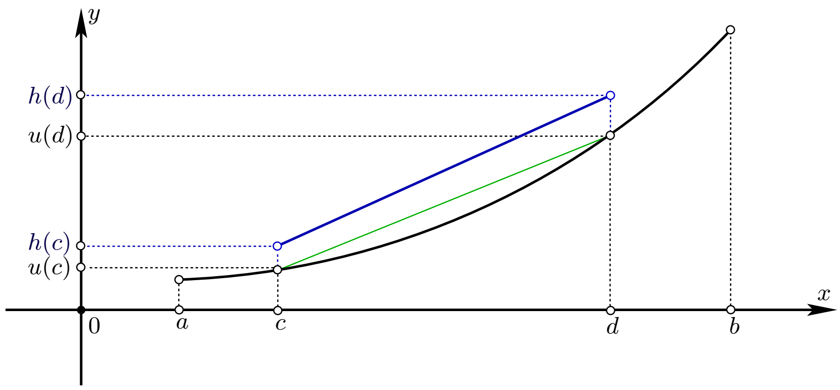
Fonctions sous-harmoniques

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Introduction

2. Analogie avec la théorie réelle

Les analogues unidimensionnels des fonctions harmoniques sont les fonctions affines $h(x) = \lambda\, x + \mu$, satisfaisant donc $\frac{d^2h}{dx^2} = 0$. Ces fonctions affines essentiellement triviales permettent d'ailleurs de définir la notion de fonction convexe.



En effet, une fonction $u\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est *convexe* si, pour tout intervalle $[c,d] \subset [a,b]$ et pour toute fonction affine $h(x)$, les inégalités aux extrémités :

$$u(c) \leqslant h(c) \qquad \text{et} \qquad u(d) \leqslant h(d)$$

impliquent l'inégalité :

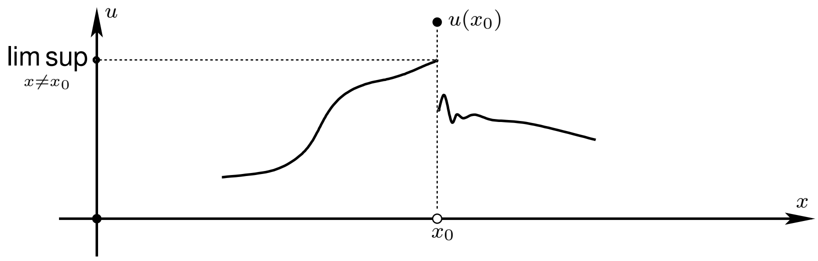
$$u(x) \leqslant h(x)$$

pour *tout* $x \in [c,d]$. Cette condition peut être comparée (exercice) à une condition classique concernant la *corde* entre deux points quelconque du graphe de u.

Les fonctions sous-harmoniques que nous allons étudier sont les analogues *bidimensionnels* des fonctions convexes. Elles ne sont pas nécessairement partout continues, et on doit se contenter de leur semi-continuité, concept général indépendant qui fera d'abord l'objet d'un paragraphe préliminaire.

3. Fonctions semi-continues

Soit (X, d) un espace métrique, par exemple $X = \mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne, ou plus généralement $X =$ un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ou encore $X =$ un ouvert O de (X, d). Certaines des notions générales qui suivent ont aussi un sens dans les espaces topologiques quelconques. Les fonctions réelles considérées seront autorisées à prendre la valeur $-\infty$, mais pas $+\infty$.



Définition 3.1. Une fonction u à valeurs réelles :

$$-\infty \leqslant u < +\infty,$$

définie au voisinage d'un point $x_0 \in X$, est dite *semi-continue supérieurement* en ce point si :

$$\limsup_{x \to x_0} u(x) \leqslant u(x_0),$$

à savoir plus précisément si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$d(x, x_0) \leqslant \delta \implies \begin{cases} u(x) \leqslant u(x_0) + \varepsilon & \text{lorsque} \quad u(x_0) \neq -\infty, \\ u(x) \leqslant -\frac{1}{\varepsilon} & \text{lorsque} \quad u(x_0) = -\infty. \end{cases}$$

Il importe de noter qu'avec cette définition, la fonction identiquement égale à :

$$-\infty$$

est semi-continue supérieurement. Bien entendu, ce concept se globalise.

Définition 3.2. Une fonction :

$$u\colon \quad X \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$$

est dite *semi-continue supérieurement* lorsqu'elle l'est en tout point.

Les trois volets de la caractérisation suivante s'avéreront utiles dans les démonstrations ultérieures.

Proposition 3.3. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) u *est semi-continue supérieurement, à savoir :*

$$\limsup_{x \to x_0} u(x) \leqslant u(x_0) \qquad\qquad (\forall\, x_0 \in X);$$

(ii) *pour toute valeur* $u_0 \in \mathbb{R}$*, l'ensemble de sous-niveau :*

$$\big\{x \in X\colon\ u(x) < u_0\big\}$$

est ouvert ;

(iii) *le sur-graphe de* u *:*

$$\big\{(x, u) \in X \times [-\infty, \infty[\colon\ u > u(x)\big\}$$

est un sous-ensemble ouvert de $X \times [-\infty, \infty[$.

Démonstration. **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)**. Soit $x_0 \in X$ avec $u(x_0) < u_0$. L'hypothèse que :

$$\limsup_{x \to x_0} u(x) \leqslant u(x_0)$$

interprétée avec $\varepsilon := \frac{u_0 - u(x_0)}{2} > 0$ donne $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} d(x, x_0) \leqslant \delta \qquad \Longrightarrow \qquad u(x) &\leqslant u(x_0) + \tfrac{u_0 - u(x_0)}{2} \\ &= u_0 - \tfrac{u_0 - u(x_0)}{2} \\ &< u_0, \end{aligned}$$

ce qui montre que la boule ouverte de rayon $\delta > 0$ centrée en x_0 est contenue dans l'ensemble de sous-niveau $\{u(x) < u_0\}$. Ce dernier est donc bien ouvert.

(ii) $\Longrightarrow$ **(iii)**. Soit $x_0 \in X$, et soit $(x_0, u(x_0))$ le point correspondant du graphe de u. Soit (x_0, u_0) un point quelconque du sur-graphe de u, à savoir :

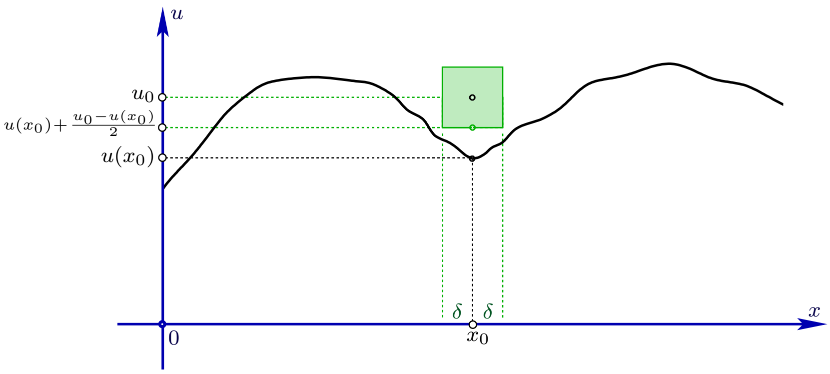
$$u_0 > u(x_0).$$

Par hypothèse, l'ensemble :

$$\big\{x \in X \colon \ u(x) < u(x_0) + \tfrac{u_0 - u(x_0)}{2}\big\} \ni x_0$$

est ouvert, et x_0 lui appartient clairement. Donc il existe $\delta > 0$ tel :

$$d(x, x_0) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad u(x) < u(x_0) + \tfrac{u_0 - u(x_0)}{2}.$$



Géométriquement, *tout* le graphe de la fonction u restreinte à la δ-boule ouverte en x_0 est en-dessous de ce plafond.

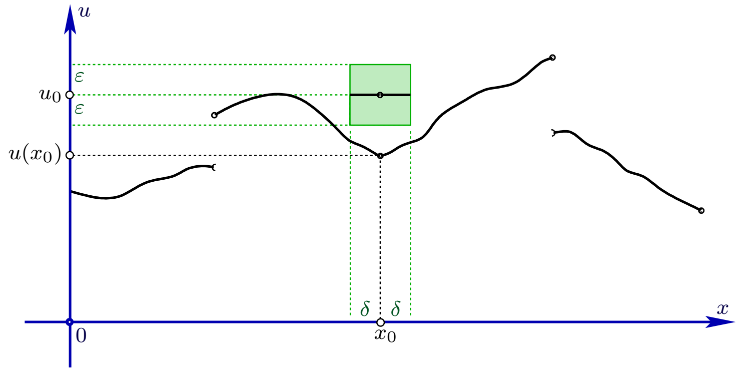
Alors par inégalité triangulaire, l'ouvert-rectangle centré en (x_0, u_0) et posé sur ce plafond :

$$\big\{(x, u) \colon \ d(x, x_0) < \delta, \ \ |u - u_0| < \tfrac{u_0 - u(x_0)}{2}\big\}$$

est entièrement contenu dans le sur-graphe, ce qui montre que ce dernier est bel et bien ouvert.

(iii) $\Longrightarrow$ **(i)**. Soit (x_0, u_0) un point quelconque du sur-graphe, *i.e.* avec $u_0 > u(x_0)$. Sachant que ce dernier est ouvert, il existe $\delta > 0$ et il existe $\varepsilon > 0$ tels que :

$$\big\{(x, u) \colon \ d(x, x_0) < \delta, \ \ |u - u_0| < \varepsilon\big\} \subset \text{sur-graphe} = \big\{(x, u) \colon \ u > u(x)\big\}.$$



En particulier, le segment horizontal :

$$\big\{(x,u_0)\colon\ |x-x_0|<\delta\big\}\ \subset\ \textsf{sur-graphe}.$$

Par définition du sur-graphe, ceci garantit que le graphe se trouve localement en-dessous :

$$u(x)\ <\ u_0 \qquad\qquad (\forall\,|x-x_0|<\delta).$$

Grâce à cette inégalité de contrôle, il vient :

$$\limsup_{x\to x_0} u(x)\ <\ u_0,$$

et comme $u_0>u(x_0)$ pouvait être choisi arbitrairement proche de $u(x_0)$, on atteint **(i)** ! $\square$

La notion duale de fonction *semi-continue inférieurement*, moins utilisée dans ce qui suivra, se devine en changeant $\limsup$ en $\liminf$, ou en remplaçant u par $-u$.

Corollaire 3.4. *Pour une fonction $u\colon X\longrightarrow\,]-\infty,\infty]$, les trois caractérisations suivantes de la semi-continuité inférieure sont équivalentes :*

(i) *en tout point $x_0\in X$:*

$$u(x_0)\ \leqslant\ \liminf_{x\to x_0} u(x);$$

(ii) *pour tout $u_0\in\mathbb{R}$, l'ensemble de surniveau :*

$$\big\{x\in X\colon\ u(x)>u_0\big\}$$

est ouvert ;

(iii) *le sous-graphe de u :*

$$\big\{(x,u)\in X\times]-\infty,\infty]\colon\ u<u(x)\big\}$$

est un sous-ensemble ouvert de $X\times]-\infty,\infty]$. $\square$

On se convainc aisément qu'une fonction est continue en un point lorsque, et seulement lorsqu'elle y est à la fois semi-continue inférieurement, et semi-continue supérieurement.

Nous ferons aussi usage fréquent de l'énoncé de compacité élémentaire suivant, valable pour le maximum, mais pas en général pour l'infimum.

Proposition 3.5. *Si une fonction $u\colon X\longrightarrow[-\infty,\infty[$ est semi-continue supérieurement, alors pour tout sous-ensemble compact $K\subset X$, il existe une constante $\mathrm{N}_K<\infty$ telle que :*

$$\sup_{x\in K} u(x)\ \leqslant\ \mathrm{N}_K.$$

De plus, u atteint son supremum sur K :

$$\sup_{x\in K} u(x) \,=\, u\big(x_K\big) \qquad\qquad (\exists\, x_K\in K).$$

Démonstration. Pour des entiers $n\geqslant 1$, les ensembles :

$$\mathsf{O}_n \,:=\, \big\{x\in X\colon\; u(x)<n\big\}$$

sont ouverts et ces O_n forment un recouvrement de X, puisque $u(x)<\infty$ pour tout $x\in X$. Par Borel-Lebesgue, du recouvrement ouvert du compact :

$$K \,=\, \bigcup_{1\leqslant n}\big(\mathsf{O}_n\cap K\big),$$

on peut extraire un sous-recouvrement *fini* $\cup_{1\,\leqslant\, n\,\leqslant\,\mathrm{N}_K}$, et alors :

$$\sup_{x\in K} u(x) \,\leqslant\, \mathrm{N}_K \,<\, \infty.$$

Ensuite, les ensembles ouverts :

$$\Big\{x\in X\colon\; u(x)<\sup_{x\in K} u(x)-\tfrac{1}{n}\Big\} \qquad\qquad (n\geqslant 1)$$

ne peuvent recouvrir K, sinon, encore par Borel-Lebesgue, un nombre fini d'entre eux le recouvriraient, ce qui contredirait la définition de $\sup_K u$. Donc on a bien $\sup_K u = u(x_K)$ pour au moins un $x_K\in K$. $\square$

Voici enfin un dernier énoncé, plus coûteux en effort neuronal pour l'exercitation estudiantine — *voir* aussi l'Exercice 6 qui le complémente.

Théorème 3.6. *Si $u\colon X\longrightarrow[-\infty,\infty[$ est une fonction semi-continue supérieurement bornée :*

$$u \,\leqslant\, \mathrm{M} \,<\, \infty$$

définie sur un espace métrique (X,d), alors il existe une suite décroissante :

$$\phi_1 \,\geqslant\, \phi_2 \,\geqslant\, \cdots \,\geqslant\, \phi_n \,\geqslant\, \phi_{n+1} \,\geqslant\, \cdots \,\geqslant\, u$$

de fonctions continues $\phi_n\in\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$ *qui convergent ponctuellement vers :*

$$u(x) \,=\, \lim_{n\to\infty}\phi_n(x) \qquad\qquad (\forall\, x\in X).$$

De plus, si $\mu\geqslant 0$ est une mesure de Borel positive finie à support compact dans X, alors :

$$\lim_{k\to\infty}\int_X u_k\,d\mu \,=\, \int_X u\,d\mu.$$

Démonstration. Lorsque $u\equiv-\infty$, il suffit de prendre $\phi_n:\equiv -n$.

Nous pouvons donc supposer qu'en au moins un point $y_0\in X$, on a $u(y_0)>-\infty$.

Pour $n\geqslant 1$ entier, définissons alors les fonctions $\phi_n\colon X\longrightarrow\mathbb{R}$ qui vont réaliser notre objectif par :

$$\phi_n(x) \,:=\, \sup_{y\in X}\big(u(y)-n\,d(x,y)\big) \qquad\qquad (x\in X).$$

En faisant $y=y_0$, nous voyons que $\phi_n(x)>-\infty$ pour tout $x\in X$. De plus, en faisant $y=x$:

$$\phi_n(x) \,\geqslant\, u(x).$$

On se convainc aisément que cette suite de fonctions est décroissante et qu'elle tend ponctuellement vers u. D'ailleurs, ces fonctions ϕ_n sont mieux que continues, elles sont lipschitziennes (avec une constante de Lipschitz qui explose) :

Lemme 3.7. *Pour tous* $x, x' \in X$*, on a :*

$$\big|\phi_n(x) - \phi_n(x')\big| \leqslant n\, d(x, x').$$

Démonstration. Par symétrie, on peut supposer que $\phi_n(x) \leqslant \phi_n(x')$. Soit alors $y' \in X$ qui réalise 'presque' le deuxième supremum :

$$\phi_n(x') = u(y') - n\, d(x', y') - \varepsilon',$$

à une erreur arbitrairement petite $\varepsilon' \geqslant 0$. Bien entendu :

$$\phi_n(x) \geqslant u(y') - n\, d(x, y').$$

Mais alors par soustraction et par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant -\phi_n(x) + \phi_n(x') &\leqslant -u(y') + n\, d(x, y') + u(y') - n\, d(x', y') - \varepsilon' \\ &= n\big[d(x, y') - d(x', y')\big] - \varepsilon' \\ &\leqslant n\, d(x, x') + \varepsilon'. \end{aligned}$$

□

Ensuite, en notant la boule ouverte de centre x et de rayon $r > 0$:

$$\mathbb{B}_r(x) := \big\{y \in X\colon\ d(x, y) < r\big\},$$

on peut majorer :

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \sup_{y \in X} \big(u(y) - n\, d(x, y)\big) \\ &= \max\Big(\sup_{y \in \mathbb{B}_r(x)} (\cdot),\ \sup_{y \in X \setminus \mathbb{B}_r(x)} (\cdot)\Big) \\ &\leqslant \max\Big(\sup_{y \in \mathbb{B}_r(x)} u(y),\ \underbrace{\sup_{y \in X \setminus \mathbb{B}_r(x)} \big(u(y) - n\, r\big)}_{\substack{\longrightarrow -\infty \text{ lorsque } n \to \infty \\ \text{puisque } u \leqslant \mathrm{M} < \infty}}\Big). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \to \infty} \phi_n(x) \leqslant \sup_{y \in \mathbb{B}_r(x)} u(y).$$

En faisant tendre $r \longrightarrow 0$, la semi-continuité de u donne :

$$\lim_{n \to \infty} \phi_n(x) \leqslant u(x),$$

et comme l'inégalité inverse était satisfaite, les ϕ_n convergent bien ponctuellement vers u.

La dernière affirmation est une conséquence du Théorème de convergence monotone en théorie de la mesure et de l'intégration. □

Un des intérêts de la semi-continuité supérieure est la stabilité suivante.

Proposition 3.8. *L'infimum :*

$$u := \inf_{\alpha \in A} u_\alpha$$

d'une famille quelconque *de fonctions semi-continues supérieurement* $u_\alpha \colon X \longrightarrow [-\infty, \infty)$ *est toujours semi-continu supérieurement.*

Démonstration. En effet, pour tout $\beta \in A$ fixé, on a :

$$\begin{aligned}\limsup_{x \to x_0} \Big(\inf_{\alpha\in A} u_\alpha(x)\Big) &\leqslant \limsup_{x \to x_0} \big(u_\beta(x)\big) \\ &\leqslant u_\beta(x_0).\end{aligned}$$

Mais alors, en prenant l'infimum à droite sur tous les $\beta \in A$:

$$\limsup_{x \to x_0} \Big(\inf_{\alpha\in A} u_\alpha(x)\Big) \leqslant \inf_{\beta\in A} u_\beta(x_0),$$

ce qui démontre bien que la fonction $u = \inf u_\alpha$ est semi-continue supérieurement. □

En général, lorsqu'on part d'une famille infinie dénombrable de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont continues, la fonction $\inf u_n$ perd la continuité : seule la semi-continuité supérieure est préservée, et ceci justifie l'intérêt de ce concept.

Lemme 3.9. *La somme et le maximum :*

$$u_1 + \cdots + u_{\rm K} \qquad \text{et} \qquad \max\big(u_1, \dots, u_{\rm K}\big)$$

d'un nombre fini *de fonctions semi-continues supérieurement* $u_1, \dots, u_{\rm K}$ *sont encore semi-continus supérieurement.*

Démonstration. Par une récurrence évidente, il suffit de traiter le cas ${\rm K} = 2$. Soient donc u et v deux fonctions semi-continues supérieurement en un point $x_0 \in X$. Pour leur somme $u + v$, il existe une suite de points $(x_n)_{n=1}^\infty$ tendant vers x_0 qui réalise :

$$\begin{aligned}\limsup_{x\to x_0} (u+v)(x) &= \lim_{n\to\infty} \big(u(x_n) + v(x_n)\big) \\ &\leqslant \limsup_{x\to x_0} u(x) + \limsup_{x\to x_0} v(x) \\ &\leqslant (u+v)(x_0),\end{aligned}$$

ce qui aboutit avec peu d'efforts.

De même, pour une suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ bien choisie :

$$\begin{aligned}\limsup_{x \to x_0} \big(\max\,(u(x),\, v(x))\big) &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\big(\max(u,v)\big)(x_n)}_{u(x_n) \text{ ou } v(x_n)} \\ &\leqslant \max\Big(\limsup_{n\to\infty} u(x_n),\ \limsup_{n\to\infty} v(x_n)\Big) \\ &\leqslant \max\Big(\limsup_{x \to x_0} u(x),\ \limsup_{x \to x_0} v(x)\Big) \\ &\leqslant \max\big(u(x_0),\, v(x_0)\big),\end{aligned}$$

ces nombreuses inégalités finissant par être concluantes ! □

Toutefois, étant donné une famille *infinie* de fonctions semi-continues supérieurement :

$$\big(u_\alpha\big)_{\alpha\in A} \colon \quad X \longrightarrow [-\infty, \infty[,$$

la fonction :

$$u(x) := \sup_{\alpha\in A} u_\alpha(x)$$

n'est *pas* nécessairement semi-continue supérieurement, même lorsque les u_α sont continues et lorsque $u(x) < \infty$ en tout point x. Il suffit en effet de penser à la suite croissante de fonctions :

$$[0,1] \ni t \longmapsto \sqrt[n]{t} \in [0,1]$$

qui converge vers la fonction *non* semi-continue supérieurement en 0 :

$$t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{lorsque } t = 0, \\ 1 & \text{lorsque } 0 < t \leqslant 1. \end{cases}$$

4. Définition des fonctions sous-harmoniques

Dans son essence différentielle, une fonction u est *sous-harmonique* lorsque son laplacien $\Delta u \geqslant 0$ est positif, vision proche de l'harmonicité $\Delta u = 0$.

