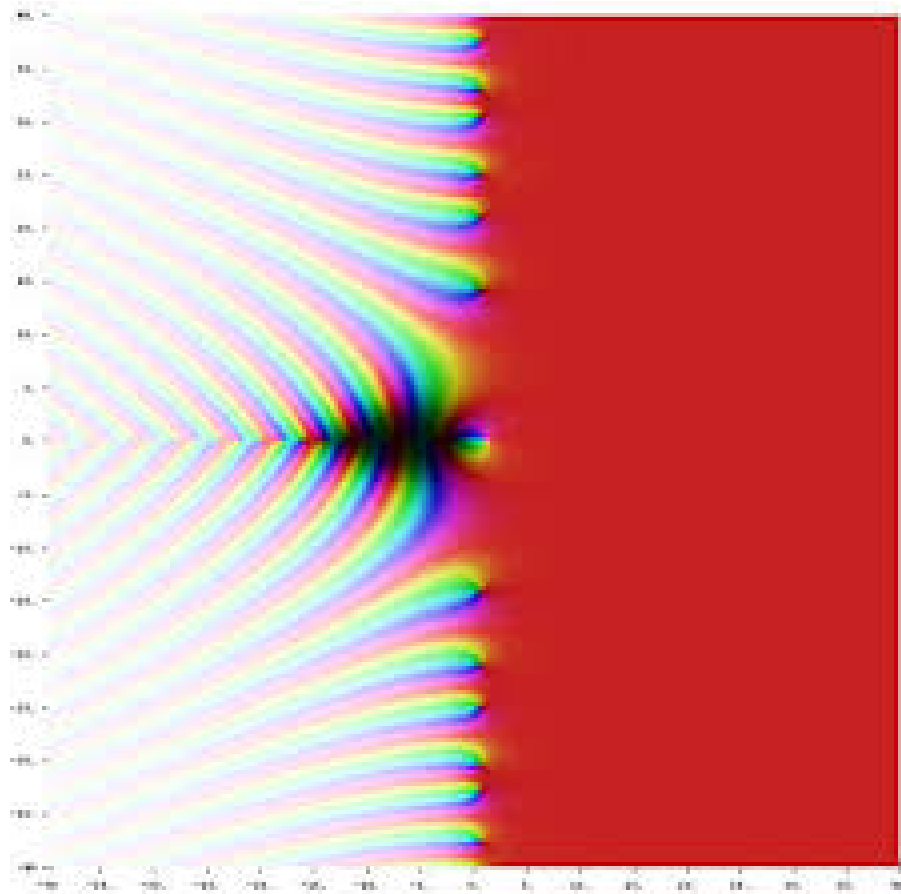


La fonction Zêta de Riemann : approche historique et liens avec les nombres premiers

GAËTAN DAMY¹ - FLORIAN THIRY²

Projet de Licence 3 Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Université Paris Saclay - 2019/2020



1. gaetan.damy@universite-paris-saclay.fr
2. florian.thiry@universite-paris-saclay.fr

TABLE DES MATIÈRES

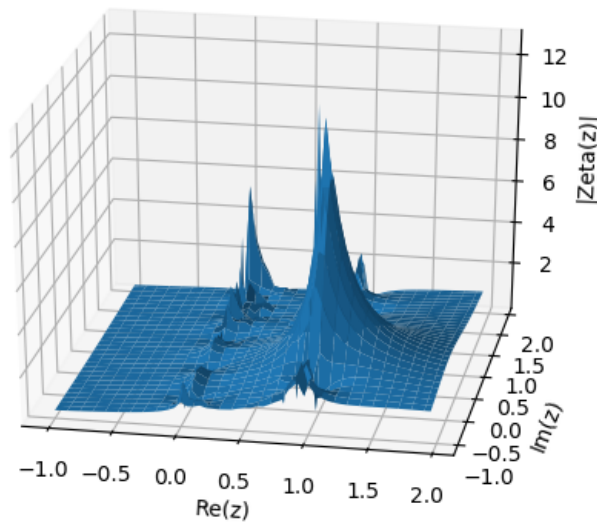
1. La formule produit d'Euler	4
2. Le contexte historique	7
3. Fonction factorielle et fonction Γ d'Euler	8
4. La fonction ζ et quelques propriétés élémentaires	10
4.1. Introduction et définition	10
4.2. Les valeurs numériques remarquables de ζ	14
5. L'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction ζ	20
5.1. Première démonstration de l'équation fonctionnelle de ζ	20
5.2. Seconde démonstration de l'équation fonctionnelle de ζ	25
5.3. Troisième démonstration de l'équation fonctionnelle de ζ	29
6. La fonction ξ	34
6.1. Introduction	34
6.2. Les racines ρ de ξ et l'hypothèse de Riemann	37
6.3. La formule produit de ξ	39
7. La connexion entre la fonction ζ et les nombres premiers	42
8. Inversion de Fourier	46
9. La formule principale de Riemann : détermination de $J(x)$	49
9.1. Introduction	49
9.2. Calcul de la première intégrale I_1	51
9.3. Calcul de la seconde intégrale I_2	59
9.4. Calcul des intégrales restantes I_3 , I_4 et I_5	62
10. La formule analytique de $\pi(x)$	66
11. Questions non résolues par Riemann	68
12. Annexe	69
13. Références bibliographiques	72

Préface

Nous tenons tout d'abord à remercier notre enseignant encadrant, M. Joël Merker, pour toute l'aide et le soutien qu'il nous a apportés pour la compréhension de certains passages délicats de ce projet, ainsi que pour la rédaction en $\text{\LaTeX}$. Il nous a consacré beaucoup de temps et nous lui en sommes très reconnaissants.

Notre projet de Licence 3 se base essentiellement sur le chapitre 1 du livre de H. M. Edwards intitulé *Riemann's Zeta Function*. Nous avons choisi de détailler davantage certains passages et de rajouter quelques compléments issus d'autres sources, afin de rendre la compréhension plus fluide.

Dans ce projet, nous allons commencer par observer quelques propriétés impliquant les nombres premiers. Ensuite, nous définirons la fameuse fonction ζ de Riemann : nous verrons que cette fonction vérifie une équation fonctionnelle fondamentale. Nous démontrerons la *formule principale de Riemann*, ce qui nous permettra de trouver un lien entre les zéros non triviaux de la fonction ζ et la fonction π de répartition des nombres premiers.



Nous avons essayé de tracer le module de la fonction ζ en fonction de $z \in \mathbb{C}$, en utilisant plusieurs formules vérifiées par ζ : nous obtenons naturellement un graphique en trois dimensions. Nous pouvons apercevoir le pôle en $z = 1$, qui correspond à la série harmonique.

1. LA FORMULE PRODUIT D'EULER

Nous commençons par introduire une notation qui sera valable dans toute la suite :

Notation 1.1. La lettre p représentera toujours un *nombre premier*. Ainsi les notations $\prod_p$ et $\sum_p$ représentent le produit ou la somme pris sur l'ensemble des nombres premiers.

Riemann prend comme point de départ la formule produit d'Euler. Cette formule établit un lien profond avec les nombres premiers.

Théorème 1.2. [Formule produit d'Euler] *Pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(s) > 1$, on a :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)},$$

où le produit est normalement convergent dans tout demi-plan $\{\operatorname{Re}(s) > 1 + \delta\}$ avec $\delta > 0$ quelconque.

Démonstration. Commençons par justifier la convergence de ce produit infini. Posons $z := \frac{1}{p^s}$ qui vérifie $0 < |z| < \frac{1}{2}$ car $p \geq 2$. En utilisant :

$$\left| \frac{1}{1-z} \right| \leq \frac{1}{1-|z|} \leq 1 + 2|z|,$$

on peut majorer le produit infini :

$$\prod_p \frac{1}{\left|1 - \frac{1}{p^s}\right|} \leq \prod_p \left(1 + \frac{2}{|p^s|}\right).$$

Le critère de convergence des produits infinis s'applique :

$$\sum_p \frac{2}{|p^s|} = 2 \sum_p \frac{1}{p^{\operatorname{Re}(s)}} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(s)}} < \infty.$$

Ensuite, soient deux (grands) entiers N et M , tels que $1 \leq N \leq M$. Puisque d'après le théorème fondamental de l'arithmétique, tout entier $n \leq N$ s'écrit de manière unique $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_{\mu}^{\alpha_{\mu}}$ avec $p_1, \dots, p_{\mu}$ des nombres premiers, avec $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu} \geq 1$, et avec :

$$p_1, \dots, p_{\mu} \leq N, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_{\mu} \leq N \leq M,$$

un développement du produit à droite de la première ligne ci-dessous donne une majoration :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} &\leq \prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \cdots + \frac{1}{p^{Ms}} \right) \\
 &\leq \prod_{p \leq N} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ms}} \\
 &= \prod_{p \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \\
 &\leq \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.
 \end{aligned}$$

En faisant $N \rightarrow \infty$, il vient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leq \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Pour l'inégalité inverse, à nouveau d'après le théorème fondamental de l'arithmétique, un développement du produit de gauche montre qu'on n'obtient pas tous les $\frac{1}{n^s}$:

$$\prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \cdots + \frac{1}{p^{Ms}} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

d'où en faisant $M \rightarrow \infty$:

$$\prod_{p \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

et enfin via $N \rightarrow \infty$:

$$\prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

□

Euler utilise cette formule principalement avec des valeurs de s entières. Dirichlet a aussi basé son travail sur la formule produit d'Euler. Dirichlet utilise cette formule pour s réel, mais il prouve rigoureusement qu'elle est

vraie pour $s \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(s) > 1$. Riemann, l'un des fondateurs des fonctions à variable complexe, considère donc naturellement s comme une variable complexe. Il est facile de voir que les deux membres de la formule convergent lorsque $\operatorname{Re}(s) > 1$, mais Riemann va plus loin en montrant que les deux membres divergent pour les autres valeurs de s . La fonction ζ qu'ils utilisent est définie pour toutes les valeurs de s , à l'exception d'un pôle en $s = 1$. Cette extension nécessite quelques faits sur la fonction factorielle (voir section 3).

2. LE CONTEXTE HISTORIQUE

L'article de Riemann débute par le théorème d'Euler prouvé en 1737 :

Théorème 2.1. [Euler] *La somme des inverses des nombres premiers :*

$$(2.2) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots,$$

est une série divergente.

Ce théorème permet de déduire un théorème ancien d'Euclide qui affirme qu'il existe une infinité de nombres premiers. Euler va au-delà du simple fait de la divergence de la série (2.2) : il obtient la proposition suivante.

Proposition 2.3. *Au voisinage de $+\infty$, on a :*

$$(2.4) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots = \log(\log(\infty)).$$

Cette équation (2.4) sous entend de manière plus formelle que :

$$(2.5) \quad \sum_{p < x} \frac{1}{p} \sim \log(\log(x)),$$

où le membre de gauche dans (2.5) représente la somme des $\frac{1}{p}$ pour p premier avec $p < x$. Le signe $\sim$ signifie que l'erreur relative est arbitrairement petite lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Démonstration. La proposition précédente est démontrée dans le livre *Additive Number Theory* de Melvyn Nathanson à partir de la page 161. Le théorème découle directement de la proposition puisque $\log(\log(x)) \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$. $\square$

Le premier résultat obtenu par Chebyshev, au-delà du théorème d'Euler, est un résultat prouvé vers 1850 qui permet d'avoir une bonne idée du comportement asymptotique de la fonction π de répartition des nombres premiers :

Théorème 2.6. [Nombres premiers] *Au voisinage de $+\infty$, on a :*

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log(t)},$$

où $\pi(x)$ représente le nombre de nombres premiers entre 0 et x .

Démonstration. Ce théorème est démontré dans le polycopié de François de Marçay *Analyse complexe* à partir de la page 275. La démonstration s'organise en sept lemmes capitaux. $\square$

3. FONCTION FACTORIELLE ET FONCTION Γ D'EULER

Euler étend la fonction factorielle ($n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$) définie sur les entiers naturels, à tous les nombres réels supérieurs à -1 strictement.

Definition 3.1. [Fonction Π] Pour tout $s > -1$,

$$(3.2) \quad \Pi(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^s dx.$$

Par intégration par parties, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

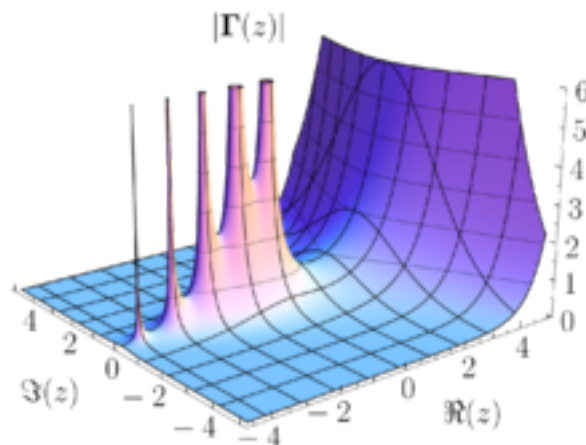
$$\Pi(n) = n\Pi(n-1).$$

Il s'agit de la formule par récurrence de la factorielle ($n! = n(n-1)!$). Et comme $\Pi(0) = 1 = 0!$, on trouve ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(3.3) \quad \Pi(n) = n!.$$

La notation Γ est aussi utilisée pour définir la fonction Π avec $\Gamma(x) := \Pi(x-1)$. La notation Γ est introduite par Legendre (car il préfère considérer que le premier pôle commence en 0 au lieu de -1). Cependant, nous utiliserons la notation Π ici (qui est utilisée également dans le livre d'Edwards) car nous avons directement $n! = \Pi(n)$.

La fonction Π est bien définie sur $] -1; +\infty[$, mais également sur le demi plan complexe $\operatorname{Re}(s) > -1$. On peut montrer qu'il s'agit d'une fonction holomorphe sur ce demi plan. Il existe une autre représentation de Π .



Proposition 3.4. Pour $N \rightarrow +\infty$, on a :

$$(3.5) \quad \frac{N!}{(s+1)(s+2)\cdots(s+N)} (N+1)^s \rightarrow \Pi(s).$$

Cette formule est valable lorsque $\operatorname{Re}(s) > -1$. Cependant, il est facile de voir que la limite existe pour toute valeur de s complexe sauf lorsque s

est un entier négatif. Donc la formule (3.5) permet d'étendre la définition de $\Pi(s)$ pour $s \in \mathbb{C}$ sauf $s = -1, -2, -3, \dots$.

Il existe d'autres formules qui permettent d'étendre la définition de Π dont ne nous donnerons pas de démonstration.

