidons d'attribuer les noms J_1 et J_2 aux indices $j \geqslant 1$ pour lesquels Q_j intersecte E_1 et E_2, respectivement et exclusivement, alors $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ est vide, ce qui montre que nous avons séparé les recouvrements :

$$\begin{aligned} E_1 &\subset \bigcup_{j \in J_1} Q_j, \\ E_2 &\subset \bigcup_{j \in J_2} Q_j. \end{aligned}$$

Par conséquent, la monotonie de $m^*(\cdot)$ donne :

$$\begin{aligned} m^*\big(E_1\big) + m^*\big(E_2\big) &\leqslant \sum_{j \in J_1} \big|Q_j\big| + \sum_{j \in J_2} \big|Q_j\big| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big| \\ &\leqslant m^*(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ peut être rendu négligeable, c'est bien l'inégalité inverse voulue que nous atteignons ainsi. □

Proposition 5.4. *Si un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est réunion dénombrable de cubes fermés Q_j presque disjoints :*

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,$$

alors sa mesure extérieure est égale à la somme exacte de leurs volumes :

$$m^*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big|,$$

Démonstration. Pour tout $j \geqslant 1$, soit $Q_j' \subset Q_j$ un cube fermé strictement contenu dans l'intérieur de Q_j et qui remplit presque Q_j au sens où :

$$\big|Q_j\big| \leqslant \big|Q_j'\big| + \frac{\varepsilon}{2^j},$$

où comme à l'accoutumée, $\varepsilon > 0$ est petit, fixé pour l'instant, mais destiné à redevenir libre à la fin des arguments. Alors pour tout entier quelconque $J \geqslant 1$ fixé lui aussi, les J cubes fermés :

$$Q_1', \ Q_2', \ \ldots, \ Q_J',$$

sont manifestement disjoints deux à deux, donc à distance finie l'un de l'autre, ce qui permet d'appliquer plusieurs fois la proposition qui précède pour obtenir :

$$\begin{aligned} m^*\bigg(\bigcup_{j=1}^{J} Q_j'\bigg) &= \sum_{j=1}^{J} \big|Q_j'\big| \\ &= \sum_{j=1}^{J} m^*\big(Q_j'\big) \\ &\geqslant \sum_{j=1}^{J} \bigg(\big|Q_j\big| - \frac{\varepsilon}{2^j}\bigg). \end{aligned}$$

Mais comme on a par construction :

$$E \supset \bigcup_{j=1}^{J} Q_j',$$

nous déduisons par monotonie de $m^*(\cdot)$ que pour tout entier $J \geqslant 1$ fixé :

$$\begin{aligned} m^*(E) &\geqslant \sum_{j=1}^{J} \bigg(\big|Q_j\big| - \frac{\varepsilon}{2^j}\bigg). \\ &\geqslant \sum_{j=1}^{J} \big|Q_j\big| - \varepsilon. \end{aligned}$$

Maintenant, restituons à l'entier J sa liberté, et faisons-le tendre vers l'infini pour obtenir, après inversion de l'inégalité :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big| \leqslant m^*(E) + \varepsilon.$$

Mais comme $\varepsilon > 0$ s'apprêtait à s'évader (s'évanouir) lui aussi, nous obtenons au final :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big| \leqslant m^*(E).$$

Enfin, qu'en est-il de l'inégalité inverse ? Par sous-additivité dénombrable de $m^*(\cdot)$, elle découle trivialement de l'inclusion $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, ce qui conclut élégamment ce joyeux périple de croisiériste dans la contrée magique des mathématiques libres ! □

Cette dernière propriété générale dit donc que lorsqu'un ensemble peut être décomposé comme réunion dénombrable presque disjointe de cubes fermés, sa mesure extérieure vaut tout simplement la somme (infinie) des volumes des cubes en question. En particulier, si nous nous souvenons que le Théorème 3.2 représentait tout ouvert comme réunion presque disjointe de cubes fermés, nous voyons que la mesure extérieure d'un ouvert correspond bien à ce que nous avions deviné intuitivement. Qui plus est, la proposition que nous venons de démontrer assure (exercice mental) que pour toute représentation d'un ouvert $\mathscr{O} = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ comme réunion dénombrable de cubes fermés presque disjoints, la somme infinie $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$ de leurs volumes est un nombre fixe, parfaitement indépendant de la décomposition de l'ouvert — puisque, solution de l'exercice, cette quantité est égale à $m^*(\mathscr{O})$!

Au stade intermédiaire que nous venons d'atteindre, il est donc naturel d'attendre et d'espérer que la Théorie de la mesure va déclarer que tout ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable, de mesure égale à sa mesure extérieure $m^*(\mathscr{O})$.

On peut faire voir que le volume des sous-ensembles géométriques classiques de $\mathbb{R}^d$ que l'on calcule par des méthodes d'intégration élémentaire, parfois « à la physicienne » en dimensions $d = 1, 2, 3$, coïncide avec leur mesure extérieure, au sens de la théorie présente qui est en cours de développement. Par exemple, on peut vérifier que la mesure extérieure d'une boule (de pétanque !) ouverte ou fermée est égale à son volume — heureusement ! ! ! Toutefois, pour se convaincre réellement de la cohérence entre ces notions, il vaut mieux attendre d'avoir complètement développé tous les outils de la *Théorie de l'intégration*, ce dont le chapitre suivant se chargera.

Attention ! Redisons que malgré les deux propositions qui précèdent, lorsqu'un ensemble $E = E_1 \cup E_2$ avec $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ est réunion disjointe de deux sous-ensembles $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^d$, on ne peut en général *pas* conclure que la mesure extérieure soit additive :

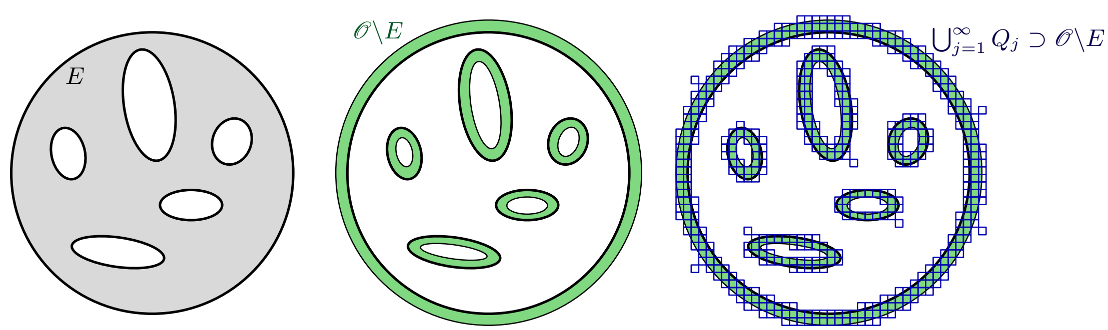
$$m^*\big(E_1 \cup E_2\big) \overset{??}{=} m^*\big(E_1\big) + m^*\big(E_2\big).$$

Cette propriété extrêmement désirable est en effet mise en défaut par certains ensembles hautement irréguliers ou pathologiques, mais elle sera satisfaite par les sous-ensembles qui sont mesurables au sens que nous allons maintenant expliciter.

6. Ensembles mesurables et mesure de Lebesgue

La notion de mesurabilité isole une certaine collection de sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ pour lesquels la mesure extérieure satisfait toutes les propriétés désirables, notamment l'additivité finie ou infinie dénombrable pour les réunions disjointes d'ensembles mesurables.

Il existe plusieurs manières théoriquement équivalentes de définir la notion de mesurabilité au sens de Borel, de Lebesgue, ou de Carathéodory. Vraisemblablement, celle qui est la plus intuitive, et donc la meilleure du point de vue de l'exigence de compréhension mathématique, est la suivante. Nous réalisons volontairement une figure un peu complexe : l'ensemble E est un disque percé de trous ressemblant quelque peu à des galaxies ; l'ouvert plus gros $\mathscr{O} \supset E$ déborde donc du disque et rentre légèrement dans les galaxies ; au milieu, seul $\mathscr{O} \backslash E$ est dessiné, pas $\mathscr{O}$. Enfin, la troisième figure montre $\mathscr{O} \backslash E$ recouvert par des cubes.



Définition 6.1. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est dit *mesurable au sens de Lebesgue*, ou tout simplement *mesurable*, lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert :

$$\mathscr{O} \supset E$$

qui le contient en étant suffisamment resserré autour de lui pour que la mesure extérieure de l'anneau d'erreur $\mathscr{O} \backslash E$ satisfasse :

$$m^*\big(\mathscr{O} \backslash E\big) \leqslant \varepsilon.$$

Immédiatement après cette définition, nous obtenons (exercice mental) ce que nous avons anticipé :

Proposition 6.2. *Tout sous-ensemble ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable.*

Démonstration. En effet, $\mathscr{O} \supset \mathscr{O}$ et $m^*(\mathscr{O} \backslash \mathscr{O}) = m^*(\emptyset) = 0$! □

Mais ceci ne suffit pas encore pour réellement comprendre en quoi cette définition est adéquate. À cet effet, si nous écrivons :

$$\mathscr{O} = E \cup \big(\mathscr{O} \backslash E\big),$$

les deux inclusions évidentes :

$$E \subset \mathscr{O} \subset E \cup \big(\mathscr{O} \backslash E\big)$$

associées au Lemme 4.2 de monotonie et à la sous-additivité de $m^*(\cdot)$ donnent :

$$m^*(E) \leqslant m^*(\mathscr{O}) \leqslant m^*(E) + \underbrace{m^*\big(\mathscr{O} \backslash E\big)}_{\substack{\text{ce dont on parle} \\ \text{dans la définition}}}.$$

Alors dans ce jeu d'inégalités, l'écart exprimé par la *première* inégalité :

$$m^*(E) \underbrace{\leqslant}_{\substack{\longleftarrow \\ =}} m^*(\mathscr{O}) \leqslant m^*(E) + m^*\big(\mathscr{O} \backslash E\big).$$

tend en fait vers une égalité, grâce à la Proposition 5.2 stipulant que pour *tout* sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$:

$$m^*(E) = \inf_{\substack{\mathscr{O} \supset E \\ \mathscr{O} \text{ ouvert}}} m^*(\mathscr{O}).$$

Toutefois, l'écart exprimé par la *deuxième* inégalité peut fort bien être uniformément strictement positif. *Donc en profondeur, la définition de mesurabilité d'un ensemble demande qu'on puisse l'approximer par des ouverts concrets qui soient suffisamment proches de lui pour que l'écart rémanent devienne arbitrairement petit en termes de la mesure extérieure :*

$$m^*(E) \approx m^*(\mathscr{O}) \leqslant m^*(E) + \underbrace{m^*\big(\mathscr{O} \backslash E\big)}_{\substack{\text{peut aussi} \\ \text{être rendu} \\ \text{arbitrairement petit}}}.$$

Définition 6.3. Si un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable, sa *mesure de Lebesgue*, ou simplement sa *mesure*, est le nombre réel positif éventuellement infini :

$$m(E) := m^*(E).$$

Notre objectif présent maintenant est de rassembler diverses propriétés générales des ensembles mesurables. En particulier, nous allons montrer que la collection des ensembles mesurables se comporte d'une manière parfaitement agréable et sympathique vis-à-vis de toutes les opérations standard de la *Théorie des ensembles :* les réunions finies ou dénombrables, les intersections finies ou dénombrables, les passages au complémentaires, les prises de différence symétrique.

Par exemple, si deux ensembles mesurables sont inclus l'un dans l'autre :

$$E_1 \subset E_2,$$

alors leurs mesures respectives safisfont l'inégalité naturelle :

$$m\big(E_1\big) \leqslant m\big(E_2\big)$$

simplement parce que $m = m^*$ sur les ensembles mesurables, et parce que m^* satisfait bien :

$$m^*\big(E_1\big) \leqslant m^*\big(E_2\big)!$$

Proposition 6.4. *Tout ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure extérieure nulle $m^*(E) = 0$ est mesurable, de mesure nulle :*

$$m(E) = m^*(E) = 0.$$

En particulier, tout sous-ensemble $F \subset E$ d'un ensemble de mesure nulle est mesurable.

Démonstration. Grâce à la Proposition 5.2, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathscr{O} \supset E$ tel que $m^*(\mathscr{O}) \leqslant \varepsilon$. Mais puisque :

$$\mathscr{O}\backslash E \subset \mathscr{O},$$

la monotonie de $m^*(\cdot)$ assure que l'on a aussi $m^*(\mathscr{O}\backslash E) \leqslant \varepsilon$, ce qui conclut. □

Comme conséquence de cette propriété, l'ensemble triadique standard de Cantor est mesurable de mesure nulle, puisque nous savons déjà que sa mesure extérieure vaut 0.

Théorème 6.5. *Toute réunion finie ou infinie dénombrable :*

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

d'ensembles mesurables $E_j \subset \mathbb{R}^d$ est encore mesurable, et l'on a :

$$m(E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m\big(E_j\big).$$

Observons que le cas des réunions finies est un cas particulier des réunions infinies dénombrables, en prenant les E_j constants égaux à E_1 à partir d'un certain rang.

Démonstration. Par hypothèse, pour tout entier $j \geqslant 1$, et tout $\varepsilon_j > 0$ de la forme $\varepsilon_j := \frac{\varepsilon}{2^j}$ avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver un ouvert $\mathscr{O}_j \supset E_j$ tel que :

$$m^*\big(\mathscr{O}_j\backslash E_j\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Alors la réunion complète de tous ces ouverts :

$$\mathscr{O} := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathscr{O}_j$$

est un ouvert contenant $E \subset \mathscr{O}$ qui satisfait de plus :

$$\mathscr{O}\backslash E \,\subset\, \bigcup_{j=1}^{\infty} \big(\mathscr{O}_j\backslash E_j\big),$$

puis grâce à la monotonie et à la sous-additivité de $m^*(\cdot)$, nous déduisons :

$$\begin{aligned} m^*\big(\mathscr{O}\backslash E\big) \,&\leqslant\, \sum_{j=1}^{\infty} m^*\big(\mathscr{O}_j\backslash E_j\big) \\ &\leqslant\, \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui conclut. L'inégalité sur les mesures provient simplement des définitions :

$$m(E) := m^*(E), \qquad\qquad m\big(E_j\big) := m^*\big(E_j\big) \qquad\qquad (j \geqslant 1)$$

et de la sous-additivité dénombrable de la mesure extérieure (Proposition 5.1). $\square$

Théorème 6.6. *Tout sous-ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable.*

Démonstration. Tout d'abord, nous affirmons qu'il suffit d'établir cela pour des fermés $F \subset \mathbb{R}^d$ qui sont de plus *bornés*, donc compacts. En effet, si $\overline{B}_k$ désigne la boule fermée centrée à l'origine de rayon un entier $k \geqslant 1$ quelconque, la réunion de ces $\overline{B}_k$ remplit l'espace $\mathbb{R}^d$, d'où :

$$F \,=\, \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{F \cap \overline{B}_k}_{\substack{\text{fermé} \\ \text{borné}}}.$$

Par conséquent, si l'on sait que les compacts $F \cap \overline{B}_k$ sont mesurables, le théorème qui précède donnera instantanément que F est aussi mesurable.