Toutefois, ce n'est pas cette manière de voir qui est la plus générale. Comme cela transparaîtra ultérieurement, l'intérêt majeur des fonctions sous-harmoniques est leur grande flexibilité, laquelle serait trop contrainte par l'hypothèse que $u \in \mathscr{C}^2$ soit d'emblée différentiable. *A posteriori*, l'inégalité $\Delta u \geqslant 0$ sera effectivement toujours satisfaite, pourvu qu'elle soit interprétée au sens des distributions.

En fait, une analogie profonde avec les fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ peut servir de guide précieux à la compréhension. Par exemple, une fonction $\psi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est convexe si et seulement si $\psi'' \geqslant 0$. Toutefois, ce n'est pas ainsi que la convexité est définie dans le cadre le plus général possible, c'est au moyen de l'*inégalité de sous-moyenne :*

$$\psi\big(\lambda\, s + (1-\lambda)\, t\big) \leqslant \lambda\, \psi(s) + (1-\lambda)\, \psi(t) \qquad (\forall\, s \in \mathbb{R},\, \forall\, t \in \mathbb{R},\, \forall\, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1),$$

qui exprime que le graphe de ψ se situe toujours en-dessous de ses cordes. Notons que cette définition de la convexité admet des fonctions non lisses, par exemple la fonction $\psi(t) := |t|$, qui est convexe.

Nous allons maintenant transférer cette inégalité aux fonctions définies sur des domaines bidimensionnels $\Omega \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Mais l'analogie intuitive entre les fonctions convexes et les fonctions sous-harmoniques ne sera pas un parallèle exact. Nous pourrions requérir dans leur définition que les fonctions sous-harmoniques soient continues, mais ce serait se priver de la flexibilité précieuse que représentent les nombreux passages à la limite dénombrables que les applications théoriques feront surgir comme nécessaires, notamment lorsqu'on aura à prendre l'infimum d'une famille de fonctions. Rappelons-nous que la Proposition 3.8 énonçait une stabilité de ce type pour la semi-continuité supérieure. C'est en partie en vertu de cette proposition que nous exigerons des fonctions sous-harmoniques la seule 'tenue correcte minimale' qu'est la semi-continuité inférieure.

Nous pouvons maintenant présenter deux définitions initiales.

Rappelons les notations pour les disques ouverts et les cercles de $\mathbb{C}$, centrés en un point $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$:

$$\mathbb{D}_r(z_0) := \big\{z \in \mathbb{C} \colon\, |z - z_0| < r\big\} \qquad \text{et} \qquad S_r(z_0) := \big\{z \in \mathbb{C} \colon\, |z - z_0| = r\big\},$$

les disques fermés étant leur réunion :

$$\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) = \mathbb{D}_r(z_0) \cup S_r(z_0).$$

À nouveau, les fonctions considérées seront autorisées à prendre la valeur $-\infty$, mais pas la valeur $+\infty$. La première formulation explique et justifie la terminologie « *sous-harmonique* ».

Définition 4.1. Une fonction définie sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$:

$$u\colon\ \ \Omega \longrightarrow [-\infty,\,\infty[$$

est dite *sous-harmonique* si :

(i) elle est semi-continue supérieurement ;

(ii) en tout point $z_0 \in \Omega$, il existe $0 < r_0 < \mathsf{dist}(z_0, \mathbb{C}\backslash\Omega)$ tel que pour tout disque $\mathbb{D}_r(z_0)$ centré en z_0 de rayon $0 \leqslant r \leqslant r_0$, et pour toute fonction h harmonique dans $\mathbb{D}_r(z_0)$ continue sur $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0)$, elle satisfait :

$$u\big|_{S_r(z_0)} \leqslant h\big|_{S_r(z_0)} \qquad\Longrightarrow\qquad u\big|_{\mathbb{D}_r(z_0)} \leqslant h.$$

Une telle fonction h est parfois appelée *majorant harmonique* de la fonction u, *la majoration se transférant du bord vers l'intérieur*. Être *sous-harmonique*, c'est alors tout simplement être « *en-dessous* » des fonctions harmoniques.

Toutefois, ce n'est pas par cette définition que nous allons commencer ce cours, mais par une autre, *plus concrète et plus intuitive*, et nous démontrerons ultérieurement que les deux définitions sont équivalentes. Soit à nouveau $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine.

Définition 4.2. Une fonction $u\colon \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty[$ est dite *sous-harmonique* si :

(i) elle est semi-continue supérieurement ;

(ii) elle satisfait la *propriété locale de la sous-moyenne*, à savoir, en tout point $z_0 \in \Omega$, il existe $0 < r_0 < \mathsf{dist}(z_0, \mathbb{C}\backslash\Omega)$ tel que pour tout disque $\mathbb{D}_r(z_0)$ centré en z_0 de rayon $0 \leqslant r \leqslant r_0$, elle satisfait :

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\big(z_0 + r\,e^{i\theta}\big)\,d\theta. \tag{4.3}$$

Autrement dit, u est inférieure en tout point à ses moyennes sur des petits cercles centrés. Observons que $u \equiv -\infty$ *est* sous-harmonique. L'ensemble des fonctions sous-harmoniques dans Ω sera noté :

$$\mathsf{SH}(\Omega).$$

Cette définition appelle plusieurs commentaires visant à l'éclairer.

Premièrement, une fonction définie dans un ouvert $\mathsf{U} \subset \mathbb{C}$ est sous-harmonique si elle l'est dans chaque composante connexe de U.

Deuxièmement, en décomposant $u = u^+ - u^-$ avec :

$$u^+ := +\,\mathsf{max}\,\big(0,\, u(x)\big) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad u^-(x) := -\,\mathsf{min}\,\big(u(x),\, 0\big) \geqslant 0,$$

la théorie de l'intégration nous dit que l'intégrale sur le cercle $S_r(z_0)$ doit être interprétée comme :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\big(z_0 + r\,e^{i\theta}\big)\,d\theta := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^+\big(z_0 + r\,e^{i\theta}\big)\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^-\big(z_0 + r\,e^{i\theta}\big)\,d\theta.$$

Grâce à la Proposition 3.5, u^+ est bornée sur le compact $S_r(z_0)$, donc son intégrale est certainement positive finie ! À l'inverse, l'intégrale de u^- peut être finie ou infinie, car u est autorisée à prendre la valeur $-\infty$. Mais dans tous les cas, la valeur de l'intégrale de u est un nombre appartenant à $[-\infty, \infty[$. Plus tard, nous verrons que si cette intégrale vaut

$-\infty$ pour un seul rayon $0 < r \leqslant r_0$, d'où $u(z_0) = -\infty$ aussi par (4.3), alors $u \equiv -\infty$ partout dans Ω.

Troisièmement, l'inégalité de sous-moyenne (4.3) est proprement *locale :* on ne demande sa validité que pour des rayons $r_0 > 0$ assez petits qui dépendent *a priori* du point z_0. Elle implique (exercice) que si $(\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ est un recouvrement ouvert de Ω, alors u est sous-harmonique dans Ω si et seulement si toutes ses restrictions $u|_{\omega_\alpha}$ sont sous-harmoniques. Nous verrons ultérieurement que la sous-harmonicité locale implique une inégalité de sous-moyenne *globale*, à savoir que (4.3) est satisfaite pour *tout* $0 \leqslant r < \mathsf{dist}\,(z_0, \partial\Omega)$.

Lemme 4.4. *Une fonction sous-harmonique $u \in \mathsf{SH}(\Omega)$ atteint sa limite supérieure en tout point $z_0 \in \Omega$:*

$$u(z_0) = \limsup_{\substack{z \longrightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} u(z).$$

Démonstration. Comme u est semi-continue supérieurement :

$$\limsup_{\substack{z \longrightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} u(z) \leqslant u(z_0),$$

mais il y a plus, comme elle satisfait l'inégalité de sous-moyenne en z_0, il existe $r_0 > 0$ tel que, pour tout $0 < r \leqslant r_0$:

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(z_0 + r\, e^{i\theta}\big)\, d\theta.$$

Par l'absurde, si on avait :

$$\limsup_{\substack{z \longrightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} u(z) =: u_0 < u(z_0),$$

alors il existerait $0 < r_1 \leqslant r_0$ assez petit pour que :

$$\begin{aligned} \sup_{\overline{\mathbb{D}}_{r_1}(z_0) \backslash \{z_0\}} u(z) &\leqslant u_0 + \tfrac{u(z_0) - u_0}{2} \\ &= \tfrac{u(z_0) + u_0}{2}, \end{aligned}$$

et on aboutirait alors à un jeu contradictoire d'inégalités :

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(z_0 + r\, e^{i\theta}\big)\, d\theta \leqslant \tfrac{u(z_0) + u_0}{2} < u(z_0). \qquad \square$$

Définition 4.5. Une fonction $v \colon \Omega \longrightarrow\,]-\infty, \infty]$ est dite *sur-harmonique* lorsque $-v$ est sous-harmonique.

Observons (exercice d'assimilation) qu'une fonction est harmonique si et seulement si elle est à la fois sous-harmonique et sur-harmonique.

Le premier exemple canonique de fonction sous-harmonique est le suivant.

Proposition 4.6. *Si $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ est holomorphe dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors $\log |f|$ est sous-harmonique dans Ω.*

Démonstration. Si $f \equiv 0$, on obtient $-\infty \in \mathsf{SH}(\Omega)$.

On peut donc supposer $f \not\equiv 0$. Sur $\Omega \backslash \{f = 0\}$, la fonction $\log |f|$ est continue, et puisqu'elle prend la valeur $-\infty$ en les points discrets où $f = 0$, elle est gratuitement semi-continue supérieurement sur la totalité de Ω.

Au voisinage de tout point $z_0 \in \Omega \backslash \{f = 0\}$, la fonction :

$$\log |f| \;=\; \tfrac{1}{2}\,\big(\log f + \log \overline{f}\big)$$

est harmonique, donc elle y satisfait l'(in)égalité de la moyenne locale.

En un point z_0 où $f(z_0) = 0$, l'inégalité (4.3) est trivialement satisfaite. □

D'autres exemples de fonctions sous-harmoniques peuvent être engendrés en appliquant des procédés élementaires, qui sont conséquences immédiates de la Définition 4.2 (*cf.* aussi le Lemme 3.9).

Proposition 4.7. *Soient u et v deux fonctions sous-harmoniques définies dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$. Alors :*

(i) $\max(u, v)$ *est sous-harmonique dans Ω ;*

(ii) $\alpha\, u + \beta\, v$ *est sous-harmonique dans Ω pour tous réels $\alpha, \beta \geqslant 0$.* □

Ainsi, les fonctions sous-harmoniques peuvent très bien ne pas être lisses. L'Exercice 8 montre qu'elles peuvent même être discontinues.

5. Principe du maximum

Nous avons déjà constaté que la propriété locale de la moyenne caractérise les fonctions harmoniques, et qu'alors, elles satisfont aussi la propriété globale de la moyenne :

$$h \,\in\, \mathsf{Harm}(\Omega) \quad\Longrightarrow\quad \forall\, z_0 \in \Omega,\ \forall\, 0 \leqslant r < \mathsf{dist}(z_0, \partial\Omega), \quad h(z_0) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h\big(z_0 + r\, e^{i\theta}\big)\, d\theta.$$

Afin de généraliser la globalisation de la propriété de sous-moyenne locale que satisfont les fonctions sous-harmoniques, nous aurons besoin d'un nouveau principe du maximum, lui aussi très puissant.

Théorème 5.1. [Principe du maximum] *Si une fonction $u \in \mathsf{SH}(\Omega)$ sous-harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ atteint son maximum* global *en un point intérieur :*

$$u(z_{\mathsf{max}}) \;=\; \max_{z \in \Omega}\, u(z) \qquad\qquad (\exists\, z_{\mathsf{max}} \in \Omega),$$

alors $u \equiv u(z_{\mathsf{max}})$ est constante.

Contrairement aux fonctions harmoniques, aucun énoncé concernant le minimum global ne peut avoir lieu, comme le montre la fonction $u(z) := \max(0, \mathsf{Re}\, z)$ sous-harmonique dans $\mathbb{C}$. Et même, cette fonction $\max(0, \mathsf{Re}\, z)$ montre aussi que l'existence de maxima locaux n'implique pas non plus la constance.

Il y a bien un principe du minimum global, mais ce sont seulement les fonctions *sur-harmoniques* qui le satisfont, par un corollaire direct.

Démonstration. Supposons donc l'existence d'un tel $z_{\mathsf{max}} \in \Omega$ en lequel u est maximale, posons :

$$u_{\mathsf{max}} \;:=\; u(z_{\mathsf{max}}),$$

et décomposons Ω en les deux sous-ensembles disjoints :

$$E \;:=\; \big\{z \in \Omega\colon\ u(z) < u_{\mathsf{max}}\big\} \qquad\text{et}\qquad F \;:=\; \big\{z \in \Omega\colon\ u(z) = u_{\mathsf{max}}\big\}.$$

Comme u est semi-continue supérieurement, E est ouvert.

Assertion 5.2. *L'ensemble F est lui aussi ouvert.*

Preuve. Soit un point $z \in F$. Sur des cercles de rayon $0 < s \leqslant r$ assez petit, on a :

$$u_{\mathsf{max}} = u(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(z + s\, e^{it}\big)\, dt.$$

Mais si on avait $u(z + se^{it_*}) < u_{\mathsf{max}}$ pour un angle t_*, alors par semi-continuité supérieure $u(z + se^{it})$ serait toujours $< u_{\mathsf{max}}$ pour t dans un voisinage de t_*, et alors l'intégrale-moyenne à droite serait elle aussi $< u_{\mathsf{max}}$, ce qui est impossible.

Donc on a $u(z + se^{it}) \equiv u_{\mathsf{max}}$ sur tous ces cercles, ce qui établit l'ouverture de F en z. □

Comme $F \neq \emptyset$, la connexité de $\Omega = E \cup F$ force $\Omega = F$. □

Convention 5.3. Le point à l'infini $\infty \in \partial\Omega$ appartient au bord de tout domaine *non borné* $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Théorème 5.4. [Principe du maximum au bord] *Si une fonction $u \in \mathsf{SH}(\Omega)$ sous-harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ satisfait pour tout point $\zeta \in \partial\Omega$:*

$$\limsup_{z \to \zeta} u(z) \leqslant 0,$$

alors $u \leqslant 0$ dans Ω.

Démonstration. Prolongeons tout d'abord u à $\partial\Omega$ par :

$$u(\zeta) := \limsup_{z \to \zeta} u(z) \qquad\qquad (\forall\, \zeta \in \partial\Omega),$$

y compris, donc, en $\zeta = \infty$ lorsque Ω est non-borné. On se convainc alors aisément que la fonction ainsi prolongée u est semi-continue supérieurement dans $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. De plus par hypothèse :

$$u\big|_{\partial\Omega} \leqslant 0. \tag{5.5}$$

Or puisque $\overline{\Omega}$ est compact — il *fallait* pour cela compactifier Ω lorsqu'il est non-borné en lui ajoutant ∞ —, la Proposition 3.5 garantit que ce prolongement u atteint son maximum :

$$u_{\mathsf{max}} := u(z_{\mathsf{max}}) = \max_{z \in \overline{\Omega}} u(z),$$

en un certain point $z_{\mathsf{max}} \in \overline{\Omega}$.

• Lorsque $z_{\mathsf{max}} \in \partial\Omega$, on a $u(z_{\mathsf{max}}) \leqslant 0$ par (5.5), puis $u(z) \leqslant u(z_{\mathsf{max}}) \leqslant 0$ pour tout $z \in \overline{\Omega}$.

• Lorsque $z_{\mathsf{max}} \in \Omega$, le Théorème 5.1 donne $u \equiv u_{\mathsf{max}}$ constante dans Ω, donc son prolongement au bord est tout aussi constant, et enfin (5.5) donne $u \equiv u_{\mathsf{max}} \leqslant 0$. □

6. Principe de Phragmén-Lindelöf sous-harmonique

Dans les domaines $\Omega \subset \mathbb{C}$ *non-bornés*, on aimerait avoir un principe du maximum en ne connaissant le comportement de u qu'aux points du bord situés à distance finie, à l'exclusion de $\infty \in \partial\Omega$. Ceci est possible en demandant que u ne croisse pas trop vite à l'infini. Voici un résultat très général, dont se déduiront plusieurs théorèmes classique d'Analyse Complexe à une variable.

Théorème 6.1. [Principe général de Phragmén-Lindelöf] *Soit* $u \in \mathsf{SH}(\Omega)$ *une fonction sous-harmonique dans un domaine* non-borné $\Omega \subset \mathbb{C}$ *satisfaisant :*

$$\limsup_{z \to \zeta} u(z) \leqslant 0, \qquad \forall\, \zeta \in \partial\Omega \backslash \{\infty\}. \tag{6.2}$$

S'il existe une fonction sur-harmonique *à valeurs finies :*

$$v\colon \quad \Omega \longrightarrow \,]-\infty, \infty[$$

telle que :

$$\liminf_{z \to \infty} v(z) > 0 \qquad \textit{et} \qquad \limsup_{z \to \infty} \frac{u(z)}{v(z)} \leqslant 0, \tag{6.3}$$

alors $u \leqslant 0$ *partout dans* Ω.

L'illustration principale de (6.3) est une fonction $v \in \mathsf{Harm}(\Omega)$ *harmonique* satisfaisant :

$$\infty = \lim_{z\to\infty} v(z) = \lim_{z\to\infty} u(z) \qquad \text{tandis que :} \qquad 0 = \lim_{z\to\infty} \frac{u(z)}{v(z)}.$$

Démonstration. Supposons pour commencer que $v > 0$ dans Ω, ce qui est un cas spécial significatif. Pour $\varepsilon > 0$, introduisons :

$$u_\varepsilon := u - \varepsilon\, v.$$

Comme $-\,v$ est sous-harmonique, u_ε est sous-harmonique dans Ω.

Assertion 6.4. *En tout point du bord* $\zeta \in \partial\Omega$*, y compris en* $\zeta = \infty$*, on a :*

$$\limsup_{z \to \zeta} u_\varepsilon(z) \leqslant 0.$$

Preuve. En un point fini $\zeta \in \partial\Omega\backslash\{\infty\}$, il suffit d'additionner l'hypothèse (6.2) avec :

$$\limsup_{z \to \zeta} \big(-\varepsilon\, v(z)\big) \leqslant 0.$$

En le point $\zeta = \infty$, on a bien :

$$\limsup_{z \to \infty} \big(u - \varepsilon\, v\big) = \limsup_{z \to \infty} v\left(\tfrac{u}{v} - \varepsilon\right) \leqslant 0,$$

puisque le facteur $v > 0$ ne change pas le signe négatif de l'hypothèse (6.3). $\square$

Alors les hypothèses du Théorème 5.4 sont satisfaites, donc $u_\varepsilon \leqslant 0$ partout dans Ω et enfin $u \leqslant 0$ dans Ω en faisant $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$.

Traitons à présent le cas d'une fonction v générale. Pour $\eta > 0$, introduisons l'ensemble :

$$F_\eta := \big\{z \in \Omega\colon\, u(z) \geqslant \eta\big\},$$

dont on veut montrer qu'il est vide. Puisque $\{u < \eta\}$ est ouvert, F_η est fermé dans Ω. De plus, par (6.2), aucun point de $\partial\Omega\backslash\{\infty\}$ ne peut être limite de points de F_η. Autrement dit, F_η ne touche pas le bord fini de Ω, mais peut tout à fait s'en aller vers l'infini comme le fait Ω.

Comme la fonction sur-harmonique v est semi-continue inférieurement, la version opposée de la Proposition 3.5 montre qu'elle est bornée inférieurement sur tout compact. Or à l'infini par hypothèse $\liminf_{z\to\infty} v(z) > 0$, donc même lorsque F_η est non borné, $v|_{F_\eta}$ est bornée inférieurement.

Après addition éventuelle à v d'une constante $c > 0$, on peut supposer que :

$$v\big|_{F_\eta} > 0.$$

Affirmation 6.5. *Pour toute constante $c > 0$, le remplacement $v(z) \longmapsto v(z) + c$ n'altère pas les deux hypothèses* (6.3).

Preuve. Premièrement, on a toujours $\liminf_{z\to\infty} \big(v(z) + c\big) > 0$. Deuxièmement, si on décompose :

$$\Omega = \{u \leqslant 0\} \cup \{u > 0\},$$

alors on a gratuitement puisque $v > 0$ au voisinage de ∞ :

$$\limsup_{\substack{z\to\infty \\ z\in\{u\leqslant 0\}}} \frac{u(z)}{v(z)} \leqslant 0,$$

et donc la deuxième hypothèse (6.3) concerne seulement la limite supérieure pour les $z \in \{u > 0\}$ proches de ∞. Mais alors comme $v(z) > 0$ dans un voisinage de ∞, on a :

$$\frac{1}{v(z) + c} < \frac{1}{v(z)} \qquad (z\to\infty),$$

et donc en multipliant par $u(z) > 0$, on obtient l'inégalité :

$$\limsup_{\substack{z\to\infty \\ z\in\{u>0\}}} \frac{u(z)}{v(z)+c} \leqslant \limsup_{\substack{z\to\infty \\ z\in\{u>0\}}} \frac{u(z)}{v(z)} \leqslant 0,$$

ce qu'il fallait vérifier. □

Après addition d'une telle constante, introduisons maintenant l'ensemble ouvert :

$$\begin{aligned} V &:= \big\{z \in \Omega\colon\ v(z) > 0\big\} \\ &\supset F_\eta. \end{aligned}$$

Assertion 6.6. *On a $u - \eta \leqslant 0$ sur V.*

Preuve. Nous allons appliquer à la fonction $z \longmapsto u(z) - \eta$ définie sur V la version spéciale du théorème démontrée au début, où nous avons supposé la fonction $v > 0$, ce qui est dorénavant vrai sur chaque composante connexe de notre nouvel ouvert $V = \{v > 0\}$; comme $\liminf_{z\to\infty} v(z) > 0$, toutes les composantes connexes de V sont non-bornées.