Proposition 3.6. *Pour tout $s \in \mathbb{C}$ sauf $s = -1, -2, -3, \dots$, on a :*

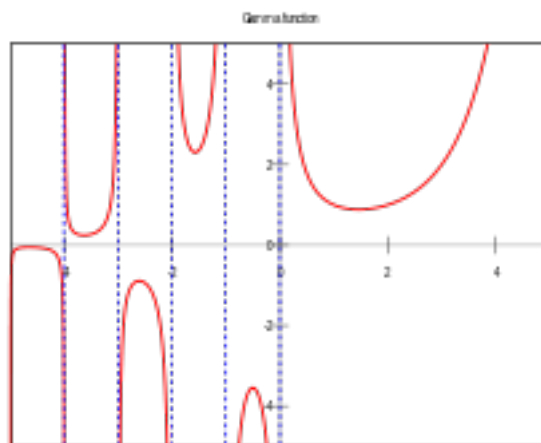
$$(3.7) \quad \Pi(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1-s}(n+1)^s}{s+n},$$

$$(3.8) \quad \Pi(s) = s\Pi(s-1),$$

$$(3.9) \quad \frac{\pi^s}{\Pi(s)\Pi(-s)} = \sin(\pi s),$$

$$(3.10) \quad \Pi(s) = 2^s \Pi\left(\frac{s}{2}\right) \Pi\left(\frac{s-1}{2}\right) \pi^{-1/2}.$$

D'après les formules précédentes, on en déduit que Π est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui possède des pôles simples en $s = -1, -2, -3, \dots$. Cette fonction ne s'annule jamais. L'identité (3.9) est appelée *formule des compléments*.



En combinant (3.10) et (3.9), on retrouve la célèbre valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\Pi\left(\frac{-1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

4. LA FONCTION ζ ET QUELQUES PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES

4.1. Introduction et définition.

Il est intéressant de voir que Riemann ne parle pas de prolonger la fonction $s \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ au delà du demi plan $\operatorname{Re}(s) > 1$, mais plutôt de trouver une expression de cette série qui "reste valable pour tout s ". Cela indique qu'il a vu le problème sous un angle analogue à celui utilisé dans l'extension de la factorielle via l'égalité (3.5), et non sous la forme d'un prolongement "de proche en proche" comme cela est davantage préconisé aujourd'hui. La conception du prolongement comme succession de disques et de séries entières convergentes est issue de Weierstrass et est à l'opposé de la philosophie de Riemann selon laquelle les fonctions analytiques doivent être considérées de façon globale, et non localement avec des séries entières.

Suivons à présent le procédé qui permet à Riemann d'obtenir l'expression "valable pour tout s " recherchée. Pour s réel strictement positif on a :

$$\Pi(s-1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx.$$

Le changement de variable $x = tn$ où n est un entier non nul quelconque donne alors :

$$\Pi(s-1) \frac{1}{n^s} = \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^{s-1} dt.$$

On se restreint alors à $s > 1$ réel, et on somme de part et d'autre de l'égalité sur $\mathbb{N}^*$:

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \right) \Pi(s-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx.$$

Le côté droit est bien sommable car le côté gauche l'est. Les applications $x \mapsto e^{-nx} x^{s-1}$ sont bornées et leur supremum tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. On obtient alors une convergence uniforme justifiant l'échange série intégrale suivant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

Ainsi pour $s > 1$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Pi(s-1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

On peut vérifier que cette dernière intégrale converge bien, en effet on a :

Pour x proche de 0 : $\frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{s-2}$, qui est continue en 0 si $s \geq 2$ et d'intégrale convergente en 0 par critère de Riemann si $2 > s > 1$.

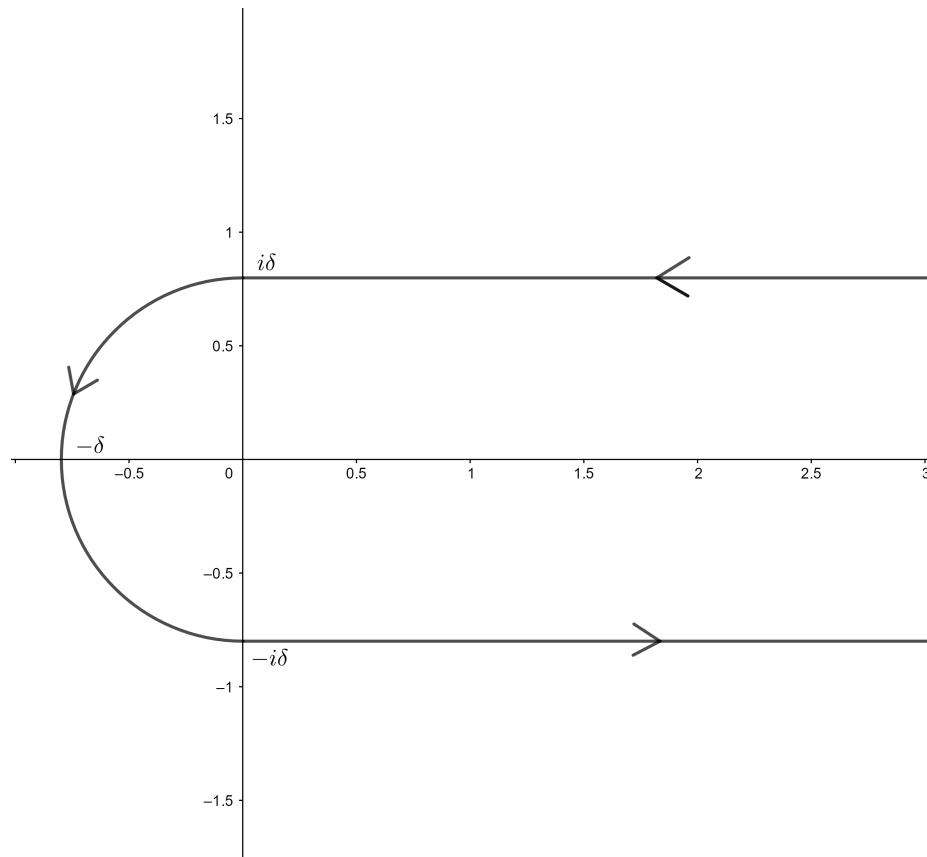
Pour x proche de $+\infty$: $\frac{x^{s-1}}{e^x-1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{s-1}e^{-x}$, qui est intégrable au voisinage de $+\infty$.

A présent considérons l'intégrale :

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x-1} \frac{dx}{x} := \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\gamma_\delta} \frac{(-x)^s}{e^x-1} \frac{dx}{x},$$

où γ_δ désigne le contour orienté dans le sens trigonométrique (c'est-à-dire, dans notre cas, que les éléments du support sont parcourus par arguments croissants) ayant pour support l'ensemble $(\mathbb{R}^+ + i\delta) \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = \delta \wedge \operatorname{Re}(z) < 0\} \cup (\mathbb{R}^+ - i\delta)$ où δ est un réel strictement positif petit, et $s > 1$ un réel.

C'est-à-dire visuellement :



Le terme $(-x)^s$ quant à lui, est défini par $(-x)^s := e^{s \log(-x)}$. Le logarithme étant défini de façon usuelle par :

$$\begin{aligned} \log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \log|z| + i\operatorname{Arg}(z). \end{aligned}$$

On peut alors décomposer l'intégrale en 3 termes suivant chaque morceau du contour. Celui inclus dans le premier quadrant, celui en arc de cercle qui se trouve dans le deuxième et troisième quadrant, et celui inclus dans le dernier quadrant ; les valeurs de l'intégrale sur chacun de ces morceaux de contours seront notées respectivement :

$$\int_{+\infty}^{\delta} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} ; \int_{|x|=\delta} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} ; \int_{\delta}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x}.$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} & \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = \\ & \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{+\infty}^{\delta} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} + \int_{|x|=\delta} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} \right]. \end{aligned}$$

Regardons alors chacun de ces termes plus en détail :

$$\left| \int_{|x|=\delta} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} \right| = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{(-\delta e^{i\theta})^s}{e^{\delta e^{i\theta}} - 1} i d\theta \right| \leq \delta^s \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{|e^{\delta e^{i\theta}} - 1|} d\theta.$$

Or pour δ proche de 0 on a $\frac{1}{|e^{\delta e^{i\theta}} - 1|} \underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{|\delta e^{i\theta}|} = \frac{1}{\delta}$. On peut alors justifier que l'on a :

$$\delta^s \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{|e^{\delta e^{i\theta}} - 1|} d\theta \underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} \delta^s \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\delta} d\theta = \pi \delta^{s-1} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Donc :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|x|=\delta} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = 0.$$

A présent considérons l'intégrale dont le support est inclus dans le premier quadrant. Notons $]i\delta, +\infty[$ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : z = t + i\delta, t \in]0, +\infty[\}$.

Pour tout $\delta > 0$, $x \mapsto \frac{e^{s(\log x - i\pi)}}{x(e^x - 1)}$ est holomorphe sur un voisinage ouvert étoilé de $]i\delta, +\infty[$, donc y admet une primitive. Ainsi l'application $\delta \mapsto \int_{+\infty}^{\delta} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = \int_{+\infty}^{\delta} \frac{e^{s(\log x - i\pi)}}{e^x - 1} \frac{dx}{x}$ est continue sur $]0, 1]$.

Il en va de même pour l'intégrale du dernier quadrant.

Par conséquent il suffit que les applications $x \mapsto \frac{e^{s(\log x - i\pi)}}{(e^x - 1)x}$ et $x \mapsto \frac{e^{s(\log x + i\pi)}}{(e^x - 1)x}$ soient intégrables sur $\mathbb{R}^+$ pour conclure que l'on a :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{+\infty}^{\delta} \frac{e^{s(\log x - i\pi)}}{(e^x - 1)x} dx + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{e^{s(\log x + i\pi)}}{(e^x - 1)x} dx \right] = \int_{+\infty}^0 \frac{e^{s(\log x - i\pi)}}{(e^x - 1)x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^{s(\log x + i\pi)}}{(e^x - 1)x} dx.$$

Or cela se vérifie aisément, la décroissance de $x \mapsto \frac{e^{-x}}{x(e^x - 1)}$ donne l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$, et au voisinage de 0 : $\frac{e^{s(\log x - i\pi)}}{x(e^x - 1)} = e^{-i\pi s} \frac{x^s}{x(e^x - 1)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} e^{-i\pi s} x^{s-2}$. Ce qui est bien intégrable au voisinage de 0 puisque $s - 2 > -1$ pour les valeurs de s considérées.

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} &= \int_{+\infty}^0 \frac{e^{s(\log x - i\pi)}}{(e^x - 1)x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^{s(\log x + i\pi)}}{(e^x - 1)x} dx \\ &= \int_{+\infty}^0 \frac{x^{s-1} e^{-i\pi s}}{e^x - 1} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1} e^{i\pi s}}{e^x - 1} dx \\ &= 2i \sin(\pi s) \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1}. \end{aligned}$$

On utilise alors l'expression de cette intégrale démontrée précédemment :

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = 2i \sin(\pi s) \Pi(s - 1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Ce qui revient après multiplication par $\frac{\Pi(-s)s}{2i\pi s}$ et usage de l'identité (3.9) : $\sin(\pi s) = \frac{\pi s}{\Pi(s)\Pi(-s)}$, à l'expression :

$$\frac{\Pi(-s)}{2i\pi} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Ainsi si l'on définit la fonction ζ par l'expression :

$$\zeta(s) := \frac{\Pi(-s)}{2i\pi} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x},$$

alors pour les valeurs réelles de s strictement supérieures à 1, ζ coïncide avec la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Mais, l'expression ainsi donnée de ζ reste "valable pour tout s ". En fait, la décroissance de $\frac{1}{e^x - 1}$ permet de rendre l'intégrale $\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x}$ convergente quelle que soit la valeur de s dans tout le plan complexe. De plus, la convergence étant uniforme sur les compacts de $\mathbb{C}$, la fonction définie

par cette intégrale est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Donc ζ ainsi définie, est holomorphe sur $\mathbb{C}$, sauf a priori sur les éléments de $\mathbb{N}^*$ puisque $\Pi(-s)$ y admet des pôles. Mais en ces points, ζ coïncide avec la série de Dirichlet, alors le critère de Riemann nous fait voir que ζ n'a pas de pôles sur les entiers non nuls différents de 1 (l'intégrale doit avoir des zéros en ces points pour annuler les pôles de Π , ce qui peut être retrouvé via les théorèmes de Cauchy). Cette série nous fait aussi voir que en $s = 1$, le pôle est bien une réalité $\lim_{s \rightarrow 1^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = +\infty$, pôle qui doit être simple puisque celui de Π en -1 l'est.

Nous pouvons enfin définir la fameuse *fonction zêta de Riemann*.

Definition 4.1. [Fonction ζ de Riemann] L'expression

$$\zeta(s) := \frac{\Pi(-s)}{2i\pi} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x},$$

définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ qui admet un pôle simple en 1, appelée *fonction zêta de Riemann*. Celle-ci coïncide avec la définition "classique" de la fonction ζ par la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ lorsque les réels s sont strictement supérieurs à 1. En réalité, par prolongement analytique, elle coïncide avec cette série sur le demi plan $\{\operatorname{Re}(s) > 1\}$.

4.2. Les valeurs numériques remarquables de ζ .

La fonction $x \mapsto x(\exp(x) - 1)^{-1}$ peut être développée en série entière convergente au voisinage de 0 :

$$(4.2) \quad \frac{x}{\exp(x) - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n x^n}{n!}.$$

Cette formule est valable pour $x \in \mathbb{C}$ avec $|x| < 2\pi$: nous évitons ainsi les premières singularités en $x = \pm 2\pi i$.

Definition 4.3. [Nombres de Bernoulli] Les coefficients B_n (pour $n \in \mathbb{N}$) dans la formule (4.2) sont appelés *nombres de Bernoulli*.

Exemple 4.4. Il est possible de déterminer les premiers nombres de Bernoulli :

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, & B_1 &= -\frac{1}{2}, \\ B_2 &= \frac{1}{6}, & B_3 &= 0, \\ B_4 &= -\frac{1}{30}, & B_5 &= 0, \\ B_6 &= \frac{1}{42}, & B_7 &= 0, \\ B_8 &= -\frac{1}{30}, & B_9 &= 0. \end{aligned}$$

Proposition 4.5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $B_{2n+1} = 0$.*

Démonstration. Il suffit de voir que la fonction suivante est paire :

$$t \mapsto \frac{t}{\exp(t) - 1} + \frac{t}{2}.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \frac{t}{\exp(t) - 1} + \frac{t}{2} &= \frac{t + t\exp(t)}{2(\exp(t) - 1)} \\ &= \frac{\exp(-t)t + t}{2(1 - \exp(-t))} \\ &= \frac{-t - t\exp(-t)}{2(\exp(-t) - 1)} \\ &= \frac{-2t + t - t\exp(-t)}{2(\exp(-t) - 1)} \\ &= \frac{-2t - t(\exp(-t) - 1)}{2(\exp(-t) - 1)} \\ &= \frac{-t}{\exp(-t) - 1} + \frac{-t}{2}. \end{aligned}$$

Par définition des coefficients de Bernoulli :

$$\frac{x}{\exp(x) - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{\exp(x) - 1} - B_1x = B_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{B_n x^n}{n!}.$$

Ainsi tous les coefficients impairs de $x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{B_n x^n}{n!}$, sont nuls (par parité de la fonction). $\square$

Lorsque $s = -n$ (pour $n \in \mathbb{N}$), l'expression (4.2) peut être utilisée dans l'équation de $\zeta(s)$ pour obtenir la proposition suivante.