Supposons donc le fermé $F \subset \mathbb{R}^d$ compact. Puisqu'il est contenu dans une boule fermée de rayon assez grand, on a $m^*(F) < \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. D'après la Proposition 5.2, on peut sélectionner un ouvert $\mathscr{O} \supset F$ tel que :

$$m^*(\mathscr{O}) \,\leqslant\, m^*(F) + \varepsilon.$$

Mais puisque F est fermé, la différence :

$$\mathscr{O}\backslash F = \mathscr{O} \cap \big(\mathbb{R}^d\backslash F\big)$$

est un ouvert, et le Théorème 3.2 nous permet de le représenter comme une réunion dénombrable de cubes fermés presque disjoints :

$$\mathscr{O}\backslash F \,=\, \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j.$$

Maintenant, pour un entier $J \geqslant 1$ fixé, la réunion finie :

$$K := \bigcup_{j=1}^{J} Q_j$$

est un compact. Comme ce compact est contenu dans $\mathscr{O}\backslash F$, il est d'intersection vide avec F :

$$K \cap F = \emptyset.$$

Proposition 6.7. *Si un sous-ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}^d$ et un sous-ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^d$ sont disjoints :*

$$F \cap K = \emptyset,$$

alors ils sont à distance strictement positive l'un de l'autre :

$$\sup_{x \in F,\ y \in K} |x - y| =: \mathsf{dist}\,(F,\,K) > 0.$$

Démonstration. Raisonnons par contradiction en supposant par l'absurde qu'il existe une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de points $x_n \in F$ ainsi qu'une suite $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de points $y_n \in K$ telles que :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \gg 1 \quad \Big(n \geqslant N \implies |x_n - y_n| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Comme K est compact, après extraction d'une sous-suite, toujours notée de la même manière, on peut supposer que les y_n convergent vers un certain point $y_\infty \in K$. Avec le même $\varepsilon > 0$, quitte à augmenter N_ε, on a donc simultanément :

$$n \geqslant N_\varepsilon \implies |y_n - y_\infty| \leqslant \varepsilon.$$

Maintenant, une inégalité triangulaire à quatre couples montre que pour $n_1, n_2 \geqslant N_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
\big|x_{n_1} - x_{n_2}\big| &= \big|x_{n_1} - y_{n_1} + y_{n_1} - y_\infty + y_\infty - y_{n_2} + y_{n_2} - x_{n_2}\big| \\
&\leqslant |x_{n_1} - y_{n_1}| + |y_{n_1} - y_\infty| + |y_\infty - y_{n_2}| + |y_{n_2} - x_{n_2}| \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui montre que la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy dans le fermé $F \subset \mathbb{R}^d$, donc converge vers un certain point $x_\infty \in F$.

Par continuité de la norme $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}^d$:

$$0 = \lim_{n \to \infty} |x_n - y_n| = |x_\infty - y_\infty|,$$

donc on a trouvé un point commun $x_\infty = y_\infty \in F \cap K$, ce qui contredit avec une insolence fort répréhensible l'hypothèse $\mathsf{dist}\,(F, K) > 0$! $\square$

Ensuite, puisque $\mathscr{O} \supset K \cup F$, la monotonie de la mesure extérieure m^* et l'*additivité* de m^* sur les paires d'ensembles situés à distance strictement positive obtenue dans la Proposition 5.3 permettent d'obtenir une minoration cruciale :

$$\begin{aligned}
m^*(\mathscr{O}) &\geqslant m^*(F \cup K) \\
&= m^*(F) + m^*(K) \\
&= m^*(F) + m^*\bigg(\bigcup_{j=1}^{J} Q_j\bigg) \\
\text{[Proposition 5.4]} \qquad &= m^*(F) + \sum_{j=1}^{J} m^*\big(Q_j\big),
\end{aligned}$$

que nous pouvons renverser de manière équivalente en la majoration :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{J} m^*(Q_j) &\leqslant m^*(\mathscr{O}) - m^*(F) \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Maintenant, puisque le choix de J était implicitement laissé à notre entière discrétion, nous pouvons pousser gaillardement J vers l'infini, ce qui nous donne :

$$\sum_{j=1}^{\infty} m^*(Q_j) \leqslant \varepsilon.$$

Enfin, la sous-additivité dénombrable de $m^*(\cdot)$ appliquée à l'inclusion — qui était en fait une égalité par remplissage — :

$$\mathscr{O}\backslash F \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$$

donne :

$$\begin{aligned} m^*\big(\mathscr{O}\backslash F\big) &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m^*\big(Q_j\big) \\ &\leqslant \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui achève cette démonstration rédigée sans enfreindre l'exigence — absolue ! — de déployer les amples ailes d'une rhétorique mathématique explicite. □

Théorème 6.8. *Le complémentaire $\mathbb{R}^d\backslash E$ d'un ensemble mesurable quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$ est encore mesurable.*

Démonstration. L'ensemble E étant mesurable, pour tout entier $n \geqslant 1$, on peut trouver un ouvert $\mathscr{O}_n \supset E$ tel que :

$$m^*\big(\mathscr{O}_n\backslash E\big) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Le complémentaire $\mathscr{O}_n^c = \mathbb{R}^d\backslash\mathscr{O}_n$ est alors un fermé, donc mesurable grâce au théorème qui précède, et la persistance de la mesurabilité par réunions dénombrables assure que :

$$S := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{O}_n^c$$

est encore mesurable.

Ensuite, comme pour tout entier n fixé on a :

$$\begin{aligned} \mathscr{O}_n^c \subset S &\iff S^c \subset \big(\mathscr{O}_n^c\big)^c \\ &\iff S^c \subset \mathscr{O}_n, \end{aligned}$$

on déduit :

$$S^c\backslash E \subset \mathscr{O}_n\backslash E \qquad\qquad (n \geqslant 1).$$

Mais par définition du complémentaire :

$$\begin{aligned} S^c\backslash E &= \big(\mathbb{R}^d\backslash S\big)\backslash E \\ &= \mathbb{R}^d\backslash\big(S \cup E\big) \\ &= (\mathbb{R}^d\backslash E)\backslash S \\ &= E^c\backslash S, \end{aligned}$$

on obtient en fait :

$$E^c\backslash S \subset \mathscr{O}_n\backslash E \qquad\qquad (n \geqslant 1).$$

En prenant la mesure extérieure :

$$\begin{aligned} m^*\big(E^c\backslash S\big) \;&\leqslant\; m^*\big(\mathscr{O}_n\backslash E\big) \\ &\leqslant\; \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

et ce, pour tout entier $n \geqslant 1$. Laissant donc $n \to \infty$, il vient :

$$m^*\big(E^c\backslash S\big) \;=\; 0,$$

ce qui démontre que $E^c\backslash S$ est mesurable en vertu de la Proposition 6.4.

Maintenant, puisque la réversion de chaque inclusion $E \subset \mathscr{O}_n$ s'écrit $\mathscr{O}_n^c \subset E^c$, on voit que :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{O}_n^c = S \;\subset\; E^c.$$

Enfin, puisque d'après le Théorème 6.5, la mesurabilité est préservée par réunions finies, on conclut que notre complémentaire favori, lequel s'écrit :

$$E^c = S \cup \big(E^c\backslash S\big)$$

est lui aussi mesurable. □

Corollaire 6.9. *Si E et F sont deux sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^d$, alors $E\backslash F$ est aussi mesurable.*

Démonstration. En effet, $E\backslash F = E \cap (\mathbb{R}^d\backslash F)$. □

Théorème 6.10. *Toute intersection finie ou infinie dénombrable :*

$$E \;=\; \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$$

d'ensembles mesurables $E_j \subset \mathbb{R}^d$ est encore mesurable.

À nouveau, le cas fini est un cas particulier du cas infini.

Démonstration. C'est une application des deux Théorèmes 6.5 et 6.8 grâce à l'égalité ensembliste générale (exercice de révision) :

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \;=\; \bigg(\bigcup_{j=1}^{\infty} \big(E_j\big)^c\bigg)^c,$$

argument fort astucieux n'est-il pas ? □

Grâce à ces théorèmes, nous pouvons revenir en arrière et analyser la définition de la mesurabilité d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$, de manière à en révéler une condition équivalente.

Proposition 6.11. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, à savoir si :*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\mathscr{O} \supset E \;\; \textit{ouvert} \quad m^*(\mathscr{O}\backslash E) \leqslant \varepsilon,$$

alors :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,F \subset E \quad \textit{fermé} \quad m^*(E\backslash F) \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, on aurait pu choisir de définir la mesurabilité des ensembles en partant de fermés contenus en eux qui les approximent de mieux en mieux au sens où la mesure extérieure de l'erreur commise peut être rendu arbitrairement petite.

Démonstration. Nous venons d'apprendre que le complémentaire $E^c = \mathbb{R}^d \backslash E$ est mesurable. Donc par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert :

$$\mathscr{O} \supset E^c,$$

tel que :

$$m\big(\mathscr{O} \backslash E^c\big) \leqslant \varepsilon.$$

Or le complémentaire de cet ouvert :

$$F := \mathscr{O}^c = \mathbb{R}^d \backslash \mathscr{O},$$

est un fermé contenu dans E en vertu de la réversion des inclusions par passage au complémentaire :

$$E^c \subset \mathscr{O} \iff \mathscr{O}^c \subset (E^c)^c = E,$$

et comme on a aussi :

$$\begin{aligned} E \backslash F &= E \backslash \mathscr{O}^c \\ &= E \big\backslash \big(\mathbb{R}^d \backslash \mathscr{O}\big) \\ &= \mathscr{O} \big\backslash \big(\mathbb{R}^d \backslash E\big) \\ &= \mathscr{O} \backslash E^c, \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} m\big(E \backslash F\big) &= m\big(\mathscr{O} \backslash E^c\big) \\ &\leqslant \varepsilon, \end{aligned}$$

tout en se remémorant que $m = m^*$ sur les ensembles mesurables. □

Pour commenter ces propriétés générales des ensembles mesurables, faisons observer que nous avons donc déjà abondamment montré que la mesurabilité est stable par passage aux réunions et aux intersections, non seulement finies, mais aussi, et là est le point crucial, *infinies dénombrables*. Le passage à l'infini sera en effet déterminant pour toutes les applications en Analyse. Toutefois, les opérations de réunions ou d'intersections *non* dénombrables resteront formellement interdites lorsqu'on travaille avec des ensembles mesurables !

Nous pouvons conclure ce cycle en énonçant et en démontrant une propriété fantastique qui avait été promise antérieurement.

Théorème 6.12. *La mesure d'une réunion finie ou infinie dénombrable :*

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

d'ensembles mesurables $E_j \subset \mathbb{R}^d$ disjoints deux à deux :

$$E_{j_1} \cap E_{j_2} = \emptyset \qquad {\scriptstyle (1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant \infty)},$$

est la somme exacte *des mesures de ses composantes :*

$$m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m\big(E_j\big).$$

Ici, les E_j mesurables ne sont pas forcément tous contenus dans une certaine boule fixée de rayon assez grand, *i.e.* la famille $\big\{E_j\big\}_{j=1}^{\infty}$ n'est pas forcément *uniformément bornée*. Pire : un E_j individuel donné n'est pas forcément borné !

Donc ce théorème est vraiment très, très général ! Et le petit soldat (non borné) d'Orsay doit vénérer le très (grand) général !

Démonstration. Supposons d'abord temporairement pour simplifier que chaque E_j est *borné*, car nous discuterons plus tard du cas où les E_j sont autorisés à se balader jusqu'à l'infini.

La Proposition 6.11 a récemment montré que, pour tout entier $j \geqslant 1$, il existe un sous-ensemble fermé $F_j \subset E_j$ satisfaisant :

$$m^*\big(E_j\big\backslash F_j\big) \,\leqslant\, \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Fixons maintenant un entier quelconque $J \geqslant 1$. Comme les ensembles $F_1, \dots, F_J$ sont fermés, bornés, donc compacts et comme ils sont mutuellement disjoints, grâce à la Proposition 6.7, ils sont nécessairement à distance strictement positive l'un de l'autre :

$$\mathsf{dist}\,\big(F_{j_1},\, F_{j_2}\big) \,>\, 0 \qquad\qquad {\scriptstyle (1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant J)}.$$

Puisque $F_1, \dots, F_J$ sont mesurables (car fermés), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des ouverts :

$$\mathscr{O}_1 \supset F_1,\, \dots\dots,\, \mathscr{O}_J \supset F_J,$$

tels que :

$$m^*\big(\mathscr{O}_1\big\backslash F_1\big) \,\leqslant\, \frac{\varepsilon}{J},\ \ \dots\dots\dots,\ \ m^*\big(\mathscr{O}_J\big\backslash F_J\big) \,\leqslant\, \frac{\varepsilon}{J}.$$

Quitte à rétrécir si nécessaire ces ouverts $\mathscr{O}_1, \dots, \mathscr{O}_J$, on peut supposer qu'ils sont disjoints deux à deux et même (exercice topologique) à distance strictement positive l'un de l'autre.

Alors l'ouvert réunion disjointe :

$$\mathscr{O} := \mathscr{O}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{O}_J$$

contient le fermé :

$$F := F_1 \cup \cdots \cup F_J,$$

et l'on a :

$$\mathscr{O}\backslash F \,=\, \mathscr{O}_1\backslash F_1 \cup \cdots \cup \mathscr{O}_J\backslash F_J,$$

donc on peut appliquer avantageusement la sous-additivité dénombrable :

$$\begin{aligned} m^*\big(\mathscr{O}\big\backslash F\big) \,&=\, m^*\Big(\big(\mathscr{O}_1\big\backslash F_1\big) \cup \cdots \cup \big(\mathscr{O}_J\big\backslash F_J\big)\Big) \\ &\leqslant\, m^*\big(\mathscr{O}_1\big\backslash F_1\big) + \cdots + m^*\big(\mathscr{O}_J\big\backslash F_J\big) \\ &\leqslant\, \frac{\varepsilon}{J} + \cdots + \frac{\varepsilon}{J} \\ &\leqslant\, \varepsilon. \end{aligned}$$

ce qui re-démontre en passant que le fermé $F = F_1 \cup \cdots \cup F_J$ est mesurable.

Mais surtout, comme $F_1, \dots, F_J$ sont à distance strictement positive l'un de l'autre, on peut leur appliquer la Proposition 5.3 (itérée au moyen d'une induction finie évidente) pour obtenir :

$$m^*\big(F_1 \cup \cdots \cup F_J\big) \,=\, m^*\big(F_1\big) + \cdots + m^*\big(F_J\big).$$

c'est-à-dire :

$$m\big(F_1 \cup \cdots \cup F_J\big) \,=\, m\big(F_1\big) + \cdots + m\big(F_J\big).$$

Ensuite, puisqu'on a l'inclusion entre ensembles mesurables :

$$E \supset F_1 \cup \cdots \cup F_J$$

il vient grâce au Théorème 6.5 :

$$\begin{aligned} m(E) &\geqslant m\big(F_1 \cup \cdots \cup F_J\big) \\ &= m\big(F_1\big) + \cdots + m\big(F_J\big) \\ &\geqslant m\big(E_1\big) - \frac{\varepsilon}{2^1} + \cdots + m\big(E_J\big) - \frac{\varepsilon}{2^J} \\ &\geqslant m\big(E_1\big) + \cdots + m\big(E_J\big) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Laissant ici $J \longrightarrow \infty$ filer vers l'infini, comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, nous trouvons :

$$m(E) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} m\big(E_j\big).$$

Or l'inégalité inverse :

$$m(E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m\big(E_j\big)$$

est toujours vraie, même lorsque les E_j ne sont pas mutuellement disjoints puisque $m = m^*$ sur les ensembles mesurables et puisque m^* est dénombrablement sous-additive. Ceci conclut la démonstration dans le cas où chaque E_j est borné.