Il faut vérifier les hypothèses (6.2) et (6.3).

En tout point $\zeta \in \partial V \backslash \{\infty\}$, nous pouvons estimer en distinguant deux cas :

$$\limsup_{z\to\zeta} \big(u(z) - \eta\big) \leqslant \begin{cases} 0 - \eta < 0 & \text{lorsque } \zeta \in \partial\Omega \cap \partial V \backslash \{\infty\}, \\ u(\zeta) - \eta & \text{lorsque } \zeta \in \Omega \cap \partial V \backslash \{\infty\}. \end{cases}$$

Or comme $V \supset F_\eta = \{u \geqslant \eta\}$, on a :

$$\Omega \cap \partial V \subset \{u \leqslant \eta\},$$

et donc dans le premier, comme dans le deuxième cas :

$$\limsup_{z\to\zeta} \big(u(z) - \eta\big) \leqslant 0 \qquad (\forall\, \zeta\, \partial V \backslash \{\infty\}).$$

Ceci confirme (6.2).

Quant à (6.3), c'est plus simple et cela s'améliore un peu :

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{u(z)-\eta}{v(z)} = \limsup_{z\to\infty} \frac{u(z)}{v(z)} - \frac{\eta}{\liminf\limits_{z\to\infty} v(z)} < 0.$$

Donc le cas spécial déjà démontré s'applique, et donne $u-\eta \leqslant 0$ sur V. □

Comme $F_\eta \subset V$, on obtient donc $u \leqslant \eta$ sur $F_\eta = \{u \geqslant \eta\}$, donc en fait $u \equiv \eta$ sur F_η ! Mais sur $\Omega \backslash F_\eta$, on a par définition $u < \eta$, et au final on a *partout :*

$$u(z) \leqslant \eta \qquad\qquad (\forall\, z \in \Omega).$$

En faisant $\eta \xrightarrow{>} 0$, on conclut que $u \leqslant 0$ dans Ω. □

Corollaire 6.7. *Si une fonction u est sous-harmonique dans un domaine* non-borné $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ *et satisfait en tout point du bord fini :*

$$\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leqslant 0 \qquad\qquad (\forall\, \zeta \in \partial\Omega\backslash\{\infty\}),$$

ainsi que :

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{u(z)}{\log|z|} \leqslant 0,$$

alors $u \leqslant 0$ partout dans Ω.

Démonstration. Il suffit de choisir sur le bord un point quelconque à distance finie $\zeta_0 \in \partial\Omega \neq \emptyset$ et d'appliquer le théorème qui précède avec la fonction $v(z) := \log|z-\zeta_0|$ (sur-)harmonique dans Ω. □

Corollaire 6.8. [Théorème de Liouville raffiné] *Si une fonction u sous-harmonique sur $\mathbb{C}$ tout entier satisfait :*

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{u(z)}{\log|z|} \leqslant 0,$$

alors u est constante sur $\mathbb{C}$. En particulier, toute fonction sous-harmonique sur $\mathbb{C}$ qui est bornée supérieurement doit être constante.

Démonstration. Lorsque $u \equiv -\infty$, il n'y a rien à vérifier. Nous pouvons donc supposer qu'il existe $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ tel que $u(\zeta_0) > -\infty$. Or une application du corollaire qui précède à la fonction $u - u(\zeta_0)$ vue sur $\mathbb{C}\backslash\{\zeta_0\}$ donne $u \leqslant u(\zeta_0)$ sur $\mathbb{C}\backslash\{\zeta_0\}$, puis $u \leqslant u(\zeta_0)$ partout. Alors u qui atteint un maximum global en ζ_0 doit être constante, d'après le Théorème 5.1. □

Pour des domaines ayant une forme spécifique, des hypothèses précises sur la croissance à l'infini suffisent. Du Théorème très général 6.1, nous pouvons maintenant déduire deux formulations classiques du principe de Phragmén-Lindelöf.

Théorème 6.9. [Phragmén-Lindelöf sur une bande] *Pour $\gamma > 0$ réel, soit la bande ouverte :*

$$B_\gamma := \Big\{z \in \mathbb{C} \colon \big|\mathrm{Re}\, z\big| < \tfrac{\pi}{2\gamma}\Big\}.$$

Si une fonction u sous-harmonique dans B_γ a une croissance à l'infini majorée par :

$$u(x+i\,y) \leqslant A\, e^{\alpha|y|} \qquad\qquad (x+i\,y \in B_\gamma),$$

pour des constantes $A < \infty$ et $\alpha < \gamma$, et si en tout point du bord fini elle satisfait :

$$\limsup_{z \to \zeta} u(z) \leqslant 0 \qquad\qquad (\forall \zeta \in \partial B_\gamma \backslash \{\infty\}),$$

alors $u \leqslant 0$ partout dans B_γ.

La fonction :

$$u(z) := \mathrm{Re}\,\big(\cos(\gamma\, z)\big) = \cos(\gamma\, x)\cosh(\gamma\, y)$$

montre que le résultat n'est plus vrai lorsque $\alpha = \gamma$.

Démonstration. Choisissons un nombre intermédiaire $\alpha < \beta < \gamma$, et introduisons la fonction harmonique $v\colon S_\gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$v(z) := \mathrm{Re}\,\big(\cos(\beta\, z)\big) = \cos(\beta\, x)\cosh(\beta\, y).$$

À l'infini, on a :

$$\liminf_{z \to \infty} v(z) \geqslant \liminf_{|y| \to \infty} \cos\big(\tfrac{\beta\,\pi}{2\,\gamma}\big)\cosh(\beta\, y) = \infty,$$

ainsi que :

$$\limsup_{z \to \infty} \frac{u(z)}{v(z)} \leqslant \limsup_{|y| \to \infty} \frac{A\, e^{\alpha |y|}}{\cos(\frac{\beta\,\pi}{2\,\gamma})\cosh(\beta\, y)} = 0.$$

Alors le résultat découle du Théorème 6.1. □

Corollaire 6.10. [Théorème des trois droites] *Soit u une fonction sous-harmonique sur la bande verticale $B = \{0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$ ayant une croissance à l'infini majorée par :*

$$u(x + i\, y) \leqslant A\, e^{\alpha |y|},$$

pour des constantes $A < \infty$ et $\alpha < \pi$. Si :

$$\limsup_{z \to \zeta} u(z) \leqslant \begin{cases} M_0 & \text{lorsque } \mathrm{Re}\,\zeta = 0, \\ M_1 & \text{lorsque } \mathrm{Re}\,\zeta = 1, \end{cases}$$

alors pour tout $x + i\, y \in B$:

$$u(x + i\, y) \leqslant M_0\,(1 - x) + M_1\, x.$$

Démonstration. Introduisons la fonction $\widetilde{u}\colon B \longrightarrow [-\infty, \infty[$ définie par :

$$\widetilde{u}(z) := u(z) - \mathrm{Re}\,\big(M_0\,(1 - z) + M_1\, z\big).$$

Alors une application d'une version translatée du Théorème 6.9 avec $\gamma = \pi$ donne $\widetilde{u} \leqslant 0$ sur B. □

Théorème 6.11. [Phragmén-Lindelöf sur un secteur] *Pour $\gamma > \frac{1}{2}$, soit le secteur angulaire :*

$$S_\gamma := \big\{ z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \colon\ |\mathrm{arg}\, z| < \tfrac{\pi}{2\,\gamma} \big\}.$$

Si une fonction u sous-harmonique dans S_γ ayant une croissance à l'infini majorée par :

$$u(z) \leqslant A + B\, |z|^\alpha,$$

pour des constantes $A, B < \infty$ et $\alpha < \gamma$, et si en tout point du bord fini :

$$\limsup_{z \to \zeta} u(z) \leqslant 0 \qquad\qquad (\forall \zeta \in \partial S_\gamma \backslash \{\infty\}),$$

alors $u \leqslant 0$ partout dans S_γ.

Démonstration. Choisissons un nombre intermédiaire $\alpha < \beta < \gamma$, et définissons une fonction harmonique $v \colon S_\gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$v(z) := \mathrm{Re}\,(z^\beta) = r^\beta \cos(\beta\, t) \qquad (z = re^{it} \in S_\gamma).$$

À l'infini, on a :

$$\liminf_{z\to\infty} v(z) \geqslant \liminf_{r\to\infty} r^\beta \cos\big(\tfrac{\beta\pi}{2\gamma}\big) = \infty,$$

ainsi que :

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{u(z)}{v(z)} \leqslant \limsup_{r\to\infty} \frac{A + B\,r^\alpha}{r^\beta \cos\big(\frac{\beta\,\pi}{2\,\gamma}\big)} = 0.$$

À nouveau, le résultat découle donc du Théorème 6.1. □

La fonction $u(z) := \mathrm{Re}\,(z^\gamma)$ montre qu'il n'y a pas extension au cas-limite $\alpha = \gamma$.

7. Critères pour la sous-harmonicité

Maintenant que le principe du maximum a été soigneusement présenté, nous pouvons entamer les aspects les plus centraux de la théorie des fonctions sous-harmoniques, notamment la *globalisation* de l'inégalité locale (4.3) de sous-moyenne.

Un rappel préliminaire s'impose, issu du chapitre consacré aux fonctions harmoniques.

Sur un disque ouvert $\Delta = \mathbb{D}_r(z_0)$ de rayon $r > 0$ centré en un point $z_0 \in \mathbb{C}$, dont le bord $\partial\Delta$ est paramétré comme :

$$\zeta = z_0 + r\,e^{i\theta} \qquad (0 \leqslant \theta < 2\pi),$$

lorsqu'une fonction intégrable $\phi \in L^1(\partial\Delta, \mathbb{R})$ est donnée, son *prolongement harmonique* au disque Δ a, en un point quelconque $z = z_0 + s\,e^{it} \in \Delta$ avec $0 \leqslant s < r$, une valeur fournie par la formule suivante de type convolution avec le noyau de Poisson :

$$\begin{aligned}
\big(P_\Delta\phi\big)(z) &:= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta} \frac{|\zeta - z_0|^2 - |z - z_0|^2}{|(\zeta - z_0) - (z - z_0)|^2}\, u(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - s^2}{|\zeta - z|^2}\, u\big(z_0 + r\,e^{i\theta}\big)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - s^2}{r^2 - 2rs\cos(\theta - t) + s^2}\, u\big(z_0 + r\,e^{i\theta}\big)d\theta.
\end{aligned}$$

Alors les fonctions sous-harmoniques obéissent à une inégalité absolument fondamentale qui fait intervenir le prolongement harmonique de leurs restrictions à des cercles.

Théorème 7.1. *Pour une fonction semi-continue supérieurement :*

$$u\colon \quad \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty[$$

définie sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *u est sous-harmonique dans Ω ;*

(ii) *pour tout $z_0 \in \Omega$, tout $0 < r < \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$, tout point $z \in \mathbb{D}_r(z_0) =: \Delta$, on a :*

$$u(z) \leqslant P_\Delta\big(u\big|_{\partial\Delta}\big)(z),$$

à savoir plus précisément, pour tout $0 \leqslant s < r$, tout $0 \leqslant t < 2\pi$, on a :

$$u\big(z_0 + s\,e^{it}\big) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - s^2}{r^2 - 2rs\cos(\theta - t) + s^2}\, u\big(z_0 + r\,e^{i\theta}\big)\,d\theta;$$

(iii) *pour tout sous-domaine relativement compact* $\omega \Subset \Omega$*, et toute fonction harmonique* $h \in \mathsf{Harm}(\omega)$ *satisfaisant :*

$$\limsup_{z \to \zeta} \big(u - h\big)(z) \leqslant 0 \qquad\qquad (\forall\, \zeta \in \partial\omega),$$

on a $u \leqslant h$ *partout dans* ω.

Démonstration. **(i)** $\Longrightarrow$ **(iii)**. Étant donné ω et $h \in \mathsf{Harm}(\omega)$, la fonction $u - h$ est sous-harmonique dans ω (exercice) car (indication) $-h$ satisfait l'*égalité* de la moyenne, donc le Principe du Maximum 5.4 s'applique.

(iii) $\Longrightarrow$ **(ii)**. Soit un disque fermé $\overline{\Delta} := \overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$. Grâce au Théorème 3.6, il existe une suite décroissante de fonctions continues $\phi_n \geqslant \phi_{n+1} \geqslant u$ définies sur le cercle $\partial\Delta$ qui tendent ponctuellement vers $u|_{\partial\Delta}$. Leurs prolongements de Poisson $P_\Delta(\phi_n)$ sont alors harmoniques dans Δ. De plus, comme les ϕ_n sont continues, un théorème classique vu dans le chapitre sur les fonctions harmoniques assure qu'en tout point $\zeta \in \partial\Delta$:

$$\lim_{z \to \zeta} \big(P_\Delta \phi_n\big)(z) = \phi_n(\zeta).$$

Conséquemment et par semi-continuité supérieure de u :

$$\limsup_{z \to \zeta \in \partial\Delta} \big(u - P_\Delta \phi_n\big)(z) \leqslant u(\zeta) - \phi_n(\zeta) \leqslant 0.$$

Grâce à l'hypothèse **(iii)**, nous déduisons que $u \leqslant P_\Delta \phi_n$ dans Δ.

Enfin, $P_\Delta(\cdot)$ étant un opérateur intégral, le Théorème de convergence monotone — soustraire une constante pour se ramener à des fonctions toutes $\leqslant 0$ — conclut :

$$u(z) \leqslant \lim_{n \to \infty} P_\Delta\big(\phi_n\big)(z) = P_\Delta\Big(\lim_{n\to\infty} \phi_n\Big)(z) = P_\Delta\big(u\big|_{\partial\Delta}\big)(z).$$

(ii) $\Longrightarrow$ **(i)**. Poser $s = 0$ offre l'inégalité de sous-moyenne de la Définition 4.2 initiale, satisfaite dorénavant non seulement pour $0 \leqslant r \leqslant r_0$ assez petit, mais encore pour *tous* les rayons r tels que $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$. □

Ceci mérite bien de mettre en exergue un bon petit

Corollaire 7.2. [Inégalité de sous-moyenne globale] *Si une fonction* u *est sous-harmonique dans un ouvert* $\Omega \subset \mathbb{C}$*, alors en tout point* $z_0 \in \Omega$ *et pour tout rayon* $0 \leqslant r < \mathsf{dist}(z_0, \partial\Omega)$*, on a :*

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(z_0 + r\, e^{i\theta}\big)\, d\theta,$$
$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{\pi\, r^2} \iint_{\mathbb{D}_r(z_0)} u(x,y)\, dxdy.$$

Démonstration. La première inégalité coïncide avec **(ii)** du théorème précédent pour $s = 0$.

La deuxième inégalité en découle alors par intégration :

$$\int_0^r s\, ds\; 2\pi\, u(z_0) \leqslant \int_0^r s\, ds \int_0^{2\pi} u\big(z_0 + s\, e^{i\theta}\big)\, d\theta,$$

suivie d'une réorganisation visuelle. □

Corollaire 7.3. *Si* $f \colon \Omega \xrightarrow{\sim} \Omega' = f(\Omega)$ *est un biholomorphisme entre deux ouverts* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *et* $\Omega' \subset \mathbb{C}$*, alors :*

$$u' \in \mathsf{SH}(\Omega') \Longrightarrow u \circ f \in \mathsf{SH}(\Omega).$$

Démonstration. Le critère **(iii)** de sous-harmonicité est invariant, puisque nous savons déjà que l'harmonicité est invariante ! □

Ainsi, il est possible d'étendre la définition de la sous-harmonicité aux domaines de la sphère de Riemann $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, et, plus généralement, aux ouverts quelconques des surfaces de Riemann arbitraires.

Une autre application donne *la* caractérisation concrète des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ qui sont sous-harmoniques, comme cela a été annoncée en début de chapitre.

Théorème 7.4. *Sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, une fonction $u \in \mathscr{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ est sous-harmonique si et seulement si :*

$$\Delta u \geqslant 0.$$

Démonstration. Supposons d'abord que $\Delta u \geqslant 0$ sur Ω. Soit $\omega \Subset \Omega$ un sous-domaine relativement compact, et soit une fonction harmonique $h \in \mathsf{Harm}(\Omega)$ telle que, en tout point du bord $\zeta \in \partial\omega$:

$$\limsup_{z \to \zeta} \big(u - h\big)(z) \leqslant 0.$$

Grâce à la caractérisation **(iii)** de la sous-harmonicité, il suffit de faire voir que $u \leqslant h$ dans ω.

Pour $\varepsilon > 0$, introduisons à cette fin la fonction :

$$v_\varepsilon(z) := \begin{cases} u(z) - h(z) + \varepsilon\, |z|^2 & \text{lorsque } z \in \omega, \\ \varepsilon\, |z|^2 & \text{lorsque } z \in \partial\omega. \end{cases}$$

Comme v_ε est semi-continue supérieurement sur $\overline{\omega}$ (exercice mental), elle y atteint, par la Proposition 3.5, son maximum en au moins un point $z_0 \in \overline{\omega}$.

Mais z_0 ne peut *pas* appartenir à l'intérieur ω, à cause de :

$$\Delta v_\varepsilon = \Delta u - 0 + 4\,\varepsilon > 0 \qquad \text{(sur } \omega\text{)},$$

car cette positivité implique que la dérivée seconde en tout point $z_0 = x_0 + i\, y_0 \in \omega$, soit de la fonction $x \longmapsto v_\varepsilon(x, y_0)$, soit de la fonction $y \longmapsto v_\varepsilon(x_0, y)$, est > 0, ce qui rend au moins l'une de ces fonctions paraboliquement croissante, et contredit la maximalité en z_0.

Donc le maximum de v_ε est atteint en un point $z_0 \in \partial\omega$, ce qui donne :

$$\big(u - h\big)(z) \leqslant \max_{z \in \partial\omega} \varepsilon\, |z|^2 \qquad (\forall\, z \in \omega).$$

En faisant $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$, nous obtenons bien $u \leqslant h$ dans ω.

Réciproquement, supposons que $u \in \mathsf{SH}(\Omega)$ est sous-harmonique. Dans un voisinage d'un point $z_0 \in \Omega$ avec $\varepsilon > 0$ très petit, développons alors u au second ordre taylorien :

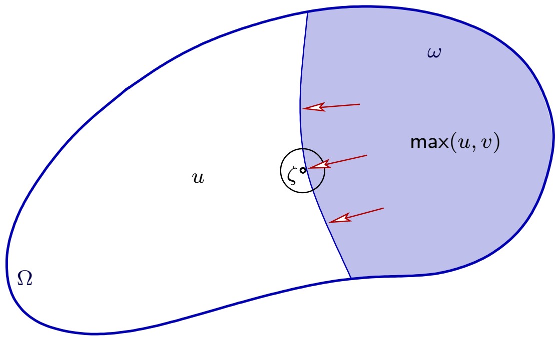
$$\begin{aligned} u\big(z_0 + \varepsilon\, e^{i\theta}\big) &= u(z_0) + \frac{\partial u}{\partial z}(z_0)\, \varepsilon\, e^{i\theta} + \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z_0)\, \varepsilon\, e^{-i\theta} + \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z_0)\, e^{2i\theta} + 2\, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}}(z_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z}^2}(z_0)\, e^{-2i\theta} \right) + \varepsilon^2\, \mathrm{o}(1). \end{aligned}$$

Intégrons ensuite par rapport à θ pour prendre la valeur moyenne de cela :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(z_0 + \varepsilon\, e^{i\theta}\big)\, d\theta = u(z_0) + \varepsilon^2\, 2\, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}}(z_0) + \varepsilon^2\, \mathrm{o}(1).$$

L'inégalité de sous-moyenne (4.3) nécessite alors que $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}}(z_0) \geqslant 0$. □

Le résultat suivant illustre parfaitement la flexibilité des fonctions sous-harmoniques.



Théorème 7.5. [de recollement] *Soit u une fonction sous-harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, et v une fonction sous-harmonique dans un sous-ouvert $\omega \subset \Omega$ satisfaisant, en tout point ζ de l'interface $\partial\omega \cap \Omega$:*

$$\limsup_{\omega \ni z \to \zeta} v(z) \leqslant u(\zeta).$$

Alors la fonction :

$$\widetilde{u} := \begin{cases} \max(u, v) & \text{sur } \omega, \\ u & \text{sur } \Omega \backslash \omega, \end{cases}$$

est sous-harmonique dans Ω.

Démonstration. La condition à l'interface garantit que $\widetilde{u}$ est semi-continue supérieurement dans Ω.

Ensuite, la Proposition 4.7 dit que $\max(u, v)$ satisfait l'inégalité de sous-moyenne locale en tout point de ω. Donc $\widetilde{u}$ est sous-harmonique dans $\Omega \backslash \partial\omega$.

Enfin, en un point $\zeta \in \partial\omega \cap \Omega$, sur des cercles $S_r(\zeta)$ de rayons $0 \leqslant r < \mathrm{dist}(\zeta, \mathbb{C} \backslash \Omega)$, on a aussi :

$$\widetilde{u}(\zeta) = u(\zeta) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(\zeta + r\, e^{i\theta}\big)\, d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{u}\big(\zeta + r\, e^{i\theta}\big)\, d\theta,$$

simplement parce que $u \leqslant \widetilde{u}$ partout. □

8. Théorèmes de convergence

Le premier résultat de convergence, pour les suites décroissantes, est simple, mais important. Il explique en partie pourquoi il est naturel de demander que les fonctions sous-harmoniques soient seulement semi-continues supérieurement : en effet, c'est la seule propriété qui est conservée lorsqu'on prend des limites décroissantes de fonctions continues, tandis que l'inégalité de sous-moyenne, elle, va s'avérer facilement préservée dans la démonstration.

Théorème 8.1. *Soit $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions sous-harmoniques dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui est décroissante :*

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant \cdots.$$

Alors la fonction-limite :

$$u := \lim_{n \to \infty} u$$

est sous-harmonique dans Ω.