Proposition 4.6. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On utilise la formule démontrée dans la section précédente 4.1 :

$$\begin{aligned} \zeta(-n) &= \frac{\Pi(n)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^{-n}}{\exp(z) - 1} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{z}{\exp(z) - 1} \frac{(-z)^{-n}}{z} \frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\Pi(n) = n!$, et ensuite, on utilise la définition des nombres de Bernoulli :

$$\begin{aligned}\zeta(-n) &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k z^k}{k!} \right) \frac{(-z)^{-n} dz}{z} \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \int_{+\infty}^{+\infty} z^{k-2} (-z)^{-n} dz.\end{aligned}$$

D'après la définition du contour partant de $+\infty$ jusqu'à $+\infty$ (section 4.1), on a :

$$\int_{+\infty}^{+\infty} z^{k-2} (-z)^{-n} dz = (-1)^n \int_{|z|=\delta} z^{k-n-2} dz,$$

où $|z| = \delta$ représente le cercle centré en 0 et de rayon $\delta > 0$. On effectue une paramétrisation de ce cercle : $z(t) = \delta e^{it}$ avec $t \in [0, 2\pi]$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}\int_{+\infty}^{+\infty} z^{k-2} (-z)^{-n} dz &= (-1)^n \int_0^{2\pi} (\delta e^{it})^{k-n-2} i \delta e^{it} dt \\ &= (-1)^n i \delta^{k-n-1} \int_0^{2\pi} e^{it(k-n-1)} dt.\end{aligned}$$

Or cette dernière intégrale est toujours nulle sauf lorsque $k = n + 1$. Et dans ce cas, elle vaut : $(-1)^n 2\pi i$.

On revient au calcul de $\zeta(-n)$:

$$\begin{aligned}\zeta(-n) &= \frac{n!}{2\pi i} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (-1)^n 2\pi i \\ &= (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}.\end{aligned}$$

□

Exemple 4.7. On peut désormais calculer les premières valeurs de ζ pour les entiers négatifs :

$$\begin{aligned}\zeta(0) &= -\frac{1}{2}, & \zeta(-2) &= 0, \\ \zeta(-1) &= -\frac{1}{12}, & \zeta(-4) &= 0, \\ \zeta(-3) &= \frac{1}{120}, & \zeta(-6) &= 0.\end{aligned}$$

Définition 4.8. [Zéros triviaux de ζ] On vient de montrer que $\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \dots = 0$. Les nombres $-2, -4, -6, \dots$ sont appelés *les zéros triviaux de ζ* .

Les nombres de Bernoulli interviennent également dans les valeurs paires positives de ζ . Nous n'avons pas (pour le moment) de formule "simple" qui exprime les valeurs impaires positives de ζ .

Proposition 4.9. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}(-1)^{n+1}B_{2n}}{2 \cdot (2n)!}.$$

Démonstration. L'idée est d'utiliser le développement en série entière de $y \mapsto \cot(y)$. D'après les formules d'Euler, on obtient pour $y \in]0; \pi[$:

$$\begin{aligned} y \cot(y) &= y \frac{\cos(y)}{\sin(y)} \\ &= iy \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{e^{iy} - e^{-iy}} \\ &= iy \frac{e^{2iy} + 1}{e^{2iy} - 1}. \end{aligned}$$

Posons $z = 2iy$, il vient :

$$y \cot(y) = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1}.$$

D'après la définition des nombres de Bernoulli (avec $|z| = 2y < 2\pi$) :

$$\begin{aligned} y \cot(y) &= \frac{z}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!} \\ &= B_0 + B_1 z + \frac{z}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!} \\ &= B_0 - \frac{1}{2}z + \frac{z}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!} \\ &= B_0 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $B_{2n+1} = 0$ donc :

$$y \cot(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k} z^{2k}}{(2k)!}.$$

Par définition, $z = 2iy$, ainsi :

$$y \cot(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} y^{2k}.$$

Nous utilisons la formule suivante (qui est démontrée dans le polycopié de François de Marçay "Analyse complexe" page 245).

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$:

$$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}.$$

On peut poser $x = \frac{y}{\pi}$ pour $y \in]0; 1[$:

$$\pi \cot(y) = \frac{\pi}{y} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2y}{\pi \left(n^2 - \left(\frac{y}{\pi} \right)^2 \right)},$$

on multiplie par y l'expression et on simplifie :

$$\begin{aligned} y \cot(y) &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2 - y^2} \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{y}{\pi n} \right)^2}. \end{aligned}$$

On a $\left| \frac{y}{\pi n} \right| < 1$ car $n \geq 1$ et $|y| < 1$, donc on peut développer en série géométrique :

$$\begin{aligned} y \cot(y) &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y}{\pi n} \right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y}{n\pi} \right)^{2k} \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{y}{n\pi} \right)^{2k}. \end{aligned}$$

Le terme général des deux séries est positif, donc d'après le théorème de Fubini, on peut inverser les deux sommes, ainsi :

$$y \cot(y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) \frac{-2}{\pi^{2k}} \right] y^{2k}.$$

On utilise l'autre formule du développement de $y \cot(y)$ trouvée précédemment. Par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients :

$$\frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} = \frac{-2}{\pi^{2k}} \zeta(2k).$$

En réordonnant, on trouve finalement :

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1} (2\pi)^{2k} B_{2k}}{2 \cdot (2k)!}.$$

□

Exemple 4.10. On peut donc calculer les premières valeurs de ζ pour les entiers positifs pairs :

$$\begin{aligned}\zeta(2) &= \frac{\pi^2}{6}, & \zeta(4) &= \frac{\pi^4}{90}, \\ \zeta(6) &= \frac{\pi^6}{945}, & \zeta(8) &= \frac{\pi^8}{9450}.\end{aligned}$$

5. L'ÉQUATION FONCTIONNELLE VÉRIFIÉE PAR LA FONCTION ζ 5.1. Première démonstration de l'équation fonctionnelle de ζ .

Nous allons donner une première démonstration de l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction ζ . L'approche de cette démonstration est différente des deux autres présentées dans les sections suivantes. Pour faciliter la compréhension de cette démonstration, nous allons introduire plusieurs lemmes.

Lemme 5.1. Soient $a < b$ deux réels, pour toute application ϕ , C^1 sur $[a, b]$, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} \phi(n) &= \int_a^b \phi(x) dx + \int_a^b \left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}\right) \phi'(x) dx \\ &\quad + \left(a - \lfloor a \rfloor - \frac{1}{2}\right) \phi(a) - \left(b - \lfloor b \rfloor - \frac{1}{2}\right) \phi(b). \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $a < b$ des réels, et ϕ une fonction C^1 sur $[a, b]$. On peut alors remarquer que si l'égalité est vraie pour chaque élément d'une partition de $[a, b]$, alors par sommation elle est vraie pour $[a, b]$. On peut donc supposer pour la démonstration que l'on a l'inclusion $[a, b] \subsetneq [n, n+1]$ pour un certain entier n . Dans ce cas on a d'une part :

$$\sum_{a < n \leq b} \phi(n) = 0,$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} &\int_a^b \phi(x) dx + \int_a^b \left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}\right) \phi'(x) dx \\ &\quad + \left(a - \lfloor a \rfloor - \frac{1}{2}\right) \phi(a) - \left(b - \lfloor b \rfloor - \frac{1}{2}\right) \phi(b) \\ &= \int_a^b \phi(x) dx + \int_a^b \left(x - n - \frac{1}{2}\right) \phi'(x) dx \\ &\quad + \left(a - n - \frac{1}{2}\right) \phi(a) - \left(b - n - \frac{1}{2}\right) \phi(b) \\ &= \int_a^b \phi(x) dx + \left[\phi(x) \left(x - n - \frac{1}{2}\right)\right]_a^b \\ &\quad - \int_a^b \phi(x) dx + \left(a - n - \frac{1}{2}\right) \phi(a) - \left(b - n - \frac{1}{2}\right) \phi(b) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Lemme 5.2. *Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$, on a :*

$$\zeta(s) = -s \int_0^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx,$$

où la notation $\{x\}$ représente la partie fractionnaire de x .

Démonstration. Fixons $s \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(s) > 1$, alors nous avons dans ce cas $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$, utilisons alors le lemme 5.1 précédent pour exprimer zêta d'une nouvelle façon. Posons $a = 1$ et fixons b en tant qu'entier non nul. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^b \frac{1}{n^s} &= \int_1^b x^{-s} dx - s \int_1^b \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{x^{s+1}} dx - \frac{1}{2} + \frac{1}{2b^s} \\ &= \frac{1}{1-s} \left(\frac{1}{b^{s-1}} - 1 \right) - s \int_1^b \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx - \frac{1}{2} + \frac{1}{2b^s}. \end{aligned}$$

On fait alors tendre b vers $+\infty$, et on ajoute 1 de chaque côté afin d'obtenir, pour $\operatorname{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{2}.$$

Or, on s'aperçoit que le côté droit de l'égalité est bien défini et holomorphe en s dans tout le demi plan $\{\operatorname{Re}(s) > 0\}$. La fonction :

$$\begin{aligned} \Delta : \quad \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ s &\longmapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1} + s \int_1^{+\infty} \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

est donc holomorphe sur son ouvert de définition, et nulle sur l'ouvert $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 1\}$. Par principe d'unicité, Δ est donc la fonction nulle.

Ainsi on a pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > 0$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{2}.$$

Dans le cas particulier où l'on a $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$, les identités :

$$\int_0^1 \frac{[x] - x}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{2} = \frac{1}{s-1},$$

et

$$\frac{s}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{s+1}} = \frac{1}{2},$$

permettent l'écriture :

$$\begin{aligned}
 \zeta(s) &= \frac{1}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} dx + \frac{s}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{2} \\
 &= 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} dx \\
 &= \frac{s}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} dx \\
 &= s \int_0^1 \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x^{s+1}} dx + s \int_1^{+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x^{s+1}} dx \\
 &= s \int_0^{+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x^{s+1}} dx.
 \end{aligned}$$

Donc, pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$, on a :

$$\zeta(s) = s \int_0^{+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x^{s+1}} dx = -s \int_0^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx.$$

□

Lemme 5.3. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a la relation suivante :

$$\{x\} = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n\pi}.$$

Démonstration. Posons $f(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$. Nous allons effectuer le développement en série de Fourier de la fonction f . On remarque, tout d'abord, que la fonction f est 1-périodique et impaire. Donc on calcule uniquement les coefficients réels b_n du développement en série de Fourier. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
 b_n(f) &= \frac{2}{1} \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) \sin(2\pi nt) dt \\
 &= \int_0^1 (2t - 1) \sin(2\pi nt) dt \\
 &= \left[\frac{-(2t - 1) \cos(2\pi nt)}{2\pi n} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n} dt \\
 &= -\frac{1}{2\pi n} [\cos(2\pi n) + 1] + 0 \\
 &= -\frac{1}{n\pi}.
 \end{aligned}$$

On en déduit ainsi que la série de Fourier de la fonction f est :

$$S(f)(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n\pi}.$$

Comme la fonction f est de classe C^1 par morceaux, le théorème de Dirichlet permet d'obtenir la convergence de $S(f)$ vers f lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. $\square$

Lemme 5.4. *Pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(s) \in]-1, 0[$, on a :*

$$\int_0^\infty \frac{\sin(y)}{y^{s+1}} dy = -\Pi(-s-1) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right).$$

Démonstration. D'après la formule d'Euler appliquée à $\sin(y)$:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(y)}{y^{s+1}} dy = \frac{1}{2i} \left[\int_0^\infty y^{-s-1} e^{iy} dy - \int_0^\infty y^{-s-1} e^{-iy} dy \right].$$

Ensuite on effectue le changement de variable $u = -iy$ dans la première intégrale et $u = iy$ dans la seconde intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin(y)}{y^{s+1}} dy &= \frac{1}{2i} \left[\int_0^\infty i^{-s} u^{-s-1} e^{-u} du - \int_0^\infty (-i)^{-s} u^{-s-1} e^{-u} du \right] \\ &= \frac{i^{-s} - (-i)^{-s}}{2i} \Pi(-s-1). \end{aligned}$$

On observe que :

$$\begin{aligned} \frac{i^{-s} - (-i)^{-s}}{2i} &= \frac{\exp(-s \log(i)) - \exp(-s \log(-i))}{2i} \\ &= \frac{\exp\left(-is \frac{\pi}{2}\right) - \exp\left(is \frac{\pi}{2}\right)}{2i} \\ &= -\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right). \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^\infty \frac{\sin(y)}{y^{s+1}} dy = -\Pi(-s-1) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right).$$

$\square$

Nous avons tous les outils nécessaires afin de démontrer le théorème suivant :

Théorème 5.5. [Equation fonctionnelle de ζ] *Pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$,*

$$\zeta(s) = 2 \cdot (2\pi)^{s-1} \zeta(1-s) \Pi(-s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right).$$

Démonstration. Soit $s \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(s) \in]0; 1[$. On part du lemme 5.2 :

$$-\frac{\zeta(s)}{s} = \int_0^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du.$$

On effectue le changement de variable $u = 2v$ dans l'intégrale précédente pour obtenir :

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta(s)}{s} &= \int_0^\infty \frac{\{2v\}}{2^{s+1}v^{s+1}} 2dv \\ &= 2^{-s} \int_0^\infty \frac{\{2v\}}{v^{s+1}} dv. \end{aligned}$$

Ensuite, on calcule la différence suivante à l'aide du calcul précédent et du lemme 5.2 :

$$\begin{aligned} (2^s - 1) \frac{\zeta(s)}{s} &= \int_0^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du - \frac{\{2u\}}{u^{s+1}} du \\ &= \int_0^\infty \frac{\{u\} - \{2u\}}{u^{s+1}} du. \end{aligned}$$

On utilise le lemme 5.3. Cependant, ce lemme est valable lorsque u est non entier. Mais comme on ne change pas la valeur d'une intégrale en modifiant un nombre dénombrable de points, on peut bien appliquer ce lemme à $\{u\}$ et à $\{2u\}$. Il vient :

$$(2^s - 1) \frac{\zeta(s)}{s} = \int_0^\infty \frac{1}{u^{s+1}} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(4n\pi u) - \sin(2n\pi u)}{n\pi} du.$$

Les sommes partielles étant uniformément bornées, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour inverser les symboles $\sum$ et $\int$, donc :

$$(2^s - 1) \frac{\zeta(s)}{s} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\pi} \int_0^\infty \frac{1}{u^{s+1}} [\sin(4n\pi u) - \sin(2n\pi u)] du.$$

On effectue le changement de variable $t = 2n\pi u$ dans l'intégrale précédente pour obtenir :

$$\begin{aligned} (2^s - 1) \frac{\zeta(s)}{s} &= \sum_{n=1}^\infty \frac{(2n\pi)^s}{n\pi} \int_0^\infty \frac{1}{t^{s+1}} [\sin(2t) - \sin(t)] dt \\ &= 2^s \pi^{s-1} \zeta(1-s) \left[2^s \int_0^\infty \frac{\sin(2t)}{(2t)^{s+1}} d(2t) - \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t^{s+1}} dt \right] \\ (*) &= 2^s \pi^{s-1} \zeta(1-s) \left[-2^s \Pi(-s-1) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) + \Pi(-s-1) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \right] \\ &= -2^s \pi^{s-1} \zeta(1-s) (2^s - 1) \Pi(-s-1) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right), \end{aligned}$$

où l'égalité (*) provient de deux applications simultanées du lemme 5.4. La suite d'égalités précédente est valide a priori pour $\operatorname{Re}(s) \in]-1; 0[$, mais elle reste vraie pour $\operatorname{Re}(s) \in]0; 1[$ par prolongement analytique. On simplifie par $(2^s - 1)$ de chaque côté de l'égalité pour obtenir :