Il reste donc à traiter le cas général, et nous allons maintenant voir comment le ramener à ce qui vient d'être dit. À cet effet, prenons une famille de cubes fermés $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ emboîtés les uns dans les autres $Q_k \subset Q_{k+1}$ qui remplissent :

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k,$$

par exemple les cubes $[-k,\ k]^d$. Considérons Q_1, puis les complémentaires successifs :

$$Q_k \big\backslash Q_{k-1} \qquad\qquad {\scriptstyle (k \geqslant 2)},$$

et introduisons les ensembles mesurables *bornés :*

$$E_{j,k} := E_j \cap \big(Q_k \big\backslash Q_{k-1}\big).$$

Alors leur réunion complète [1] redonne l'ensemble E :

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{j,k} &= \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_j \cap \big(Q_k \big\backslash Q_{k-1}\big) \\ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \cap \Bigg(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \big\backslash Q_{k-1}}_{= \mathbb{R}^d}\Bigg) \\ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \\ &= E, \end{aligned}$$

1. On convient que $Q_0 := \emptyset$.

et ces $E_{j,k}$ sont disjoints deux à deux :

$$E_{j_1,k_1} \cap E_{j_2,k_2} = \emptyset \qquad\qquad ((j_1,k_1) \neq (j_2,k_2)).$$

Ensuite, comme pour tout $j \geqslant 1$ fixé, la sous-famille $\big\{E_{j,k}\big\}_{k=1}^{\infty}$ est constituée d'ensembles mutuellement disjoints *et bornés* de réunion :

$$E_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{j,k},$$

on peut appliquer *deux* fois ce que nous venons d'obtenir dans la première partie de la démonstration, une première fois pour obtenir :

$$m\big(E_j\big) = \sum_{k=1}^{\infty} m\big(E_{j,k}\big),$$

et une seconde fois à la réunion disjointe bornée :

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{j,k}$$

pour obtenir aussi :

$$\begin{aligned} m(E) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m\big(E_{j,k}\big) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} m\big(E_j\big), \end{aligned}$$

ce qui conclut agréablement cette démonstration détaillée. □

Ainsi, nous avons établi l'additivité dénombrable de la mesure de Lebesgue pour les ensembles mesurables disjoints. Ce résultat extrêmement important fournit les connexions nécessaires entre :

• notre notion primitive de volume donnée par la mesure extérieure ;

• l'idée plus avancée d'ensemble mesurable ;

• les opérations infinies dénombrables permises sur ces ensembles.

Énonçons maintenant deux corollaires naturels, auxquels nous attribuons le statut de vrais théorèmes.

Théorème 6.13. *Si $E_1, E_2, \dots \subset \mathbb{R}^d$ sont une infinité dénombrable d'ensembles mesurables emboîtés de manière croissante les uns dans les autres :*

$$E_k \subset E_{k+1} \qquad\qquad (k \geqslant 1),$$

alors :

$$m\bigg(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\bigg) = \lim_{K \to \infty} m\big(E_K\big).$$

Démonstration. Considérons E_1 puis les complémentaires successifs :

$$E_k \big\backslash E_{k-1} \qquad\qquad (k \geqslant 2),$$

ce qui nous donne une famille d'ensembles *disjoints deux à deux* remplissant de manière alternative :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E_1 \cup \bigcup_{k=2}^{\infty} \big(E_k \big\backslash E_{k-1}\big).$$

Le Théorème 6.12 fondamental d'addititivité dénombrable disjointe qui précède s'applique alors pour dire que la mesure du membre de droite est la somme infinie des mesures de ces nouvelles composantes disjointes :

$$\begin{aligned} m\bigg(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\bigg) &= m\big(E_1\big) + \sum_{k=2}^{\infty} m\big(E_k \big\backslash E_{k-1}\big) \\ &= m\big(E_1\big) + \lim_{K\to\infty} \sum_{k=2}^{K} m\big(E_k \big\backslash E_{k-1}\big) \\ &= \lim_{K\to\infty} m\bigg(E_1 \cup \bigcup_{k=2}^{K} E_k \big\backslash E_{k-1}\bigg) \\ &= \lim_{K\to\infty} m\big(E_K\big), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Théorème 6.14. *Si $E_1, E_2, \dots \subset \mathbb{R}^d$ sont une infinité dénombrable d'ensembles mesurables emboîtés de manière décroissante les uns dans les autres :*

$$E_k \supset E_{k+1} \qquad\qquad (k \geqslant 1),$$

et si :

$$m\big(E_{k_0}\big) < \infty,$$

pour un certain k_0, alors :

$$m\bigg(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\bigg) = \lim_{K\to\infty} m\big(E_K\big).$$

Sans l'hypothèse que $m\big(E_k\big) < \infty$ à partir d'un certain rang $k \geqslant k_0$, l'énoncé est faux : prendre par exemple $E_k := [k, \infty[\subset \mathbb{R}$.

Démonstration. Quitte à renuméroter la suite, on peut supposer que $k_0 = 1$ après élimination des ensembles $E_1, \dots, E_{k_0-1}$ qui ne comptent pas dans l'intersection infinie.

Abrégeons :

$$E := \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Considérons de manière similaire les différences :

$$E_k \big\backslash E_{k+1} \qquad\qquad (k \geqslant 1),$$

de telle sorte qu'on peut représenter sous forme de réunion disjointe :

$$E_1 = E \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(E_k \big\backslash E_{k+1}\big).$$

Grâce au Théorème 6.12 *pénultième* (= avant dernier ci-dessus) d'additivité dénombrable disjointe, on peut alors calculer :

$$\begin{aligned} m\big(E_1\big) &= m(E) + \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K-1} \Big[m\big(E_k\big) - m\big(E_{k+1}\big) \Big] \\ &= m(E) + m\big(E_1\big) - \lim_{K\to\infty} m\big(E_K\big). \end{aligned}$$

Puisque $m\big(E_1\big) < \infty$, à gauche et à droite, on a d'honnêtes nombres réels positifs finis, donc après simplification :

$$m(E) = \lim_{K\to\infty} m\big(E_K\big),$$

ce qui complète ces arguments assez simples. □

Pour terminer ce périple distrayant dans le noble pays de la *Théorie de la mesure*, nous énonçons un dernier résultat qui réalise une intuition fondamentale concernant la relation qu'entretiennent les ensembles mesurables avec les ensembles mesurables *modèles* que sont les ouverts et les fermés. L'idée en effet, c'est qu'un ensemble mesurable *absolument quelconque et arbitraire* peut être approximé à volonté par des ensembles ouverts qui le contiennent, et par des ensembles fermés contenus en lui.

Autrement dit, les ensembles mesurables sont toujours ε-proches des ouverts et des fermés, qui sont modèles simples et universels.

Théorème 6.15. *Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble mesurable quelconque. Alors les quatre propriétés suivantes sont satisfaites.*

(i) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathscr{O} \supset E$ tel que :*

$$m\big(\mathscr{O}\backslash E\big) \leqslant \varepsilon.$$

(ii) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $F \subset E$ tel que :*

$$m\big(E\backslash F\big) \leqslant \varepsilon.$$

(iii) *Lorsque la mesure $m(E) < \infty$ est de plus finie, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble compact $K \subset E$ tel que :*

$$m\big(E\backslash K\big) \leqslant \varepsilon.$$

(iv) *Lorsque à nouveau $m(E) < \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une réunion finie :*

$$F := \bigcup_{j=1}^{J} Q_j$$

de cubes fermés presque disjoints $Q_j \subset \mathbb{R}^d$ telle que :

$$m\big(E\,\Delta\,F\big) \leqslant \varepsilon.$$

Rappelons que la *différence symétrique* entre deux sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^d$ et $F \subset \mathbb{R}^d$, notée $E\Delta F$, est l'ensemble des points qui n'appartiennent qu'à l'un d'entre eux :

$$E\Delta F := (E\backslash F) \cup (F\backslash E).$$

Démonstration. La propriété **(i)** n'est autre que la définition de la mesurabilité !

Quant à la propriété **(ii)**, elle a déjà été vue dans la Proposition 6.11.

Ensuite concernant **(iii)**, prenons grâce à ce que nous venons de démontrer un fermé $F \subset E$ tel que :

$$m\big(E\backslash F\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $\overline{B}_n$ la boule fermée de centre n centrée à l'origine. On introduit la suite d'ensembles compacts :

$$K_n := F \cap \overline{B}_n,$$

qui est croissante et qui remplit F :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = F.$$

La suite d'ensembles mesurables $E\backslash K_n$ est alors décroissante :

$$K_n \subset K_{n+1} \implies E\big\backslash K_n \supset E\big\backslash K_{n+1} \qquad\qquad {\scriptstyle (n \geqslant 1)},$$

d'intersection complète :

$$\begin{aligned}\bigcap_{n=1}^{\infty} \big(E\backslash K_n\big) &= E\Big\backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \\ &= E\backslash F.\end{aligned}$$

Ensuite :

$$m(E\backslash F) \leqslant m(E) < \infty,$$

le Théorème 6.14 qui précède sur les suites décroissantes d'ensembles s'applique alors pour donner :

$$m(E\backslash F) = \lim_{n\to\infty} m\big(E\big\backslash K_n\big),$$

et donc il existe $N \gg 1$ assez grand pour que $n \geqslant N$ implique :

$$\begin{aligned}m\big(E\big\backslash K_n\big) &\leqslant m(E\backslash F) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Enfin, venons-en à la dernière propriété **(iv)**. Comme E est mesurable, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $\mathscr{O} \supset E$ tel que :

$$m\big(\mathscr{O}\backslash E\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le Théorème 3.2 représente alors cet ouvert comme réunion dénombrable d'une famille $\big\{Q_j\big\}_{j=1}^{\infty}$ de cubes fermés presque disjoints satisfaisant donc :

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j = \mathscr{O},$$

ainsi que :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\big|Q_j\big| &= m(\mathscr{O})\\ &= m(E)+m\big(\mathscr{O}\backslash E\big)\\ &\leqslant m(E)+\frac{\varepsilon}{2} < \infty.\end{aligned}$$

Or comme par hypothèse $m(E)<\infty$, la série infinie positive à gauche doit converger, ce qui assure l'existence d'un entier $J=J_\varepsilon\gg 1$ assez grand pour que :

$$\sum_{j=J+1}^{\infty}\big|Q_j\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si maintenant nous introduisons le fermé :

$$F := \bigcup_{j=1}^{J} Q_j,$$

nous pouvons majorer :

$$\begin{aligned}m\big(E\,\Delta\,F\big) &= m\big(E\backslash F\big)+m\big(F\backslash E\big)\\ &\leqslant m\big(\mathscr{O}\backslash F\big)+m\big(F\backslash E\big)\\ &= m\bigg(\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j\Big\backslash\bigcup_{j=1}^{J}Q_j\bigg)+m\bigg(\bigcup_{j=1}^{J}Q_j\Big\backslash E\bigg)\\ &= m\bigg(\bigcup_{j=J+1}^{\infty}Q_j\bigg)+m\bigg(\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j\Big\backslash E\bigg)\\ &\leqslant \sum_{j=J+1}^{\infty}\big|Q_j\big|+\sum_{j=1}^{\infty}\big|Q_j\big|-m(E)\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

ce qui achève cette quatrième démonstration. □

Corollaire 6.16. *Si $E\subset\mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, il existe une suite décroissante $(\mathscr{O}_k)_{k=1}^{\infty}$ de sous-ensembles ouverts :*

$$E\subset\mathscr{O}_{k+1}\subset\mathscr{O}_k \qquad (k\geqslant 1),$$

tels que :

$$m(E) = \lim_{k\to\infty} m(\mathscr{O}_k),$$

et il existe aussi une suite croissante $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ de sous-ensembles fermés :

$$F_k\subset F_{k+1}\subset E \qquad (k\geqslant 1),$$

tels que :

$$m(E) = \lim_{k\to\infty} m(F_k).$$ □

Démonstration. Prendre $\varepsilon := \frac{1}{n}$ dans **(i)** et **(ii)** de la Proposition 6.15, et remodeler (exercice) les ouverts et les fermés trouvés de manière à avoir deux suites qui sont décroissante et croissante. $\square$

En résumé, les ensembles mesurables $E \subset \mathbb{R}^d$ sont par définition ceux que l'on peut approximer de l'extérieur par des ouverts $\mathscr{O} \supset E$ de telle sorte que la mesure extérieure de la couronne d'erreur soit arbitrairement petite (Définition 6.1) :

$$m^*\big(\mathscr{O}\backslash E\big) \leqslant \varepsilon,$$

et pour cette raison, la théorie révèle que les ensembles mesurables quelconques sont arbitrairement proches des ensembles ouverts.

7. Propriétés d'invariance de la mesure de Lebesgue

Une propriété cruciale de la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$ est son invariance par translations quelconques.

Théorème 7.1. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, et si $h \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur de translation, alors l'ensemble translaté :*

$$E + h := \big\{x + h \colon \; x \in E\big\}$$

est lui aussi mesurable, de même mesure :

$$m\big(E + h\big) = m(E).$$

Démonstration. En partant de l'observation que cette invariance de la mesure par translation est trivialement satisfaite pour tout cube ouvert ou fermé $Q \subset \mathbb{R}^d$, on applique le principe intuitif général que nous venons d'énoncer à la fin de la section précèdente, à savoir plus rigoureusement, on se convainc mentalement que lorsqu'on passe à la mesure extérieure $m^*(\cdot)$, l'invariance par translation est conservée :

$$m^*(E + h) = m^*(E),$$

et ensuite, on vérifie scrupuleusement comme suit que $E + h$ est effectivement mesurable. Partant de $\mathscr{O} \supset E$ ouvert tel que :

$$m^*\big(\mathscr{O}\backslash E\big) \leqslant \varepsilon,$$

le translaté $\mathscr{O} + h$ est encore un ouvert contenant $E + h$ (exercice mental), et l'on a :

$$\begin{aligned} m^*\big((\mathscr{O} + h)\big\backslash(E + h)\big) \;&=\; m^*\big(\mathscr{O}\backslash E\big) \\ &\leqslant\; \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre la mesurabilité de $E + h$, et comme $m = m^*$ sur les ensembles mesurables, on a bien $m(E + h) = m(E)$. $\square$

De la même manière, on peut établir l'invariance par dilatation de la mesure de Lebesgue (voir certains exercices à la fin de ce chapitre).

Théorème 7.2. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble mesurable quelconque, alors pour $\delta > 0$ quelconque, l'ensemble δ-dilaté :*

$$\delta\, E := \Big\{\big(\delta\, x_1, \dots, \delta\, x_d\big) \in \mathbb{R}^d \colon \; (x_1, \dots, x_d) \;\in\; E\Big\}$$

est mesurable, de mesure égale à :

$$m\big(\delta\, E\big) \;=\; \delta^d\, m(E). \qquad \square$$

De plus, la mesure de Lebesgue est invariante par réflexions, à savoir si :

$$-E := \big\{ -x \in \mathbb{R}^d \colon x \in E \big\},$$

alors :

$$m\big(-E\big) = m(E).$$

8. σ-algèbres et ensembles boréliens

Définition 8.1. Une *σ-algèbre dans* $\mathbb{R}^d$ est une collection de sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ qui est stable par réunions dénombrables, par intersections dénombrables, et par passages au complémentaire.

Évidemment, la σ-algèbre qui consiste en *tous* les sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ a peu d'intérêt. Mais ce qui vient d'être démontré dans les sections précédentes a fait voir la :

Proposition 8.2. *La collection de tous les sous-ensembles mesurables $E \subset \mathbb{R}^d$ forme une σ-algèbre.* □

Une autre σ-algèbre joue un rôle vital en Analyse, et particulièrement, en *Théorie des Probabilités*.

Définition 8.3. La σ-algèbre des *ensembles boréliens* dans $\mathbb{R}^d$, noté :

$$\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d},$$

est la plus petite σ-algèbre qui contient tous les ensembles ouverts. Les éléments de cette σ-algèbre sont appelés les *boréliens*.

Démonstration. Le bien-fondé de cette définition ne sera établi que lorsqu'on aura donné un sens à l'expression « *la plus petite σ-algèbre contenant les ouverts* », et fait voir aussi qu'un tel objet est unique.

En effet, « *la plus petite* » signifie que si $\mathscr{S}$ est une σ-algèbre quelconque qui contient tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$, alors nécessairement :

$$\mathscr{S} \supset \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}.$$

Mais puisqu'on se convainc aisément (exercice) qu'une intersection *quelconque* — pas nécessairement dénombrable — de σ-algèbres reste encore une σ-algèbre, on peut simplement définir $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$ comme l'intersection de *toutes* les σ-algèbres qui contiennent les ouverts. Ceci montre l'existence, et aussi l'unicité, de la σ-algèbre des boréliens. □

Ensuite, puisque les ouverts sont mesurables, on voit que la σ-algèbre des boréliens est contenue dans la σ-algèbre des ensembles mesurables :

$$\text{ensembles boréliens} \;\subset\; \text{ensembles mesurables.}$$

Question : *Cette inclusion est-elle une égalité ?*

Réponse : *Non !* Comme le montre l'Exercice 22, il existe en effet des ensembles Lebesgue-mesurables qui ne sont pas boréliens.