Démonstration. Pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble réunion dénombrable d'ouverts :

$$\big\{z \in \Omega\colon\ u(z) < c\big\} \;=\; \bigcup_{n \geqslant 1} \{u_n < c\}$$

est ouvert, donc u est semi-continue supérieurement.

Ensuite, si $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$, alors pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n(z_0) \;\leqslant\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n\big(z_0 + r\,e^{i\theta}\big)\,d\theta.$$

Grâce au théorème de convergence monotone, lorsque $n \to \infty$, on déduit que u satisfait l'inégalité de sous-moyenne (globale), donc u sous-harmonique. □

Il ne faut pas (du tout !) s'imaginer qu'il pourrait exister un énoncé analogue pour les suites croissantes de fonctions sous-harmoniques. Par exemple, la suite $u_n(z) := \frac{1}{n} \log |z|$ sur le disque unité $\mathbb{D}$ a pour limite une fonction :

$$u(z) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \ 0 < |z| < 1, \\ -\,\infty & \text{en } \ z = 0, \end{cases}$$

qui n'est même pas semi-continue supérieurement en 0 !

Le résultat suivant généralise la Proposition 4.7 **(i)** pour un supremum pris sur un espace non forcément fini ou discret.

Théorème 8.2. *Soit T un espace topologique compact, soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine, et soit $v\colon \Omega \times T \longrightarrow [-\infty, \infty[$ une fonction satisfaisant :*
- *v est semi-continue supérieurement sur $\Omega \times T$;*
- *$z \longmapsto v(z,t)$ est sous-harmonique dans Ω, pour tout $t \in T$ fixé.*

Alors la fonction :

$$u(z) \;:=\; \sup_{t \in T}\, v(z,t)$$

est sous-harmonique dans Ω.

Démonstration. Soit $z \in \Omega$ et soit $c \in \mathbb{R}$ telle que $u(z) < c$. Ainsi, pour tout $t \in T$, on a $v(z,t) < c$, et comme v est semi-continue supérieurement, il existe un voisinage V_t de t et un rayon $r_t > 0$ tels que :

$$v \;<\; c \quad \text{sur } \mathbb{D}_{r_t}(z) \times \mathsf{V}_t \qquad\qquad (\forall\, t \in T).$$

Par compacité de T, il y a un sous-recouvrement fini :

$$\mathsf{V}_{t_1} \cup \cdots \cup \mathsf{V}_{t_\kappa} \;\supset\; T.$$

Avec le rayon strictement positif :

$$s \;:=\; \min\big(r_{t_1}, \dots, r_{t_\kappa}\big) \;>\; 0,$$

on a donc $u < c$ sur $\mathbb{D}_s(z)$, ce qui établit la semi-continuité supérieure de u.

Ensuite, soit un disque fermé $\overline{D}_r(z_0) \subset \Omega$. Alors pour tout $t \in T$, on a :

$$v(z_0, t) \;\leqslant\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v\big(z_0 + r\,e^{i\theta},\, t\big)\,d\theta \;\leqslant\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(z_0 + r\,e^{i\theta}\big)\,d\theta.$$

Il suffit de prendre le supremum sur $t \in T$ pour conclure que u satisfait l'inégalité de sous-moyenne. □

Le résultat suivant généralise la Proposition 4.7 **(ii)** pour une combinaison linéaire à coefficients positifs prise sur un espace non forcément fini ou discret.

Théorème 8.3. *Soit* $(\mathscr{M}, \mu)$ *un espace mesuré de mesure* $\mu(\mathscr{M}) < \infty$ *finie, soit* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un domaine, et soit* $v \colon \Omega \times \mathscr{M} \longrightarrow [-\infty, \infty[$ *une fonction satisfaisant :*

- v *est mesurable sur* $\Omega \times \mathscr{M}$ *;*
- $z \longmapsto v(z, m)$ *est sous-harmonique dans* Ω*, pour tout* $m \in \mathscr{M}$ *fixé ;*
- $z \longmapsto \sup_{m \in \mathscr{M}} v(z, m)$ *est bornée supérieurement sur les compacts de* Ω*.*

Alors la fonction :

$$u(z) := \int_{\mathscr{M}} v(z, m) \, d\mu(m)$$

est sous-harmonique dans Ω*.*

Démonstration. Il suffit de montrer que u est sous-harmonique dans tout sous-domaine relativement compact $\omega \Subset \Omega$.

Par la troisième hypothèse, $\sup_{m \in \mathscr{M}} v(z, m)$ est bornée supérieurement sur $\overline{\omega}$, donc après soustraction éventuelle d'une constante, on peut supposer que $v \leqslant 0$ sur $\omega \times \mathscr{M}$. Ceci légitimera l'utilisation du lemme de Fatou et du théorème de Fubini-Tonelli dans ce qui va suivre.

Si $z_0 \in \omega$, et si $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite arbitraire de points de ω telle que $z_n \longrightarrow z_0$, Fatou puis la semi-continuité supérieure de $z \longmapsto v(z, m)$ donnent :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \to \infty} u(z_n) = \limsup_{n \to \infty} \int_{\mathscr{M}} v(z_n, m) \, d\mu(m) &\leqslant \int_{\mathscr{M}} \limsup_{n \to \infty} v(z_n, m) \, d\mu(m) \\ &\leqslant \int_{\mathscr{M}} v(z_0, m) \, d\mu(m) = u(z_0), \end{aligned}$$

ce qui est la semi-continuité supérieure de u en $z_0 \in \omega$.

Ensuite, pour tout disque $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \omega$, Fubini-Tonelli puis la sous-harmonicité de $z \longmapsto v(z, m)$ donnent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(z_0 + r\, e^{i\theta}\big) \, d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bigg(\int_{\mathscr{M}} v\big(z_0 + r\, e^{i\theta},\, m\big) \, d\mu(m) \bigg) \, d\theta \\ &= \int_{\mathscr{M}} \bigg(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v\big(z_0 + r\, e^{i\theta},\, m\big) \, d\theta \bigg) \, d\mu(m) \\ &\geqslant \int_{\mathscr{M}} v(z_0, m) \, d\mu(m) = u(z_0), \end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité de sous-moyenne pour u en z_0. □

9. Intégrabilité des fonctions sous-harmoniques

D'après la Proposition 3.5, les fonctions sous-harmoniques sont bornées supérieurement sur les compacts. Un phénomène extrêmement important est qu'elles ne peuvent pas être « *trop infinies inférieurement* », au sens de la mesure. Rappelons l'expression de la mesure de Lebesgue comme 2-forme différentielle :

$$d\lambda = dx \wedge dy = \tfrac{i}{2} \, dz \wedge d\overline{z}.$$

Théorème 9.1. **[**$\mathsf{SH} \subset L^1_{\mathsf{loc}}$**]** *Toute fonction sous-harmonique* $u \not\equiv -\infty$ *dans un domaine* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *est localement intégrable au sens de Lebesgue :*

$$\int_K |u| \, d\lambda < \infty \qquad (\forall\, K \subset \Omega \text{ compact}).$$

Démonstration. Par un argument direct de compacité, il suffit de montrer que pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ avec $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$ tel que :

$$\int_{\mathbb{D}_r(z_0)} |u(x,y)|\, dx \wedge dy \;<\; \infty.$$

À cet effet, décomposons $\Omega = E \cup F$ en les deux sous-ensembles disjoints :

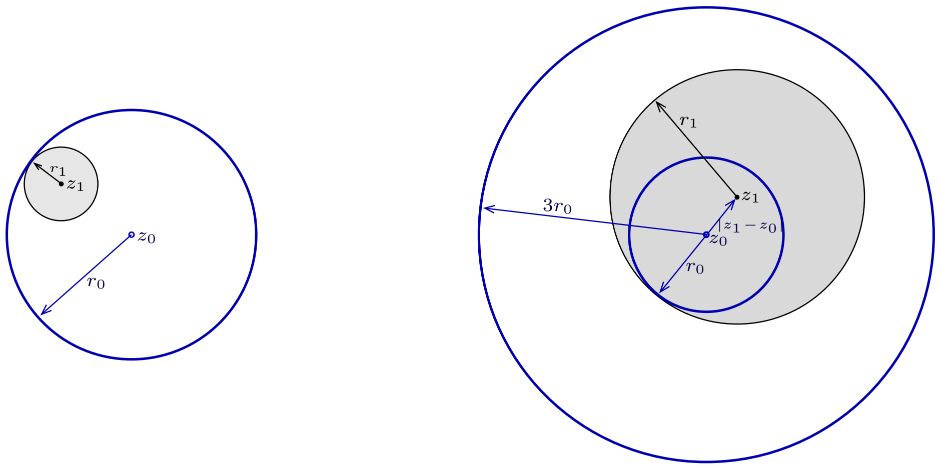
$$E \;:=\; \big\{z_0 \in \Omega \colon \exists\, r > 0,\;\; \textstyle\int_{\mathbb{D}_r(z_0)} |u| < \infty\big\},$$

et :

$$F \;:=\; \big\{z_0 \in \Omega \colon \forall\, r > 0,\;\; \textstyle\int_{\mathbb{D}_r(z_0)} |u| = \infty\big\}.$$

L'objectif est d'établir que $E = \Omega$.

Assertion 9.2. *E est ouvert.*



Preuve. Cette affirmation est tout à fait naturelle en théorie de l'intégration : soit $z_0 \in E$ et soit $r_0 > 0$ tel que $\int_{\mathbb{D}_{r_0}(z_0)} |u| < \infty$. Soit $z_1 \in \mathbb{D}_{r_0}(z_0)$ et soit :

$$r_1 \;:=\; r_0 - |z_1 - z_0| \;>\; 0,$$

comme sur la partie gauche de la figure. Alors puisque $\mathbb{D}_{r_1}(z_1) \subset \mathbb{D}_{r_0}(z_0)$ (avec point de tangence), on majore trivialement :

$$\int_{\mathbb{D}_{r_1}(z_1)} |u|\, d\lambda \;\leqslant\; \int_{\mathbb{D}_{r_0}(z_0)} |u|\, d\lambda \;<\; \infty.$$

Ainsi, $z_1 \in E$ pour tout $z_1 \in \mathbb{D}_{r_0}(z_0)$ lorsque $z_0 \in E$. □

Assertion 9.3. *F est aussi ouvert et de plus :*

$$u\big|_F \;\equiv\; -\infty.$$

L'ouverture de F, « *non-évidente* », est le point-clé, et elle utilise réellement la sous-harmonicité de u.

Preuve. Soit $z_0 \in F$, et soit un rayon $r_0 > 0$ tel que $\overline{\mathbb{D}}_{3r_0}(z_0) \subset \Omega$, comme sur la partie droite de la figure. Puisque $z_0 \in F$:

$$\int_{\mathbb{D}_{r_0}(z_0)} |u|\, d\lambda \;=\; \infty.$$

Ensuite, soit $z_1 \in \mathbb{D}_{r_0}(z_0)$, et soit :

$$r_1 \,:=\, r_0 + |z_1 - z_0| \,<\, 2\, r_0.$$

Par inégalité triangulaire, on a :

$$\mathbb{D}_{r_0}(z_0) \,\subset\, \mathbb{D}_{r_1}(z_1) \,\subset\, \mathbb{D}_{3r_0}(z_0) \,\Subset\, \Omega,$$

le cercle $S_{r_1}(z_1)$ étant d'ailleurs tangent au cercle $S_{r_0}(z_0)$. Bien entendu :

$$\int_{\mathbb{D}_{r_1}(z_1)} |u|\, d\lambda \,=\, \infty.$$

Maintenant, la Proposition 3.5 garantit que $u = u^+ - u^-$ avec $u^+ = \max(0, u) \geqslant 0$ et $u^- = -\min(u, 0) \geqslant 0$, est bornée supérieurement sur $\overline{\mathbb{D}}_{r_1}(z_1)$, à savoir u^+ l'est, donc $0 \leqslant \int u^+ < \infty$, et par conséquent, on a en fait :

$$\int_{\mathbb{D}_{r_1}(z_1)} u\, d\lambda \,=\, -\infty.$$

Rappelons que u satisfait l'inégalité de sous-moyenne globale :

$$u(z_1) \,\leqslant\, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(z_1 + s\, e^{it}\big)\, dt \qquad\qquad (\forall\, 0 \leqslant s \leqslant r_1).$$

Multiplions cela par $2\pi s$ et intégrons de $s = 0$ à $s = r_1$:

$$\pi\, r_1^2\, u(z_1) \,\leqslant\, \int_{\mathbb{D}_{r_1}(z_1)} u\, d\lambda \,=\, -\infty.$$

Cette inégalité étant valable quel que soit le choix initial de $z_1 \in \mathbb{D}_{r_0}(z_0)$, nous déduisons :

$$u\big|_{\mathbb{D}_{r_0}(z_0)} \,\equiv\, -\infty$$

Ceci montre bien que F est ouvert, et que de plus $u|_F \equiv -\infty$. □

L'ouvert connexe $\Omega = E \cup F$ est réunion disjointe de deux ouverts, donc ou bien $\Omega = E$ (l'objectif annoncé), ou bien $\Omega = F$, mais dans ce dernier cas, l'assertion qui précède a de surcroît montré que $u|_F = u|_\Omega = u \equiv -\infty$, ce qui était exclu à l'avance par une hypothèse du théorème. □

De $\mathsf{SH}(\Omega) \subset L^1_{\mathsf{loc}}(\Omega)$, nous allons déduire que les fonctions sous-harmoniques non identiquement égales à $-\infty$ sont intégrables sur tout cercle.

Corollaire 9.4. *Dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, si $u \in \mathsf{SH}(\Omega) \backslash \{-\infty\}$, alors pour tout $z_0 \in \Omega$ et tout $0 \leqslant r < \mathsf{dist}(z_0, \partial\Omega)$, on a :*

$$-\infty \,<\, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(z_0 + r\, e^{i\theta}\big)\, d\theta \,<\, \infty.$$

Démonstration. L'inégalité supérieure provenant du fait que u est bornée supérieurement sur tout compact, c'est l'inégalité inférieure qui compte. Après soustraction éventuelle d'une constante, on peut donc supposer que $u \leqslant 0$ sur $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$.

D'après le Théorème 7.1 **(ii)**, pour tout $0 \leqslant s < r$ et tout $0 \leqslant t < 2\pi$, le prolongement harmonique de la restriction de u au cercle $S_r(z_0)$ majore u :

$$u\big(z_0 + s\, e^{it}\big) \,\leqslant\, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - s^2}{r^2 - 2rs\, \mathsf{cos}(\theta - t) + s^2}\, u\big(z_0 + r\, e^{i\theta}\big)\, d\theta.$$

Effectuons alors une majoration de type Harnack pour le noyau (exercice) :

$$\frac{r^2 - s^2}{r^2 - 2rs\,\mathrm{cos}(\theta - t) + s^2} \cdot (-1) \;\leqslant\; \frac{r-s}{r+s} \cdot (-1),$$

ce qui donne :

$$u\big(z_0 + s\,e^{it}\big) \;\leqslant\; \frac{r-s}{r+s}\,\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(z_0 + r\,e^{i\theta}\big)\,d\theta.$$

Maintenant, si l'intégrale du membre de droite était égale à $-\infty$, ceci impliquerait :

$$u\big|_{\mathbb{D}_r(z_0)} \;\equiv\; -\infty,$$

puis, grâce au Théorème 9.1 fondamental qui précède, $u \equiv -\infty$ dans Ω, ce qui n'est pas !

Donc on a bien :

$$-\infty \;<\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(z_0 + r\,e^{i\theta}\big)\,d\theta \;\leqslant\; 0,$$

pour tout disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$. □

Une autre conséquence de ce théorème fondamental est que les fonctions sous-harmoniques ne peuvent pas être égales à $-\infty$ sur des ensembles trop substantiels.

Définition 9.5. Le *lieu polaire* d'une fonction $u \in \mathsf{SH}(\Omega)$ est :

$$\big\{z \in \Omega\colon\; u(z) = -\infty\big\}.$$

Corollaire 9.6. *Si une fonction $u \not\equiv -\infty$ est sous-harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors son lieu polaire est de mesure de Lebesgue égale à* 0.

Démonstration. Soit $(K_j)_{j=1}^{\infty}$ une suite croissante $K_j \subset K_{j+1}$ de compacts qui remplit $\Omega = \cup\, K_j$. On a grâce au Théorème 9.1 :

$$\int_{K_j} |u|\,d\lambda \;<\; \infty \qquad\qquad (\forall\, j \geqslant 1),$$

donc par un théorème élémentaire de théorie de l'intégration :

$$0 \;=\; \mathsf{mesure}\,\big(\{u = -\infty\} \cap K_j\big) \qquad\qquad (\forall\, j \geqslant 1),$$

et enfin on obtient la nullité de la mesure de $\{u = -\infty\}$ comme réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle. □

10. Lieux polaires des fonctions sous-harmoniques

Bien entendu, lorsque $u = \mathsf{log}\,|f|$ pour une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ non identiquement nulle, le lieu polaire $\{u = -\infty\} = \{f = 0\}$ est discret, dénombrable.

Toutefois, cet exemple n'est pas représentatif de la vraie généralité des fonctions sous-harmoniques. En fait, il en existe qui sont égales à $-\infty$ sur des sous-ensembles (non-ouverts) non dénombrables, comme nous allons le voir.

En guise de préliminaire, quelques rappels s'imposent sur les ensembles parfaits et sur les théorèmes catégoriques de Baire. Soit (X, d) un espace métrique complet muni d'une distance d, par exemple $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ avec $\mathrm{N} \geqslant 1$, muni de la distance euclidienne.

Pour $x \in X$ et $r > 0$, soient les boules ouvertes et fermées :

$$B_r(x) \;:=\; \big\{y \in X\colon\; d(x,y) < r\big\} \qquad \text{et} \qquad \overline{B}_r(x) \;:=\; \big\{y \in X\colon\; d(x,y) \leqslant r\big\}.$$

Définition 10.1. Un sous-ensemble $P \subset X$ est dit *parfait* lorsqu'il satisfait l'une des conditions équivalentes suivantes :

- pour tout point $p \in P$, on a $p \in \overline{P \backslash \{p\}}$, à savoir, aucun point de p n'est *isolé* dans P ;
- pour tout point $p \in P$, il existe une suite $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ de points $p_n \in P$ tous distincts de p telle que $p_n \longrightarrow p$;
- l'*ensemble dérivé* de P :

$$P' := \big\{p' \in X : \exists\, (p_n)_{n=1}^{\infty},\ \ p_n \in P,\ \ p_n \neq p',\ \ p_n \longrightarrow p'\big\} = P$$

coïncide avec lui-même.

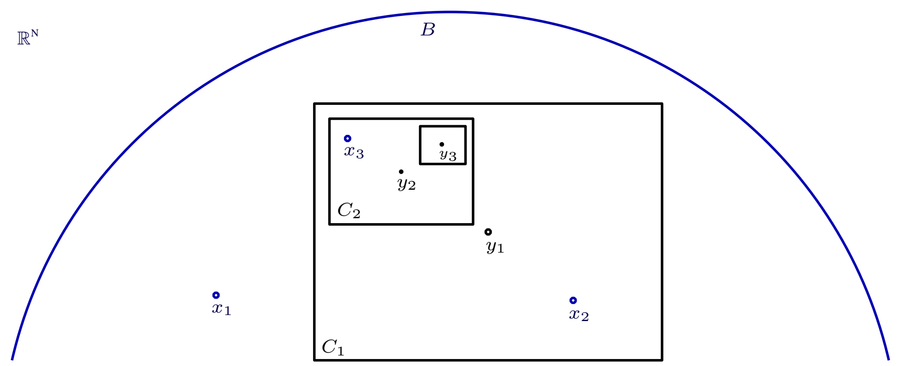
En particulier, tout ensemble parfait est fermé. Le cas de la dimension $\mathrm{N} = 2$ dans l'énoncé suivant nous sera utile.

Théorème 10.2. *Tout sous-ensemble parfait non vide $P \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ est de cardinal* non *dénombrable.*

Démonstration. Si on avait $\mathsf{Card}\, P < \infty$, son ensemble dérivé $P' = \emptyset$ serait vide (exercice mental), ce qui n'est pas. Donc $\mathsf{Card}\, P = \infty$.

En raisonnant par l'absurde, supposons donc que $\mathsf{Card}\, P = \mathsf{Card}\, \mathbb{N}^*$ soit infini dénombrable. Via une bijection entre $\mathbb{N}^*$ et P, énumérons alors tous les points de P sous forme d'une suite :

$$P = \big\{x_1, x_2, x_3, \dots\big\}.$$



Pour commencer, soit $B \Subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ une boule ouverte non vide relativement compacte contenant x_1. Comme P est parfait, x_1 n'est pas isolé, donc il existe un point :

$$y_1 \in P \cap B,$$

tel que :

$$y_1 \neq x_1.$$

Choisissons alors un cube ouvert $C_1 \subset B$ centré en y_1 de côté assez petit pour que :

$$x_1 \notin \overline{C}_1.$$

Ensuite et à nouveau parce que P est parfait, $y_1 \in P$ n'est pas isolé, donc il existe un point :

$$y_2 \in P \cap C_1.$$

tel que :

$$y_2 \neq y_1 \qquad \textit{et de plus :} \qquad y_2 \neq x_2.$$

On choisit alors un cube ouvert non vide C_2 centré en y_2 de côté assez petit pour que :

$$x_2, y_1 \notin \overline{C}_2.$$

On se convainc alors (exercice) qu'il est possible de construire par induction une suite infinie de points $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ distincts deux à deux et une suite de cubes ouverts $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ centrés en les y_n satisfaisant, pour tout $n \geqslant 1$:

(i) $C_{n+1} \subset C_n \subset B$;

(ii) $y_n \in P \cap C_n$;

(iii) $x_1, \dots, x_n, \, y_1, \dots, y_{n-1} \notin \overline{C}_n$.