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= 2^s \pi s - 1 \zeta(1-s) \left[-s \Pi(-s-1) \right] \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \\ &= 2 \cdot (2\pi)^{s-1} \zeta(1-s) \Pi(-s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right),\end{aligned}$$

où la dernière simplification provient directement de la formule (3.8). $\square$

5.2. Seconde démonstration de l'équation fonctionnelle de ζ .

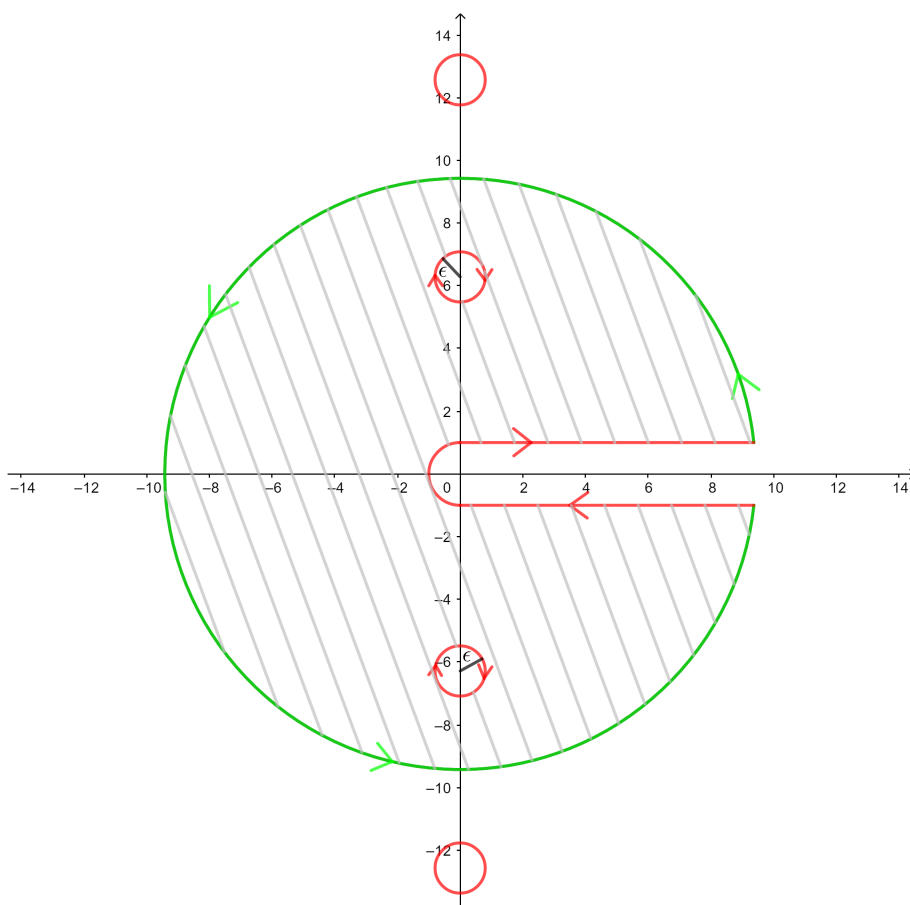
L'objectif de cette section est d'établir d'une nouvelle façon le théorème 5.5 : c'est-à-dire l'égalité valable pour $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$:

$$\zeta(s) = \Pi(-s) (2\pi)^{s-1} 2 \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \zeta(s-1).$$

Tout d'abord nous allons montrer cette égalité pour $s < 0$ réel, nous l'étendrons ensuite à l'ouvert considéré.

Fixons $s < 0$ un réel, et considérons une suite de domaines de $\mathbb{C}$ notée $(D_n)_{n \geq 0}$. Si on note D le complémentaire de l'union du ϵ -voisinage de $\mathbb{R}^+$ et des ϵ -voisinages des points $(2ik\pi)_{k \in \mathbb{Z}^*}$, alors D_n est défini comme l'intersection de D avec le disque ouvert de centre 0 et de rayon $(2n+1)\pi$, où $\epsilon > 0$ est fixé et arbitrairement petit. Le contour ∂D sera orienté dans le sens usuel (domaine délimité situé "à gauche" quand on parcourt ∂D).

Afin de mieux se visualiser ces domaines, nous nous appuierons sur un schéma de D_1 , mais le raisonnement restera valable pour tout entier positif n .



Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$, nous allons chercher à exprimer la quantité :

$$\frac{\Pi(-s)}{2i\pi} \int_{\partial D_n} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x}.$$

Pour ce faire, notons $V_n = \{x \in \partial D_n : |x| = (2n+1)\pi\}$ et $R_n = \partial D_n \setminus V_n$. Pour simplifier la notation intégrale, nous confondrons V_n et R_n avec leurs courbes orientées respectives (orientées dans le sens trigonométrique pour V_n et dans le sens inverse pour R_n , voir la figure ci-dessus).

Il est visuel que le domaine D_1 , et de façon générale tous les domaines D_n , peuvent être découpés en un nombre fini de sous domaines étoilés. L'intégrande étant holomorphe sur chacun d'eux, nous obtenons l'annulation :

$$\int_{\partial D_n} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = 0 = \int_{R_n} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} + \int_{V_n} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x}.$$

Observons alors le comportement de l'intégrale sur V_n . D'une part on remarque que $x \mapsto \frac{1}{e^x - 1}$ est continue sur V_n puisque cet ensemble ne

rencontre pas $2i\pi\mathbb{Z}$. Puisque V_n est compact, l'application est donc bornée. Or on peut montrer³ qu'il existe un majorant indépendant de l'entier n , cela fait intervenir l'étude précise de cette application, nous ne la détaillerons pas ici. Soit M ce majorant.

D'autre part on peut supposer $0 \geq -\epsilon \geq s$, ce qui permet la majoration :

$$\left| \frac{(-x)^s}{x} \right| = |x|^{s-1} \leq \frac{1}{|x|^{\epsilon+1}} = \frac{1}{((2n+1)\pi)^{\epsilon+1}}.$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \int_{V_n} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} \right| &\leq \int_{V_n} \left| \frac{1}{e^x - 1} \right| \cdot \left| \frac{(-x)^s}{x} \right| dx \\ &\leq \frac{2\pi M}{((2n+1)\pi)^{\epsilon+1}} (2n+1)\pi \\ &\leq 2M\pi \frac{1}{((2n+1)\pi)^\epsilon} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Ainsi puisque les intégrales sur V_n et R_n sont opposées, alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Pi(-s)}{2i\pi} \int_{R_n} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = 0.$$

Mais on peut remarquer que lorsque n tend vers $+\infty$, les ouverts délimités par les R_n tendent en croissant vers le domaine D évoqué en début de section. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Pi(-s)}{2i\pi} \int_{R_n} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = \frac{\Pi(-s)}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = 0.$$

On remarque alors que ∂D consiste en exactement deux parties, l'une étant le contour utilisé pour la définition de ζ orienté dans le sens opposé. L'autre est formée de tous les cercles de centre $2ik\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}^*$), et de rayon ϵ orientés dans le sens anti-trigonométrique. Cela se traduit par l'égalité :

$$-\zeta(s) - \sum_{n \geq 1} \frac{\Pi(-s)}{2i\pi} \int_{|x \pm 2in\pi| = \epsilon} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = 0.$$

Or l'intégrale sur l'un de ces cercle est une quantité que l'on peut exprimer de façon très simple.

Proposition 5.6. *Pour tout entier relatif n non nul, on a :*

$$\frac{\Pi(-s)}{2i\pi} \int_{|x - 2in\pi| = \epsilon} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = -\Pi(-s)(-2in\pi)^{s-1}.$$

3. Voir l'annexe en section 12.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}^*$, le changement de variable $y = x - 2in\pi$ donne :

$$\begin{aligned} \frac{\Pi(-s)}{2i\pi} \int_{|x-2in\pi|=\epsilon} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} &= \frac{\Pi(-s)}{2i\pi} \int_{|y|=\epsilon} \frac{(-y-2in\pi)^s}{e^{y+2in\pi} - 1} \frac{dy}{y+2in\pi} \\ &= \frac{\Pi(-s)}{2i\pi} \int_{|y|=\epsilon} \frac{y(-y-2in\pi)^{s-1}}{e^y - 1} \frac{1}{y-0} dy. \end{aligned}$$

On remarque alors que l'application $y \mapsto \frac{y(-y-2in\pi)^{s-1}}{e^y - 1}$ est holomorphe sur le disque de centre 0 et de rayon ϵ , avec ϵ pouvant être supposé suffisamment petit pour que le disque ne rencontre pas $2i\pi\mathbb{Z}$. En effet l'unique singularité potentielle se situe en 0, et est illusoire puisque $\frac{y(-y-2in\pi)^{s-1}}{e^y - 1} \xrightarrow{y \rightarrow 0} (-2in\pi)^{s-1}$. Ainsi la formule intégrale de Cauchy donne :

$$\frac{\Pi(-s)}{2i\pi} \int_{|y|=\epsilon} \frac{y(-y-2in\pi)^{s-1}}{e^y - 1} \frac{1}{y-0} dy = -\Pi(-s)(-2in\pi)^{s-1}.$$

□

Par conséquent, on peut exprimer $\zeta(s)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= - \sum_{n \geq 1} \frac{\Pi(-s)}{2i\pi} \int_{|x \pm 2in\pi|=\epsilon} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} \\ &= - \sum_{n \geq 1} [- \Pi(-s)(-2in\pi)^{s-1} - \Pi(-s)(2in\pi)^{s-1}] \\ &= \Pi(-s) \sum_{n \geq 1} [(-2in\pi)^{s-1} + (2in\pi)^{s-1}] \\ &= \Pi(-s)(2\pi)^{s-1} [(-i)^{s-1} + i^{s-1}] \sum_{n \geq 1} n^{s-1}. \end{aligned}$$

Or d'une part $s-1 < -1$ donc $\sum_{n \geq 1} n^{s-1} = \zeta(1-s)$. D'autre part on a :

$$\begin{aligned} (-i)^{s-1} + i^{s-1} &= \frac{1}{i} [i^s - (-i)^s] = \frac{1}{i} [e^{s \log(i)} - e^{s \log(-i)}] = 2 \frac{e^{i \frac{s\pi}{2}} - e^{-i \frac{s\pi}{2}}}{2i} \\ &= 2 \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

On obtient finalement la formule voulue, pour tout $s < 0$:

$$\zeta(s) = \Pi(-s)(2\pi)^{s-1} 2 \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \zeta(s-1).$$

Il nous reste à présent à étendre cette égalité à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. Pour ce faire posons la fonction :

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{C} \setminus \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ s &\longmapsto \zeta(s) - \Pi(-s)(2\pi)^{s-1} 2 \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \zeta(1-s). \end{aligned}$$

Cette fonction est holomorphe sur l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, de plus celle-ci est nulle sur $\mathbb{R}^-$. Le principe d'unicité implique donc directement la nullité de Δ sur tout l'ouvert.

Finalement, pour tout s de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$:

$$\zeta(s) = \Pi(-s)(2\pi)^{s-1} 2 \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \zeta(s-1).$$

Cette égalité est appelée *équation fonctionnelle de la fonction zêta de Riemann*.

Cette égalité concorde avec les identités de la section 4.2. En effet, si l'on reprend l'égalité de la proposition 4.6 : $\zeta(-(2n-1)) = (-1)^{2n-1} \frac{B_{2n}}{2n}$, l'équation fonctionnelle se réécrit :

$$(-1)^{2n-1} \frac{B_{2n}}{2n} = \Pi(2n-1)(2\pi)^{-2n} 2 (-1)^n \zeta(2n),$$

et donc :

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!},$$

comme cela a été vu en section 4.2.

On peut également utiliser les égalités (3.9) et (3.10) :

$$\frac{\pi s}{\Pi(s)\Pi(-s)} = \sin(\pi s),$$

et

$$\Pi(s) = 2^s \Pi\left(\frac{s}{2}\right) \Pi\left(\frac{s-1}{2}\right) \pi^{-\frac{1}{2}},$$

provenant de la section 3. La substitution dans l'équation fonctionnelle permet alors d'obtenir :

$$\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \Pi\left(\frac{1-s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{1-s}{2}} \zeta(1-s).$$

On observe une importante symétrie dans la formule ci-dessus : celle-ci sera bien mieux mise en valeur dans la démonstration suivante.

5.3. Troisième démonstration de l'équation fonctionnelle de ζ .

Commençons par remarquer que pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{1}{n^s} \pi^{-\frac{s}{2}} \Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n^s} \pi^{-\frac{s}{2}} e^{-x} x^{\frac{s}{2}-1} dx.$$

Alors le changement de variable $x = n^2 \pi t$ permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^s} \pi^{-\frac{s}{2}} \Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{n^s} \pi^{-\frac{s}{2}} e^{-n^2 \pi t} n^{s-2} \pi^{\frac{s}{2}-1} t^{\frac{s}{2}-1} n^2 \pi dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-n^2 \pi t} t^{\frac{s}{2}-1} dt. \end{aligned}$$

En sommant sur $\mathbb{N}^*$, nous obtenons :

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-n^2 \pi t} t^{\frac{s}{2}-1} dt.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'application $t \mapsto |e^{-n^2 \pi t} t^{\frac{s}{2}-1}| = e^{-n^2 \pi t} t^{\frac{\operatorname{Re}(s)}{2}-1}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, la décroissance de l'exponentielle permettra alors d'assurer la convergence uniforme de la série, afin de permettre l'échange série intégrale.

On obtient ainsi l'expression valable pour $\operatorname{Re}(s) > 1$:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \zeta(s) = \int_0^{+\infty} \psi(x) x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x},$$

où ψ est définie par $\psi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \pi x}$ et est appelée *fonction thêta*.

Ainsi l'équation fonctionnelle de ζ sous sa forme symétrique revient au fait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(x) x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x}$ est laissée invariante par le changement de s en $1 - s$.

Afin de démontrer ce fait, nous allons utiliser l'équation fonctionnelle de thêta sous une forme due à Jacobi :

$$\frac{1 + 2\psi(x)}{1 + 2\psi\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Cette égalité résulte des liens entre les fonctions $x \mapsto e^{-n^2 \pi x}$ et leurs transformées de Fourier ainsi que de l'usage de la formule sommatoire de Poisson. Cela ne sera pas détaillé ici.

Un autre fait qui nous sera utile est la proposition suivante :

Proposition 5.7. *La fonction ψ décroît vers 0 en $+\infty$ plus rapidement que n'importe quel polynôme. Plus précisément, pour tout $a > 0$:*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a \psi(x) = 0.$$

Démonstration. Soit $a > 0$, on peut supposer $x \in [A, +\infty[$ où A est un réel positif défini de sorte que l'on ait $\log(x) \leq \frac{1}{2a}x$ pour tout $x \geq A$. On a :

$$\begin{aligned} 0 \leq x^a \psi(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \pi x + a \log(x)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \pi x + \frac{1}{2}x} \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \pi x + \frac{n^2 \pi}{2}x} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{2}x}. \end{aligned}$$

Or cette dernière série de fonctions converge normalement sur $[A, +\infty[$: en effet le supremum des applications $x \mapsto e^{-\frac{n^2 \pi}{2}x}$ sur $[A, +\infty[$ est atteint en A et la série $\sum_{n \geq 1} e^{-\frac{n^2 \pi}{2}A}$ converge car majorée par la série géométrique convergente $\sum_{n \geq 1} e^{-\frac{n \pi}{2}A}$.