En fait, du point de vue de Borel, les ensembles mesurables au sens de Lebesgue apparaissent comme *complétion* de la σ-algèbre des boréliens, à savoir, en adjoignant tous les sous-ensembles des ensembles boréliens qui sont de mesure 0, comme nous allons le voir dans un instant.

En partant des ensembles ouverts ou fermés, qui sont les ensembles boréliens les plus simples, on pourrait essayer de lister tous les ensembles boréliens en ordre de complexité croissante. Juste après les ouverts et les fermés, viendraient les deux familles d'ensembles suivants.

Définition 8.4. Les intersections dénombrables d'ensembles ouverts de $\mathbb{R}^d$ sont appelés des G_δ*-ensembles.*

Cette dénomination « G_δ » provient des termes allemands « GEBIETE » (domaine), et « DURSCHNITT » (intersection). Aux complémentaires des G_δ-ensembles, on donne habituellement un nom tout aussi ésotérique.

Définition 8.5. Les réunions dénombrables d'ensembles fermés de $\mathbb{R}^d$ sont appelés des F_σ*-ensembles.*

Ici, la dénomination « F_σ » provient du français « fermé », et la lettre σ en réfère au symbole grec Σ de sommation mathématique.

Évidemment, nous savons que les G_δ-ensembles et les F_σ-ensembles sont tous mesurables. Le fait est qu'à des ensembles de mesure nulle près, ce sont là tous les ensembles mesurables possibles, puisqu'on a le :

Théorème 8.6. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble quelconque, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est mesurable ;*

(ii) *E est la différence :*

$$E = G \backslash N$$

entre un G_δ-ensemble $G \subset \mathbb{R}^d$ et un sous-ensemble $N \subset G_\delta$ de mesure nulle ;

(iii) *E est la réunion disjointe :*

$$E = F \cup N$$

d'un F_σ-ensemble $F \subset \mathbb{R}^d$ et d'un sous-ensemble $N \subset \mathbb{R}^d$ de mesure nulle.

Démonstration. Clairement, un ensemble qui satisfait **(ii)** ou **(iii)** est mesurable avec :

$$m(E) = m(G) + 0 \qquad \text{et} \qquad m(E) = m(F) + 0.$$

Réciproquement, établissons **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)**. Si E est mesurable, pour tout entier $n \geqslant 1$, on peut trouver un ouvert $\mathscr{O}_n \supset E$ tel que :

$$m\big(\mathscr{O}_n \backslash E\big) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Alors l'intersection complète :

$$G := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{O}_n$$

est un G_δ-ensemble qui contient E. De plus, on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$G \backslash E \subset \mathscr{O}_n \backslash E,$$

d'où :

$$\begin{aligned} m^*\big(G \backslash E\big) &\leqslant m^*\big(\mathscr{O}_n \backslash E\big) \\ &= m\big(\mathscr{O}_n \backslash E\big) \\ &\leqslant \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

et en faisant tendre $n \longrightarrow \infty$, on voit que l'ensemble :

$$N := G \backslash E$$

est de mesure extérieure nulle, donc mesurable par définition, de mesure nulle d'ailleurs !

Pour la dernière implication **(i)** $\Longrightarrow$ **(iii)**, il suffit d'appliquer le Théorème 6.15 **(ii)** avec $\varepsilon := \frac{1}{n}$, et de prendre la réunion des ensembles fermés associés. □

9. Construction d'un ensemble *non* mesurable

Comme nous l'avons déjà amplement signalé au début de ce chapitre, aucune théorie de la mesure ne peut espérer que tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ soient mesurables. Dans cette section, nous donnons un exemple très classique et très élémentaire de sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (avec $d = 1$) qui n'est *pas* mesurable. Sa construction, due à Vitali en 1905, repose sur l'Axiome du choix, déjà énoncé p. 4. Sans difficulté, on peut en déduire un exemple d'ensemble non mesurable dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$ quelconque.

Sur l'intervalle unité $[0, 1]$, soit la relation binaire :

$$x \sim y \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} x - y \in \mathbb{Q}.$$

On vérifie aisément (exercice) que cette relation binaire satisfait bien les trois propriétés requises :

- $x \sim x$ pour tout $x \in [0, 1]$;
- $x \sim y$ si et seulement si $y \sim x$;
- si $x \sim y$ et si $y \sim z$ alors $x \sim z$;

pour être une relation d'équivalence. Ainsi, y est équivalent à x s'il en diffère d'un nombre rationnel. D'après la théorie générale, deux classes d'équivalences ou bien coïncident, ou bien sont disjointes, et de plus, $[0, 1]$ est la réunion disjointe de toutes les classes d'équivalences $\mathscr{C}_\alpha$, ce que nous écrirons :

$$[0, 1] = \bigcup_{\alpha \in A} \mathscr{C}_\alpha,$$

les indices α parcourant un certain ensemble A.

Grâce à l'Axiome du choix, que nous admettons ici, on peut alors sélectionner pour tout $\alpha \in A$ un unique élément :

$$x_\alpha \in \mathscr{C}_\alpha.$$

Théorème 9.1. [Vitali 1905] *Le sous-ensemble de* $[0, 1]$ *:*

$$\mathscr{N} := \bigcup_{\alpha \in A} \{x_\alpha\}$$

n'est alors pas *Lebesgue-mesurable.*

Démonstration. Raisonnons par contradiction et supposons au contraire que $\mathscr{N}$ soit mesurable. Comme l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable, il existe une énumération :

$$\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$$

de son sous-ensemble :

$$\mathbb{Q} \cap [-1, 1].$$

Introduisons alors tous les translatés :

$$\mathscr{N}_k := \mathscr{N} + r_k \qquad (k \geqslant 1),$$

qui sont tous contenus dans $[-1, 2] = [0, 1] + [-1, 1]$.

Assertion 9.2. *Ces ensembles $\mathscr{N}_k$ sont disjoints deux à deux :*

$$\mathscr{N}_{k_1} \cap \mathscr{N}_{k_2} = \emptyset \qquad (1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant \infty),$$

et leur réunion complète satisfait :

$$[0, 1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{N}_k \subset [-1, 2].$$

Démonstration. Pour voir que ces ensembles sont disjoints, montrons donc que deux d'entre eux avec $k_1 < k_2$ sont toujours d'intersection vide :

$$\mathscr{N}_{k_1} \cap \mathscr{N}_{k_2} = \emptyset.$$

En effet, si au contraire il existait un nombre réel appartenant à cette intersection, ceci voudrait dire qu'il existe deux nombres rationnels r_{k_1} et r_{k_2} dans $[-1, 1]$ ainsi que deux nombres x_{α_1} et x_{α_2} dans $\mathscr{N}$ tels que :

$$x_{\alpha_1} + r_{k_1} = x_{\alpha_2} + r_{k_2},$$

ce qui, après soustraction immédiate, équivaudrait à :

$$x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} = r_{k_2} - r_{k_1}.$$

Or le membre de droite serait alors un nombre rationnel *non nul*, puisque $k_1 < k_2$ et puisque l'énumération $k \longmapsto r_k$ est injective, et donc on en déduirait que :

$$x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \in \mathbb{Q} \backslash \{0\},$$

ce qui voudrait dire qu'on a trouvé deux éléments *distincts* dans $\mathscr{N}$ et néanmoins équivalents :

$$x_{\alpha_1} \sim x_{\alpha_2},$$

ce qui contredirait de manière flagrante le fait que $\mathscr{N}$ contient exactement *un* représentant de chaque classe d'équivalence.

Ensuite concernant la première inclusion, si $x \in [0, 1]$ est quelconque, puisque les classes d'équivalence $\bigcup_{\alpha \in A} \mathscr{C}_\alpha = [0, 1]$ remplissent l'intervalle, on a $x \in \mathscr{C}_\alpha$ pour un certain $\alpha \in A$, à savoir $x \sim x_\alpha$, et donc :

$$\underbrace{x - x_\alpha}_{\substack{\in [-1,1] \\ = [0,1]-[0,1]}} = r_k,$$

pour un unique rationnel $r_k \in [-1, 1]$, ce qui veut précisément dire que $x \in \mathscr{N}_k$. □

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème de Vitali. Si $\mathscr{N}$ était Lebesgue-mesurable, la mesure de Lebesgue étant invariante par translations (Théorème 7.1), chaque translaté :

$$\mathscr{N}_k = \mathscr{N} + r_k$$

serait aussi Lebesgue-mesurable, de même mesure :

$$m(\mathscr{N}_k) = m(\mathscr{N}).$$

Grâce au Théorème 6.5 de préservation de la mesurabilité par réunions dénombrables, l'ensemble :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{N}_k$$

serait alors lui aussi mesurable. Mais nous venons de démontrer qu'il est encadré par :

$$[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{N}_k \subset [-1,\, 2],$$

et donc, par monotonie de la mesure, et aussi par le Théorème 6.12 d'additivité disjointe dénombrable :

$$1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m\big(\mathscr{N}_k\big) \leqslant 3,$$

à savoir puisque tous les translatés $\mathscr{N}_k$ posséderaient la même mesure :

$$1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m\big(\mathscr{N}\big) \leqslant 3.$$

My sexy Daisy, is'nt there a terrific absurd here ? Oh yes, stupid Donald Duck ! This is the desired contradiction, since neither $m(\mathscr{N}) = 0$ *nor* $m(\mathscr{N}) > 0$ *is possible.* □

10. Fonctions étagées et fonctions mesurables

Grâce à la notion d'ensemble mesurable, nous pouvons maintenant étudier les objets qui sont au cœur de la théorie de l'intégration, à savoir les *fonctions mesurables*. Le point de départ est le suivant.

Définition 10.1. La *fonction indicatrice* d'un sous-ensemble (quelconque) $E \subset \mathbb{R}^d$ est la fonction $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\mathbf{1}_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{lorsque } x \in E, \\ 0 & \text{lorsque } x \in \mathbb{R}^d \backslash E. \end{cases}$$

Ensuite, on passe aux fonctions qui sont les briques élémentaires de la théorie de l'intégration de Riemann. Rappelons qu'un *rectangle général* $R \subset \mathbb{R}^d$ est un produit de d intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont de l'une des quatre formes possibles :

$$[a_j, b_j], \qquad [a_j, b_j[, \qquad]a_j, b_j], \qquad]a_j, b_j[,$$

avec $-\infty < a_j \leqslant b_j \leqslant \infty$ pour $j = 1, \dots, d$.

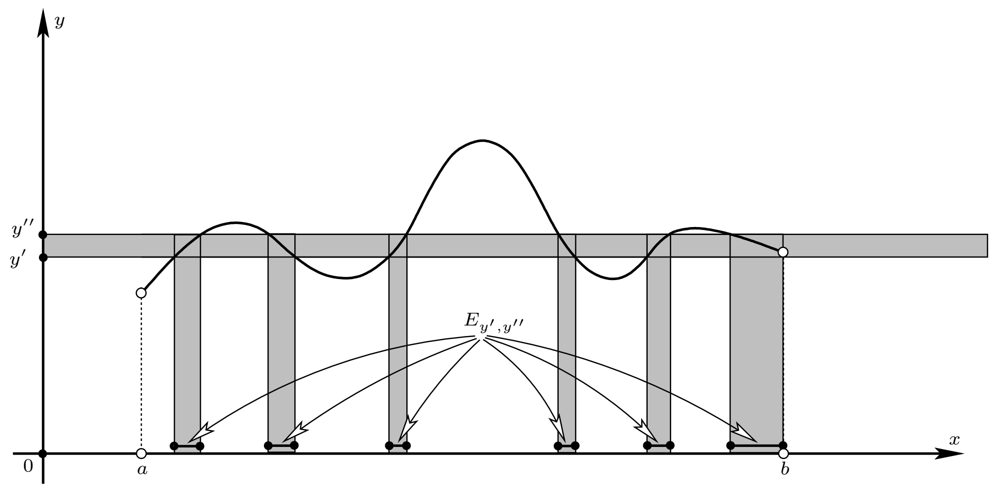
Définition 10.2. Une *fonction en escalier* est une combinaison linéaire finie :

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{R_k},$$

à coefficients réels $a_k \in \mathbb{R}$, de fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{R_k}$ de rectangles généraux (ouverts ou fermés) $R_k \subset \mathbb{R}^d$.

(La plupart du temps, en fait, on considère des rectangles fermés.)

Cependant, comme nous l'avons soigneusement fait observer par anticipation dans un des chapitres qui précèdent, la Théorie de l'intégration au sens de Lebesgue nécessite des ensembles qui sont plus généraux que les rectangles, ensembles qui apparaissent lorqu'on découpe en tranches fines horizontales l'hypographe d'une fonction $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ à intégrer.



Or c'est justement toute la belle et riche théorie de la mesure que nous venons d'achever qui offre le concept tant espéré pour parler des ensembles du type que nous avions noté $E_{y',y''}$.

Ainsi le concept adéquat, nettement plus général que celui de fonction en escalier, est-il le suivant.

Définition 10.3. Une *fonction étagée* est une combinaison linéaire finie :

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k},$$

à coefficients réels $a_k \in \mathbb{R}$, de fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{E_k}$ d'ensembles Lebesgue-mesurables quelconques $E_k \subset \mathbb{R}^d$ de mesures :

$$m\big(E_k\big) < \infty$$

finies.

Ici, donc, l'*ascension en généralité* tient au fait que contrairement à de trop simples rectangles R_k, de tels ensembles mesurables E_k peuvent fort bien posséder une structure particulièrement complexe. Ces fonctions étagées vont alors jouer le rôle de fonctions-modèles dans l'univers général des fonctions mesurables que nous allons maintenant présenter et étudier.

Commençons en effet par étudier les fonctions :

$$f \colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

que nous autorisons à prendre les deux valeurs $-\infty$ et $+\infty$. Autrement dit, en tout point $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction f prend ses valeurs dans l'ensemble *étendu* des nombres réels :

$$-\infty \leqslant f(x) \leqslant +\infty.$$

Lorsque f est une fonction réelle au sens classique, nous la noterons comme d'habitude :

$$f\colon\quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}.$$

En fait, dans la théorie qui va suivre, et dans ses nombreuses applications, nous aurons affaire à des fonctions qui ne prennent la valeur $-\infty$ et la valeur $+\infty$ que sur des ensembles de mesure nulle, et de tels ensembles seront systématiquement considérés comme négligeables.

Plus généralement, nous allons étudier des fonctions définies sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ a priori quelconque :

$$\begin{aligned} f\colon&\quad E \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f\colon&\quad E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}. \end{aligned}$$

Voici alors maintenant un concept très important, plus général encore que celui de fonction étagée.

Définition 10.4. Une fonction f définie sur un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}$ est dite *mesurable* si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, son ensemble de sous-niveau :

$$f^{-1}\big([-\infty,\, a[\big) \,=\, \big\{x \in E\colon\, f(x) < a\big\},$$

est un sous-ensemble *mesurable* de $\mathbb{R}^d$.

Pour abréger, nous noterons souvent ces ensembles :

$$\big\{f < a\big\},$$

tout du moins lorsqu'aucune confusion possible ne sera à craindre. Observons alors que l'ensemble :

$$\big\{f = -\infty\big\} \,=\, \bigcap_{n=1}^{\infty} \big\{f < -n\big\}$$

est mesurable, comme intersection dénombrable d'ensembles mesurables.

En fait, plusieurs options équivalentes existent pour définir ce concept de fonction mesurable, en changeant par exemple l'inégalité stricte en une inégalité faible.

Lemme 10.5. *Une fonction $f\colon E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est mesurable au sens de la définition qui précède si et seulement si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble :*

$$\big\{x \in E\colon\, f(x) \leqslant a\big\} \,=\, \big\{f \leqslant a\big\}$$

est mesurable.

Démonstration. Dans une direction, nous écrivons :

$$\big\{f \leqslant a\big\} \,=\, \bigcap_{n=1}^{\infty} \big\{f < a + \tfrac{1}{n}\big\},$$

et nous nous souvenons qu'une intersection dénombrable d'ensembles mesurables reste mesurable.