Ainsi les sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$:

$$K_n := \overline{C}_n \cap P \qquad (n \geqslant 1)$$

sont compacts, puisque tous contenus dans $\overline{B} \Subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, et emboîtés :

$$K_n \subset K_{n+1} \qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

Un théorème classique de topologie métrique assure alors que l'intersection infinie :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$$

est un sous-ensemble *non vide* de P.

Mais comme par construction on a arrangé pour tout $n \geqslant 1$ que :

$$x_1, \dots, x_n \notin \overline{C}_n \cap P = K_n,$$

aucun point de $P = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ ne peut rester dans $\cap_n K_n$, ce qui est la contradiction conclusive montrant que P est non dénombrable. □

Bien entendu, ce théorème est tout aussi vrai dans un espace métrique complet (X, d) quelconque.

Définition 10.3. Dans un espace métrique (X, d), un sous-ensemble $D \subset X$ est dit *dense* lorsque tout point de X lui est adhérent :

$$\overline{D} = X.$$

Observation 10.4. *On a équivalence entre :*

- *$D \subset X$ est dense ;*
- *$D \cap B_r(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$;*
- *$D \cap \mathsf{U} \neq \emptyset$ pour tout ouvert non vide $\mathsf{U} \subset X$.*

Démonstration. La vérification complète est laissée en exercice ; s'inspirer du raisonnement de l'Observation 10.7. □

Définition 10.5. Dans un espace métrique (X, d), un sous-ensemble $A \subset X$ est dit *nulle part dense* lorsque l'intérieur de son adhérence est vide :

$$\mathsf{Int}\big(\overline{A}\big) = \emptyset.$$

Lemme 10.6. *Pour tout ouvert $\mathsf{O} \subset X$, on a :*

$$X \backslash \overline{\mathsf{O}} = \mathsf{Int}\,\big(X \backslash \mathsf{O}\big).$$

Démonstration. Tout d'abord, $\overline{\mathsf{O}} \supset \mathsf{O}$ donne $X\backslash\overline{\mathsf{O}} \subset X\backslash\mathsf{O}$, d'où en prenant les intérieurs :

$$X\backslash\overline{\mathsf{O}} \subset \mathsf{Int}\big(X\backslash\mathsf{O}\big).$$

Pour l'inclusion inverse, un énoncé élémentaire sera utile.

Observation 10.7. *Soit* $\mathsf{U} \subset X$ *un ouvert non vide, et soit* $G \subset X$ *un sous-ensemble quelconque. Alors :*

$$\mathsf{U}\cap G = \emptyset \implies \mathsf{U}\cap\overline{G} = \emptyset.$$

Démonstration. En effet, tout point $g_\infty \in \overline{G}\backslash G$ est limite $g_\infty = \lim g_n$ d'une suite convergente de points $g_n \in G$. Si on avait $g_\infty \in \mathsf{U}$, alors à partir d'un certain rang $n \geqslant \mathrm{N} \gg 1$, *tous* les g_n, proches de g_∞, devraient se trouver dans l'ouvert U, mais $g_n \in \mathsf{U}\cap G = \emptyset$ est impossible. □

Soit $x \in \mathsf{Int}\,(X\backslash\mathsf{O})$ quelconque, c'est-à-dire qu'il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte :

$$B_r(x) \subset X\backslash\mathsf{O},$$

donc $B_r(x)\cap\mathsf{O} = \emptyset$. L'observation qui précède donne $B_r(x)\cap\overline{\mathsf{O}} = \emptyset$. En particulier, le centre $x \in X\backslash\overline{\mathsf{O}}$, et ceci établit l'inclusion inverse :

$$\mathsf{Int}\,(X\backslash\mathsf{O}) \subset X\backslash\overline{\mathsf{O}}$$

conclusive. □

Lemme 10.8. *Un ouvert* $\mathsf{O} \subset X$ *d'un espace métrique* (X, d) *est dense dans* X *si et seulement si le fermé complémentaire* $\mathsf{F} := X\backslash\mathsf{O}$ *est d'intérieur vide.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que :

$$\overline{\mathsf{O}} = X \iff \mathsf{Int}\big(X\backslash\mathsf{O}\big) = \emptyset,$$

ou, de manière équivalente, d'établir la contraposée :

$$\overline{\mathsf{O}} \subsetneqq X \iff \mathsf{Int}\big(X\backslash\mathsf{O}\big) \neq \emptyset,$$

qui est un corollaire (visuel) du Lemme 10.6. □

Lemme 10.9. *Étant donné un nombre fini* $\mathrm{K} \geqslant 2$ *d'ouvert denses* $\mathsf{O}_1, \dots, \mathsf{O}_{\mathrm{K}}$ *dans un espace métrique* (X, d)*, leur intersection :*

$$\mathsf{O}_1\cap\cdots\cap\mathsf{O}_{\mathrm{K}}$$

est encore un ouvert dense de X*.*

Démonstration. Pour de simples raisons logiques, le cas $\mathrm{K} = 2$ implique trivialement le cas général $\mathrm{K} \geqslant 2$. Traitons donc le cas $\mathrm{K} = 2$.

Soit $x \in X$ un point quelconque, et soit $B_r(x)$ une boule centrée en x de rayon $r > 0$ arbitrairement petit. Il s'agit de trouver, dans cette boule, au moins un point :

$$y_2 \in \mathsf{O}_2\cap\mathsf{O}_1\cap B_r(x).$$

Mais O_1 est dense, donc il existe $y_1 \in \mathsf{O}_1\cap B_r(x)$. Qui plus est, O_1 est ouvert, donc il existe une boule :

$$B_{s_1}(y_1) \subset \mathsf{O}_1\cap B_r(x) \qquad\qquad (\exists\, s_1 > 0).$$

Mais O_2 est dense, donc il existe :

$$y_2 \in \mathsf{O}_2\cap B_{s_1}(y_1),$$

et alors un tel y_2 fait parfaitement l'affaire ! □

Bien entendu, quand on passe à un nombre infini dénombrable d'ouverts denses $\overline{\mathsf{O}}_k = X$, $k \geqslant 1$, l'intersection $\cap_k \mathsf{O}_k$ cesse en général d'être ouverte. Mais le célèbre *Théorème de Baire* dont la démonstration est si élémentaire et dont les applications à l'Analyse et à la Topologie sont si fantastiques, montre qu'on conserve la densité.

Théorème 10.10. [de Baire] *Dans un espace métrique* complet (X, d) *:*

(i) *toute intersection infinie dénombrable* $\cap_{k\geqslant 1} \mathsf{O}_k$ *d'ouverts* $\mathsf{O}_k \subset X$ *denses* $\overline{\mathsf{O}}_k = X$ *est encore dense :*

$$\overline{\bigcap_{k\geqslant 1} \mathsf{O}_k} = X;$$

(ii) *toute réunion infinie dénombrable* $\cup_{k\geqslant 1} \mathsf{F}_k$ *de sous-ensembles fermés* $\mathsf{F}_k \subset X$ *d'intérieur* $\mathsf{Int}\, \mathsf{F}_k = \emptyset$ *vide est encore d'intérieur vide :*

$$\mathsf{Int} \bigcup_{k\geqslant 1} \mathsf{F}_k = \emptyset.$$

Démonstration. Eu égard au Lemme 10.8 et à la correspondance :

$$\mathsf{F}_k = X \backslash \mathsf{O}_k \iff \mathsf{O}_k = X \backslash \mathsf{F}_k \qquad (k \geqslant 1),$$

les deux énoncés **(i)** et **(ii)** sont équivalents entre eux.

Focalisons-nous donc sur **(i)**. Soit $\mathsf{U} \subset X$ un ouvert non vide quelconque. Le but est de montrer que :

$$\emptyset \neq \mathsf{U} \cap \Big(\bigcap_{k\geqslant 1} \mathsf{O}_k \Big).$$

Comme O_1 est dense, il existe $x_1 \in \mathsf{U} \cap \mathsf{O}_1$, et comme cette intersection est ouverte, elle contient une certaine boule ouverte centrée en x_1 :

$$\mathsf{U} \cap \mathsf{O}_1 \supset B_{2r_1}(x_1),$$

de rayon $2r_1$ avec $0 < r_1 \leqslant \frac{1}{2}$; ici, $2r_1$ est une marge de sécurité qui sera utile plus tard.

Ensuite, comme O_2 est dense, il existe $x_2 \in B_{r_1}(x_1) \cap \mathsf{O}_2$ — noter qu'on passe à une sous-boule —, et comme cette intersection est ouverte, elle contient une boule ouverte centrée en x_2 :

$$B_{r_1}(x_1) \cap \mathsf{O}_2 \supset B_{2r_2}(x_2).$$

de rayon $2r_2$, avec $0 < r_2 \leqslant \frac{1}{2^2}$, quitte à rapetisser le rayon. Par construction :

$$\mathsf{U} \cap \mathsf{O}_1 \cap \mathsf{O}_2 \supset B_{2r_2}(x_2).$$

Affirmation 10.11. *Il existe une suite infinie* $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ *de points* $x_k \in X$ *et des rayons* $0 < r_k \leqslant \frac{1}{2^k}$ *tels que :*

$$B_{r_k}(x_k) \cap \mathsf{O}_{k+1} \supset B_{2r_{k+1}}(x_{k+1}) \qquad (\forall\, k \geqslant 1).$$

Preuve. Par récurrence, supposons x_k et r_k déjà construits. Comme O_{k+1} est dense, il existe $x_{k+1} \in B_{r_k}(x_k) \cap \mathsf{O}_{k+1}$, et comme cette intersection est ouverte, elle contient une boule ouverte centrée en x_k :

$$B_{r_k}(x_k) \cap \mathsf{O}_{k+1} \supset B_{2r_{k+1}}(x_{k+1}),$$

de rayon $2r_{k+1}$, avec $0 < r_{k+1} \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}$. □

Il découle de cette construction gigogne que :

$$\mathsf{U} \cap \mathsf{O}_1 \cap \cdots \cap \mathsf{O}_k \;\supset\; B_{2r_k}(x_k) \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant 1).$$

Le doublage des rayons comme marge de sécurité sert maintenant à garantir que les boules fermées :

$$\overline{B}_{r_{k+1}}(x_{k+1}) \;\subset\; B_{2r_{k+1}}(x_{k+1}) \;\subset\; B_{r_k}(x_k) \;\subset\; \overline{B}_{r_k}(x_k) \qquad\qquad (k \geqslant 1)$$

sont emboîtées les unes dans les autres. D'après un théorème classique de topologie métrique, comme X est complet, leur intersection infinie :

$$\bigcap_{k\geqslant 1} \overline{B}_{r_k}(x_k) \;=\; \{p\}$$

est *non vide*, constituée d'ailleurs d'un point unique. Or comme :

$$\mathsf{U} \cap \mathsf{O}_1 \cap \cdots \cap \mathsf{O}_k \;\supset\; \overline{B}_{r_k}(x_k) \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant 1),$$

il vient :

$$\mathsf{U} \cap \Big(\bigcap_{k\geqslant 1} \mathsf{O}_k\Big) \;\supset\; \{p\} \;=\; \bigcap_{k\geqslant 1} \overline{B}_{r_k}(x_k),$$

ce qui montre bien que cette intersection est non vide. □

Voici une conséquence très souvent utilisée de ce résultat.

Théorème 10.12. [de Baire bis] *Si un espace métrique* complet (X, d) *non vide s'écrit comme réunion dénombrable de fermés :*

$$X \;=\; \bigcup_{k\geqslant 1} \mathsf{F}_k,$$

alors l'un au moins F_{k_*} *de ces fermés posssède un intérieur non vide :*

$$\emptyset \;\neq\; \mathrm{Int}\,\mathsf{F}_{k_*} \qquad\qquad (\exists\, k_* \geqslant 1).$$

Qui plus est, la réunion des intérieurs de ces fermés :

$$\overline{\bigcup_{k\geqslant 1} \mathrm{Int}\, F_k} \;=\; X$$

est dense dans X.

Démonstration. Soit $\mathsf{U} \subset X$ un ouvert non vide quelconque. Sa fermeture $\overline{\mathsf{U}}$ est alors un espace métrique complet.

Introduisons les ouverts relatifs de $\overline{\mathsf{U}}$:

$$\mathsf{O}_k \;:=\; \overline{\mathsf{U}} \backslash \mathsf{F}_k \qquad\qquad (k \geqslant 1).$$

L'hypothèse $\cup_k \mathsf{F}_k = X$ se traduit en passant aux complémentaires par :

$$\bigcap_{k\geqslant 1} \mathsf{O}_k \;=\; \emptyset \qquad\qquad (\text{dans } \overline{\mathsf{U}}).$$

Or ces O_k peuvent-ils être *tous* denses ? Ah que non ! Car le Théorème 10.10 impliquerait la non-vacuité de leur intersection.

L'un, au moins, disons O_{k_*}, de ces ouverts, n'est donc pas dense dans $\overline{\mathsf{U}}$, c'est-à-dire qu'il existe un ouvert non vide $\mathsf{V} \subset \overline{\mathsf{U}}$ tel que :

$$\mathsf{O}_{k_*} \cap \mathsf{V} \;=\; \emptyset.$$

Mais comme U est ouvert, on a de plus $\mathsf{U} \cap \mathsf{V} \neq \emptyset$. Nous pouvons donc trouver un point $x \in \mathsf{V} \cap \mathsf{U}$ et une boule de rayon $r > 0$ centrée en x tels que :

$$B_r(x) \subset \mathsf{U} \cap \mathsf{V},$$

d'où :

$$B_r(x) \cap \mathsf{O}_{k_*} = \emptyset.$$

Nous avons donc trouvé une boule ouverte entièrement contenue dans le fermé :

$$\mathsf{F}_{k*} = \overline{\mathsf{U}} \backslash \mathsf{O}_{k_*},$$

lequel est donc d'intérieur non vide !

De plus, comme l'ouvert de départ U était arbitraire, nous avons montré que la réunion des intérieurs des F_k rencontre tout U, donc que cette réunion est dense. □

Voici enfin l'énoncé promis qui révèle une complexité intéressante des fonctions sous-harmoniques.

Théorème 10.13. *Soit $K \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble compact qui est parfait, à savoir sans point isolé, soit $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite dénombrable dense de points $z_n \in K$, et soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de nombres $a_n > 0$ tels que $\sum_n a_n < \infty$. Alors la fonction $u \colon \mathbb{C} \longrightarrow [-\infty, \infty[$ définie par :*

$$u(z) := \sum_{n \geqslant 1} a_n \log |z - z_n| \qquad (z \in \mathbb{C})$$

satisfait :

(i) *u est sous-harmonique dans $\mathbb{C}$ et $u \not\equiv -\infty$;*

(ii) *$u = -\infty$ sur un sous-ensemble dense* non *dénombrable de K ;*

(iii) *u est* non *continue en presque tout point de K.*

Démonstration. **(i)**. Avec les notations du Théorème 8.3, sur l'espace $\mathscr{M} := \mathbb{N}^*$ muni de la mesure $\mu(\{n\}) := a_n$ pour $n \geqslant 1$ telle que $\mu(\mathscr{M}) < \infty$, introduisons la fonction :

$$\begin{aligned} v \colon \quad \mathbb{C} \times \mathbb{N}^* &\longrightarrow [-\infty, \infty[, \\ (z, n) &\longmapsto \log |z - z_n|. \end{aligned}$$

Alors d'après ledit théorème, la fonction :

$$\int_{\mathbb{N}^*} v(z, n)\, d\mu(n) = \sum_{n \geqslant 1} a_n \log |z - z_n| =: u(z)$$

est sous-harmonique dans $\mathbb{C}$ tout entier. De plus, il est clair (exercice mental) que $u(z) > -\infty$ pour tout $z \in \mathbb{C} \backslash K$, d'où $u \not\equiv -\infty$.

(ii). Examinons donc l'ensemble polaire :

$$\{u = -\infty\}.$$

Nous venons de dire que $\{u = -\infty\} \subset K$. De plus, chaque élément $z_n \in K$ de la suite dense appartient à $\{u = -\infty\}$, à cause du terme $a_n \log |z_n - z_n| = -\infty$, donc on a la densité :

$$\overline{\{u = -\infty\}} = K.$$

Ensuite, son complémentaire dans K :

$$K \backslash \{u = -\infty\} = \bigcup_{j \geqslant 1} \{z \in K \colon u(z) \geqslant -j\}, \tag{10.14}$$

s'écrit comme réunion dénombrable de sous-ensembles *fermés*, car u est sous-harmonique, et *d'intérieur vide dans* K, car la collection $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{u = -\infty\}$ est dense dans K (exercice mental).

Notons que K, muni de la topologie euclidienne induite de celle de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, est un espace métrique complet, et puisque K est parfait, le Théorème 10.2 assure qu'il est de cardinal non dénombrable.

Affirmation 10.15. *L'ensemble polaire* $\{u = -\infty\}$ *est non-dénombrable.*

Preuve. Sinon, s'il était dénombrable, il serait (trivialement) réunion dénombrable de fermés (singletons) d'intérieur vide, et alors en revenant à (10.14) :

$$K = \{u = -\infty\} \cup \bigg(\bigcup_{j \geqslant 1} \{z \in K \colon u(z) \geqslant -j\}\bigg),$$

l'espace métrique complet K lui-même serait réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide, en contradiction flagrante avec le Théorème 10.12 de Baire bis. □

Donc $\{u = -\infty\}$ est bien non-dénombrable.

(iii). Il est instantané que la fonction u est non-continue en tout point de :

$$\overline{\{u = -\infty\}} \backslash \{u = -\infty\}.$$

Or nous avons vu que :

$$\overline{\{u = -\infty\}} = K,$$

et comme le Corollaire 9.6 nous a informé qu'un ensemble polaire tel que $\{u = -\infty\}$ est toujours de mesure de Lebesgue égale à 0, nous concluons bien que u est non-continue en presque tout point de K. □

11. Convexité et sous-harmonicité

Comme nous l'avons déjà notifié, il existe des analogies profondes entre les fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ et les fonctions sous-harmoniques sur $\mathbb{C}$.

Rappelons qu'une fonction $\psi \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est *convexe* si, pour tout $0 < \mu_1, \dots, \mu_{\rm K} < 1$ avec $1 = \mu_1 + \cdots + \mu_{\rm K}$, pour tous $t_1, \dots, t_{\rm K} \in \mathbb{R}$, elle satisfait l'inégalité :

$$\psi\big(\mu_1\, t_1 + \cdots + \mu_{\rm K}\, t_{\rm K}\big) \leqslant \mu_1\, \psi(t_1) + \cdots + \mu_{\rm K}\, \psi(t_{\rm K}) \qquad ({\rm K} \geqslant 2).$$

Les fonctions convexes sont continues (exercice de révision). Pour application aux fonctions sous-harmoniques, nous aurons besoin d'une version continue classique de cette inégalité discrète.

Théorème 11.1. [Inégalité de Jensen réelle] *Soient deux nombres réels* $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$*, et soit* $\psi \colon \,]a, b[\, \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction* convexe*. Soit aussi* $(\mathscr{M}, \mu)$ *un espace mesuré de mesure* $\mu(\mathscr{M}) = 1$*, et soit* $f \colon \mathscr{M} \longrightarrow \,]a, b[$ *une fonction Lebesgue-intégrable. Alors :*

$$\psi\bigg(\int_{\mathscr{M}} f\, d\mu\bigg) \leqslant \int_{\mathscr{M}} \psi \circ f\, d\mu.$$

Démonstration. Abrégeons :

$$c := \int_{\mathscr{M}} f\, d\mu.$$

Puisque $a < f(m) < b$ pour tout $m \in \mathscr{M}$ et puisque $\mu(\mathscr{M}) = 1$, il est clair que $a < c < b$. Comme la fonction ψ est convexe, pour tout couple de points :

$$a < t_1 < c < t_2 < b,$$

avec la combinaison linéaire à coefficients (strictement) positifs :

$$c = \frac{t_2 - c}{t_2 - t_1}\, t_1 + \frac{c - t_1}{t_2 - t_1}\, t_2 = \mu_1\, t_1 + \mu_2\, t_2 \qquad (\mu_1 + \mu_2 = 1),$$

on a :

$$\psi(c) \leqslant \frac{t_2 - c}{t_2 - t_1}\, \psi(t_1) + \frac{c - t_1}{t_2 - t_1}\, \psi(t_2).$$

Mais après réorganisation, ceci devient (exercice) :

$$\frac{\psi(c) - \psi(t_1)}{c - t_1} \leqslant \frac{\psi(t_2) - \psi(c)}{t_2 - c},$$

puis, en prenant supremum et infimum :

$$\sup_{t_1 \in \,]a,c[} \frac{\psi(c) - \psi(t_1)}{c - t_1} \leqslant \inf_{t_2 \in \,]c,b[} \frac{\psi(t_2) - \psi(c)}{t_2 - c}.$$

Par conséquent, pour un nombre réel quelconque $\sup(\cdot) \leqslant M \leqslant \inf(\cdot)$ coincé entre ce supremum et cet infimum — et dorénavant fixé —, et pour tous $a < t_1 < c < t_2 < b$, on a :

$$\frac{\psi(c) - \psi(t_1)}{c - t_1} \leqslant M \leqslant \frac{\psi(t_2) - \psi(c)}{t_2 - c},$$

d'où découle, après réorganisation, l'inégalité uniforme (exercice) :

$$\psi(t) \geqslant \psi(c) + M\,(t - c) \qquad (\forall\, t \in \,]a,b[).$$

Or maintenant, tout est presque fini : en insérant $t := f(m)$ et en intégrant par rapport à μ, il vient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{M}} \psi\big(f(m)\big)\, d\mu(m) &\geqslant \int_{\mathscr{M}} \psi(c)\, d\mu(m) + M \underline{\int_{\mathscr{M}} \big(f(m) - c\big)\, d\mu(m)} \\ &= \psi(c) + 0,\end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité qui était ardemment désirée. □

Ceci nous permet d'engendrer par composition une grande quantité de fonctions sous-harmoniques nouvelles.