Par conséquent on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{2}x} = 0$. Donc il vient $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a \psi(x) = 0$, et en conclusion, pour tout $a > 0$:

$$\psi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^a}\right). \quad \square$$

Revenons en à l'intégrale qui nous intéresse :

$$\int_0^{+\infty} \psi(x) x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x}.$$

Et restreignons nous aux valeurs réelles de s , en particulier $s > 1$. La proposition 5.7, ainsi que l'équation fonctionnelle vérifiée par ψ montrent en particulier l'existence de cette intégrale.

Proposition 5.8. *L'intégrale suivante :*

$$\int_0^{+\infty} \psi(x) x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x},$$

est bien définie.

Démonstration. L'équation fonctionnelle de ψ se réécrit :

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right] + \frac{\psi\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}.$$

Ainsi si l'on considère x au voisinage de 0 suffisamment petit pour que $\frac{1}{\sqrt{x}} - 1$ ne s'annule pas, alors on a :

$$\frac{\psi(x)}{\frac{1}{2}[\frac{1}{\sqrt{x}} - 1]} = 1 + \frac{\psi(\frac{1}{x})}{\frac{\sqrt{x}}{2}[\frac{1}{\sqrt{x}} - 1]} = 1 + 2 \frac{\psi(\frac{1}{x})}{1 - \sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Donc $\psi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}[\frac{1}{\sqrt{x}} - 1]$, ce qui implique :

$$\psi(x)x^{\frac{s}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} \frac{1}{x^{\frac{3-s}{2}}} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^{1-\frac{s}{2}}}.$$

Or pour les valeurs de s considérées, on a $\frac{3-s}{2} < 1$ et $1 - \frac{s}{2} < 1$, donc le critère de Riemann donne la convergence de l'intégrale en 0.

Pour ce qui est de la convergence en $+\infty$, le paramètre réel s étant toujours fixé, la proposition 5.7 donne en particulier $\psi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\frac{1}{x^s})$.

Ainsi $\psi(x)x^{\frac{s}{2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\frac{1}{x^{1+\frac{s}{2}}})$, là aussi le critère de Riemann permet de conclure. $\square$

Ces considérations étant faites, tâchons de reformuler notre intégrale via un changement de variable, puis en faisant intervenir l'équation fonctionnelle de ψ .

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \psi(x)x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} &= \int_1^{+\infty} \psi(x)x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} + \int_0^1 \psi(x)x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} \\ &= \int_1^{+\infty} \psi(x)x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} - \int_{+\infty}^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{-\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} \\ &= \int_1^{+\infty} \psi(x)x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty} \left(\sqrt{x}\psi(x) + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2}\right)x^{-\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} \\ &= \int_1^{+\infty} \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right) \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \left(x^{-\frac{s-1}{2}} - x^{-\frac{s}{2}}\right) \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Or pour tout $a > 0$, $\int_1^{+\infty} x^{-a} \frac{dx}{x} = \frac{1}{a}$, donc on a :

$$\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \left(x^{-\frac{s-1}{2}} - x^{-\frac{s}{2}}\right) \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{s-1} - \frac{2}{s}\right) = \frac{1}{s(s-1)}.$$

Finalement, pour $s > 1$ on obtient :

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_0^{+\infty} \psi(x)x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} = \int_1^{+\infty} \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right) \frac{dx}{x} - \frac{1}{s(1-s)}.$$

Mais au vu de la décroissance de $\psi(x)$ en l'infini que l'on a montrée précédemment, l'intégrale est toujours convergente pour toutes les valeurs complexes de s .

Ainsi l'équation $\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_1^{+\infty} \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right)\frac{dx}{x} - \frac{1}{s(1-s)}$ se prolonge sur $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, les deux cotés de l'égalité étant holomorphes en la variable s .

Le membre droit de l'égalité étant inchangé par la substitution de s en $1 - s$, on a finalement l'équation fonctionnelle de la fonction ζ de Riemann :

$$\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \Pi\left(\frac{1-s}{2} - 1\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s).$$

Dans son étude, Riemann poursuit en exploitant la symétrie de la formule ci-dessus afin de définir une nouvelle fonction appelée ξ .

6. LA FONCTION ξ

6.1. Introduction.

La fonction $s \mapsto \Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$ qui apparaît dans la forme symétrique de l'équation fonctionnelle admet des pôles en $s = 0$ et $s = 1$. Cela est une conséquence de l'expression montrée en fin de section précédente :

$$\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_1^{+\infty} \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right) \frac{dx}{x} - \frac{1}{s(1-s)}.$$

En effet, comme nous l'avons vu, l'intégrale converge pour toute valeur complexe de s . Ainsi les pôles en 0 et en 1 sont introduits par le dernier terme de l'expression.

Lors de ses recherches, Riemann a multiplié cette expression par le facteur $\frac{s(s-1)}{2}$, supprimant ainsi ces pôles.

Definition 6.1. La fonction ξ est définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\xi(s) := \Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s).$$

Une fois cette fonction posée, l'équation fonctionnelle de zêta revient à l'égalité :

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

A partir de là, Riemann effectue des intégrations par parties, et réutilise l'équation fonctionnelle de thêta afin d'obtenir une nouvelle expression de $\xi(s)$, en partant de celle obtenue en section précédente. Ainsi :

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \frac{1}{2} + \frac{s(s-1)}{2} \int_1^{+\infty} \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right) \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{s(s-1)}{2} \left[\psi(x) \left(\frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2} \right) \right]_1^{+\infty} \\ &\quad - \frac{s(s-1)}{2} \int_1^{+\infty} \psi'(x) \left(\frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2} \right) dx. \end{aligned}$$

Là encore la décroissance de ψ en l'infini, démontrée en section précédente, s'applique. On obtient alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) \left(\frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2} \right) = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \xi(s) &= \frac{1}{2} - \frac{s(s-1)}{2} \psi(1) \left(\frac{2}{s} + \frac{2}{1-s} \right) \\
 &\quad - \frac{s(s-1)}{2} \int_1^{+\infty} \psi'(x) \left(\frac{2}{s} x^{\frac{s}{2}} + \frac{2}{1-s} x^{\frac{1-s}{2}} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{s(s-1)}{2} \psi(1) \left(\frac{2}{s} + \frac{2}{1-s} \right) \\
 &\quad - \int_1^{+\infty} \psi'(x) \left((s-1)x^{\frac{s}{2}} - sx^{\frac{1-s}{2}} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} + \psi(1) + \int_1^{+\infty} x^{\frac{3}{2}} \psi'(x) \left((1-s)x^{\frac{s-1}{2}-1} + sx^{-\frac{s}{2}-1} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} + \psi(1) + \left[x^{\frac{3}{2}} \psi'(x) \left(-2x^{\frac{s-1}{2}} - 2x^{-\frac{s}{2}} \right) \right]_1^{+\infty} \\
 &\quad + \int_1^{+\infty} \frac{d}{dx} [x^{\frac{3}{2}} \psi'(x)] (2x^{\frac{s-1}{2}} + 2x^{-\frac{s}{2}}) dx.
 \end{aligned}$$

A ce stade, nous pouvons préciser qu'une majoration de la série $\sum_{n \geq 1} n^2 e^{-n^2 \pi x}$ sur $[1, +\infty[$ par la série $\sum_{n \geq 1} n^2 e^{-n^2 \pi}$ qui est convergente et indépendante de x , permet de justifier que l'on a la dérivée terme à terme $\psi'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \pi e^{-n^2 \pi x}$. Des manipulations similaires à celles déjà effectuées sur ψ en section précédente permettent alors de justifier que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \psi'(x) [-2x^{\frac{s-1}{2}} - 2x^{\frac{s}{2}}] = 0$.

Reprenons alors le développement :

$$\begin{aligned}
 \xi(s) &= \frac{1}{2} + \psi(1) + [0 - \psi'(1)(-2 - 2)] \\
 &\quad + \int_1^{+\infty} \frac{d}{dx} [x^{\frac{3}{2}} \psi'(x)] (2x^{\frac{s-1}{2}} + 2x^{-\frac{s}{2}}) dx \\
 &= \frac{1}{2} + \psi(1) + 4\psi'(1) + \int_1^{+\infty} \frac{d}{dx} [x^{\frac{3}{2}} \psi'(x)] (2x^{\frac{s-1}{2}} + 2x^{-\frac{s}{2}}) dx.
 \end{aligned}$$

A présent dérivons l'équation fonctionnelle de thêta, à savoir :

$$1 + 2\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1 + 2\psi\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

On obtient alors :

$$2\psi'(x) = \frac{-2\psi'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x} - (1 + 2\psi\left(\frac{1}{x}\right))\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}.$$

L'évaluation en 1 et la simplification donnent alors :

$$4\psi'(1) + \psi(1) + \frac{1}{2} = 0.$$

On reprend alors l'expression de $\xi(s)$:

$$\begin{aligned}\xi(s) &= \int_1^{+\infty} \frac{d}{dx} [x^{\frac{3}{2}} \psi'(x)] (2x^{\frac{s-1}{2}} + 2x^{-\frac{s}{2}}) dx \\ &= 2 \int_1^{+\infty} \frac{d}{dx} [x^{\frac{3}{2}} \psi'(x)] x^{-\frac{1}{4}} (e^{\frac{2s-1}{4} \log(x)} + e^{\frac{-2s+1}{4} \log(x)}) dx \\ &= 4 \int_1^{+\infty} \frac{d}{dx} [x^{\frac{3}{2}} \psi'(x)] x^{-\frac{1}{4}} \cosh\left(\frac{2s-1}{4} \log(x)\right) dx.\end{aligned}$$

Finalement on obtient l'expression :

$$\xi(s) = 4 \int_1^{+\infty} \frac{d}{dx} [x^{\frac{3}{2}} \psi'(x)] x^{-\frac{1}{4}} \cosh\left(\frac{1}{2} \left(s - \frac{1}{2}\right) \log(x)\right) dx.$$

Ou comme Riemann l'exprimait :

$$\xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = 4 \int_1^{+\infty} \frac{d}{dx} [x^{\frac{3}{2}} \psi'(x)] x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{t}{2} \log(x)\right) dx.$$

Si l'on développe $\cosh\left(\frac{1}{2} \left(s - \frac{1}{2}\right) \log(x)\right)$ en série entière, alors on peut justifier que l'on a :

$$\begin{aligned}\xi(s) &= 4 \int_1^{+\infty} \frac{d}{dx} [x^{\frac{3}{2}} \psi'(x)] x^{-\frac{1}{4}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{4^n} \left(s - \frac{1}{2}\right)^{2n} (\log(x))^{2n} \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(4 \int_1^{+\infty} \frac{d}{dx} [x^{\frac{3}{2}} \psi'(x)] x^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{4^n} (\log(x))^{2n} dx \right) \left(s - \frac{1}{2}\right)^{2n}.\end{aligned}$$

Il est donc finalement possible d'exprimer $\xi(s)$ comme :

$$\xi(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} \left(s - \frac{1}{2}\right)^{2n},$$

avec

$$a_{2n} = 4 \int_1^{+\infty} \frac{d}{dx} [x^{\frac{3}{2}} \psi'(x)] x^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{4^n} (\log(x))^{2n} dx.$$

A ce stade, Riemann stipule que cette représentation de $\xi(s)$ sous forme de série converge "très rapidement". Mais il ne donna aucune estimation explicite de cette vitesse de convergence. Il ne donna pas non plus d'indications quant au rôle que jouerait cette série dans ses développements futurs.

Par la suite le but de Riemann fut de montrer que $\xi(s)$ peut s'écrire sous forme d'un produit infini :

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right),$$

où ρ prend successivement les valeurs des racines de l'équation $\xi(\rho) = 0$, comptées avec multiplicité.

Tout polynôme $p(s)$ peut être écrit comme un produit infini $p(s) = p(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$ où ρ prend les valeurs des racines du polynôme p comptées avec multiplicité, excepté si $p(0) = 0$, l'expression est légèrement différente dans ce cas.

Ainsi la formule produit $\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$ revient à stipuler que " $\xi(s)$ se comporte comme un polynôme de degré infini" (de façon similaire Euler pensait le sinus comme un "polynôme de degré infini" lorsqu'il a conjecturé, et finalement démontré l'expression :

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

D'un autre côté, le postulat que la représentation de $\xi(s)$ en série converge "très rapidement" revient aussi au fait de considérer $\xi(s)$ comme "un polynôme de degré infini", d'ailleurs un nombre fini de termes donne une très bonne approximation dans toute partie finie du plan complexe. Par conséquent il y a un lien entre la représentation de $\xi(s)$ en série et celle en produit infini. En fait c'est précisément la décroissance rapide des coefficients a_{2n} que Hadamard a prouvé en 1893 comme étant nécessaire et suffisante pour garantir la validité de la représentation de $\xi(s)$ en produit infini. Mais les étapes par lesquelles Riemann est passé de l'un à l'autre restent pour le moins obscures.

Dans la prochaine section nous allons discuter de la répartition des racines ρ de $\xi(\rho) = 0$ dans le plan complexe, et dans la suivante nous reviendrons sur la représentation de $\xi(s)$ en produit infini.

6.2. Les racines ρ de ξ et l'hypothèse de Riemann.

Pour montrer la convergence du produit $\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$, Riemann a dû se poser la question de la répartition des racines ρ de l'équation $\xi(\rho) = 0$ dans le plan complexe. Pour cela il commence par observer la formule produit d'Euler (section 1) valable pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1},$$

où p prend successivement les valeurs des nombres premiers.

Proposition 6.2. *Le produit infini ci-dessus est absolument convergent.*

Démonstration. Pour p un nombre premier, on a $\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s-1}$. Or

$$\left| \frac{1}{p^s - 1} \right| \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{|p^s|} = \frac{1}{p^{\operatorname{Re}(s)}}.$$

Et la série sur les nombres premiers $\sum_p^{+\infty} \frac{1}{p^{\operatorname{Re}(s)}}$ converge bien car elle est majorée par $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(s)}}$. $\square$

Ainsi, puisque aucun des termes du produit n'est nul, alors $\zeta(s)$ est non nulle dans le demi plan $\{\operatorname{Re}(s) > 1\}$.

Puisque dans l'expression $\xi(s) = \Pi(\frac{s}{2})(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$, les facteurs autres que $\zeta(s)$ n'ont qu'un zéro en $s = 1$, alors il n'y a aucune racine ρ de $\xi(\rho) = 0$ dans le demi plan $\{\operatorname{Re}(s) > 1\}$.

Puisque ρ est une racine si et seulement si $1 - \rho$ en est une également, alors toutes les racines ρ de $\xi(\rho) = 0$ sont sur la bande $\{0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1\}$.