Dans l'autre direction, nous écrivons :

$$\big\{f < a\big\} \,=\, \bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{f \leqslant a - \tfrac{1}{n}\big\},$$

et nous nous souvenons qu'une réunion dénombrable d'ensembles mesurables reste mesurable. □

Sans vergogne, on peut aussi changer le sens des inégalités.

Lemme 10.6. *Une fonction* $f\colon E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *est mesurable si et seulement si, pour tout* $a \in \mathbb{R}$*, l'ensemble de sur-niveau :*

$$\big\{x \in E\colon\; f(x) \geqslant a\big\} \;=\; \big\{f \geqslant a\big\}$$

est mesurable, si et seulement si (aussi !), pour tout $a \in \mathbb{R}$*, l'ensemble :*

$$\big\{x \in E\colon\; f(x) > a\big\} \;=\; \big\{f > a\big\}$$

est mesurable.

En particulier, on en déduit que :

$$f^{-1}(+\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big\{f > n\big\}$$

est mesurable.

Démonstration. Pour la première affirmation, notons que :

$$\big\{f \geqslant a\big\} \;=\; \Big(\big\{f < a\big\}\Big)^c,$$

et souvenons-nous que la mesurabilité est préservée lors de tout passage au complémentaire. Pour la seconde affirmation, sachant que nous venons de démontrer la mesurabilité des ensembles de sous-niveau $\{f \leqslant a\}$, leurs complémentaires $\{f > a\}$ sont eux aussi mesurables. □

Corollaire 10.7. *Si* $f\colon E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *est une fonction mesurable,* $\{f = a\}$ *est mesurable pour tout* $a \in \mathbb{R}$*.* □

Corollaire 10.8. *Une fonction* f *est mesurable si et seulement si son opposée* $-f$ *est mesurable.* □

En appliquant le même type de raisonnements, le lecteur se convaincra aisément de la véracité de l'énoncé suivant.

Lemme 10.9. *Une fonction* $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie sur un sous-ensemble mesurable* $E \subset \mathbb{R}^d$ *à valeurs finies est mesurable si et seulement si, pour tout couple de nombres réels finis :*

$$-\infty \;<\; a \;<\; b \;<\; +\infty,$$

les ensembles-tranches :

$$\big\{a < f < b\big\}$$

sont mesurables. Plus généralement, il en va de même en remplaçant $\{a < f < b\}$ *par l'un des trois ensembles :*

$$\big\{a \leqslant f < b\big\}, \qquad\qquad \big\{a < f \leqslant b\big\}, \qquad\qquad \big\{a \leqslant f \leqslant b\big\}.$$ □

En fait, il est davantage utile de connaître l'énoncé qui caractérise le plus généralement possible la mesurabilité.

Proposition 10.10. *Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$.*

(i) *Lorsque $f \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ est à valeurs finies, f est mesurable si et seulement si, pour tout ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}$, l'image réciproque $f^{-1}(\mathscr{O})$ est mesurable.*

(ii) *Lorsque $f \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ est à valeurs finies, f est mesurable si et seulement si, pour tout fermé $F \subset \mathbb{R}$, l'image réciproque $f^{-1}(F)$ est mesurable.*

(iii) *Lorsque $f \colon E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est à valeurs dans l'ensemble étendu des nombres réels, f est mesurable si et seulement si l'une des deux conditions* **(ii)** *ou* **(iii)** *est satisfaite, et si, de plus :*

$$f^{-1}(-\infty) \qquad \text{et} \qquad f^{-1}(+\infty)$$

sont deux ensembles mesurables.

Démonstration. Utiliser (exercice) le fait qu'un sous-ensemble ouvert quelconque $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}$ peut être écrit comme réunion dénombrable de segments ouverts. □

Lemme 10.11. *Si $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors elle est mesurable.*

Démonstration. En effet, l'image inverse de tout ouvert par une fonction continue est par définition même de la continuité un ouvert, donc la proposition qui précède s'applique. □

Un commentaire intuitif s'impose ici : les deux notions de continuité et de mesurabilité concernent donc les images réciproques d'ouverts et d'ensembles mesurables.

Lemme 10.12. *Si $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, et si $\Phi \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors la composée $\Phi \circ f$ est mesurable.*

Démonstration. En effet, Φ étant continue, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'image inverse :

$$\Phi^{-1}\big(]-\infty,\, a[\big)$$

est un ouvert $\mathscr{O}_a$, et donc ensuite :

$$\big(\Phi \circ f\big)^{-1}\big(]-\infty,\, a[\big) \,=\, f^{-1}\big(\mathscr{O}_a\big)$$

est bien mesurable. □

Attention ! Il est faux en général que la composée dans l'autre sens $f \circ \Phi$ d'une fonction mesurable $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec une fonction continue $\Phi \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ reste mesurable, l'Exercice 21 propose une recette cantor-éique épicée pour étudiant-cuisinier désireux de produire un contre-exemple.

La propriété la plus remarquable dont jouissent les fonctions mesurables, c'est que leur mesurabilité reste satisfaite après toutes les espèces possibles de passage à la limite. Voici une première illustration de ce principe.

Théorème 10.13. *Si $\big(f_n\big)_{n=1}^{\infty}$ est une suite quelconque de fonctions mesurables définies sur un ensemble mesurable fixe $E \subset \mathbb{R}^d$, alors les quatre fonctions :*

$$\begin{aligned}
x &\longmapsto \sup_{n \geqslant 1} f_n(x), \\
x &\longmapsto \inf_{n \geqslant 1} f_n(x), \\
x &\longmapsto \limsup_{n \to \infty} f_n(x), \\
x &\longmapsto \liminf_{n \to \infty} f_n(x),
\end{aligned}$$

sont elles aussi mesurables.

Démonstration. Faire voir que la fonction $\sup_n f_n$ est mesurable revient à constater (exercice mental) que ses ensembles de sous-niveau pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque peuvent s'écrire :

$$\Big\{\sup_{n\geqslant 1} f_n \;\leqslant\; a\Big\} \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} \big\{f_n \leqslant a\big\},$$

sous la forme d'une intersection dénombrable d'ensembles mesurables.

Pour la fonction $\inf_n f_n$, on écrit de manière similaire :

$$\Big\{\inf_{n\geqslant 1} f_n \;\leqslant\; a\Big\} \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{f_n \leqslant a\big\}.$$

Ensuite, de ces deux premiers résultats on déduit les deux affirmations suivantes concernant la limite supérieure et la limite inférieure, car d'après l'Exercice 1, on a :

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) \;=\; \inf_{k\geqslant 1}\Big(\sup_{n\geqslant k} f_n(x)\Big),$$
$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) \;=\; \sup_{k\geqslant 1}\Big(\inf_{n\geqslant k} f_n(x)\Big),$$

ce qui conclut. □

Chose encore plus spectaculaire, le théorème qui suit montre que la mesurabilité est préservée par limites ponctuelles simples ! Nous verrons que ce fait magique va considérablement simplifier les interversions entre limite et intégration :

$$\int \lim_{n\to\infty} \;=\; \lim_{n\to\infty} \int,$$

et que nous n'aurons plus à nous soucier de convergence uniforme comme cela était nécessaire en Théorie de l'intégration riemannienne.

Théorème 10.14. *Si $\big(f_n\big)_{n=1}^{\infty}$ est une suite quelconque de fonctions mesurables définies sur un ensemble mesurable fixe $E \subset \mathbb{R}^d$ telle qu'en tout point $x \in E$, la limite :*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \;=:\; f(x)$$

existe, alors la fonction-limite simple f ainsi définie est elle aussi mesurable.

Démonstration. En effet, lorsque la limite existe, elle est égale à la fois à la limite inférieure et à la limite supérieure :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \;=\; \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \;=\; \limsup_{n\to\infty} f_n(x),$$

et nous venons de voir que ces deux dernières fonctions sont mesurables. □

Proposition 10.15. *Si f et g sont deux fonctions mesurables définies sur un ensemble mesurable fixe $E \subset \mathbb{R}^d$, alors :*

(i) *pour tout entier $k \geqslant 1$, la fonction f^k est mesurable ;*

(ii) *$f + g$ et $f\,g$ sont mesurables lorsque f et g sont à valeurs finies.*

Démonstration. Utilisons la définition de la mesurabilité en termes d'ensembles de surniveau, ce qui est justifié par le Lemme 10.6.

Concernant **(i)**, il suffit de noter que pour k impair :

$$\big\{f > a\big\} = \big\{f > a^{1/k}\big\},$$

tandis que pour k pair et pour $a \geqslant 0$:

$$\big\{f^k > a\big\} = \big\{f > a^{1/k}\big\} \cup \big\{f < -a^{1/k}\big\}.$$

Concernant **(ii)**, la mesurabilité de $f+g$ provient de l'écriture adaptée (exercice mental) :

$$\big\{f+g > a\big\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \big\{f > a-r\big\} \cap \big\{g > r\big\},$$

tandis que la mesurabilité de $f\,g$ provient, en tenant compte de ce qui a déjà été acquis, de l'identité babylonienne :

$$f\,g = \frac{1}{4}\big[(f+g)^2 - (f-g)^2\big],$$

ce qui conclut. □

Définition 10.16. Deux fonctions réelles f et g définies sur un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ sont dites *égales presque partout*, ce qu'on exprime aussi comme :

$$f(x) = g(x), \qquad \text{« pour presque tout } x \text{ »},$$

si l'ensemble :

$$\big\{x \in E \colon\, f(x) \neq g(x)\big\}$$

est de mesure nulle.

On dira aussi couramment :

$$f = g \qquad \textit{presque partout},$$

ce qu'on abrégera par :

$$f = g \qquad \text{p.p.}$$

Plus généralement, une propriété, ou un énoncé, seront dits être satisfaits presque partout (*p.p.*) lorsqu'ils le sont hors d'un ensemble de mesure nulle.

Lemme 10.17. *Si une première fonction f est mesurable, et si une deuxième fonction g lui est égale presque partout, alors g est aussi mesurable.*

Démonstration. En effet, les deux ensembles de sous-niveau :

$$\big\{f < a\big\} \qquad \text{et} \qquad \big\{g < a\big\}$$

diffèrent seulement d'un ensemble de mesure nulle, donc l'un est mesurable si et seulement si l'autre l'est. □

En fait, toutes les propriétés vues jusqu'à présent peuvent être transformées en propriétés qui sont satisfaites presque partout. Par exemple, si $\big(f_n\big)_{n=1}^{\infty}$ est une collection de fonctions mesurables qui ne converge simplement *que* pour presque tout x :

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \qquad \text{p.p.},$$

alors la fonction-limite f est mesurable, même si ses valeurs font défaut sur un certain ensemble de mesure nulle.

Ensuite, si deux fonctions f et g sont définies presque partout sur un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$, alors $f+g$ et $f\,g$ n'ont de valeurs définies que sur l'intersection des deux domaines de f et de g. Mais puisque la réunion de deux ensembles de mesure nulle est encore de mesure nulle, c'est que $f+g$ et $f\,g$ sont à nouveau définies presque partout.

Résumons cette discussion comme suit.

Proposition 10.18. *Si une fonction f définie presque partout est mesurable, et si une autre fonction g définie presque partout est égale à f presque partout, alors g est mesurable.* $\square$

11. Approximation des fonctions mesurables par des fonctions étagées

Les théorèmes que nous allons démontrer dans cette section sont tous d'une même nature, et ils vont renforcer nos premières intuitions concernant la structure des fonctions mesurables. Commençons par approximer des fonctions mesurables positives par des fonctions étagées.

Théorème 11.1. *Soit $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable à valeurs finies positives. Alors il existe une suite :*

$$\big(\varphi_k\big)_{k=1}^{\infty}$$

de fonctions étagées positives qui est croissante :

$$0 \leqslant \varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x),$$

et qui converge ponctuellement vers f en tout point :

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x) \qquad\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^d).$$

Démonstration. La première chose à faire est de tronquer f pour la rendre bornée. Pour $N \geqslant 1$ (grand) entier, soit donc le cube fermé :

$$Q_N := [-N,\, N]^d.$$

Définissons alors la fonction doublement tronquée :

$$F_N(x) := \begin{cases} f(x) & \text{lorsque } \ x \in Q_N \ \text{ et } \ f(x) \leqslant N, \\ N & \text{lorsque } \ x \in Q_N \ \text{ et } \ f(x) > N, \\ 0 & \text{lorsque } \ x \in \mathbb{R}^d \backslash Q_N. \end{cases}$$

En effet, on écrase f sur 0 hors du grand cube, et simultanément, on décapite ses valeurs trop élevées.

Il est alors clair (exercice mental) que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} F_N(x).$$

Ensuite, partitionnons l'intervalle d'arrivée $[0, N]$ de F_N comme suit. Pour $N \geqslant 1$ fixé, pour un autre (grand) entier $M \geqslant 1$ fixé, et pour tout entier :

$$1 \leqslant \ell \leqslant NM,$$

introduisons l'ensemble de type tranche fine :

$$E_{\ell,M} := \bigg\{ x \in Q_N\colon \ \frac{\ell-1}{M} < F_N(x) \leqslant \frac{\ell}{M} \bigg\},$$

ainsi que l'ensemble de type base inférieure :

$$\begin{aligned} E_{0,N}^* &:= \big\{ x \in Q_N\colon \ F_N(x) = 0 \big\} \\ &= \big\{ x \in Q_N\colon \ f(x) = 0 \big\}. \end{aligned}$$

Puisque l'on a la réunion disjointe suivante d'intervalles dans l'espace d'arrivée $\mathbb{R}_+$:

$$\{0\} \cup \big]0, \tfrac{1}{M}\big] \cup \big]\tfrac{1}{M}, \tfrac{2}{M}\big] \cup \cdots \cup \big]\tfrac{NM-1}{M}, \tfrac{NM}{M}\big] = \big[0,\, N\big],$$

faisons observer en passant (exercice de lecture) que l'on a la réunion *disjointe :*

$$E_{0,N}^* \cup \bigcup_{\ell=1}^{NM} E_{\ell,M} = Q_N,$$

d'ensembles *mesurables*. Alors nous pouvons former la famille de fonctions étagées auxiliaires :

$$F_{N,M}(x) \;:=\; \underline{0 \cdot \mathbf{1}_{E_{0,N}^*}(x)} + \sum_{\ell=1}^{NM} \frac{\ell-1}{M} \cdot \mathbf{1}_{E_{\ell,M}}(x).$$

Ces fonctions $F_{N,M}$ sont bien des fonctions étagées !

Assertion 11.2. *En tout point $x \in \mathbb{R}^d$, on a :*

$$0 \;\leqslant\; F_N(x) - F_{N,M}(x) \;\leqslant\; \frac{1}{M}.$$

Démonstration. Lorsque $x \in \mathbb{R}^d \backslash Q_N$, les deux fonctions $F_N(x) = 0$ et $F_{N,M}(x) = 0$ s'annulent.