Théorème 11.2. *Soient deux nombres réels $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, soit $u \colon \Omega \longrightarrow [a,b[$ une fonction sous-harmonique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, et soit $\psi \colon \,]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. Alors :*

$$\psi \circ u$$

est sous-harmonique dans Ω, où $\psi(a) := \lim_{t \to a} \psi(t)$.

Noter que u est à valeurs dans $[a,b[$, mais que ψ est définie seulement sur $]a,b[$, ce qui se produit réellement lorsque $a = -\infty$.

Démonstration. Pour commencer, soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de réels $a_n \in]a, b[$ qui tend en décroissant vers $a_n \downarrow a$. Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction :

$$u_n := \max\big(u, a_n\big)$$

est sous-harmonique.

Lemme 11.3. *Soient deux réels $-\infty \leqslant c < d \leqslant \infty$, soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit $v\colon \Omega \longrightarrow]c, d[$ une fonction semi-continue supérieurement, soit $\chi\colon\ ]c, d[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue croissante. Alors :*

$$\chi \circ v$$

est semi-continue supérieurement.

Démonstration. En tout point $z_0 \in \Omega$, on a par hypothèse :

$$\limsup_{z \to z_0} v(z) \leqslant v(z_0).$$

Autrement dit :

$$\forall\, \delta > 0 \quad \forall\, (z_n)_{n=1}^{\infty} \longrightarrow z_0, \quad \exists\, N \gg 1 \quad \Big(n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad v(z_n) \leqslant v(z_0) + \delta\Big).$$

Mais la croissance de χ préserve cette inégalité :

$$\chi\big(v(z_n)\big) \leqslant \chi\big(v(z_0) + \delta\big),$$

et comme χ est de plus continue, lorsque $\delta \to 0$, le membre de droite tend vers $\chi(v(z_0))$. $\square$

Grâce à ce lemme, comme toute fonction convexe est continue, les $\psi \circ u_n$ sont semi-continues supérieurement. Notons qu'il était d'une certaine façon nécessaire de tronquer u en u_n pour travailler avec des fonctions à valeurs dans $]a, b[$.

Ensuite, pour tout disque $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$, l'inégalité de sous-moyenne (globale) satisfaite par u_n composée avec ψ croissante donne :

$$\begin{aligned}
\psi \circ u_n(z_0) &\leqslant \psi\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n\big(z_0 + r\, e^{i\theta}\big)\, d\theta\right) \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi \circ u_n\big(z_0 + r\, e^{i\theta}\big)\, d\theta,
\end{aligned}$$

la second inégalité provenant de l'inégalité de Jensen réelle 11.1 appliquée à la mesure de probabilité $\frac{d\theta}{2\pi}$ sur le cercle unité.

Ceci montre que $\psi \circ u_n$ est sous-harmonique, pour tout $n \geqslant 1$.

Enfin, comme $\psi \circ u_n \downarrow \psi \circ u$ tend en décroissant vers $\psi \circ u$, le Théorème 8.1 achève de montrer que $\psi \circ u \in \mathsf{SH}(\Omega)$. $\square$

Corollaire 11.4. *Si une fonction u est sous-harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors $\exp u$ l'est aussi.* $\square$

Corollaire 11.5. *Pour toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, $f \not\equiv 0$, et pour tout exposant réel $\alpha > 0$, on a :*

$$|f|^{\alpha} \in \mathsf{SH}(\Omega).$$

Démonstration. La fonction sous-harmonique $u := \alpha \log |f|$ a pour exponentielle $|f|^{\alpha}$. $\square$

À l'opposé d'une fonction convexe (croissante), la fonction logarithme est concave. Néanmoins, voici un énoncé qui garantit que le logarithme d'une fonction est sous-harmonique.

Théorème 11.6. *Si* $u\colon \Omega \longrightarrow [0,\infty[$ *est une fonction définie sur un domaine* $\Omega \subset \mathbb{C}$*, alors on a équivalence entre :*

(i) $\log u$ *est sous-harmonique dans* Ω *;*

(ii) $u\,|e^q|$ *est sous-harmonique dans* Ω*, pour tout polynôme complexe* $q \in \mathbb{C}[z]$.

Démonstration. Si $\log u$ est sous-harmonique, alors $\log u + \mathrm{Re}\, q$ l'est aussi, puis en prenant l'exponentielle, $u\,|e^q|$ aussi grâce au Corollaire pénultième.

Réciproquement, supposons **(ii)**. Avec $q = 0$, on voit que u est sous-harmonique, donc en particulier semi-continue supérieurement. Le Lemme 11.3 donne que $\log u$ est encore semi-continue supérieurement.

Pour établir que $\log u$ satisfait l'inégalité de sous-moyenne, soit un disque $\Delta = \overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$. Le Théorème 3.6 fournit une suite de fonctions continues $\phi_n\colon \partial\Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ qui tendent en décroissant vers $\log u$ sur le bord :

$$\phi_n \downarrow \log u\big|_{\partial\Delta}.$$

Le Théorème de Stone-Weierstrass montre par ailleurs que pour tout $n \geqslant 1$, il existe un polynôme $q_n \in \mathbb{C}[z]$ tel que :

$$0 \leqslant \mathrm{Re}\, q_n - \phi_n \leqslant \tfrac{1}{n} \qquad (\text{sur } \partial\Delta).$$

Alors de $u \leqslant e^{\phi_n}$, nous déduisons en tout point $\zeta \in \partial\Delta$:

$$\begin{aligned} \limsup_{z\to\zeta} u(z)\,\big|e^{-q_n(z)}\big| &\leqslant \limsup_{z\to\zeta} e^{\phi_n(z)}\,\big|e^{-q_n(z)}\big| \\ &\leqslant e^{\phi_n(\zeta)}\,e^{-\mathrm{Re}\, q_n(\zeta)} \\ &\leqslant 1. \end{aligned}$$

Mais comme $u\,|e^{-q_n}|$ est supposée sous-harmonique, le Principe du Maximum 5.4 au bord donne à l'intérieur :

$$u(z)\,\big|e^{-q_n(z)}\big| \leqslant 1 \qquad (\forall\, z \in \Delta).$$

Alors en prenant les logarithmes au point central z_0 et en utilisant l'harmonicité de $\mathrm{Re}\, q_n(z)$:

$$\begin{aligned} \log u(z_0) \leqslant \mathrm{Re}\, q_n(z_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, q_n\big(z_0 + r\,e^{i\theta}\big)\,d\theta \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi_n\big(z_0 + r\,e^{i\theta}\big)\,d\theta + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à faire $n \longrightarrow \infty$ et à appliquer le théorème de convergence monotone pour obtenir l'inégalité :

$$\log u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log u\big(z_0 + r\,e^{i\theta}\big)\,d\theta,$$

de sous-moyenne ainsi satisfaite par $\log u$. □

Lorsqu'une fonction est radiale, *i.e.* ne dépend que de la distance à l'origine, la sous-harmonicité revient à la convexité réelle standard.

Théorème 11.7. *Soit* $v\colon \mathbb{D}_R(0) \longrightarrow [-\infty, \infty[$*,* $R > 0$*, une fonction radiale,* $v(z) = v(|z|)$*, avec* $v \not\equiv -\infty$*. Alors on a équivalence entre :*

(i) v *est sous-harmonique dans* $\mathbb{D}_R(0)$ *;*

(ii) $r \longmapsto v(r)$ *est une fonction convexe croissante de* $\log r$ *pour* $0 < r < R$*, qui est continue à l'origine* $v(0) = \lim_{r \overset{>}{\longrightarrow} 0} v(r)$*.*

Démonstration. Dans le sens **(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)**, il suffit d'appliquer le Théorème 11.2 aux fonctions $u(z) := \log |z|$ et $\psi(t) := v(e^t)$.

Réciproquement, soit v radiale sous-harmonique dans $\mathbb{D}_R(0)$. Pour deux rayons intermédiaires :

$$0 \leqslant r_1 < r_2 < R,$$

le principe du maximum appliqué à v sur $\mathbb{D}_{r_2}(0)$ et la radialité de v donnent :

$$v(r_1) \leqslant \sup_{\partial \mathbb{D}_{r_2}(0)} v = v(r_2),$$

ce qui montre que v est croissante sur $[0, R[$.

Pour ce qui est de la continuité en 0, cette croissance implique :

$$\liminf_{r \to 0} v(r) \geqslant v(0),$$

tandis que la semi-continuité supérieure n'est autre que :

$$\limsup_{r \to 0} v(r) \leqslant v(0),$$

donc v est continue en 0 !

Il reste à faire voir que $v(r)$ est une fonction convexe de $\log r$. Comme $v \not\equiv -\infty$ est radiale, son intégrale sur tout cercle centré à l'origine est constante. Alors le Corollaire 9.4 garantit que :

$$-\infty < v(r) \qquad\qquad (\forall\, 0 < r < R).$$

Ensuite, soient deux rayons intermédiaires :

$$0 < r_1 < r_2 < R.$$

Par résolution linéaire, il existe deux constantes réelles α, β uniques telles que :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta \log r_1 &= v(r_1), \\ \alpha + \beta \log r_2 &= v(r_2), \end{aligned}$$

et il n'est pas nécessaire d'écrire les formules explicites de Cramér pour α et β. Alors le principe du maximum appliqué à la fonction $v(z) - \alpha - \beta \log |z|$ qui s'annule sur les deux composantes du bord de l'anneau $\{r_1 < |z| < r_2\}$ donne :

$$v(r) \leqslant \alpha + \beta \log r \qquad\qquad (\forall\, r_1 < r < r_2).$$

Fixons maintenant un rayon r avec $r_1 < r < r_2$. Si $0 < \lambda < 1$ est l'unique réel qui réalise la combinaison barycentrique — à nouveau, la formule explicite n'est pas nécessaire — :

$$\log r = (1 - \lambda) \log r_1 + \lambda \log r_2,$$

un remplacement et une réorganisation :

$$\begin{aligned} v(r) &\leqslant \alpha + \beta \log r \\ &= (1-\lambda)\big(\alpha + \beta \log r_1\big) + \lambda\big(\alpha + \beta \log r_2\big) \\ &= (1-\lambda)\, v(r_1) + \lambda\, v(r_2) \end{aligned}$$

conduisent à une inégalité qui montre que $\log r \longmapsto v(\log r)$ est bel est bien convexe ! □

Terminons cette section par l'étude de diverses invariants qui permettent de quantifier la croissance des fonctions sous-harmoniques.

Définition 11.8. Soit $u \not\equiv -\infty$ une fonction sous-harmonique dans un disque $\Delta_R(0)$ de rayon $R > 0$ centré à l'origine. Pour tout rayon $0 < r < R$, soient :

$$\begin{aligned} M_u(r) &:= \sup_{|z|=r} u(z), \\ C_u(r) &:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\big(r\, e^{i\theta}\big)\, d\theta, \\ B_u(r) &:= \frac{1}{\pi\, r^2}\int_{\mathbb{D}_r(0)} u\big(s\, e^{i\theta}\big)\, s\, ds\, d\theta. \end{aligned}$$

D'après la Proposition 3.5, le Théorème 9.1 et le Corollaire 9.4, nous savons déjà que ces trois quantités sont bornées supérieurement :

$$M_u(r) < \infty, \qquad C_u(r) < \infty, \qquad B_u(r) < \infty.$$

De plus, $C_u(r)$ et $B_u(r)$ sont visiblement reliées entre elles par la relation :

$$B_u(r) = \frac{2}{r^2}\int_0^r C_u(s)\, s\, ds. \tag{11.9}$$

Théorème 11.10. *Les trois propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) $M_u(r)$*,* $C_u(r)$*,* $B_u(r)$ *sont des fonctions convexes croissantes de* $\log r$ *;*

(ii) *pour tout* $0 < r < R$*, on a :*

$$u(0) \leqslant B_u(r) \leqslant C_u(r) \leqslant M_u(r);$$

(iii) *en* $r = 0$ *:*

$$u(0) = \lim_{r\to 0} M_u(r) = \lim_{r\to 0} C_u(r) = \lim_{r\to 0} B_u(r).$$

Démonstration. **(i)**. Pour tout $0 < r < R$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} M_u(r) &= v_M(r) \qquad \text{avec} \qquad v_M(z) := \sup_{\theta\in[0,2\pi[} u\big(z\, e^{i\theta}\big), \\ C_u(r) &= v_C(r) \qquad \text{avec} \qquad v_C(z) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\big(z\, e^{i\theta}\big)\, d\theta, \\ B_u(r) &= v_B(r) \qquad \text{avec} \qquad v_B(z) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 u\big(z\, s\, e^{i\theta}\big)\, s\, ds\, d\theta. \end{aligned}$$

Affirmation 11.11. *Ces trois fonctions* v_M*,* v_C*,* v_B *sont sous-harmoniques dans* $\mathbb{D}_R(0)$*.*

Démonstration. Pour v_M, appliquer le Théorème 8.2, tandis que pour v_C, v_B, c'est le Théorème 8.3 qui s'applique. □

Manifestement, ces trois fonctions v_M, v_C, v_B sont radiales ! Or nous venons de démontrer par le Théorème 11.7 que leur sous-harmonicité équivaut à **(i)** !

(ii). La dernière inégalité $C_u(r) \leqslant M_u(r)$ est claire.

Ensuite, grâce à **(i)** qui vient d'être établi, on a pour $0 \leqslant s \leqslant r < R$:

$$u(0) \leqslant C_u(s) \leqslant C_u(r).$$

Multiplions alors ces inégalités par $\frac{2s}{r^2}$ et intégrons de $s = 0$ à $s = r$, ce qui donne :

$$u(0) \leqslant \frac{2}{r^2} \int_0^{2\pi} C_u(s)\, s\, ds \leqslant C_u(r).$$

En combinant cela à l'équation (11.9), nous obtenons bien :

$$u(0) \leqslant B_u(r) \leqslant C_u(r).$$

(iii). Grâce aux inégalités **(ii)** qui viennent d'être démontrées, il suffirait d'avoir :

$$\limsup_{r \to 0} M_u(r) \leqslant u(0),$$

mais ceci est gratuit par semi-continuité supérieure de u en 0 !

□

12. Régularisation des fonctions sous-harmoniques

Bien que les fonctions sous-harmoniques soient parfois loin d'être régulières, elles peuvent néanmoins être approximées à volonté par des fonctions sous-harmoniques $\mathscr{C}^\infty$, grâce à l'opération standard — et magique ! — de convolution.

Notation 12.1. Étant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, pour tout $r > 0$, on note :

$$\Omega_r := \big\{z \in \Omega\colon \operatorname{dist}\big(z, \partial\Omega\big) > r\big\}.$$

Soit maintenant $u\colon \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty[$ une fonction localement intégrable au sens de Lebesgue, par exemple une fonction sous-harmonique, puisqu'on sait d'après le Théorème 9.1 que :

$$\mathsf{SH}(\Omega) \subset L^1_{\mathsf{loc}}(\Omega).$$

Soit aussi :

$$\phi\colon \quad \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$

une fonction continue avec $\operatorname{supp}\phi \subset \mathbb{D}_r(0)$, pour un $r > 0$.

Définition 12.2. La *convolution* entre u et ϕ est la fonction :

$$u * \phi\colon \quad \Omega_r \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par l'intégrale :

$$u * \phi(z) := \int_{\mathbb{C}} u(z-w)\, \phi(w)\, d\lambda(w) \qquad\qquad (z \in \Omega_r).$$

On considère donc :

$$L^1_{\mathsf{loc}} * \mathscr{C}^0_c.$$

On vérifie (exercice de révision) que $*$ est associatif (utiliser Fubini-Tonelli). Le changement de variable $w' := z - w$ transforme :

$$u * \phi(z) = \int_{\mathbb{C}} u(w)\, \phi(z-w)\, d\lambda(w) = \phi * u(z),$$

ce qui est la commutativité du produit de convolution. Grâce à cette seconde représentation, on se convainc (révisions !) que $u * \phi(z)$ est indéfiniment différentiable lorsque $\phi \in \mathscr{C}_c^\infty$, avec des dérivées partielles obtenues en dérivant sous le signe d'intégration :

$$\partial_x^i \partial_y^j \big(u * \phi\big)(z) \;=\; \int_{\mathbb{C}} u(w)\, \partial_x^i \partial_y^j\, \phi(z-w)\, d\lambda(w) \qquad\qquad {\scriptstyle (i,\, j,\, \in \mathbb{N})}.$$

Théorème 12.3. [de régularisation] *Soit $u \not\equiv -\infty$ une fonction sous-harmonique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit $\chi \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant :*

- $\chi \in \mathscr{C}^\infty$ *;*
- $\chi \geqslant 0$*;*
- $\chi(z) = \chi(|z|)$ *;*
- $\mathsf{supp}\, \chi \subset \mathbb{D} = \mathbb{D}_1(0)$ *;*
- $\int_{\mathbb{C}} \chi\, d\lambda = 1$ *;*

et pour $r > 0$, soient les fonctions renormalisées $\mathscr{C}_c^\infty$ se concentrant en 0 lorsque $r \overset{>}{\longrightarrow} 0$:

$$\chi_r(z) \;:=\; \tfrac{1}{r^2}\, \chi\big(\tfrac{z}{r}\big) \qquad\qquad {\scriptstyle (z \in \mathbb{C})}.$$

Alors les convolées :

$$\big(u * \chi_r\big)_{r>0}$$

forment une famille de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sous-harmoniques dans Ω_r qui tendent vers u :

$$u(z) \;=\; \lim_{r \overset{>}{\longrightarrow} 0} u * \chi_r(z) \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\, z \in \Omega)}$$

en décroissant :

$$u(z) \;\leqslant\; u * \chi_s(z) \;\leqslant\; u * \chi_r(z) \qquad\qquad {\scriptstyle (0 < s \leqslant r;\; z \in \Omega_r)}.$$

Un exemple d'une telle fonction χ (révision !) est :

$$\chi(z) \;:=\; \begin{cases} c\, e^{-\frac{1}{1-4\,|z|^2}} & \text{lorsque } \; |z| < \frac{1}{2}. \\ 0 & \text{lorsque } \; |z| \geqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$$

où la constante $c := \frac{1}{\int e^{-1/(1-4\,|z|^2)}}$ est choisie pour normaliser $\int \chi = 1$.

Démonstration. Le Théorème 9.1 a fait voir que $u \in L^1_{\mathsf{loc}}(\Omega) \supset \mathsf{SH}(\Omega)$, ce qui garantit que le produit de convolution $u * \chi_r$ a un sens. De plus, comme χ_r est $\mathscr{C}^\infty$ et à support dans $\{|z| < r\}$, on a $u * \chi_r \in \mathscr{C}^\infty(\Omega_r)$.

Ensuite, le Théorème 8.3, appliqué avec :

$$\big(\mathscr{M},\, \mu\big) \;:=\; \big(\mathbb{C},\, \chi_r\, d\lambda\big),$$

et avec $v(z, m) := u(z - m)$, montre sans effort que $u * \chi_r$ est sous-harmonique.

Maintenant, fixons $z_0 \in \Omega$. Pour $0 < r < \mathsf{dist}\,(z_0, \partial\Omega)$, en passant aux coordonnées polaires, on peut développer le produit de convolution comme :

$$u * \chi_r(z_0) \;=\; \int_0^{2\pi} \int_0^r u\big(z_0 - s\, e^{it}\big)\, \tfrac{1}{r^2}\, \chi\big(\tfrac{s}{r}\big)\, s\, ds\, dt.$$

Effectuons alors le changement de variable $q := \frac{s}{r}$, posons $v(z) := u(z_0 - z)$, et souvenons-nous de la Définition 11.8 avec :

$$C_v(q\, r) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v\big(q\, r\, e^{it}\big)\, dt,$$

pour ré-écrire ce qui précède comme :

$$u * \chi_r(z_0) \,=\, 2\pi \int_0^1 C_v(q\,r)\,\chi(q)\,q\,dq.$$

Grâce au Théorème 11.10 **(iii)**, $C_v(q\,r)$ décroît vers $v(0)$ lorsque $r \downarrow 0$. Ainsi, par le théorème de convergence monotone, $u * \chi_r(z_0)$ décroît vers :

$$2\pi \int_0^1 v(0)\,\chi(q)\,q\,dq \,=\, u(z_0) \int_{\mathbb{C}} \chi\,d\lambda \,=\, u(z_0),$$

ce qu'il fallait. $\square$

Corollaire 12.4. *Soit u une fonction sous-harmonique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, et soit $\omega \Subset \Omega$ un sous-domaine relativement compact. Alors il existe une suite décroissante de fonctions :*

$$\big(u_n\big)_{n=1}^{\infty} \,\in\, \mathscr{C}^{\infty}(\omega) \cap \mathsf{SH}(\omega)$$

satisfaisant :

$$\lim_{n\to\infty} u_n \,=\, u \,\leqslant\, \cdots \,\leqslant\, u_3 \,\leqslant\, u_2 \,\leqslant\, u_1 \qquad\qquad (\text{dans}\,\omega).$$

Démonstration. Quand $u \equiv -\infty$ dans ω, il suffit de prendre $u_n := -\infty$.

Sinon, on choisit $r > 0$ assez petit pour que $\omega \subset \Omega_r$, et il suffit de prendre les convolées :

$$u_n \,:=\, u * \chi_{\frac{r}{n}}\Big|_{\omega} \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

en application du théorème qui précède. $\square$

Comme autre application, voici un résultat qui généralise le Corollaire 7.3 à des fonctions holomorphes pas forcément inversibles.