Ce constat fait, Riemann stipule ensuite que le nombre de racines ρ dont la partie imaginaire se situe entre 0 et un réel T est de environ :

$$\frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi},$$

avec une erreur relative de $\frac{1}{T}$.

Sa "preuve" de ce fait consiste simplement à dire que le nombre de racines dans cette région est égal à :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds,$$

où γ désigne la courbe fermée parcourant la frontière de l'ensemble $\{s \in \mathbb{C} : (0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1) \wedge (0 \leq \operatorname{Im}(s) \leq T)\}$; et que celle-ci vaut la valeur annoncée avec une erreur relative de $\frac{1}{T}$. Malheureusement Riemann ne donna aucun indice sur la façon d'évaluer cette intégrale. C'était un maître dans l'évaluation et l'estimation d'intégrales. Il est donc possible qu'il ait estimé que ses lecteurs seraient capables d'en faire de même. Mais si telle était sa pensée, il était dans le faux jusqu'en 1905, où von Mangoldt prouva que l'estimation de Riemann était bien correcte.

La prochaine affirmation de Riemann est encore bien plus déconcertante. Il avança que le nombre de racines sur la droite $\{\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}\}$ est aussi de "environ" $\frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi}$. Il ne précisa pas en quel sens cette estimation était vraie, mais il est généralement admis qu'il a voulu signifier que l'erreur relative sur le nombre de zéros de $\xi(\frac{1}{2} + it)$ pour $0 \leq t \leq T$ tend vers 0 quand T tend vers l'infini. Il ne donna là encore aucune indication pouvant mener à une preuve, et depuis, personne n'a pu affirmer ou infirmer ce résultat. Il a été montré en 1914 par Hardy que $\xi(\frac{1}{2} + it)$ admet une infinité de racines

réelles. En 1921, Hardy et Littlewood ont montré que le nombre de racines réelles situées entre 0 et T est d'au moins KT pour T assez grand et une certaine constante positive K . En 1942, Selberg montre que ce nombre est en réalité de au moins $KT \log(T)$ pour K une certaine constante positive et T assez grand. Il a également été montré en 1914 par Bohr et Landau que le nombre de racines complexes t de $\xi(\frac{1}{2} + it) = 0$ dans l'ensemble $\{t \in \mathbb{C} : (0 \leq \operatorname{Re}(t) \leq T) \wedge (-\epsilon \leq \operatorname{Im}(t) \leq \epsilon)\}$, c'est à dire les racines complexes ρ de $\xi(\rho) = 0$ dans l'ensemble $\{\rho \in \mathbb{C} : (\frac{1}{2} - \epsilon \leq \operatorname{Re}(\rho) \leq \frac{1}{2} + \epsilon) \wedge (0 \leq \operatorname{Im}(\rho) \leq T)\}$ est de $\frac{T}{2\pi} \log(\frac{T}{2\pi}) - \frac{T}{2\pi}$, avec une erreur relative qui approche 0 lorsque T devient grand, et ce, quel que soit ϵ strictement positif. Mais ces résultats partiels restent loin du postulat de Riemann. On peut seulement deviner ce qui se cache derrière ce postulat, mais nous savons que cela a amené Riemann à conjecturer une affirmation bien plus forte : toutes les racines se trouvent sur la droite $\{\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}\}$.

Il s'agit là de la célèbre *hypothèse de Riemann*. Il a déclaré qu'il considérait "très probable" le fait que toutes les racines soient sur cette droite, mais qu'il n'était pas capable de le démontrer, ce qui pourrait laisser penser qu'il pressentait une preuve rigoureuse de ses deux affirmations précédentes. Comme cela n'était pas nécessaire à son principal but : trouver une preuve de sa formule sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une quantité donnée, il n'a pas poussé d'avantage les investigations et a laissé les choses au point où elles en sont toujours (hélas) aujourd'hui, et repassa à l'expression produit de $\xi(s)$.

6.3. La formule produit de ξ .

Un thème récurrent dans les travaux de Riemann est la caractérisation globale des fonctions holomorphes par leurs singularités. Comme la fonction $s \mapsto \log \xi(s)$ a uniquement des singularités logarithmiques en les racines ρ de $\xi(\rho) = 0$, alors elle a les mêmes singularités que l'application :

$$s \mapsto \sum_{\rho} \log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right).$$

Ainsi, si cette série converge bien, et se comporte, pour s au voisinage de $+\infty$, de la même façon que $\log \xi(s)$, alors la différence des deux fonctions est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier et bornée, donc constante (d'après le théorème de Liouville). Une constante que l'évaluation de part et d'autre en $s = 0$ donne comme étant égale à $\xi(0)$. Ainsi, le passage à l'exponentielle donne alors pour tout s de $\mathbb{C}$:

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right),$$

telle que voulue. C'est sur ce cheminement que Riemann élabore sa démonstration.

Mais cela pose deux problèmes avec la série $\sum_{\rho} \log(1 - \frac{s}{\rho})$. Le premier concerne la détermination du logarithme. En effet sa partie imaginaire est l'argument de la variable, or pour les valeurs réelles négatives, celui-ci est mal défini : faut-il le fixer à π ou à $-\pi$? Riemann passa outre sans laisser de commentaires, et effectivement cela ne pose pas de réels problèmes puisque pour tout s différent des racines ρ , la quantité $1 - \frac{s}{\rho}$ n'est plus réelle négative à partir d'un certain ρ . Quant aux quelques termes pour lesquels il y a ambiguïté, celle-ci disparaît à l'exponentiation. De plus, les parties imaginaires peuvent tout à fait être ignorées. En effet, les parties réelles des logarithmes ne souffrent d'aucune ambiguïté, et la somme de ces parties réelles définit une fonction harmonique. La fonction $s \mapsto \operatorname{Re}(\log(\xi(s)))$ est également harmonique en tant que partie réelle d'une fonction holomorphe. Ainsi la différence des deux est une fonction harmonique également : fonction qui n'a plus de singularités. Par conséquent, si cette fonction "différence des parties réelles" peut être montrée comme étant constante, alors la différence des parties imaginaires, c'est-à-dire son conjugué harmonique, sera constant également.

Le second problème de cette série de logarithmes est sa convergence. En effet la nature de celle-ci (convergente ou divergente) dépend de l'ordre de sommation des racines ρ . L'ordre naturel serait alors par module $|\rho|$ croissant, ou encore par $|\rho - \frac{1}{2}|$ croissant, mais en fait il suffit dans notre cas de ranger les racines par paires $(\rho, 1 - \rho)$ pour assurer la convergence. On s'intéresse alors à la série :

$$\sum_{\operatorname{Im} \rho > 0} \left[\log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) + \log\left(1 - \frac{s}{1 - \rho}\right) \right].$$

Pour montrer sa convergence, on l'exprime de la façon suivante :

$$\sum_{\operatorname{Im} \rho > 0} \left[\log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) + \log\left(1 - \frac{s}{1 - \rho}\right) \right] = \sum_{\operatorname{Im} \rho > 0} \log \left[1 - \frac{s(1 - s)}{\rho(1 - \rho)} \right].$$

Il suffit alors de démontrer la convergence absolue de la série :

$$\sum_{\operatorname{Im} \rho > 0} \frac{1}{\rho(1 - \rho)}.$$

Mais l'estimation de la répartition des racines ρ donnée en section précédente donne :

$$d\left(\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} dT.$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\text{Im } \rho > 0} \frac{1}{\rho(1-\rho)} &\sim \int^{+\infty} \frac{1}{T^2} \frac{1}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} dT \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int^{+\infty} \frac{\log(u)}{u^2} \\
 &= -\frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{\log(u)}{u} \right]^{+\infty} + \frac{1}{4\pi^2} \int^{+\infty} \frac{du}{u^2} \\
 &< +\infty.
 \end{aligned}$$

C'est-à-dire que les termes se comportent comme $\frac{1}{T^2}$ et se répartissent avec une densité en $\log(T)$, donc comme vu ci-dessus, leur somme converge. La seule difficulté sérieuse dans cette démonstration proposée par Riemann est d'établir la densité verticale des racines ρ comme étant $\log(\frac{T}{2\pi})$ fois une constante. Riemann postulat ce fait comme étant vrai sans preuve.

Alors Riemann poursuit en disant que la fonction de s :

$$\sum_{\text{Im } \rho > 0} \log \left[1 - \frac{s(1-s)}{\rho(1-\rho)} \right],$$

croît aussi vite que l'application $s \mapsto s \log(s)$ lorsque s est grand. Puisqu'elle diffère de $\log(\xi(s))$ par une fonction paire de la variable $s - \frac{1}{2}$, et comme $\log(\xi(s))$ croît également de la même façon que $s \mapsto s \log(s)$ pour s grand, cette différence doit être constante puisqu'elle ne peut contenir de puissance paire de $s - \frac{1}{2}$.

La formule produit de $\xi(s)$ sera démontrée pour la première fois en 1893 par Hadamard.

7. LA CONNEXION ENTRE LA FONCTION ζ ET LES NOMBRES PREMIERS

La relation essentielle entre la fonction ζ et les nombres premiers est la formule produit d'Euler (démontrée en section 1) :

$$(7.1) \quad \zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

définie lorsque $\operatorname{Re}(s) > 1$.

En passant au log dans la formule (7.1), on obtient :

$$\log \zeta(s) = - \sum_p \log(1 - p^{-s}).$$

Comme $|p^{-s}| < 1$, on peut utiliser le développement en série entière de la fonction $u \mapsto \log(1 - u)$ pour avoir :

$$\log \zeta(s) = \sum_p \sum_n \frac{1}{n} p^{-ns}.$$

La double série ci-dessus est absolument convergente, donc le théorème de Fubini permet d'inverser les deux séries :

$$(7.2) \quad \log \zeta(s) = \sum_n \sum_p \frac{1}{n} p^{-ns}.$$

On va définir une nouvelle fonction appelée J , qui va intervenir à de multiples reprises dans la suite des sections et en particulier dans la formule principale de Riemann (suspense !).

Definition 7.3. [La fonction J] Pour tout $x \geq 0$, on définit :

$$J(x) := \frac{1}{2} \left[\sum_{p^n < x} \frac{1}{n} + \sum_{p^n \leq x} \frac{1}{n} \right].$$

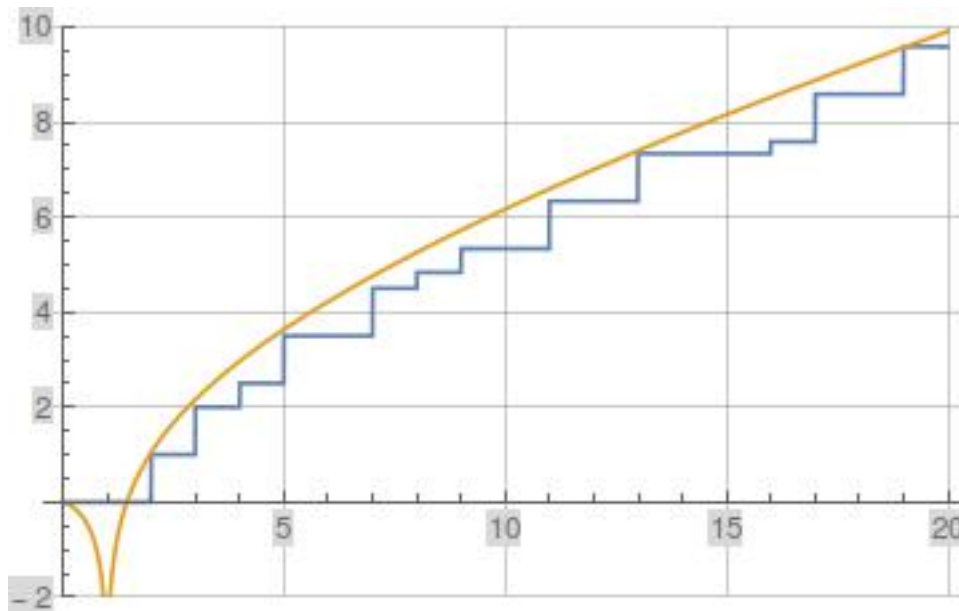
La fonction J commence à 0 en $x = 0$ et augmente par un saut de 1 à chaque nombre premier p ; par un saut de $\frac{1}{2}$ à chaque premier au carré (p^2); par un saut de $\frac{1}{3}$ à chaque premier au cube (p^3); etc... C'est-à-dire dans le cas général, par un saut de $\frac{1}{n}$ à chaque nombre premier à la puissance n (p^n). La valeur entre chaque saut est définie par la moitié entre l'ancienne valeur et la nouvelle valeur (ce qui explique le facteur $\frac{1}{2}$ dans la définition de la fonction J).

Nous pouvons ainsi déterminer les premières valeurs de la fonction J :

— $J(x) = 0$ pour $0 \leq x < 2$;

- $J(x) = \frac{1}{2}$ pour $x = 2$;
- $J(x) = 1$ pour $2 < x < 3$;
- $J(x) = 1.5$ pour $x = 3$;
- $J(x) = 2$ pour $3 < x < 4$;
- $J(x) = 2.25$ pour $x = 4$;
- $J(x) = 2.5$ pour $4 < x < 5$;
- $J(x) = 3$ pour $x = 5$;
- $J(x) = 3.5$ pour $5 < x < 7$;
- etc...

Le graphique de la fonction J est tracé en bleu ci-dessous sur l'intervalle $[0; 20]$:



Nous remarquerons que les valeurs intermédiaires à chaque saut ne sont pas dessinées clairement sur le graphique. Notre objectif va être d'intégrer cette fonction J : ainsi ces valeurs intermédiaires ne vont pas avoir d'influence par la suite, car on ne change pas la valeur d'une intégrale en modifiant un nombre dénombrable de points. En orange, nous avons tracé le graphique de la fonction logarithme intégral (notée Li) : cette fonction va jouer, elle aussi, un rôle essentiel dans la formule principale de Riemann ! Il existe une autre définition de la fonction J qui est bien sûr équivalente à la première et qui va nous servir dans la suite :

Lemme 7.4. *Pour tout $x \geq 0$, on a :*

$$J(x) = \sum_n \frac{\pi(x^{1/n})}{n},$$

où $\pi(x^{1/n})$ représente le nombre de nombres premiers entre 0 et $x^{1/n}$. De plus, la série ci-dessus est en réalité une somme finie car pour tout $x \geq 0$, on a $\pi(x^{1/n}) = 0$ pour n suffisamment grand.