Lorsque $x \in Q_N$, ce point x appartient à un et un seul des ensembles $E_{0,N}^*$ et $E_{\ell,M}$. Lorsque $x \in E_{\ell_x,M}$ pour un certain entier $1 \leqslant \ell_x \leqslant NM$, on a par définition :

$$\frac{\ell_x - 1}{M} \;<\; F_N(x) \;\leqslant\; \frac{\ell_x}{M},$$

tandis que :

$$F_{N,M}(x) = \frac{\ell_x - 1}{M} \cdot 1,$$

puisque x n'appartient à aucun autre $E_{\ell',M}$. Dans ce cas, on a bien l'inégalité assertée :

$$0 \;\leqslant\; F_N(x) - F_{N,M}(x) \;\leqslant\; \frac{\ell_x}{M} - \frac{\ell_x - 1}{M} = \frac{1}{M}.$$

Enfin, lorsque $x \in E_{0,N}^*$, il est clair que $F_N(x) = 0 = F_{N,M}(x)$, et l'inégalité assertée est trivialement satisfaite. □

Choisissons maintenant :

$$N := 2^k \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad M := 2^k,$$

où $k \geqslant 1$ est un entier qui tendra vers l'infini, et introduisons la suite de fonctions qui remplira le rôle attendu :

$$\begin{aligned} \varphi_k \;&:=\; F_{2^k,2^k} \\ &= \underline{0 \cdot \mathbf{1}_{E_{0,2^k}^*}(x)} + \sum_{\ell=1}^{2^{2k}} \frac{\ell-1}{2^k} \cdot \mathbf{1}_{E_{\ell,2^k}}(x). \end{aligned}$$

Assertion 11.3. *Cette suite de fonctions est croissante :*

$$0 \;\leqslant\; \varphi_k(x) \;\leqslant\; \varphi_{k+1}(x) \qquad\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^d).$$

Démonstration. Clairement, les fonctions :

$$\varphi_k(x) = \underline{0 \cdot \mathbf{1}_{E^*_{0,2^k}}(x)} + \sum_{\ell=1}^{2^{2k}} \frac{\ell-1}{2^k} \cdot \mathbf{1}_{E_{\ell,2^k}}(x),$$

$$\varphi_{k+1}(x) = \underline{0 \cdot \mathbf{1}_{E^*_{0,2^{k+1}}}(x)} + \sum_{\ell'=1}^{2^{2k+2}} \frac{\ell'-1}{2^{k+1}} \cdot \mathbf{1}_{E_{\ell',2^{k+1}}}(x),$$

sont manifestement positives.

Tout d'abord, lorsque $x \in \mathbb{R}^d \big\backslash Q_{2^{k+1}}$, on a bien :

$$\varphi_k = 0 \leqslant 0 = \varphi_{k+1}.$$

Mais aussi, lorsque $x \in Q_{2^{k+1}} \big\backslash Q_{2^k}$:

$$\varphi_k = 0 \leqslant \varphi_{k+1}.$$

Ensuite, lorsque $x \in Q_{2^k}$, techniquement, les choses se gâtent, mais nous somme courageux et volontaires. Trois cas s'invitent à notre table de corsaires :

$$f(x) = 0, \qquad\qquad 0 < f(x) < 2^k, \qquad\qquad 2^k \leqslant f(x).$$

Premier cas : $f(x) = 0$, d'où $x \in E^*_{0,2^k}$, puis $x \in E^*_{0,2^{k+1}} \cap Q_{2^k}$, et par conséquent :

$$0 = F_{2^k}(x) = F_{2^k,2^k}(x) = \varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x) = F_{2^{k+1},2^{k+1}}(x) = F_{2^{k+1}}(x) = 0.$$

Deuxième cas : $0 < f(x) < 2^k$, d'où $x \in E_{\ell_x,2^k}$ et $x \in E_{\ell'_x,2^{k+1}}$ pour deux certains entiers :

$$1 \leqslant \ell_x < 2^{2k} \qquad \text{et} \qquad 1 \leqslant \ell'_x < 2^{2k+2},$$

avec par définition :

$$\frac{\ell_x - 1}{2^k} < F_{2^k}(x) = f(x) \leqslant \frac{\ell_x}{2^k} \qquad \text{et} \qquad \frac{\ell'_x - 1}{2^{k+1}} < F_{2^{k+1}}(x) = f(x) \leqslant \frac{\ell'_x}{2^{k+1}}.$$

Mais la famille des intervalles de longueur $\frac{1}{2^{k+1}}$ dans le réseau $\frac{1}{2^{k+1}}\mathbb{N}$ est emboîtée de longueur moitié dans le réseau $\frac{1}{2^k}\,\mathbb{N}$. Donc si la valeur $f(x)$ est comprise dans ces deux intervalles, exactement deux cas exclusifs l'un de l'autre peuvent se produire :

$$\frac{\ell'_x - 1}{2^{k+1}} = \frac{\ell_x - 1}{2^k} \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{\ell'_x - 1}{2^{k+1}} = \frac{\ell_x - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}.$$

À ce moment-là, la croissance devient claire :

$$\varphi_k(x) = \frac{\ell_x - 1}{2^k} \leqslant \frac{\ell_x - 1}{2^k} + \left\{ \begin{matrix} \text{ou bien } \ 0 \\ \text{ou bien } \ \dfrac{1}{2^{k+1}} \end{matrix} \right\} = \frac{\ell'_x - 1}{2^{k+1}} = \varphi_{k+1}(x).$$

Troisième cas : $f(x) \geqslant 2^k$, d'où $F_{2^k}(x) = 2^k$, puis $x \in E_{2^{2k},2^k}$ et enfin :

$$\varphi_k(x) = F_{2^k,2^k}(x) = \frac{2^{2k}-1}{2^k} = 2^k - \frac{1}{2^k}.$$

Mais grâce à l'Assertion 11.2, on a l'inégalité utile :

$$0 \leqslant F_{2^{k+1}}(x) - F_{2^{k+1},2^{k+1}}(x) \leqslant \frac{1}{2^{k+1}},$$

et comme $F_{2^{k+1}}(x)$ vaut :

□ ou bien $f(x) \geqslant 2^k$ lorsque $2^k \leqslant f(x) < 2^{k+1}$;
□ ou bien 2^{k+1} lorsque $f(x) \geqslant 2^{k+1}$;
on a toujours dans tous les cas :

$$F_{2^{k+1}}(x) \geqslant 2^k,$$

et l'inégalité utile :

$$F_{2^{k+1}}(x) - \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant F_{2^{k+1},2^{k+1}}(x)$$

devient :

$$\varphi_k(x) = 2^k - \frac{1}{2^k} \leqslant 2^k - \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant F_{2^{k+1}}(x) - \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant F_{2^{k+1},2^{k+1}}(x) = \varphi_{k+1}(x),$$

ce qu'il fallait faire voir. □

Pour terminer, puisque l'on a par construction grâce à l'Assertion 11.2 :

$$0 \leqslant F_{2^k}(x) - \varphi_k(x) \leqslant \frac{1}{2^k},$$

et puisque $F_{2^k}(x) \longrightarrow f(x)$, on a bien aussi $\varphi_k(x) \longrightarrow f(x)$ quand $k \to \infty$. □

On se convainc par la réflexion que le résultat précédent reste valable pour les fonctions :

$$f\colon \quad \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

à valeurs dans l'ensemble étendu des nombres réels positifs. Pour aller encore plus loin, formulons un résultat général dans lequel nous éliminons l'hypothèse que f est positive, et dans lequel nous autorisons f à prendre aussi la valeur $-\infty$.

Théorème 11.4. *Soit une fonction mesurable à valeurs dans l'ensemble étendu des nombres réels :*

$$f\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Alors il existe une suite $\big(\varphi_k\big)_{k=1}^{\infty}$ *de fonctions finies :*

$$\varphi_k\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

croissantes satisfaisant :

$$\big|\varphi_k(x)\big| \leqslant \big|\varphi_{k+1}(x)\big| \leqslant \big|f(x)\big| \qquad (k \geqslant 1;\ x \in \mathbb{R}^d)$$

qui converge ponctuellement vers f en tout point :

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x) \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^d).$$

Démonstration. Utilisons les deux fonctions auxiliaires classiques :

$$f^+(x) := \max\big(0,\, f(x)\big),$$
$$f^-(x) := -\min\big(f(x),\, 0\big),$$

en termes desquelles :

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x).$$

Puisque f^+ et f^- sont toutes deux à valeurs positives, le théorème qui précède fournit deux suites de fonctions finies croissantes :

$$\big(\varphi_k^+\big)_{k=1}^{\infty} \qquad \text{et} \qquad \big(\varphi_k^-\big)_{k=1}^{\infty}$$

qui convergent ponctuellement en tout point vers f^+ et vers f^-, respectivement. Alors si on introduit la suite de fonctions :

$$\varphi_k(x) := \varphi_k^+(x) - \varphi_k^-(x),$$

on voit que cette suite $\varphi_k(x)$ converge vers f en tout point.

Enfin, on se convainc aisément en utilisant les propriétés de φ_k^+ et de φ_k^- (exercice) que la suite :

$$\big(|\varphi_k|\big)_{k=1}^{\infty} \,=\, \big(\varphi_k^+ + \varphi_k^-\big)_{k=1}^{\infty}$$

est effectivement croissante. □

Ensuite, on peut aller encore au-delà des fonctions étagées :

$$\sum_{l=1}^{L} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_l},$$

et approximer les fonctions mesurables par les fonctions encore plus simples que sont les fonctions en escalier. Toutefois, la convergence n'aura pas lieu en tout point.

Proposition 11.5. *Étant donné un sous-ensemble mesurable quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$, la fonction étagée atomique et unitaire :*

$$\mathbf{1}_E$$

est approximable par des fonctions en escalier au sens suivant. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble mesurable $F_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ de mesure :

$$m\big(F_\varepsilon\big) \,\leqslant\, \varepsilon,$$

et il existe une fonction en escalier ψ_ε définie sur $\mathbb{R}^d$ telle que :

$$\psi_\varepsilon(x) \,=\, \mathbf{1}_E(x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d \backslash F_\varepsilon$.

Démonstration. Grâce au Théorème 6.15 **(iv)**, il existe une réunion finie :

$$\bigcup_{j=1}^{J} Q_j$$

de cubes fermés presque disjoints $Q_j \subset \mathbb{R}^d$ telle que :

$$m\bigg(E\,\Delta \bigcup_{j=1}^{J} Q_j\bigg) \,\leqslant\, \frac{\varepsilon}{2}.$$

Choisissons ensuite, pour tous $j = 1, \dots, J$, des sous-cubes fermés :

$$Q_j' \,\subset\, \mathsf{Int}\, Q_j,$$

suffisamment gonflés pour que l'on ait encore :

$$m\bigg(\underbrace{E\,\Delta \bigcup_{j=1}^{J} Q_j'}_{=:\,F_\varepsilon}\bigg) \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Nous affirmons alors que le fermé F_ε ainsi défini fait l'affaire en complicité avec la fonction en escalier :

$$\psi_\varepsilon(x) := \sum_{j=1}^{J} \mathbf{1}_{Q'_j}(x).$$

En effet, pour vérifier qu'on a bien $\psi_\varepsilon(x) = \mathbf{1}_E(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}^d \backslash F_\varepsilon$, observons qu'étant donné deux sous-ensembles quelconques $A, B \subset \mathbb{R}^d$, on a toujours la réunion disjointe générale en quatre sous-ensembles :

$$\mathbb{R}^d = \Big[\mathbb{R}^d \backslash \big(A \cup B\big)\Big] \cup \Big[\big(A \backslash B\big)\Big] \cup \Big[\big(B \backslash A\big)\Big] \cup \Big[A \cap B\Big],$$

qui s'applique ici pour donner :

$$\mathbb{R}^d = \bigg(\mathbb{R}^d \bigg\backslash E \cup \bigcup_{j=1}^{J} Q'_j\bigg) \cup \underbrace{\bigg(E \bigg\backslash \bigcup_{j=1}^{J} Q'_j\bigg) \cup \bigg(\bigcup_{j=1}^{J} Q'_j \bigg\backslash E\bigg)}_{\text{Ensemble } F_\varepsilon \text{ où } \psi_\varepsilon \text{ n'est pas non-contrôlée}} \cup \bigg(E \cap \bigcup_{j=1}^{J} Q'_j\bigg),$$

ce qui nous conduit à inspecter seulement les deux cas non soulignés.

Premier cas : $x \in \mathbb{R}^d \backslash \big(E \cup Q'_1 \cup \cdots \cup Q'_J\big)$, d'où la coïncidence triviale :

$$\mathbf{1}_E(x) = 0 = \psi_\varepsilon(x).$$

Deuxième cas : $x \in E \cap \big(Q'_1 \cup \cdots \cup Q'_J\big)$ d'où, puisque x ne peut appartenir qu'à un seul des Q'_j, la coïncidence tout aussi triviale :

$$\mathbf{1}_E(x) = 1 = \psi_\varepsilon(x).$$

La démonstration est donc achevée. □

Théorème 11.6. *Sur $\mathbb{R}^d$, étant donné une fonction étagée φ quelconque :*

$$\varphi = \sum_{l=1}^{L} a_l \cdot \mathbf{1}_{E_l},$$

où les $E_l \subset \mathbb{R}^d$ sont des sous-ensembles mesurables, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble mesurable $F_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ de mesure :

$$m\big(F_\varepsilon\big) \leqslant \varepsilon,$$

et il existe une fonction en escalier :

$$\psi_\varepsilon = \sum_{k=1}^{N} b_k \cdot \mathbf{1}_{R_k},$$

où les $R_k \subset \mathbb{R}^d$ sont des cubes fermés, tels que :

$$\psi_\varepsilon(x) = \varphi(x) \qquad \text{(pour } x \in \mathbb{R}^d \backslash F_\varepsilon\text{)}.$$

Démonstration. En effet, φ est une combinaison linéaire de fonctions étagées atomiques $\mathbf{1}_{E_l}$ auxquelles s'applique la proposition qui précède, et puisque la combinaison linéaire est *finie*, le résultat découle aisément (exercice) de manipulations standard de quantités-ε. □

Des deux Théorèmes 11.4 et 11.6 découle enfin le résultat majeur suivant, lequel exprime que les fonctions mesurables sont bien représentées par des fonctions en escalier — dont la complexité, il est vrai, peut éventuellement être très élevée.

Théorème 11.7. *Étant donné une fonction mesurable quelconque :*

$$f\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

il existe toujours une suite de fonctions en escalier (finies) :

$$\psi_k\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R},$$

qui convergent presque partout *vers f :*

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) \,=\, f(x) \qquad\qquad \text{(pour presque tout } x\in\mathbb{R}^d\text{)}.$$

Démonstration. Le Théorème 11.4 pénultième a déjà fournit une suite de fonctions étagées croissantes :

$$\varphi_k\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui convergent vers f en *tout* point de $\mathbb{R}^d$:

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) \,=\, f(x) \qquad\qquad (\forall\, x\in\mathbb{R}^d).$$

Ensuite, grâce au Théorème 11.6 qui précède, appliqué indéfiniment à $\varepsilon := \frac{1}{2^k}$ pour tous les entiers $k \geqslant 1$, il existe une suite de fonctions en escalier $\psi_k\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\psi_k(x) = \varphi_k(x),$$

en tout point :

$$x \,\in\, \mathbb{R}^d \backslash F_k,$$

situé en-dehors d'un certain sous-ensemble mesurable $F_k \subset \mathbb{R}^d$ de mesure :

$$m\big(F_k\big) \,\leqslant\, \frac{1}{2^k}.$$

Introduisons alors l'ensemble :

$$F := \bigcap_{\ell=1}^{\infty} \underbrace{\bigg(\bigcup_{k\geqslant \ell} F_k\bigg)}_{=:\, G_\ell}.$$

Assertion 11.8. *Cet ensemble $F = \cap_{\ell=1}^{\infty} G_\ell$ est de mesure nulle !*

Vérification. En effet la mesure de ces G_ℓ :

$$\begin{aligned} m\big(G_\ell\big) \,&=\, m\bigg(\bigcup_{k\geqslant\ell} F_k\bigg) \\ &\leqslant\, \sum_{k=\ell}^{\infty} m\big(F_k\big) \\ &\leqslant\, \sum_{k=\ell} \frac{1}{2^k} \\ &=\, \frac{1}{2^{\ell-1}} \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

tend vers 0 lorsque $\ell \to \infty$, et le Théorème 6.14 sur les suites décroissantes d'ensembles mesurables donne alors bien :

$$\begin{aligned} m(F) &= m\bigg(\bigcap_{\ell=1}^{\infty} G_\ell\bigg) \\ &= \lim_{\ell\to\infty} m\big(G_\ell\big) \\ &= 0. \end{aligned} \qquad \square$$

Soit maintenant un point hors de cet ensemble de mesure nulle :

$$x \notin F = \bigcap_{\ell=1}^{\infty} G_\ell.$$

Ceci veut dire qu'il existe un entier $\ell_x \geqslant 1$ tel que :

$$x \notin G_{\ell_x} = \bigcup_{k\geqslant\ell_x} F_k.$$

Ainsi pour tout $k \geqslant \ell_x$, le point x est-il hors de F_k, ce qui assure par construction que les fonctions en escalier ont les mêmes valeurs que les fonctions étagées :

$$\psi_k(x) = \varphi_k(x) \qquad\qquad (k \geqslant \ell_x;\ x \notin F).$$

Pour terminer, une simple inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \big|f(x) - \psi_k(x)\big| &\leqslant \big|f(x) - \varphi_k(x)\big| + \underline{\big|\varphi_k(x) - \psi_k(x)\big|}_{\circ} \\ &= \big|f(x) - \varphi_k(x)\big| \\ &\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

montre que l'on a bien la convergence :

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = f(x) \qquad\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^d \setminus F),$$

en-dehors de cet ensemble de mesure nulle intuitivement négligeable. $\square$

12. Les trois principes de Littlewood

Bien que les concepts d'ensemble mesurable et de fonction mesurable représentent de puissants outils, ils entretiennent des relations de proximité fondamentale avec les concepts plus anciens qu'il remplacent. Littlewood a résumé avec justesse ces connexions sous la forme de *trois principes spéculatifs* qui offrent un guide intuitif précieux à toutes les personnes en apprentissage de la théorie (et aussi aux professeurs qui aiment que la *pensée* s'exprime dans les cours de L3 !).