Théorème 12.5. *Si $f \colon \Omega \longrightarrow \Omega'$ est une application holomorphe entre deux ouverts $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $\Omega' \subset \mathbb{C}$, alors :*

$$u' \,\in\, \mathsf{SH}(\Omega') \quad\Longrightarrow\quad u \circ f \,\in\, \mathsf{SH}(\Omega).$$

Démonstration. Soit $\omega \Subset \Omega$ un sous-domaine relativement compact. Il suffit de faire voir que $u' \circ f$ est sous-harmonique dans ω.

Posons $\omega' := f(\omega)$. Choisissons une suite $(u_n')_{n=1}^{\infty}$ de fonctions sous-harmoniques $\mathscr{C}^{\infty}$ dans ω' telles que $u_n' \downarrow u'$ sur ω'. La caractérisation de la sous-harmonicité lisse donnée par le Théorème 7.4 dit que $\Delta u_n' \geqslant 0$ dans ω', et ce, pour tout $n \geqslant 1$.

Ensuite, un calcul direct utilisant l'holomorphie de f donne (exercice) :

$$\Delta\big(u_n' \circ f\big) \,=\, \big((\Delta\, u_n') \circ f\big)\, \big|\tfrac{\partial f}{\partial z}\big|^2 \qquad\qquad (\text{dans}\,\omega).$$

Donc on a $\Delta(u_n' \circ f) \geqslant 0$ dans ω, et en réappliquant (dans l'autre sens) le Théorème 7.4, il vient que $u_n' \circ f$ est sous-harmonique dans ω.

Pour conclure que $u' \circ f$ est sous-harmonique, il suffit de faire tendre $n \longrightarrow \infty$, *cf.* le Théorème 8.1. $\square$

Enfin, pour terminer cette section, le Théorème 12.3 de régularisation permet d'obtenir un principe d'identité pour les fonctions sous-harmoniques qui s'avère parfois utile.

Théorème 12.6. [Principe d'identité faible] *Si deux fonctions u et v sous-harmoniques dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ sont presque partout égales, alors $u = v$ partout.*

Démonstration. Supposons d'abord que u et v sont bornées inférieurement sur Ω. En convolant avec une famille de fonctions χ_r comme ci-dessus, on obtient l'identité :

$$u * \chi_r \,=\, v * \chi_r$$

valable dans Ω_r, et en faisant $r \longrightarrow 0$, on déduit grâce au Théorème 12.3 que $u = v$ partout dans Ω.

Le cas général suit aisément en applicant cela aux deux suites de fonctions :

$$u_n \,:=\, \max\big(u,\, -n\big) \qquad \text{et} \qquad v_n \,:=\, \max\big(v,\, -n\big),$$

puis en faisant $n \longrightarrow \infty$. □

Un dernier commentaire. Pour les fonctions sous-harmoniques, on ne peut pas espérer avoir un principe d'identité aussi fort que pour les fonctions harmoniques : égalité dans un sous-ouvert $\emptyset \neq \omega \subset \Omega$ implique égalité partout dans le domaine Ω. En effet :

$$u(z) \,:=\, \max\big(\mathrm{Re}\, z,\, 0\big) \qquad \text{et} \qquad v(z) \,:=\, 0$$

coïncident sur $\omega := \{\mathrm{Re}\, z < 0\} \subset \mathbb{C} = \Omega$.

À un niveau élevé de compréhension interne de la théorie, ce sont justement leurs 'défauts' d'unicité et de rigidité qui rendent les fonctions sous-harmoniques si utiles et si puissantes.

13. Formule de Jensen complexe

Pour effecter une variation thématique, nous allons maintenant présenter la *formule de Jensen*, qui permet de redémontrer différemment l'inégalité de sous-moyenne globale du Corollaire 7.2. Commençons par quelques rappels standard.

Lorsqu'une fonction $\varphi \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, en introduisant l'opérateur de différentiation standard :

$$d\varphi \,=\, \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy,$$

on a (exercice) :

$$d\varphi \,=\, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dz + \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}\, d\overline{z},$$

en termes des opérateurs :

$$\partial\varphi \,:=\, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dz \,:=\, \bigg(\frac{1}{2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{i}{2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\bigg)\big(dx + i\, dy\big) \qquad \text{et} \qquad \overline{\partial}\varphi \,:=\, \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}\, d\overline{z} \,:=\, \bigg(\frac{1}{2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{i}{2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\bigg)\big(dx - i\, dy\big).$$

De manière abrégée :

$$d \,=\, \partial + \overline{\partial},$$

et on vérifie la relation d'anticommutation (exercice) :

$$\overline{\partial} \circ \partial \,=\, -\,\partial \circ \overline{\partial},$$

ainsi que les relations d'annulation (exercice) :

$$0 \,=\, \partial \circ \partial \,=\, \overline{\partial} \circ \overline{\partial},$$

dues au fait que $dz \wedge dz = 0$ et que $d\overline{z} \wedge d\overline{z} = 0$.

Introduisons maintenant aussi l'opérateur :

$$d^c \,:=\, \frac{1}{2i\pi}\big(\partial - \overline{\partial}\big),$$

le facteur de normalisation étant justifié par diverses nécessités contextuelles, voir *infra* le commentaire de la Formule de Jensen 13.5. On vérifie que cet opérateur d^c est *réel*, au sens où $d^c\varphi$ est encore une fonction à valeurs réelles lorsque φ l'est (exercice) :

$$2\pi\, d^c\varphi \,=\, i\,\big(\overline{\partial}-\partial\big)\,\varphi \,=\, \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dx.$$

Lemme 13.1. *Lorsque $\varphi\colon\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ est de classe au moins $\mathscr{C}^2$, on a :*

$$dd^c\varphi \,=\, \frac{i}{\pi}\,\partial\overline{\partial}\,\varphi \,=\, \frac{i}{\pi}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\overline{z}}\,dz\wedge d\overline{z} \,=\, \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)dx\wedge dy.$$

Démonstration. En effet :

$$\begin{aligned}
dd^c\varphi \,&=\, \frac{i}{2\pi}\,\big(\partial+\overline{\partial}\big)\big(-\,\partial+\overline{\partial}\big)\,\varphi \\
&=\, \frac{i}{2\pi}\,\big(-\,\underline{\partial\partial}_{\circ}+\partial\overline{\partial}-\overline{\partial}\partial+\underline{\overline{\partial}\overline{\partial}}_{\circ}\big)\,\varphi \\
&=\, \frac{i}{\pi}\,\partial\overline{\partial}\,\varphi \\
&=\, \frac{i}{\pi}\,\partial\bigg(\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}\,d\overline{z}\bigg) \\
&=\, \frac{i}{\pi}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\overline{z}}\,dz\wedge d\overline{z} \\
&=\, \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)dx\wedge dy,
\end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Définition 13.2. Pour $\varphi\in\mathscr{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$, la notation $dd^c\varphi\geqslant 0$, respectivement >0, signifie la positivité de son laplacien :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\overline{z}} \,=\, \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) \,\geqslant\, 0 \qquad\qquad (>0).$$

Maintenant, le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires :

$$x \,=\, r\cos\theta, \qquad\qquad y \,=\, r\sin\theta \qquad\qquad {\scriptstyle (r\neq 0,\ 0\leqslant\theta<2\pi)},$$

transfère, d'après l'Exercice 2, les dérivations fondamentales de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \,=\, \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial y} \,=\, \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Si on note en indice les dérivées partielles pour les contracter, il vient alors :

$$\begin{aligned}
i\,\big(\overline{\partial}-\partial\big)\,\varphi \,=\, \varphi_x\,dy-\varphi_y\,dx \,&=\, \big(\cos\theta\,\varphi_r-\tfrac{\sin\theta}{r}\,\varphi_\theta\big)\,\big(\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta\big)\,- \\
&\quad-\,\big(\sin\theta\,\varphi_r+\tfrac{\cos\theta}{r}\,\varphi_\theta\big)\,\big(\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta\big) \\
&=\,\big(-\,\tfrac{1}{r}\,\varphi_\theta\big)\,dr+\big(r\,\varphi_r\big)\,d\theta.
\end{aligned}$$

On obtient donc la formule utile :

$$d^c\varphi \,=\, \frac{1}{2\pi}\bigg(-\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\,dr+r\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,d\theta\bigg),$$

laquelle, appliquée à la fonction $\varphi = \log r = \log|z|$, donne :

$$d^c \log|z| \;=\; \frac{1}{2\pi}\, d\theta. \tag{13.3}$$

Lemme 13.4. *Pour toutes fonctions $\varphi, \psi \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$, on a :*

$$d\varphi \wedge d^c\psi \;=\; -\, d^c\varphi \wedge d\psi.$$

Démonstration. En utilisant $dz \wedge dz = d\overline{z} \wedge d\overline{z} = 0$, on développe et on recontracte :

$$\begin{aligned}
2i\pi\, d\varphi \wedge d^c\psi \;&=\; \big(\partial\varphi + \overline{\partial}\varphi\big) \wedge \big(\partial\psi - \overline{\partial}\psi\big) \\
&=\; \underline{\partial\varphi \wedge \partial\psi}_{\circ} - \partial\varphi \wedge \overline{\partial}\psi + \overline{\partial}\varphi \wedge \partial\psi - \underline{\overline{\partial}\varphi \wedge \overline{\partial}\psi}_{\circ} \\
&=\; -\big(\partial\varphi - \overline{\partial}\varphi\big) \wedge \big(\partial\psi + \overline{\partial}\psi\big) \\
&=\; -\,2i\pi\, d^c\varphi \wedge d\psi,
\end{aligned}$$

calcul qui aurait pu être laissé en exercice. □

Théorème 13.5. [Formule de Jensen complexe] *Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un voisinage ouvert d'un disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \mathbb{C}$ de rayon $r > 0$ centré en un point $z_0 \in \mathbb{C}$. Alors pour tout rayon $0 \leqslant s \leqslant r$, on a :*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\big(z_0 + r\, e^{i\theta}\big)\, d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\big(z_0 + s\, e^{i\theta}\big)\, d\theta \;&=\; \int_s^r \frac{d\rho}{\rho} \int_{\mathbb{D}_\rho(z_0)} \frac{i}{\pi}\, \partial\overline{\partial}\varphi \\
&=\; \int_s^r \frac{d\rho}{\rho} \int_{\mathbb{D}_\rho(z_0)} dd^c\varphi.
\end{aligned}$$

Lisons et expliquons cette formule.

À droite, on intègre la 2-forme différentielle $\frac{i}{\pi}\,\partial\overline{\partial}\varphi$ sur des disques de rayons croissants $s \leqslant \rho \leqslant r$, et on intègre ensuite les résultats obtenus par rapport à la mesure $\frac{d\rho}{\rho}$. Le facteur $\frac{i}{\pi}$ dans $\frac{i}{\pi}\,\partial\overline{\partial}\varphi$ est inévitable, et la deuxième ligne ci-dessus explique en partie pourquoi on a inscrit le facteur de normalisation $\frac{1}{2i\pi}$ dans la définition de $d^c(\cdot)$.

Démonstration. Après une translation, on peut supposer que $z_0 = 0$. Eu égard à l'équation (13.3), le théorème de Stokes transforme le terme de gauche de la formule à démontrer en l'intégrale d'une 2-forme sur un anneau :

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=r} \varphi(z)\, d^c\log|z| - \int_{|z|=s} \varphi(z)\, d^c\log|z| \;&=\; \int_{s<|z|<r} d\Big(\varphi(z)\, d^c \log|z|\Big) \\
&=\; \int_{s<|z|<r} d\varphi(z) \wedge d^c\log|z| + \int_{s<|z|<r} \varphi(z)\, \underline{dd^c \log|z|}_{\circ},
\end{aligned}$$

le second morceau s'annulant car, sur $\mathbb{C}^*$ qui contient l'anneau en question, en écrivant $\log|z| = \frac{1}{2}\log\big(z\overline{z}\big)$, on constate l'harmonicité (exercice) :

$$0 \;=\; \partial\overline{\partial}\log|z| \;=\; \tfrac{\pi}{i}\, dd^c \log|z|.$$

Ensuite, en appliquant le Lemme 13.4 spécialement préparé à l'avance, il vient :

$$\begin{aligned}\int_{|z|=r} \varphi(z)\, d^c\mathsf{log}\,|z| - \int_{|z|=s} \varphi(z)\, d^c\mathsf{log}\,|z| &= \int_{s<|z|<r} d\,\mathsf{log}\,|z| \wedge d^c\varphi \\ &= \int_s^r \frac{d\rho}{\rho} \int_{|z|=\rho} d^c\varphi \\ &= \int_s^r \frac{d\rho}{\rho} \int_{\mathbb{D}_\rho(0)} dd^c\varphi,\end{aligned}$$

en réappliquant à la fin le Théorème de Stokes pour atterrir en douceur à la destination désirée ! □

Cette formule de Jensen complexe fournit une démonstration particulièrement éclairante de l'inégalité de sous-moyenne satisfaite par les fonctions sous-harmoniques lisses.

Corollaire 13.6. [Inégalité de sous-moyenne globale] *Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, si une fonction $u \in \mathscr{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ satisfait $\Delta u \geqslant 0$, alors pour tout $z_0 \in \Omega$ et tout $0 \leqslant r < \mathsf{dist}\,(z_0, \partial\Omega)$, on a :*

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(z_0 + r\, e^{i\theta}\big)\, d\theta,$$

et plus généralement, pour tous $0 \leqslant s \leqslant r < \mathsf{dist}\,(z_0, \partial\Omega)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(z_0 + s\, e^{i\theta}\big)\, d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(z_0 + r\, e^{i\theta}\big)\, d\theta.$$

Démonstration. La formule de Jensen semble n'avoir été créée par Dieu que pour établir cette croissance des moyennes sur des disques concentriques, puisqu'en effet la différence :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(z_0 + r\, e^{i\theta}\big)\, d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(z_0 + s\, e^{i\theta}\big)\, d\theta &= \int_s^r \frac{d\rho}{\rho} \int_{\mathbb{D}_\rho(z_0)} dd^c u \\ &= \int_s^r \frac{d\rho}{\rho} \int_{\mathbb{D}_\rho(z_0)} \tfrac{1}{2\pi}\, \Delta u\end{aligned}$$

est une intégrale avec poids logarithmique de l'intégrale d'aire d'une fonction positive ! □

Voici un énoncé qui aura des répercussions dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes.

Théorème 13.7. *Si $u\colon \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty[$ est une fonction semi-continue supérieurement dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, on a équivalence entre :*

(i) *u est sous-harmonique ;*

(ii) *pour tout disque $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$, et pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[z]$:*

$$\Big(u\big(z_0 + r\, e^{i\theta}\big) \leqslant \mathsf{Re}\, p\big(z_0 + r\, e^{i\theta}\big) \quad {\scriptstyle (\forall\, 0 \leqslant \theta < 2\pi)}\Big) \implies u(z_0) \leqslant \mathsf{Re}\, p(z_0).$$

Démonstration. **(i) $\Longrightarrow$ (ii)**. Supposons $u \in \mathsf{SH}(\Omega)$ et soit un disque $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$. Comme $\mathsf{Re}\, p$ est harmonique, la fonction $u - \mathsf{Re}\, p$ est sous-harmonique. Or elle satisfait :

$$\big(u - \mathsf{Re}\, p\big)(\zeta) \leqslant 0 \qquad {\scriptstyle (\forall\, \zeta \in \partial\mathbb{D}_r(z_0))},$$

donc le Principe du Maximum 5.4 assure que

$$\big(u - \mathsf{Re}\, p\big)(z) \leqslant 0 \qquad {\scriptstyle (\forall\, z \in \mathbb{D}_r(z_0))},$$

et en $z = z_0$, c'est justement **(ii)** !

(ii) $\Longrightarrow$ **(i)**. L'objectif est d'établir que u satisfait l'inégalité de sous-moyenne :

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(z_0 + r\, e^{i\theta}\big).$$

Pour abréger, notons $\Delta := \mathbb{D}_r(z_0)$. Le Théorème 3.6 fournit une suite de fonctions continues $(u_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathscr{C}^0(\partial\Delta, \mathbb{R})$ qui tendent en décroissant :

$$u \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \qquad\qquad (n \geqslant 1)$$

vers :

$$u\big|_{\partial\Delta} = \lim_{n\to\infty} u_n \qquad\qquad (\text{sur } \partial\Delta).$$

Au moyen de l'opérateur de Poisson $P_\Delta(\cdot)$, introduisons leurs prolongements harmoniques :

$$\big(P_\Delta u_n\big)(z) \qquad\qquad (z \in \Delta),$$

continus jusqu'au bord :

$$\lim_{z\to\zeta} \big(P_\Delta u_n\big)(z) = u_n(\zeta) \qquad\qquad (\forall\, \zeta \in \partial\Delta).$$

À une constante près que l'on fixe égale à 0, ces fonctions harmoniques $P_\Delta u_n$ possèdent une unique conjuguée harmonique, disons $h_n \in \mathsf{Harm}(\Delta)$, de telle sorte que :

$$f_n := P_\Delta u_n + i\, h_n \in \mathscr{O}(\Delta)$$

est holomorphe.

Fixons temporairement un entier $n \geqslant 1$ quelconque, et prenons un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Par continuité au bord uniforme du prolongement harmonique, il existe $0 \ll r_\varepsilon < r$ assez proche de r tel que pour tout $r_\varepsilon \leqslant s < r$, on a :

$$\begin{aligned}\big(P_\Delta u_n\big)\big(z_0 + s\, e^{it}\big) - \varepsilon < u_n\big(z_0 + r\, e^{it}\big) &< \big(P_\Delta u_n\big)\big(z_0 + s\, e^{it}\big) + \varepsilon \\ &= \mathsf{Re}\, f_n\big(z_0 + s\, e^{it}\big) + \varepsilon,\end{aligned}$$

uniformément quel que soit $0 \leqslant t < 2\pi$. Fixons à présent un s avec $r_\varepsilon \leqslant s < r$.

Maintenant, puisque la fonction holomorphe $f_n \in \mathscr{O}(\Delta)$ peut être développée au point central z_0 en série entière :

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k f_n}{dz^k}(z_0) \big(z - z_0\big)^k,$$

qui converge normalement sur les compacts de $\Delta = \mathbb{D}_r(z_0)$, notamment sur $\overline{\mathbb{D}}_s(z_0) \Subset \mathbb{D}_r(z_0)$, en tronquant cette série à un ordre suffisamment élevé, on obtient un polynôme $q_n(z)$ avec bien sûr :

$$q_n(z_0) = f_n(z_0)$$

tel que :

$$\max_{|z-z_0|\leqslant s} \big|f_n(z) - q_n(z)\big| \leqslant \varepsilon,$$

d'où :

$$\mathsf{Re}\, f_n\big(z_0 + s\, e^{it}\big) \leqslant \mathsf{Re}\, q_n\big(z_0 + s\, e^{it}\big) + \varepsilon,$$

puis en revenant à ce qui précède — noter le petit jeu dérangeant entre r et s — :

$$u\big(z_0 + r\, e^{it}\big) \leqslant u_n\big(z_0 + r\, e^{it}\big) \leqslant \mathsf{Re}\, q_n\big(z_0 + s\, e^{it}\big) + 2\,\varepsilon.$$

Afin de neutraliser ce petit jeu perturbateur, avec les variables :

$$w = z_0 + s\,e^{it} \qquad \text{et} \qquad z = z_0 + r\,e^{it},$$

d'où :

$$w = z_0 + \tfrac{s}{r}\,(z - z_0),$$

en introduisant le nouveau polynôme :

$$p_n(z) := q_n\big(z_0 + \tfrac{s}{r}\,(z - z_0)\big),$$

satisfaisant donc :

$$p_n\big(z_0 + r\,e^{it}\big) = q_n\big(z_0 + s\,e^{it}\big) \qquad\qquad (\forall\, 0 \leqslant t < 2\pi),$$

ainsi que :

$$p_n(z_0) = q_n(z_0) = f_n(z_0),$$

cette dernière inégalité se ré-écrit comme :

$$u(z) \leqslant \mathrm{Re}\, p_n(z) + 2\,\varepsilon \qquad\qquad (\forall\, z \in \partial\mathbb{D}_r(z_0)).$$

L'hypothèse **(ii)** s'applique alors pour donner :

$$u(z_0) \leqslant \mathrm{Re}\, p_n(z_0) + 2\,\varepsilon.$$

Mais comme $\mathrm{Re}\, p_n(z)$ est une fonction harmonique, elle satisfait l'égalité de la moyenne :

$$\mathrm{Re}\, p_n(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, p_n\big(z_0 + r\,e^{i\theta}\big)\,d\theta.$$

Nous pouvons donc remplacer et estimer :

$$\begin{aligned}
u(z_0) &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, p_n\big(z_0 + r\,e^{i\theta}\big)\,d\theta + 2\,\varepsilon \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, q_n\big(z_0 + s\,e^{it}\big)\,dt + 2\,\varepsilon \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, f_n\big(z_0 + s\,e^{it}\big)\,dt + 3\,\varepsilon \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(P_\Delta u_n\big)\big(z_0 + s\,e^{it}\big)\,dt + 3\,\varepsilon \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n\big(z_0 + r\,e^{it}\big)\,dt + 4\,\varepsilon
\end{aligned}$$

Or $\varepsilon > 0$ était arbitraire, donc :

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n\big(z_0 + r\,e^{i\theta}\big)\,d\theta.$$

Pour terminer, il ne reste plus qu'à faire $n \longrightarrow \infty$ pour obtenir grâce au théorème de convergence monotone :

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\big(z_0 + r\,e^{i\theta}\big)\,d\theta,$$

ce qui est l'inégalité de sous-moyenne visée. □

14. Théorème de Hartogs sous-harmonique

Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. L'espace des fonctions sous-harmoniques dans Ω est noté :

$$\mathsf{SH}(\Omega).$$

La motivation du théorème suivant est un théorème exceptionnel de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, que nous verrons ultérieurement.