Riemann a montré la relation suivante entre $\log \zeta$ et la fonction J :

Proposition 7.5. *Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Re}(s) > 1$, on a :*

$$\log \zeta(s) = s \int_0^\infty J(x) x^{-s-1} dx.$$

Démonstration. Tout d'abord, on observe que :

$$p^{-ns} = s \int_{p^n}^\infty x^{-s-1} dx.$$

On utilise cette observation dans la formule (7.2) :

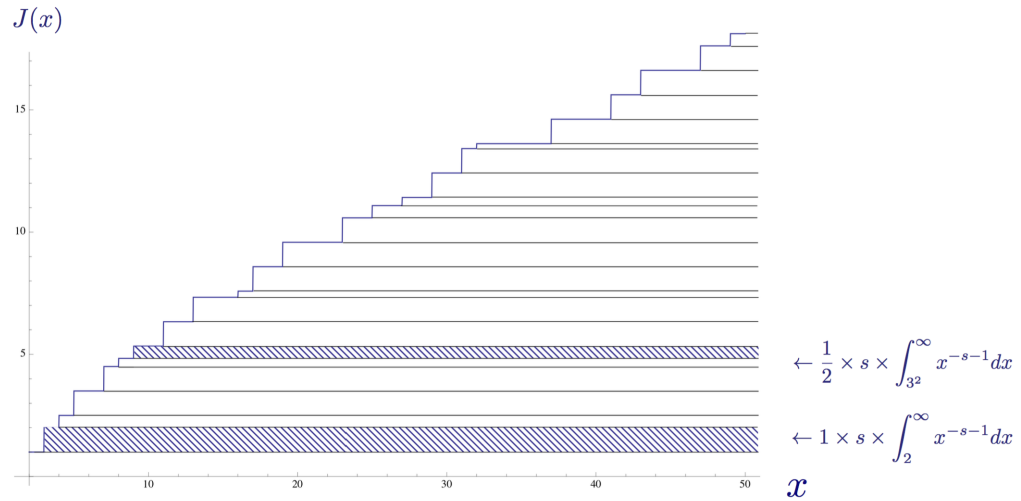
$$\begin{aligned} \log \zeta(s) &= \sum_n \sum_p \frac{1}{n} p^{-ns} \\ &= \sum_n \sum_p \frac{s}{n} \int_{p^n}^\infty x^{-s-1} dx. \end{aligned}$$

Pour $n = 1$, on observe que :

$$\begin{aligned} &\int_2^\infty x^{-s-1} dx + \int_3^\infty x^{-s-1} dx + \int_5^\infty x^{-s-1} dx + \dots \\ &= 1 \int_2^3 x^{-s-1} dx + 2 \int_3^5 x^{-s-1} dx + 3 \int_5^7 x^{-s-1} dx + \dots \\ &= \int_2^\infty \pi(x) x^{-s-1} dx \\ (*) &= \int_0^\infty \pi(x) x^{-s-1} dx, \end{aligned}$$

où $\pi(x)$ représente le nombre de nombres premiers entre 0 et x . L'égalité (*) provient simplement du fait que $\pi(x) = 0$ lorsque $0 \leq x < 2$. De la même manière que pour $n = 1$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_p s \int_{p^n}^\infty x^{-s-1} dx = s \int_0^\infty \pi(x^{1/n}) x^{-s-1} dx.$$



En reprenant les calculs du départ, il vient ainsi :

$$\begin{aligned}
 \log \zeta(s) &= \sum_n \frac{1}{n} s \int_0^{\infty} \pi(x^{1/n}) x^{-s-1} dx \\
 &= s \int_0^{\infty} \left(\sum_n \frac{\pi(x^{1/n})}{n} \right) x^{-s-1} dx \\
 (*) &= s \int_0^{\infty} J(x) x^{-s-1} dx,
 \end{aligned}$$

où (*) découle directement du lemme 7.4. □

Nous venons donc d'établir un "nouveau" lien entre la fonction ζ et les nombres premiers, grâce à la formule produit d'Euler. Ce lien aura une importance capitale dans les sections suivantes.

8. INVERSION DE FOURIER

Riemann était un maître en analyse de Fourier et son travail dans l'élaboration de cette théorie doit certainement être compté parmi ses plus grandes contributions aux mathématiques. Il n'est donc pas surprenant qu'il applique immédiatement l'inversion de Fourier à la formule (démontrée en section 7) :

$$(8.1) \quad \frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_0^\infty J(x) x^{-s-1} dx,$$

avec $\operatorname{Re}(s) > 1$, pour déduire la proposition suivante.

Proposition 8.2. *Pour tout $a > 1$:*

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \log \zeta(s) x^s \frac{ds}{s}.$$

Puis en utilisant une formule alternative pour $\log \zeta(s)$, Riemann obtient une formule alternative pour $J(x)$: *la formule principale de Riemann*.

L'intégrale impropre dans la proposition 8.2 est seulement simplement convergente. Ici, il faut comprendre que cette intégrale représente la limite $T \rightarrow +\infty$ de l'intégrale sur le segment de $a - iT$ à $a + iT$, situé dans le plan complexe.

Plus généralement, les séries ou intégrales simplement convergentes sont très communes en analyse de Fourier, et il faut toujours comprendre que :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

signifie

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx},$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{iyx} dy,$$

signifie

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^{+T} f(y) e^{iyx} dy.$$

Nous allons maintenant démontrer la proposition 8.2.

Démonstration. Pour déduire la formule de la proposition 8.2 de la formule (8.1), Riemann utilise un théorème de Fourier : il s'agit de la formule d'inversion de Fourier suivante :

$$(8.3) \quad \phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\lambda) e^{i(x-\lambda)\mu} d\lambda \right] d\mu.$$

Autrement dit, ce théorème de Fourier affirme que si on se donne une fonction ϕ définie de la manière suivante :

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mu) e^{i\mu x} d\mu,$$

alors il est nécessaire et suffisant que les "coefficients" $\psi(\mu)$ soient définis par :

$$\psi(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\lambda) e^{-i\lambda\mu} d\lambda.$$

Ce théorème provient d'une analogie avec les séries de Fourier :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx} \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda) e^{-in\lambda} d\lambda.$$

En effet, le théorème 8.3 pour l'intégrale de Fourier suit formellement par un passage à la limite dans le théorème des séries de Fourier.

Pour déduire la formule de la proposition 8.2 de la formule (8.1), on pose :

* $s = a + i\mu$, où a est une constante ($a > 1$) et μ est une variable réelle ;

* $\lambda = \log(x)$;

* $\phi(x) = 2\pi J(e^x) e^{-ax}$.

Ainsi la formule (8.1) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\log \zeta(a + i\mu)}{a + i\mu} &= \int_0^{\infty} J(x) e^{(-s-1)\log(x)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} J(e^\lambda) e^{(-s-1)\lambda} e^\lambda d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} J(e^\lambda) e^{-(a+i\mu)\lambda} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi J(e^\lambda) e^{-a\lambda} e^{-i\mu\lambda} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\lambda) e^{-i\mu\lambda} d\lambda. \end{aligned}$$

Lorsque cette fonction ϕ est utilisée pour obtenir ψ , le théorème de Fourier permet d'obtenir :

$$2\pi J(e^x)e^{-ax} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log \zeta(a + i\mu)}{a + i\mu} e^{i\mu x} d\mu,$$

c'est-à-dire :

$$J(e^x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log \zeta(a + i\mu)}{a + i\mu} e^{i\mu x} (e^x)^{a+i\mu} d\mu.$$

En posant $y = e^x$, il vient :

$$J(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log \zeta(a + i\mu)}{a + i\mu} e^{i\mu x} y^{a+i\mu} d\mu.$$

Enfin, on effectue une paramétrisation afin d'obtenir une intégrale complexe : $s(\mu) = a + i\mu$ et $ds = i d\mu$, d'où :

$$J(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\log \zeta(s)}{s} y^s ds.$$

□

Riemann ignore complètement le fait de pouvoir appliquer le théorème de Fourier à la fonction $x \mapsto J(e^x)e^{-ax}$ et obtient simplement la proposition 8.2 sans justification supplémentaire.

Cependant, cette fonction est une "bonne" fonction car elle vaut 0 pour $x < 0$ et elle décroît rapidement vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$. Cela suffit à prouver cette proposition 8.2 en toute généralité.

9. LA FORMULE PRINCIPALE DE RIEMANN : DÉTERMINATION DE $J(x)$

9.1. Introduction.

En combinant les deux formules trouvées en section 6.1 et 6.3 :

$$\xi(s) = \Pi\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} (s-1) \zeta(s),$$

et :

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right),$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \log \zeta(s) &= \log \xi(s) - \log \Pi\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{s}{2} \log \pi - \log(s-1) \\ &= \log \xi(0) + \sum_{\rho} \log \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) - \log \Pi\left(\frac{s}{2}\right) \\ &\quad + \frac{s}{2} \log \pi - \log(s-1). \end{aligned} \tag{9.1}$$

L'objectif des prochaines sections est de démontrer le résultat fondamental suivant.

Théorème 9.2. [Formule principale de Riemann] *Pour $x > 1$ réel :*

$$J(x) = Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho}) - \log 2 + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2 - 1) \log t}.$$

Ce théorème, qui sera utilisé dans la section 10, permet de donner une « formule explicite » pour la fonction de répartition des nombres premiers. Précédemment, nous avons démontré en section 8 la formule :

$$J(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \log \zeta(s) x^s \frac{ds}{s} \quad (a > 1). \tag{9.3}$$

Nous pourrions remplacer $\log \zeta(s)$ par (9.1) dans (9.3), et ensuite, intégrer terme à terme. Cependant, une substitution directe mène à une intégrale divergente; par exemple, le terme en $\frac{s}{2} \log \pi$, a une intégrale qui oscille sans converger. Riemann intègre par parties dans (9.3) avant de substituer $\log \zeta(s)$ par l'expression (9.1) :

$$\begin{aligned} J(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\log \zeta(s)}{s} \exp(s \log x) ds \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left[\frac{\log \zeta(s)}{s} \frac{x^s}{\log x} \right]_{a-i\infty}^{a+i\infty} - \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log \zeta(s)}{s} \right] \frac{x^s}{\log x} ds. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log \zeta(a \pm iT)}{a + iT} x^{a \pm iT} = 0. \tag{9.4}$$

Ceci permettra de valider l'utilisation de l'intégration par parties et d'obtenir le résultat voulu. Voici l'argument concernant l'annulation de la limite. Majorons :

$$\begin{aligned} |\log \zeta(a \pm iT)| &= \left| \sum_n \sum_p \frac{1}{n} p^{-n(a \pm iT)} \right| \\ &\leq \sum_n \sum_p \frac{p^{-na}}{n} \\ &= \log \zeta(a) = \text{constante} \quad (a > 1). \end{aligned}$$

En reprenant (9.4), il vient :

$$\left| \frac{\log \zeta(a \pm iT)}{a \pm iT} x^{a \pm iT} \right| \leq \frac{\log \zeta(a) x^a}{\sqrt{a^2 + T^2}} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0,$$

puisque x et a sont fixés ici. On trouve au final que :

$$(9.5) \quad J(x) = -\frac{1}{2i\pi} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log \zeta(s)}{s} \right] x^s ds \quad (a > 1).$$

En substituant (9.1) dans (9.5), on trouve que J s'exprime comme une somme de cinq termes. L'intégrale d'une somme finie est toujours la somme des intégrales — à condition que ces dernières convergent ! La formule principale de Riemann se déduira donc du calcul de ces cinq intégrales. Il est important de noter que pour chaque s fixé, il y a une ambiguïté sur la définition de $\log(1 - \frac{s}{\rho})$ pour les racines ρ qui ne sont pas grandes par rapport à s . Afin de lever cette ambiguïté, dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} s > 1\}$, on définit $\log(1 - \frac{s}{\rho})$ comme étant $\log(s - \rho) - \log(-\rho)$. Cela est bien correct, car aucun des ρ n'est réel. De toute façon, $\log(1 - \frac{s}{\rho})$ est défini sans ambiguïté dans l'ouvert $\{\operatorname{Re} s > 1\}$, et en particulier, sur le chemin d'intégration $\{\operatorname{Re} s = a\}$, puisque $a > 1$. Il reste donc à calculer les cinq

intégrales suivantes :

$$I_1 := \frac{1}{2i\pi} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log(s-1)}{s} \right] x^s ds,$$

$$I_2 := -\frac{1}{2i\pi} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s} \sum_{\rho} \log \left(1 - \frac{s}{\rho} \right) \right] x^s ds,$$

$$I_3 := -\frac{1}{2i\pi} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s} \log \xi(0) \right] x^s ds,$$

$$I_4 := -\frac{1}{2i\pi} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\frac{s}{2} \log \pi}{s} \right] x^s ds,$$

$$I_5 := \frac{1}{2i\pi} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s} \log \Pi \left(\frac{s}{2} \right) \right] x^s ds.$$

9.2. Calcul de la première intégrale I_1 .

Nous allons commencer par déterminer la première intégrale :

$$I_1 := \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log(s-1)}{s} \right] x^s ds.$$

Riemann montre que pour $x > 1$, l'intégrale I_1 vaut :

$$Li(x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\epsilon}^x \frac{dt}{\log t} \right],$$

qui correspond à la valeur principale de l'intégrale divergente :

$$\int_0^x \frac{dt}{\log t}.$$

Soit $x > 1$ fixé. On considère la fonction suivante :

$$(9.6) \quad F(\beta) := \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s} \log \left(\frac{s}{\beta} - 1 \right) \right] x^s ds.$$

La valeur que l'on cherche correspond à $F(1)$. La définition de $F(\beta)$ peut être étendue à tout β réel ou complexe avec $\operatorname{Re}(\beta) > 0$. Si $\operatorname{Re}(\beta) < a$, il faut définir $\log(\frac{s}{\beta} - 1)$ par $\log(s - \beta) - \log(\beta)$. L'intégrale dans la définition de $F(\beta)$ converge absolument. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s} \log \left(\frac{s}{\beta} - 1 \right) \right] x^s \right| &= \frac{1}{|s|^2} \left| \frac{1}{s - \beta} s - \log \left(\frac{s}{\beta} - 1 \right) x^s \right| \\ &\leq \left[\frac{1}{|s|^2} \left| \log \left(\frac{s}{\beta} - 1 \right) \right| + \frac{1}{|s(s - \beta)|} \right] x^a, \end{aligned}$$

et les termes ci-dessus sont bien intégrables sur le segment $[a - i\infty; a + i\infty]$.

[Étape 1 : Calcul de $F'(\beta)$]

Notre objectif est maintenant de dériver la fonction F . Pour cela, on calcule tout d'abord :

$$\frac{d}{d\beta} \left[\frac{1}{s} \log\left(\frac{s}{\beta} - 1\right) \right] = \frac{-\frac{s}{\beta^2}}{s\left(\frac{s}{\beta} - 1\right)} = \frac{1}{\beta(\beta - s)}.$$

D'après le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, il vient alors :

$$F'(\beta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{(\beta - s)\beta} \right] x^s ds.$$

On intègre par parties (de manière "inversée" par rapport à la section 9.1), et on trouve :

$$(9.7) \quad F'(\beta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{(\beta - s)\beta} ds.$$

Observation 9.8. Lorsque $\operatorname{Re}(s - \beta) > 0$, on a :

$$\int_1^\infty x^{-s} x^{\beta-1} dx = \left[\frac{1}{-s + \beta} x^{-s+\beta} \right]_1^\infty = \frac{1}{s - \beta}.$$

On pose $s = a + i\mu$. D'après l'observation 9.8, il vient pour $a > \operatorname{Re}(\beta)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a + i\mu - \beta} &= \int_1^\infty x^{-a-i\mu} x^{\beta-1} dx \\ &= \int_1^\infty \exp((-a - i\mu + \beta - 1)\log x) dx. \end{aligned}$$

Ensuite, on effectue le changement de variable $\lambda = \log x$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a + i\mu - \beta} &= \int_0^\infty \exp((-a - i\mu + \beta - 1)\lambda) \exp(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \exp(-i\lambda\mu) \exp(\lambda(\beta - a)) d\lambda. \end{aligned}$$

Cette apparition de fonction exponentielle nous donne l'idée d'effectuer une inversion de Fourier de la même manière qu'en section 8. En reprenant les mêmes notations que la section 8, on pose $\phi(\lambda) := 2\pi e^{\lambda(\beta-a)}$ et $\psi(\mu) := \frac{1}{a + i\mu - \beta}$. On applique le théorème d'inversion de Fourier et on obtient :

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^\infty \psi(\mu) e^{i\mu x} d\mu,$$

c'est-à-dire (en remplaçant ϕ et ψ par leur valeur) :

$$2\pi e^{x(\beta-a)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu x}}{a + i\mu - \beta} d\mu,$$

soit au final :

$$\begin{aligned} e^{x\beta} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x(a+i\mu)i}}{a + i\mu - \beta} d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xs}}{s - \beta} ds. \end{aligned}$$

En posant $y = e^x$, on a ainsi démontré la proposition suivante :

Proposition 9.9. *Pour tout $y > 1$, on a :*

$$y^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{y^s}{s - \alpha} ds,$$

où $\operatorname{Re}(\alpha) < a$.