(i) Tout ensemble est *presque* une réunion finie d'intervalles.

(ii) Toute fonction est *presque* continue.

(iii) Toute suite convergente est *presque* uniformément convergente.

Les ensembles et les fonctions dont il s'agit ici sont bien entendu supposés mesurables. Le sens du mot « *presque* » doit être précisé dans chaque contexte, il n'y a pas de définition axiomatique formelle.

En fait, une version mathématique satisfaisante du premier principe **(i)** a déjà été démontrée comme étant la dernière partie du Théorème 6.15.

Ensuite, une formulation exacte du deuxième principe **(ii)** constitue un résultat particulièrement frappant lorsqu'on ne connaît que la théorie de l'intégration de Riemann.

Théorème 12.1. [Egorov] *Sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie :*

$$m(E) < \infty,$$

on suppose donnée une suite quelconque de fonctions mesurables :

$$f_k\colon \quad E \longrightarrow \mathbb{R},$$

qui converge presque partout simplement *vers une certaine fonction-limite :*

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \qquad \text{(pour presque tout } x \in E\text{)}.$$

Alors en fait, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un certain sous-ensemble fermé :

$$E_\varepsilon \subset E,$$

de mesure presque égale à celle de E :

$$m\big(E_\varepsilon\big) \geqslant m(E) - \varepsilon,$$

sur lequel la convergence est uniforme :

$$f_k(x)\big|_{E_\varepsilon} \xrightarrow{\text{uniformément}} f(x)\big|_{E_\varepsilon}.$$

À un ensemble $E \backslash E_\varepsilon$ de mesure arbitrairement petite près, donc, toute convergence simple est en fait uniforme — *magical, isn't it ?*

Démonstration. Après élagage éventuel d'un sous-ensemble de mesure nulle contenu dans E, on peut supposer que la convergence simple :

$$f_k(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

a lieu en *tout* point $x \in E$.

Soient alors deux entiers $n \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 1$ quelconques. Introduisons la famille doublement indicée de sous-ensembles de E :

$$E_\ell^n := \big\{x \in E\colon \big|f_k(x) - f(x)\big| \leqslant \tfrac{1}{n},\ \forall\, k \geqslant \ell\big\}.$$

Fixons temporairement n, et observons la croissance :

$$E_\ell^n \subset E_{\ell+1}^n.$$

Assertion 12.2. *On a aussi la réunion complète :*

$$\bigcup_{\ell=1}^{\infty} E_\ell^n = E,$$

Vérification. En effet, en tout point $x \in E$, il existe par hypothèse un entier $K_{x,n}$ assez grand pour que :

$$k \geqslant K_{x,n} \Longrightarrow \big|f_k(x) - f(x)\big| \leqslant \tfrac{1}{n},$$

ce qui veut précisément dire que :

$$x \in E_{K_{x,n}}^n. \qquad \square$$

Ensuite, le Théorème 6.13 s'applique à cette réunion complète pour donner :

$$\lim_{\ell\to\infty} m\big(E_\ell^n\big) = m(E),$$

et donc par conséquent, il existe un entier $\ell_n \geqslant 1$ assez grand pour que :

$$\ell \geqslant \ell_n \implies m\big(E_\ell^n\big) \geqslant m(E) - \frac{1}{2^n}.$$

Avec ce qui vient d'être dit, on obtient de plus que :

$$\big|f_k(x) - f(x)\big| \leqslant \frac{1}{n}, \qquad \begin{array}{l} \forall\, k \geqslant \ell_n, \\ \forall\, x \in E_{\ell_n}^n. \end{array}$$

Maintenant, choisissons $N \gg 1$ assez grand pour que :

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Introduisons enfin l'ensemble :

$$E'_\varepsilon := \bigcap_{n \geqslant N} E_{\ell_n}^n.$$

Alors la mesure de son complémentaire est toute petite :

$$\begin{aligned} m\big(E \backslash E'_\varepsilon\big) &= m\bigg(E \Big\backslash \bigcap_{n \geqslant N} E_{\ell_n}^n\bigg) \\ &= m\bigg(\bigcup_{n \geqslant N} \big(E \backslash E_{\ell_n}^n\big)\bigg) \\ &\leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Maintenant, pour traiter de la convergence uniforme, soit $\delta > 0$ arbitrairement petit, et choisissons un entier $n \geqslant N$ avec :

$$\frac{1}{n} \leqslant \delta.$$

Par définition :

$$x \in E'_\varepsilon \implies x \in E_{\ell_n}^n \qquad (\forall\, n \geqslant N).$$

Alors ce qui précède montre qu'on a bien une inégalité :

$$\big|f_k(x) - f(x)\big| \leqslant \delta, \qquad \begin{array}{l} \forall\, k \geqslant \ell_n, \\ \forall\, x \in E'_\varepsilon, \end{array}$$

exprimant la convergence uniforme sur E'_ε.

En général E'_ε n'est pas forcément fermé, mais grâce au Théorème 6.15 **(ii)**, on peut remplacer E'_ε par un fermé $E_\varepsilon \subset E'_\varepsilon$ qui ne perd que très peu en mesure :

$$m\big(E'_\varepsilon \backslash E_\varepsilon\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui maintient :

$$m\big(E_\varepsilon\big) \geqslant m(E) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2},$$

et achève la démonstration courageuse de ce magnifique Théorème d'Egorov ! $\square$

Le théorème suivant atteste la validité du second principe de Littlewood.

Théorème 12.3. **[Lusin]** *Sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie :*

$$m(E) < \infty,$$

soit une fonction mesurable finie :

$$f\colon \quad E \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un certain sous-ensemble fermé :

$$E_\varepsilon \subset E,$$

de mesure presque égale à celle de E :

$$m\big(E_\varepsilon\big) \geqslant m(E) - \varepsilon,$$

en restriction auquel la fonction f :

$$f\big|_{E_\varepsilon} \in \mathscr{C}^0$$

est en fait continue !

Attention ici ! Le théorème dit seulement que f est continue *en restriction au sous-ensemble* E_ε, il ne dit en aucun cas que f, comme fonction de E dans $\mathbb{R}$, soit continue aux points de E_ε.

Démonstration. Grâce au Théorème 11.7, il existe une suite de fonctions en escalier :

$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$$

qui converge presque partout vers la fonction f. Or une fonction en escalier est combinaison linéaire finie de fonctions indicatrices de rectangles, et puisque de telles fonctions n'ont de discontinuités qu'aux bords de ces rectangles, on se convainc aisément qu'il existe pour tout $n \geqslant 1$ un sous-ensemble $F_n \subset \mathbb{R}^d$ de mesure :

$$m\big(F_n\big) \leqslant \frac{1}{2^n},$$

en dehors duquel cette fonction en escalier :

$$f_n\big|_{\mathbb{R}^d \backslash F_n} \in \mathscr{C}^0$$

est *continue*.

Ensuite, grâce au Théorème d'Egorov vu à l'instant, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fermé :

$$E_{\frac{\varepsilon}{3}} \subset E,$$

dont le complémentaire est tout petit en mesure :

$$m\big(E \backslash E_{\frac{\varepsilon}{3}}\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

en restriction auquel la convergence est *uniforme :*

$$f_n\big|_{E_{\frac{\varepsilon}{3}}} \underset{\text{uniformément}}{\longrightarrow} f\big|_{E_{\frac{\varepsilon}{3}}}.$$

Ensuite, choisissons $N \gg 1$ assez grand pour que :

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

et introduisons l'ensemble :

$$F'_\varepsilon \,:=\, E_{\frac{\varepsilon}{3}} \Big\backslash \bigcup_{n \geqslant N} F_n,$$

qui reste de mesure très proche de celle de E (exercice mental) :

$$m\big(F'_\varepsilon\big) \,\geqslant\, m(E) - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors en restriction à cet ensemble, pour tout $n \geqslant N$, les fonctions :

$$f_n\big|_{F'_\varepsilon} \,\in\, \mathscr{C}^0$$

sont par construction continues. Mais nous savons pertinemment par le cours de L2 que la fonction $f|_{F'_\varepsilon}$, qui est limite *uniforme* de ces fonctions continues $f_n|_{F'_\varepsilon}$, reste *continue* !

Pour terminer, si d'aventure nous n'avions pas la chance que F'_ε soit fermé, qu'à cela ne tienne ! le Théorème 6.15 **(ii)** nous permet à nouveau d'approximer F'_ε par un certain fermé $F_\varepsilon \subset F'_\varepsilon$ tout en contrôlant la mesure de la différence :

$$m\big(F_\varepsilon \backslash F'_\varepsilon\big) \,\leqslant\, \frac{\varepsilon}{3},$$

ce qui conclut. □

13. Exercices

Exercice 1. [Limites inférieure et supérieure d'une suite numérique] Étant donné une suite quelconque $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels, on considère la suite associée :

$$b_n^- := \inf \big\{ b_m : \ m \geqslant n \big\}.$$

(a) Montrer que cette suite $(b_n^-)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

(b) On définit alors (justifier) :

$$\liminf_{n\to\infty} b_n := \lim_{n\to\infty} b_n^-,$$

un nombre appartenant à $[-\infty, +\infty]$. Vérifier, pour tout entier $N \geqslant 1$ fixé, que l'on a :

$$\liminf_{n\to\infty} \big(b_n\big)_{n\geqslant 1} = \liminf_{n\to\infty} \big(b_n\big)_{n\geqslant N}.$$

(c) Étant donné à nouveau une suite quelconque $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels, montrer que l'autre suite associée :

$$b_n^+ := \sup \big\{ b_m : \ m \geqslant n \big\}$$

est décroissante.

(d) Symétriquement, on définit :

$$\limsup_{n\to\infty} b_n := \lim_{n\to\infty} b_n^+,$$

un nombre appartenant aussi à $[-\infty, +\infty]$. Montrer que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une certaine limite $b \in [-\infty, +\infty]$ si et seulement si :

$$\liminf_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(e) Dans le cas général où aucune hypothèse n'est faite sur la convergence de la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$, réinterpréter ce qui précède en démontrant qu'il existe toujours une première sous-suite $\big(n_k\big)_{k\geqslant 1}$ telle que $\big(b_{n_k}\big)_{k\geqslant 1}$ converge vers :

$$\liminf_{n\to\infty} b_n \,=\, \lim_{k\to\infty} b_{n_k},$$

et, de manière symétrique, qu'il existe aussi une deuxième sous-suite $\big(n_l\big)_{l\geqslant 1}$ telle que $\big(b_{n_l}\big)_{l\geqslant 1}$ converge vers :

$$\limsup_{n\to\infty} b_n \,=\, \lim_{l\to\infty} b_{n_l}.$$

Exercice 2. Soient $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ et $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ deux suites de nombres réels majorées :

$$a_n \leqslant M \qquad \text{et} \qquad b_n \leqslant M \qquad\qquad (\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, n \geqslant 1).$$

(a) Montrer que :

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} \big(a_n + b_n\big) \leqslant \limsup_{n \longrightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \longrightarrow \infty} b_n.$$

(b) Lorsque $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vers une certaine limite $b_\infty = \lim_{n \to \infty} b_n$, montrer que :

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} \big(a_n + b_n\big) = \limsup_{n \longrightarrow \infty} a_n + b_\infty.$$

(c) Soit la suite $c_n := (-1)^n + n \sin \frac{1}{n}$, avec $n \geqslant 1$. Déterminer :

$$\liminf_{n \longrightarrow \infty} c_n \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n \longrightarrow \infty} c_n.$$

Exercice 3. Soit un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$ et, pour $n \geqslant 1$ entier, soit l'ouvert :

$$\mathscr{O}_n := \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ \mathsf{dist}(x, E) < 1/n\big\}.$$

(a) Lorsque E est compact et mesurable, montrer que :

$$m(E) = \lim_{n \to \infty} m\big(\mathscr{O}_n\big).$$

(b) Lorsque E est fermé et non borné, montrer que cette conclusion peut devenir fausse.

(c) Lorsque E est ouvert et borné, montrer que cette conclusion peut aussi être mise en défaut.

Exercice 4. Soit B une boule ouverte dans $\mathbb{R}^d$ de rayon $R > 0$. En utilisant des translations et des dilatations, montrer que :

$$m(B) = c_d\, R^d,$$

pour la constante strictement positive qui est le volume de la boule unité :

$$c_d = m\big(\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ |x| < 1\}\big).$$

Exercice 5. Si $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_d)$ est un d-uplet de nombres positifs $\delta_i > 0$, et si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble, on définit $\delta\, E$ par :

$$\delta\, E := \big\{(\delta_1 x_1, \dots, \delta_d x_d)\colon\ (x_1, \dots, x_d) \in E\big\}.$$

Montrer que $\delta\, E$ est mesurable toutes les fois que E et mesurable, et dans ce cas, montrer que :

$$m(\delta\, E) = \delta_1 \cdots \delta_d\, m(E).$$

Exercice 6. Soit $L\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire. Montrer que si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, $L(E)$ est aussi mesurable, en procédant comme suit.

(a) Montrer que si E est compact, $L(E)$ l'est aussi.

(b) Montrer que si E est un F_σ-ensemble, $L(E)$ l'est aussi.

(c) Montrer que la restriction $L|_E$ est 1-lipschitzienne, à savoir qu'il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\big|L(x'') - L(x')\big| \leqslant K \cdot |x'' - x'| \qquad\qquad (\forall\, x'\ \forall\, x'' \in E).$$

(d) Montrer que L envoie un cube quelconque fermé de longueur $\ell > 0$ dans un cube fermé de longueur $2\sqrt{d}\, K\, \ell$.

(e) Lorsque $m(E) = 0$, montrer que $m\big(L(E)\big) = 0$.

(f) Appliquer le Théorème 8.6 pour conclure.

Exercice 7. Trouver un exemple d'ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d$ tel que le bord de son adhérence :

$$m\big(\partial \overline{\mathscr{O}}\big) > 0$$

est de mesure de Lebesgue strictement positive. Indication: Dans $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, considérer l'ensemble qui est la réunion, pour $k = 1, 3, 5, 7, \dots$ impair des 2^{k-1} intervalles que l'on supprime pour construire l'ensemble C_k qui conduit à l'ensemble triadique de Cantor $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$.

Exercice 8. Soit $A \subset [0, 1]$ le sous-ensemble des nombres dont le développement décimal infini ne contient pas le chiffre 4. Calculer la mesure $m(A)$.

Exercice 9. Le Théorème 3.2 énonce que tout sous-ensemble ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^1$ est réunion disjointe d'intervalles ouverts. Mais l'analogue en dimension $d \geqslant 2$ est en général faux.