Théorème 14.1. [Hartogs sous-harmonique] *Soit $(v_j)_{j=1}^{\infty}$ une suite de fonctions sous-harmoniques $v_j \in \mathsf{SH}(\Omega)$ uniformément bornées supérieurement sur les compacts de Ω :*

$$\forall\, K \Subset \Omega \quad \exists\, M_K < \infty \quad v_j \leqslant M_K \quad \forall\, j \geqslant 1.$$

On suppose qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que :

$$\limsup_{j \to \infty} v_j(z) \leqslant C \qquad\qquad (\forall\, z \in \Omega).$$

Alors pour tout compact $K \Subset \Omega$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $j_0 = j_0(K, \varepsilon)$ assez grand pour que :

$$j \geqslant j_0 \implies v_j(z) \leqslant C + \varepsilon \qquad\qquad (\forall\, z \in K).$$

Ici, pour comprendre l'énoncé, les constantes M_K dont on suppose l'existence au début peuvent fort bien être très supérieures $\gg C$ à la constante C des limites 'sup', mais à ε près, le théorème dit que $C + \varepsilon$ majorera uniformément sur les compacts les termes assez grands de la suite.

Démonstration. Soit donc un compact $K \Subset \Omega$. On peut trouver un sous-domaine le contenant :

$$K \Subset \Omega' \Subset \Omega,$$

lui-même compactement contenu dans Ω, à savoir $\overline{\Omega}' \subset \Omega$. Par hypothèse :

$$v_j\big|_K \leqslant v_j\big|_{\overline{\Omega}'} \leqslant M_{\overline{\Omega}'} < \infty,$$

et donc, en remplaçant Ω par Ω', que l'on notera de nouveau Ω, on peut supposer dès le départ que :

$$v_j \leqslant M_\Omega < \infty \qquad\qquad (\forall\, j \geqslant 1).$$

Au-delà, en remplaçant v_j par $v_j - M_\Omega$ que l'on notera de nouveau v_j, on peut aussi supposer que :

$$v_j \leqslant 0 \qquad\qquad (\forall\, j \geqslant 1).$$

Soit maintenant $r > 0$ assez petit pour que le sous-ouvert :

$$\begin{aligned} \Omega_{3r} &:= \big\{ z \in \Omega \colon \operatorname{dist}\big(z, \mathbb{C} \backslash \Omega\big) > 3\,r \big\} \\ &\supset K \end{aligned}$$

contienne le compact. Comme les fonctions v_j sont sous-harmoniques, le Corollaire 7.2 montre qu'elles satisfont l'inégalité bidimensionnelle de la moyenne sur tous les disques de rayon r centrés en les points de K :

$$\pi\, r^2\, v_j(z) \leqslant \int_{|\zeta - z| \leqslant r} v_j(\zeta)\, d\xi \wedge d\eta \qquad\qquad (z \in K,\ j \geqslant 1),$$

où $\zeta = \xi + i\eta$ et $d\xi \wedge d\eta$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. C'est à ce moment-là qu'on utilise le :

Lemme de Fatou en version Limite Supérieure. *Sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^n$, soit une suite $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ de fonctions mesurables négatives :*

$$f_j \leqslant 0$$

intégrables pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ restreinte à E. Alors on a :

$$\limsup_{j \to \infty} \int_E f_j \leqslant \int_E \limsup_{j \to \infty} f_j. \qquad \square$$

Comme la limite supérieure des v_j est par hypothèse $\leqslant C$, on obtient donc :

$$\pi\, r^2\, v_j(z) \leqslant \limsup_{j \to \infty} \int_{|\zeta - z| \leqslant r} v_j(\zeta)\, d\xi \wedge d\eta \leqslant \pi\, C\, r^2 \qquad (z \in K,\ j \geqslant 1).$$

Pour $z \in K$ fixé, il existe donc $j_0(z) \gg 1$ assez grand pour que l'on ait :

$$j \geqslant j_0(z) \quad \Longrightarrow \quad \int_{|\zeta - z| \leqslant r} v_j(\zeta)\, d\xi \wedge d\eta \leqslant \pi\, \big(C + \tfrac{\varepsilon}{2}\big)\, r^2.$$

Alors pour tout autre point w proche de z satisfaisant $|z - w| < \delta < r$, on a inclusion des disques :

$$\mathbb{D}_{r+\delta}(w) \supset \mathbb{D}_r(z),$$

et comme $v_j \leqslant 0$, on obtient :

$$\pi\, (r+\delta)^2\, v_j(w) \underset{\substack{\text{sous-}\\ \text{harmonicité}}}{\leqslant} \int_{|\zeta - w| \leqslant r+\delta} v_j(\zeta)\, d\xi \wedge d\eta \underset{\substack{\text{utiliser}\\ v_j \leqslant 0}}{\leqslant} \int_{|\zeta - z| \leqslant r} v_j(\zeta)\, d\xi \wedge d\eta \leqslant \pi\, \big(C + \tfrac{\varepsilon}{2}\big)\, r^2,$$

et ce, *uniformément* pour :

$$\forall\, w \in \mathbb{D}_\delta(z) \quad \forall\, j \geqslant j_0(z).$$

Si maintenant $0 < \delta \ll r$ est très petit, l'inégalité qui s'en déduit entre les deux extrêmes :

$$\begin{aligned} v_j(w) &\leqslant \frac{\big(C + \frac{\varepsilon}{2}\big)\, r^2}{\big(r + \delta\big)^2} \\ &\leqslant C + \varepsilon \qquad (\forall\, w \in \mathbb{D}_\delta(z),\ \forall\, j \geqslant j_0(z)), \end{aligned}$$

permet de conclure en utilisant le lemme de recouvrement dit *de Borel-Lebesgue* du compact K par un nombre fini de tels disques ouverts :

$$\mathbb{D}_{\delta_1}(z_1) \cup \cdots \cup \mathbb{D}_{\delta_n}(z_n) \supset K,$$

en choisissant bien sûr :

$$j_0 := \max\big(j_0(z_1), \ldots, j_0(z_n)\big),$$

ce qui conclut. $\square$

15. Exercices

Exercice 1. Trouver un exemple de suite de fonctions continues $f_n \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+)$, $n \in \mathbb{N}$, croissante $f_n \leqslant f_{n+1}$ dont la limite ponctuelle $f := \lim f_n$ existe en tout point $x \in [0,1]$, mais qui n'est pas semi-continue supérieurement sur un certain sous-ensemble dense de $[0,1]$.

Exercice 2. Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, un point $z = x + i\,y = r\,e^{i\theta}$ distinct de l'origine ($r \neq 0$) se représente au moyen soit des coordonnées cartésiennes (x, y), soit des coordonnées polaires (r, θ), avec $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Établir les formules de transfert de dérivations :

$$
\begin{aligned}
r\,\frac{\partial}{\partial r} &= x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y}, &\qquad \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial \theta},\\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= -\,y\,\frac{\partial}{\partial x} + x\,\frac{\partial}{\partial y}, &\qquad \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial \theta}.
\end{aligned}
$$

Indication: Étant donné une fonction $F = F(x, y)$, dériver $F(x, y) = F(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$.

Exercice 3. Avec les notations qui précèdent, établir le transfert suivant entre opérateurs du second ordre :

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\partial^2}{\partial r^2}\\
\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\
\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + r\,\frac{\partial}{\partial r}\right)
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\cos^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta\\
-\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\
\sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\\
\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\\
\frac{\partial^2}{\partial y^2}
\end{pmatrix}.
$$

Exercice 4. Démontrer qu'une fonction $u\colon U \longrightarrow [-\infty, \infty[$ définie sur un espace topologique X (pas forcément métrique) satisfaisant :

$$\limsup_{x \to x_0} u(x) \ \leqslant\ u(x_0)$$

pour tout $x_0 \in X$ est bornée supérieurement sur tout sous-ensemble compact $K \subset X$.

Exercice 5. Soit E un sous-ensemble d'un espace métrique (X, d). Montrer que la fonction caractéristique $\mathbf{1}_E$ de E est semi-continue supérieurement si et seulement si E est fermé dans X.

Exercice 6. L'objectif est de démontrer que le Théorème 3.6 reste vrai sans l'hypothèse que la fonction u est bornée supérieurement.

Sur un espace métrique (X, d), soit donc $u\colon X \longrightarrow [-\infty, \infty[$ une fonction semi-continue supérieurement. Pour $n \geqslant 0$ entier, on introduit les sous-ensembles :

$$F_n \ :=\ \big\{x \in X\colon\ u(x) \geqslant n\big\},$$

ainsi que les fonctions :

$$\psi_n(x) \ :=\ \max\big(0,\ 1 - n\,\mathrm{dist}\,(x, F_n)\big) \qquad\qquad (x \in X).$$

(a) Montrer que $\sum_{n \geqslant 0} \psi_n$ converge uniformément sur les compacts de X vers une fonction $\psi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant $\psi \geqslant u$ sur X.

(b) En considérant la fonction bornée supérieurement $u - \psi$, déduire le résultat souhaité.

Exercice 7. L'objectif est de démontrer qu'une fonction semi-continue supérieurement sur un espace métrique complet est en fait continue en tout point d'un sous-ensemble dense.

Soient deux espaces topologiques métriques (X, d) et (X', d'), et soit une application arbitraire $f\colon X \longrightarrow X'$. En un point $x \in X$, l'*oscillation* de f est définie comme :

$$\omega_f(x) \ :=\ \lim_{r \xrightarrow{>} 0}\bigg(\sup_{y, z \in \mathbb{B}_r(x)} d'\big(f(y), f(z)\big)\bigg).$$

(a) Vérifier que f est continue en un point $x \in X$ lorsque, et seulement lorsque, $0 = \omega_f(x)$.

(b) Montrer, pour $c > 0$ quelconque, que les ensembles $\{x\colon\ \omega_f(x) < c\}$ sont ouverts dans X.

(c) Montrer que l'ensemble des points en lesquels f est continue est un G_δ de X, à savoir une intersection dénombrable de certains ouverts de X, que l'on précisera.

(d) On suppose dorénavant que (X, d) est complet et que f est limite ponctuelle d'une suite d'applications $f_n\colon X \longrightarrow X'$ continues. Montrer, pour $c > 0$ quelconque, que l'ensemble $\{x\colon \omega_f(x) < c\}$ est dense dans X.

(e) En appliquant le Théorème de Baire, montrer que l'ensemble des points en lesquels f est continue forme un G_δ dense de X.

(f) Conclure dans ce contexte que la semi-continuité supérieure implique la continuité sur un G_δ dense.

Exercice 8. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer que si une fonction h est harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors h^2 est encore harmonique dans Ω.

Exercice 9. **(a)** Étant donné $\zeta \in \mathbb{C}$, calculer pour tout $r \geqslant 0$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|r\,e^{it} - \zeta\right| dt \;=\; \begin{cases} \log|\zeta| & \text{lorsque } r \leqslant |\zeta|, \\ \log r & \text{lorsque } r > |\zeta|. \end{cases}$$

(b) Utiliser cela pour montrer que la fonction :

$$u(z) := \sum_{n \geqslant 1} \tfrac{1}{2^n} \log\left|z - \tfrac{1}{2^n}\right|$$

est sous-harmonique dans $\mathbb{C}$.

(c) Vérifier que u n'est pas continue en $z = 0$.

Exercice 10. Soient $u_1, \dots, u_{\mathrm{K}}$ des fonctions sous-harmoniques dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$. On suppose que leur somme $u_1 + \cdots + u_{\mathrm{K}}$ atteint un maximum en un certain point de Ω. Montrer que toutes les fonctions $u_1, \dots, u_{\mathrm{K}}$ sont alors harmoniques.

Exercice 11. Soit u une fonction sous-harmonique dans le disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ qui y est < 0. Pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, établir le Lemme de Hopf :

$$\limsup_{r \xrightarrow{<} 1} \frac{u(r\,\zeta)}{1 - r} \;<\; 0.$$

$\varepsilon \xrightarrow{>} 0$. Indication: Appliquer le principe du maximum à la fonction $u(z) + c\log|z|$ sur l'ensemble $\{\frac{1}{2} < |z| < 1\}$ pour une constante appropriée c.

Exercice 12. Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité, et soit $f \colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe satisfaisant, lorsque $z \to 1$:

$$f(z) \;=\; z + \mathrm{o}\big(|1 - z|^3\big).$$

(a) On introduit $\phi(z) := \frac{1+z}{1-z}$ ainsi que :

$$u(z) \;:=\; \mathrm{Re}\,\big(\phi(z) - \phi(f(z))\big).$$

Montrer, pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{D}\backslash\{1\}$, que :

$$\limsup_{z \to \zeta} u(z) \;\leqslant\; 0.$$

(b) Montrer que $u(z) = \mathrm{o}\big(|1 - z|\big)$ lorsque $z \to 1$.

(c) En utilisant le principe du maximum, montrer que $u \leqslant 0$, puis, grâce à l'Exercice 11, que $u \equiv 0$.

(d) Conclure que $f(z) \equiv z$.

(e) Donner un exemple montrant que cette conclusion échouerait si on supposait seulement que $f(z) = z + \mathrm{O}\big(|1 - z|^3\big)$.

Exercice 13. Soit u une fonction sous-harmonique sur le disque unité D satisfaisant :

$$u(z) \;\leqslant\; -\log|\mathrm{Im}\,z| \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Montrer que :

$$u(z) \;\leqslant\; -\log\left|\tfrac{1 - z^2}{2}\right| \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Indication: Appliquer le principe du maximum à la fonction :

$$u(z) + \log\left|\tfrac{r^2 - z^2}{2\,r}\right|,$$

définie sur $\mathbb{D}_r(0)$, où $0 < r < 1$, et faire $r \to 1$.

Exercice 14. Soit u une fonction semi-continue supérieurement dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ satisfaisant, en tout point $z_0 \in \Omega$ où $u(z_0) > -\infty$:

$$0 \;\leqslant\; \limsup_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(z_0 + r\, e^{i\theta}\big)\, d\theta - u(z_0) \right).$$

Montrer que u est sous-harmonique dans Ω. Indication: Pour $\varepsilon > 0$, introduire $u_\varepsilon := u + \varepsilon\, |z|^2$. Imiter les arguments successifs qui ont conduit au Corollaire 7.2 pour établir que u_ε satisfait l'inégalité de sous-moyenne.

Exercice 15. **(a)** Montrer que si une fonction $u(z)$ est sous-harmonique dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$, alors $u(z^k)$ l'est aussi pour tout entier $k \geqslant 1$.

(b) Montrer que si f est holomorphe dans un voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$, et si $f(z) - f(z_0)$ s'annule à un ordre précisément égal à un entier $k \geqslant 1$ en z_0, alors il existe une application holomorphe injective g définie dans un voisinage de z_0 telle que :

$$f(z) - f(z_0) \;=\; \big(g(z)\big)^k.$$

(c) Montrer que si $f\colon \Omega \longrightarrow \Omega'$ est une application holomorphe entre deux ouverts $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $\Omega' \subset \mathbb{C}$, alors :

$$u' \;\in\; \mathsf{SH}(\Omega') \quad\Longrightarrow\quad u \circ f \;\in\; \mathsf{SH}(\Omega),$$

ce qui généralise le Corollaire 7.3.

Exercice 16. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble ouvert quelconque. Montrer que la fonction :

$$z \;\longmapsto\; -\log \mathrm{dist}\,\big(z,\, \partial\Omega\big)$$

est sous-harmonique dans Ω.

Exercice 17. Soit u une fonction sous-harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$. L'objectif est de démontrer que si u vaut $-\infty$ sur un segment de droite ouvert $L \subset \Omega$ de longueur > 0, alors $u \equiv -\infty$ dans Ω.

(a) On choisit un disque ouvert Δ centré en un point de L de rayon assez petit pour que $L \cap \Delta$ soit un diamètre de Δ, le découpant en deux demi-disques ouverts Δ^- et Δ^+. Montrer que la fonction :

$$v(z) \;:=\; \begin{cases} -\,\infty & \text{lorsque } \; z \in \Delta^- \cup L, \\ u(z) & \text{lorsque } \; z \in \Delta^+, \end{cases}$$

est sous-harmonique dans Δ.

(b) Montrer que $v \equiv -\infty$ dans Δ, et conclure.

Exercice 18. Est-il possible qu'une fonction sous-harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ soit non-continue en *tout* point de Ω ? Indication: Penser à un exercice qui précède.

Exercice 19. Soit $u\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur le disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ telle que $x \longmapsto u(x + i\, y)$ et $y \longmapsto u(x + i\, y)$ sont convexes.

(a) Montrer que u est sous-harmonique.

(b) Trouver un contre-exemple à la réciproque.

Exercice 20. Soit $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, soit $\Omega \longrightarrow\,]a, b[$ une fonction harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, et soit $\psi\colon\,]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe (pas forcément croissante). Montrer que $\psi \circ h$ est sous-harmonique dans Ω.

Exercice 21. Soit $u\colon \Omega \longrightarrow [0, \infty[$ une fonction définie dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$. Montre que $\log u$ est sous-harmonique dans Ω si et seulement si u^α est sous-harmonique dans Ω pour tout $\alpha > 0$. Indication: Pour le '*si*', utiliser le fait que $\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}$ décroît vers $\log u$ lorsque $\alpha \downarrow 0$.

Exercice 22. Montrer que si $\log u$ et $\log v$ sont sous-harmoniques dans $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors $\log(u + v)$ l'est aussi.

Exercice 23. **(a)** Montrer que toute fonction convexe sur $\mathbb{R}$ qui est bornée supérieurement est nécessairement constante.

(b) Re-démontrer le Théorème de Liouville pour les fonctions sous-harmoniques (Corollaire 6.8).

Exercice 24. Avec les notations de la Définition 11.8, montrer que l'on a :

$$B_u(r) \geqslant C_u\big(\tfrac{r}{\sqrt{e}}\big) \qquad (\forall\, 0 < r\, R).$$

Indication: Écrire $C_u(r)$ sous la forme $\psi(\log r)$, avec ψ convexe, et appliquer l'inégalité de Jensen réelle 11.1 à la relation 11.9, *i.e.* à $B_u(r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r C_u(s)\, s\, ds$.

Exercice 25. Montrer que si $\log u$ est sous-harmonique dans un disque $\mathbb{D}_R(0)$ avec $R > 0$, alors les trois fonctions :

$$\log M_u(r), \qquad \log C_u(r), \qquad \log B_u(r)$$

sont des fonctions convexes de $\log r$. Indication: S'inspirer des démonstrations des Théorèmes 11.6 et 11.10.

Exercice 26. Soient $(a_j)_{j=0}^{\infty}$ et $(b_j)_{j=0}^{\infty}$ deux suites infinies de nombres $a_j, b_j \geqslant 0$. Pour $k \geqslant 0$, on introduit :

$$c_k := \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} a_j\, b_{k-j}.$$

(a) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k^2}{k+1} \leqslant \bigg(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2\bigg) \bigg(\sum_{j=0}^{\infty} b_j^2\bigg).$$

(b) Soient f et g deux fonctions holomorphes dans un disque $\mathbb{D}_R(0)$ de rayon $R > 0$ muni de la mesure de Lebesgue $d\lambda$. Montrer, pour tout $0 < r < R$, que :

$$\frac{1}{\pi\, r^2} \int_{\mathbb{D}_r(0)} |f|^2\, |g|^2\, d\lambda \leqslant \bigg(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big|f(r\, e^{i\theta})\big|^2\, d\theta\bigg) \bigg(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big|g(r\, e^{i\theta})\big|^2\, d\theta\bigg).$$

(c) Si $u \geqslant 0$ et $v \geqslant 0$ sont deux fonctions sur $\mathbb{D}_R(0)$, $R > 0$, telles que $\log u$ et $\log v$ sont sous-harmoniques, montrer que :

$$B_{uv}(r) \leqslant C_u(r)\, C_v(r) \qquad (\forall\, 0 < r < R).$$

Indication: Adapter les idées de la démonstration du Théorème 11.6.

(d) Donner une interprétation géométrique de cette dernière inégalité dans le cas $u = v = |f'|$, où $f\colon \mathbb{D}_R(0) \xrightarrow{\sim} \Omega$ est un biholomorphisme.

Exercice 27. Soit un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, et soit $u\colon \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty[$ une fonction mesurable qui est bornée inférieurement et supérieurement sur tout compact $K \Subset \Omega$, et qui satisfait l'inégalité locale de sous-moyenne. On ne suppose pas que u est semi-continue supérieurement.

(a) Avec une fonction χ comme dans le Théorème 12.3, montrer pour tout $r > 0$ que $u * \chi_r$ est sous-harmonique dans Ω_r.

(b) On introduit la *régularisée semi-continue supérieure* de u :

$$u^*(z) := \lim_{r \to 0} \Big(\sup_{w \in \mathbb{D}_r(z)} u(w)\Big) \qquad (z \in \Omega).$$

Vérifier que u^* est semi-continue supérieurement dans Ω.

(c) Montrer que :

$$\lim_{r \to 0} u * \chi_r = u^*.$$

(d) Pour $r, s > 0$, montrer que l'on a sur Ω_{r+s} :

$$\big(u * \chi_r\big) * \chi_s = \big(u * \chi_s\big) * \chi_r.$$

(e) Déduire que $u * \chi_r$ décroît avec $0 \xleftarrow{<} r$ et que l'on a :

$$u * \chi_r = u^* * \chi_r,$$

ceci sur Ω_r, pour tout $r > 0$.

(f) Montrer que u^* est sous-harmonique dans Ω, et que $u^* = u$ presque partout.

(g) En tronquant pour $n \geqslant 1$:

$$u_n := \max\big(u, -n\big),$$

montrer que ces conclusions restent vraies sans supposer que u soit bornée inférieurement sur les compacts.

Exercice 28. Soit u une fonction sous-harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, et soit v une fonction semi-continue supérieurement dans Ω telle que :

$$u \leqslant v$$

presque partout. Montrer qu'on a en fait $u \leqslant v$ partout.

Exercice 29. EE