(a) Montrer qu'un disque ouvert non vide dans $\mathbb{R}^2$ n'est *pas* réunion disjointe de rectangles ouverts. Indication: Examiner ce qu'il advient du bord de ces rectangles.

(b) Montrer qu'un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 2$ est réunion disjointe de rectangles ouverts si et seulement si Ω lui-même est un rectangle ouvert.

Exercice 10. **(a)** Montrer qu'un sous-ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}^d$ est un G_δ-ensemble. Indication: Pour $n \geqslant 1$ entier, introduire $\mathscr{O}_n := \{x \in \mathbb{R}^d \colon \operatorname{dist}(x, F) < 1/n\}$.

(b) Montrer qu'un sous-ensemble ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d$ est un F_σ-ensemble.

(c) Trouver un exemple de F_σ-ensemble qui n'est pas un G_δ-ensemble. Indication: Utiliser un ensemble dénombrable dense approprié.

(d) Trouver un exemple d'ensemble borélien qui n'est ni un G_δ-ensemble, ni un F_σ-ensemble.

Exercice 11. Le but de cet exercice est de montrer que recouvrir les sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^d$ par un nombre *fini* de cubes ne suffit pas à produire un concept réellement satisfaisant de mesure extérieure $m^*(E)$. On se restreint ici à la dimension $d = 1$.

En effet, la *mesure extérieure de Jordan* $m_J^*(E)$ peut être définie par :

$$m_J^*(E) \,=\, \inf \sum_{j=1}^{J} \big|I_j\big|,$$

où l'infimum est pris sur les recouvrements *finis :*

$$E \,\subset\, \bigcup_{j=1}^{J} I_j,$$

par des intervalles fermés I_j.

(a) Montrer que $m_J^*(E) = m_J^*\big(\overline{E}\big)$ pour tout sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$.

(b) Trouver un sous-ensemble dénombrable $E \subset [0,1]$ tel que $m_J^*(E) = 1$, tandis que $m^*(E) = 0$.

Exercice 12. Au début de la *Théorie de la mesure*, on pourrait définir le concept de *mesure extérieure* en utilisant des recouvrements par des rectangles, au lieu d'employer des cubes. Plus précisément, étant donné un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$, on introduit :

$$m_{\mathscr{R}}^*(E) \,:=\, \inf \sum_{j=1}^{\infty} \big|R_j\big|,$$

où l'infimum est maintenant pris sur toutes les recouvrements dénombrables :

$$E \,\subset\, \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$$

par des rectangles R_j. Montrer que cette approche donne effectivement lieu à la même *Théorie de la mesure* que celle développée dans le texte, et notamment, établir que :

$$m^*(E) = m_{\mathscr{R}}^*(E).$$

Exercice 13. Soit un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$. Si $\big(I_j\big)_{j \in J}$ est une famille d'intervalles ouverts non vides $I_j \subset \mathbb{R}$ tels que :

$$\sum_{j \in J} m\big(I_j\big) \,<\, b - a,$$

montrer que leur réunion n'est pas couvrante :

$$\bigcup_{j \in J} I_j \,\not\supset\, [a,b].$$

Exercice 14. **(a)** Montrer que toute fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui est continue sauf en un nombre dénombrable de points est mesurable.

(b) Montrer que la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ de l'ensemble $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ des rationnels est mesurable.

(c) Montrer que toute fonction monotone (croissante ou décroissante) $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable.

(d) Établir la mesurabilité de la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{q} & \text{lorsque } \ x = \dfrac{p}{q} \ \text{ avec } \ (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \ \text{ premiers entre eux}. \end{cases}$$

Exercice 15. Montrer que toute fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue à droite est mesurable. Indication: Pour $n \geqslant 1$ entier, introduire les fonctions :

$$f_n(x) \,:=\, \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\Big(\frac{k+1}{2^n}\Big)\, \mathbf{1}_{[\frac{k}{2^n},\, \frac{k+1}{2^n}[}(x).$$

Exercice 16. Soit $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$ une famille de fonctions mesurables $f_t\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ paramétrées par $t \in \mathbb{R}$ telles qu'en tout point fixé $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto f_t(x)$ est continue à droite.

(a) Montrer, pour tout $y \in \mathbb{R}$, que l'on a :

$$\Big\{x \in \mathbb{R}\colon\ \sup_{t \in \mathbb{R}} f_t(x) > y\Big\} \ = \ \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} \big\{x \in \mathbb{R}\colon\ f_t(x) > y\big\}.$$

(b) Montrer que la fonction $x \longmapsto \sup_{t \in \mathbb{R}} f_t(x)$ est mesurable.

Exercice 17. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $f = f(x,y)$ qui est séparément continue par rapport à chaque variable. Montrer que f est mesurable. Indication: Approximer $f(x,y)$ par la suite :

$$f_n(x,y) \,:=\, f\big(x,\, \tfrac{\mathsf{Ent}\,(yn)}{n}\big) \qquad\qquad (n \geqslant 1).$$

Exercice 18. Soit l'intervalle unité $[0,1] \subset \mathbb{R}$, et soit un nombre réel fixé ξ avec $0 < \xi < 1$. À l'étape 1, on supprime de $[0,1]$ l'intervalle ouvert de longueur ξ situé centralement. À l'étape 2, on supprime de chacun des deux intervalles restants l'intervalle ouvert situé centralement de longueur $\xi\,\frac{1-\xi}{2}$. On itère la construction pour tout entier $n \geqslant 1$. Si on note C_ξ l'intersection infinie de tous ces ensembles, montrer que $m^*(C_\xi) = 0$.

Exercice 19. Soit $\widehat{C} \subset [0,1]$ le sous-ensemble de type Cantor qui est construit en supprimant, à la n-ème étape, 2^{n-1} intervalles ouverts situés centralement tous de longueur ℓ_n avec toujours :

$$\ell_1 + 2\,\ell_2 + \cdots + 2^{n-1}\,\ell_n \,<\, 1.$$

Si ces longueurs ℓ_n sont choisies de telle sorte qu'à l'infini, on ait toujours :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\,\ell_n \,<\, 1,$$

montrer que $\widehat{C}$ est mesurable, de mesure :

$$m\big(\widehat{C}\big) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\,\ell_n.$$

Exercice 20. Soient $\widehat{C} = \widehat{C}_{\ell_1, \ell_2, \ldots}$ et $C = C_\xi$ deux ensembles de type Cantor contenus dans $[0,1]$ tels que construits dans les deux exercices précédents avec $m\big(\widehat{C}\big) > 0$ et $m(C) = 0$. En imitant la construction de la fonction de Cantor-Lebesgue, montrer qu'il existe une fonction $\Phi\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ jouissant des propriétés suivantes :

(a) Φ est continue et bijective ;

(b) Φ est monotone croissante ;

(c) Φ envoie $\widehat{C}$ surjectivement sur C.

Exercice 21. Trouver un exemple de fonction mesurable f et de fonction continue Φ tels que $f \circ \Phi$ ne soit pas mesurable.
Indication: Soit $\Phi \colon \widehat{C} \longrightarrow C$ comme dans l'exercice précédent, et soit $N \subset \widehat{C}$ un sous-ensemble *non* mesurable. Prendre $f = \mathbf{1}_{\Phi(N)}$.

Exercice 22. Utiliser la construction de l'exercice précédent pour trouver un ensemble Lebesgue-mesurable qui n'est pas un borélien dans $\mathbb{R}$.

Exercice 23. Cet exercice produit un exemple de fonction mesurable $f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que toute fonction g qui ne diffère de f que sur un ensemble de mesure nulle est discontinue en *tout* point.
(a) Construire un ensemble mesurable $E \subset [0,1]$ tel que, pour tout intervalle ouvert $I \subset [0,1]$, les deux ensembles :

$$E \cap I \qquad \text{et} \qquad E^c \cap I$$

sont de mesure positive. Indication: Considérer un ensemble de type Cantor de mesure strictement positive tel que $\widehat{C}$ dans l'Exercice 19, et ajouter dans chacun des intervalles qui sont supprimés un autre ensemble de Cantor.
(b) Montrer que la fonction indicatrice $f = \mathbf{1}_E$ possède la propriété que toute autre fonction g telle que $g(x) = f(x)$ pour presque tout $x \in [0,1]$ doit être discontinue en *tout* point de $[0,1]$.

Exercice 24. Montrer que la mesure de Lebesgue 2-dimensionnelle du graphe :

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ y = f(x)\big\}$$

d'une fonction continue $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vaut 0.

Exercice 25. [Lemme de Borel-Cantelli] Soit une famille dénombrable $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ de sous-ensembles mesurables $E_k \subset \mathbb{R}^d$ satisfaisant :

$$\sum_{k=1}^{\infty} m\big(E_k\big) \,<\, \infty.$$

On considère :

$$\begin{aligned} E \,&=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ x \in E_k \ \text{pour une infinité d'entiers}\ k\big\} \\ &=: \limsup_{k \to \infty} \big(E_k\big). \end{aligned}$$

(a) Montrer que E est mesurable. Indication: Écrire :

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geqslant n} E_k.$$

(b) Montrer que $m(E) = 0$.

Exercice 26. Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables sur $[0,1]$ avec $|f_n(x)| < \infty$ pour presque tout x. Montrer qu'il existe une suite $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ de nombres réels $c_n > 0$ telle que :

$$0 \,=\, \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x)}{c_n} \qquad\qquad \text{(pour presque tout } x \in [0,1]\text{)}.$$

Indication: Prendre c_n tel que :

$$m\big(\big\{x \in [0,1] \colon\ \big|f_n(x)/c_n\big| \geqslant 1/n\big\}\big) \,\leqslant\, \frac{1}{2^n},$$

et appliquer le Lemme de Borel-Cantelli obtenu dans l'exercice précédent.

Exercice 27. Montrer que tout fonction mesurable est la limite, presque partout, d'une certaine suite de fonctions continues.

Exercice 28. Établir les trois affirmations suivantes concernant l'addition $A + B = \{a + b \in \mathbb{R}^d \colon a \in A,\, b \in B\}$ entre sous-ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^d$.
(a) Lorsque A et B sont ouverts, $A + B$ est aussi ouvert.
(b) Lorsque A et B sont fermés, $A + B$ est mesurable. Indication: Faire voir que $A + B$ est un F_σ-ensemble.
(c) Montrer par un exemple que $A + B$ n'est pas toujours fermé lorsque A et B le sont.

Exercice 29. En dimensions $d = 1$ et $d = 2$, montrer comme suit qu'il existe des ensembles A et B dans $\mathbb{R}^d$ avec $m(A) = 0 = m(B)$, tandis que $m(A + B) > 0$.

(a) Indication: Dans $\mathbb{R}$, choisir $A := C$ l'ensemble triadique standard de Cantor ainsi que $B := C/2$, et montrer que $A + B \supset [0, 1]$.

(b) Indication: Dans $\mathbb{R}^2$, choisir $A := [0, 1] \times \{0\}$ ainsi que $B := \{0\} \times [0, 1]$, et montrer que $A + B = [0, 1] \times [0, 1]$.

Exercice 30. Montrer qu'il existe une fonction continue qui envoie un ensemble Lebesgue-mesurable dans un ensemble non mesurable. Indication: Considérer un sous-ensemble non mesurable de $[0, 1]$, et introduire son image inverse dans l'ensemble de Cantor C par la fonction de Cantor Lebesgue F.

Exercice 31. Soit $f(x, y)$ une fonction sur $\mathbb{R}^2$ qui est séparément continue par rapport à chaque variable. Montrer que f est mesurable. Indication: Approximer f dans la variable x par des fonctions affines par morceaux f_n qui convergent ponctuellement vers f.

Exercice 32. Existe-t-il une énumération $\big\{r_n\big\}_{n=1}^{\infty}$ de l'ensemble $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ des nombres rationnels telle que le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de l'union dénombrable :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Big]r_n - \frac{1}{n},\ r_n + \frac{1}{n}\Big[$$

soit non vide ? Indication: Trouver une énumération pour laquelle les seuls nombres rationnels hors d'un intervalle borné fixé prennent la forme r_n avec n de la forme $n = m^2$.

Exercice 33. Une définition alternative de la mesurabilité pourrait être la suivante : un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble *fermé* $F \subset E$ tel que :

$$m^*(E \backslash F) \leqslant \varepsilon.$$

Établir qu'une telle définition serait en fait entièrement équivalente à celle qui a été donnée dans le texte du cours.

Exercice 34. Montrer que si un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est encadré :

$$A \subset E \subset B,$$

par deux ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^d$ de même mesure $m(A) = m(B)$, alors E est lui aussi mesurable.

Exercice 35. Soient E_1 et E_2 deux sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^d$ emboîtés :

$$E_1 \subset E_2 \subset \mathbb{R}^d.$$

On pose $a := m(E_1)$ et $b := m(E_2)$ et on suppose $a < b$. Montrer que pour tout nombre réel $a < c < b$, il existe un sous-ensemble compact E avec :

$$E_1 \subset E \subset E_2,$$

tel que $m(E) = c$. Indication: Par exemple en dimension $d = 1$ avec $E \subset [0, 1]$ mesurable, étudier la fonction $t \longmapsto m\big(E \cap [0, t]\big)$.

Exercice 36. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de mesure extérieure $m^*(E) > 0$ strictement positive. Montrer que pour tout $0 < \alpha < 1$, il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ tel que :

$$m^*\big(E \cap I\big) \geqslant \alpha\, m^*(I).$$

Intuitivement, E contient presque tout un intervalle. Indication: Choisir un ouvert $\mathscr{O} \subset E$ tel que :

$$m^*(E) \geqslant \alpha\, m^*(\mathscr{O}),$$

puis écrire $\mathscr{O}$ comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints afin de vérifier que l'un de ces intervalles doit satisfaire la propriété désirée.

Exercice 37. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble mesurable de mesure $m(E) > 0$ strictement positive. Montrer que l'*ensemble-différence* de E, défini par :

$$\big\{z \in \mathbb{R}\colon\ z = x - y \text{ pour deux points } x,\, y \in E\big\}$$

contient un intervalle ouvert centré à l'origine.

Indication: Grâce à l'exercice précédent, il existe un intervalle I tel que $m(E \cap I) \geqslant \frac{9}{10}\, m(I)$. Noter $E_0 := E \cap I$ et supposer que l'ensemble-différence de E_0 ne contient pas d'intervalle ouvert centré à l'origine. Vérifier que pour a arbitrairement petit, E_0 et $E_0 + a$ sont disjoints. Afin d'atteindre une contradiction, utiliser :

$$\big(E_0 \cup (E_0 + a)\big) \ \subset\ \big(I \cup (I + a)\big),$$

en observant que le membre de gauche a pour mesure $2\, m(E_0)$, tandis que le membre de droite n'est de mesure que très légèrement supérieure à $m(I)$.

Exercice 38. Montrer que si E et F sont deux sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}$ de mesures strictement positives $m(E) > 0$ et $m(F) > 0$, alors :

$$E + F \ =\ \big\{x + y\colon\ x \in E,\, y \in F\big\}$$

contient un intervalle.

Exercice 39. **(a)** Étant donné un nombre irrationnel $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, montrer qu'il existe une infinité de fractions rationnelles irréductibles $\frac{p}{q}$ telles que :

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \ \leqslant\ \frac{1}{q^2}.$$

(b) Pour $\varepsilon > 0$, montrer que l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe une infinité de fractions rationnelles irréductibles $\frac{p}{q}$ satisfaisant :

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \ \leqslant\ \frac{1}{q^{2+\varepsilon}},$$

est de mesure 0. Indication: Penser au lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 40. Montrer que tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ peut être écrit comme réunion dénombrable :

$$\Omega \ =\ \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,$$

de cubes fermés $Q_j \subset \mathbb{R}^d$ presque disjoints dont la taille rétrécit régulièrement à l'approche du bord :

$$c\, \mathsf{diam}(Q_j) \ \leqslant\ \mathsf{dist}\big(Q_j,\, \Omega^c\big) \ \leqslant\ C\, \mathsf{diam}(Q_j),$$

pour deux constantes $0 < c < C$.