On reprend la formule (9.7) de $F'(\beta)$. D'après la proposition 9.9, on trouve finalement que :

$$F'(\beta) = \frac{x^\beta}{\beta}.$$

[Étape 2 : Calcul de $G'(\beta)$]

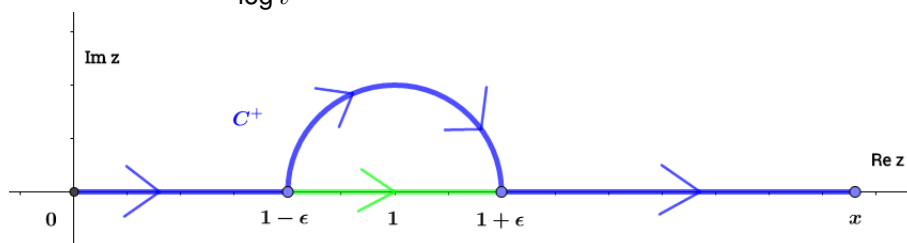
On pose une nouvelle fonction définie sur $\{\operatorname{Re}(\beta) > 0\}$ par :

$$(9.10) \quad G(\beta) := \int_{C^+} \frac{t^{\beta-1}}{\log t} dt = \int_{C^+} \frac{\exp[(\beta-1)\log t]}{\log t} dt,$$

où C^+ représente le contour situé dans le plan complexe constitué par :

- le segment partant de 0 jusqu'à $1 - \epsilon$ ($\epsilon > 0$ petit) ;
- le demi cercle dans le plan $\{\operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ partant de $1 - \epsilon$ jusqu'à $1 + \epsilon$;
- le segment partant de $1 + \epsilon$ jusqu'à x (où x est fixé depuis le départ).

Le contour C^+ est construit ainsi car il permet d'éviter la singularité en 1 de la fonction $t \mapsto \frac{t^{\beta-1}}{\log t}$.



En appliquant le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, il vient :

$$G'(\beta) = \int_{C^+} \exp[(\beta - 1)\log t] dt = \int_{C^+} t^{\beta-1} dt.$$

A l'aide du dessin et du segment vert, on se convainc visuellement que :

$$G'(\beta) = \int_0^x t^{\beta-1} dt = \frac{x^\beta}{\beta},$$

car la fonction $t \mapsto t^{\beta-1}$ n'a pas de singularité en 1, contrairement à la fonction G . On constate donc le fait suivant absolument remarquable :

$$F'(\beta) = G'(\beta).$$

[Étape 3 : Trouver une relation entre $F(\beta)$ et $G(\beta)$]

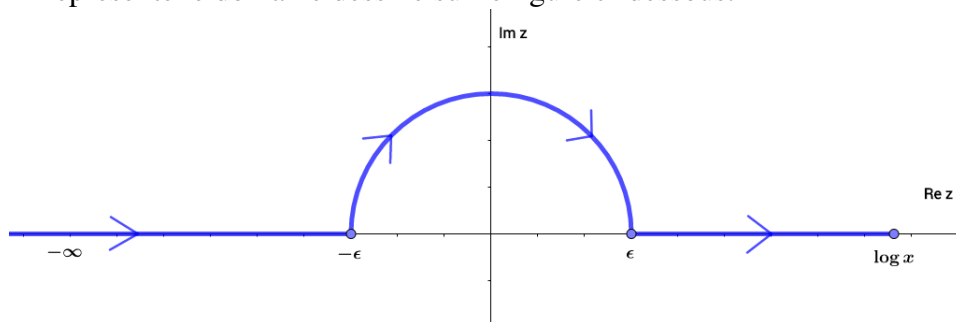
On va donc trouver une relation entre les deux fonctions F et G . La fonction G est définie et holomorphe lorsque $\operatorname{Re}(\beta) > 0$ (l'intégrale diverge en $t = 0$ si $\operatorname{Re}(\beta) \leq 0$). De même, la fonction F est bien définie et holomorphe lorsque $\operatorname{Re}(\beta) > 0$. Nous avons vu précédemment que $F'(\beta) = G'(\beta)$, ainsi les fonctions F et G diffèrent d'une constante (pouvant dépendre de x , qui est fixé depuis le départ). Riemann déclare que cette constante peut être trouvée en fixant $\operatorname{Re}(\beta)$ et en faisant tendre $\operatorname{Im}(\beta)$ vers l'infini dans les fonctions F et G . Mais il ne fait pas cela en réalité.

[Étape 3.a : Calcul de la limite de $G(\beta)$]

Pour évaluer la limite en G , on pose $\beta = \sigma + i\tau$, avec $\sigma > 0$ fixé. Notre objectif sera de faire tendre τ vers l'infini. On effectue le changement de variable $t = e^u$ dans l'intégrale (9.10) de la fonction G et on obtient :

$$\int_D \frac{e^{u(\beta-1)}}{u} e^u du = \int_D \frac{e^{\beta u}}{u} du,$$

où D représente le domaine dessiné sur la figure ci-dessous.



Nous allons justifier pourquoi nous obtenons le contour D après le changement de variable. Par définition de C^+ :

$$\int_{C^+} = \int_0^{1-\epsilon} + \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^x,$$

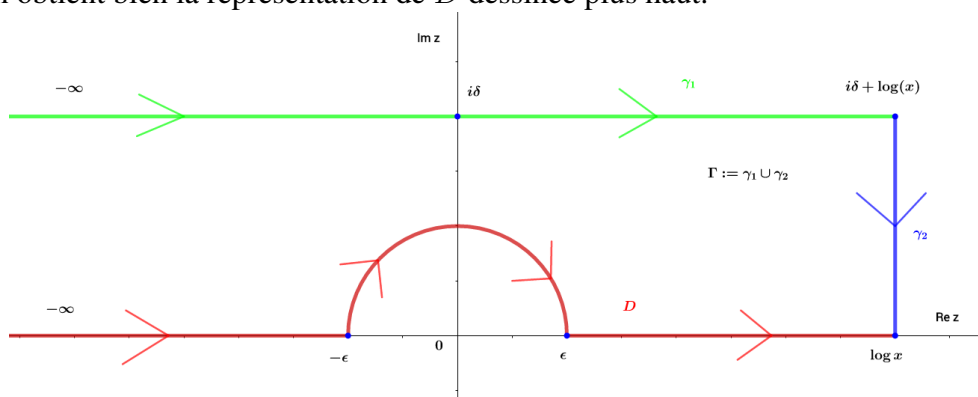
où la seconde intégrale est située sur le demi cercle de centre 1 partant de $1 - \epsilon$ jusqu'à $1 + \epsilon$ au dessus de l'axe réel. Suite au changement de variable $t = e^u$, il vient :

$$\int_D = \int_{-\infty}^{\log(1-\epsilon)} + \int_{\log(1-\epsilon)}^{\log(1+\epsilon)} + \int_{\log(1+\epsilon)}^{\log(x)}.$$

Et comme ϵ est destiné à tendre vers 0, on peut supposer que $\log(1 \pm \epsilon) \approx \pm \epsilon$, ainsi :

$$\int_D \approx \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} + \int_{+\epsilon}^{\log(x)}.$$

On obtient bien la représentation de D dessinée plus haut.



On pose ensuite $\delta := 2\epsilon$, et on considère le contour Γ ci-dessus, composé de γ_1 et de γ_2 (respectivement les courbes vertes et bleues ci-dessus).

Notation 9.11. Si θ_1 et θ_2 sont deux contours d'intégration, nous utiliserons la notation $\theta_1 \cup \theta_2$ pour désigner le contour d'intégration composé du contour θ_1 puis du contour θ_2 (en gardant les mêmes orientations).

La fonction $u \mapsto \frac{e^{\beta u}}{u}$ est holomorphe dans l'ouvert dont le bord est délimité par $\Gamma \cup D$. Un théorème de Cauchy affirme alors que :

$$\int_{\Gamma \cup D^-} \frac{e^{\beta u}}{u} du = 0,$$

où D^- représente le contour D orienté négativement. Donc d'après le schéma ci-dessus :

$$\int_D \frac{e^{\beta u}}{u} du = \int_{\gamma_1} \frac{e^{\beta u}}{u} du + \int_{\gamma_2} \frac{e^{\beta u}}{u} du.$$

Ainsi, on trouve que :

$$(9.12) \quad G(\beta) = \int_{i\delta-\infty}^{i\delta+\log(x)} \frac{e^{\beta u}}{u} du + \int_{i\delta+\log(x)}^{\log(x)} \frac{e^{\beta u}}{u} du.$$

Ensuite, on effectue le changement de variable $u = i\delta + v$ dans la première intégrale et $u = \log(x) + iw$ dans la seconde intégrale de la formule (9.12), tout en remplaçant β par $\sigma + i\tau$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} G(\beta) &= \int_{-\infty}^{\log(x)} \frac{e^{\beta(i\delta+v)}}{i\delta+v} dv + \int_{\delta}^0 \frac{e^{\beta(\log(x)+iw)}}{\log(x)+iw} idw \\ &= \int_{-\infty}^{\log(x)} \frac{e^{(\sigma+i\tau)(i\delta+v)}}{i\delta+v} dv - ix^\beta \int_0^\delta \frac{e^{(\sigma+i\tau)iw}}{\log(x)+iw} idw \\ &= e^{i\delta\sigma} e^{-\delta\tau} \int_{-\infty}^{\log(x)} \frac{e^{\sigma v}}{i\delta+v} e^{i\tau v} dv - ix^\beta \int_0^\delta \frac{e^{-\tau w} e^{\sigma iw}}{\log(x)+iw} dw. \end{aligned}$$

Chaque intégrale tend vers 0 lorsque $\tau \rightarrow +\infty$. La première intégrale tend vers 0 car $e^{-\delta\tau} \rightarrow 0$, et le reste est borné. Et la seconde intégrale tend vers 0 car $e^{-\tau w} \rightarrow 0$, et on peut appliquer le théorème de convergence dominée. Au final, on trouve que :

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} G(\sigma + i\tau) = 0.$$

[Étape 3.b : Calcul de la limite de $F(\beta)$]

Il reste à évaluer la limite de la fonction F . Pour cela, on pose une nouvelle fonction :

$$(9.13) \quad H(\beta) := \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s} \log \left(1 - \frac{s}{\beta} \right) \right] x^s ds,$$

pour $\operatorname{Re}(\beta) < a$.

On calcule la différence $H(\beta) - F(\beta)$ qui est définie lorsque $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Pour $\text{Im}(\beta) > 0$, il vient :

$$\begin{aligned}
 H(\beta) - F(\beta) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s} \log\left(1 - \frac{s}{\beta}\right) - \frac{1}{s} \log\left(\frac{s}{\beta} - 1\right) \right] x^s ds \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log(s - \beta) - \log(-\beta) - \log(s - \beta) + \log(\beta)}{s} \right] x^s ds \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log(e^{i\pi})}{s} \right] x^s ds \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{i\pi}{s} \right] x^s ds.
 \end{aligned}$$

Une nouvelle fois, on intègre par parties de façon "inversée" à la section 9.1, pour trouver :

$$\begin{aligned}
 H(\beta) - F(\beta) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{i\pi}{s} x^s ds \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{s} ds \\
 (*) &= -\frac{1}{2} 2\pi i \\
 &= -\pi i,
 \end{aligned}$$

où l'égalité (*) ci-dessus se déduit directement de la proposition 9.9 avec $\alpha = 0$. Ainsi lorsque $\text{Im}(\beta) > 0$, on en déduit que :

$$(9.14) \quad F(\beta) = H(\beta) + i\pi.$$

Il reste à évaluer la limite $H(\sigma + i\tau)$ lorsque $\tau \rightarrow +\infty$. Nous allons voir que cette limite vaut 0. On pourra ainsi déduire la limite de $F(\beta)$ à partir de (9.14). Tout d'abord, on observe que :

Observation 9.15. Dans l'intégrale (9.13) correspondant à la définition de la fonction H , on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s} \log\left(1 - \frac{s}{\beta}\right) \right] &= \frac{1}{s(s - \beta)} - \frac{\log\left(1 - \frac{s}{\beta}\right)}{s^2} \\
 &= \frac{1}{\beta(s - \beta)} - \frac{1}{\beta s} - \frac{\log\left(1 - \frac{s}{\beta}\right)}{s^2}.
 \end{aligned}$$

Ensuite, on multiplie l'expression ci-dessus (observation 9.15) par x^s et on intègre entre $a - i\infty$ et $a + i\infty$. Ensuite, on étudie chacune des trois

intégrales. Tout d'abord, grâce au s^2 au dénominateur, on peut utiliser le théorème de convergence dominée, pour déduire que :

$$(9.16) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{s^2} \log\left(1 - \frac{s}{\beta}\right) x^s ds = 0.$$

Ensuite, on utilise une nouvelle fois la proposition 9.9 pour déduire que lorsque $\tau \rightarrow +\infty$, on a :

$$(9.17) \quad \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{\beta(s-\beta)} ds = \frac{2\pi i x^\beta}{\beta} \rightarrow 0,$$

et que

$$(9.18) \quad \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{\beta s} ds = \frac{2\pi i}{\beta} \rightarrow 0.$$

Dans la formule (9.17), il faut bien voir que lorsque $\tau \rightarrow +\infty$, $x^\beta = x^\sigma x^{i\tau}$ est borné (car σ est fixé). Ainsi la convergence vers 0 est bien assurée grâce au β situé au dénominateur.

D'après l'observation 9.15 et les calculs de limites (9.16), (9.17) et (9.18), on conclut que :

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} H(\sigma + i\tau) = 0.$$

D'après la formule (9.14), on a $F(\beta) = H(\beta) + i\pi$, ainsi :

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} F(\sigma + i\tau) = i\pi.$$

Dans les étapes 1 et 2, nous avons vu que les fonctions F et G ont la même dérivée donc $F(\beta) = G(\beta) + \text{constante}$. Nous venons dans l'étape 3 de calculer les deux limites de G et de F (pour le calcul de la limite de F , nous avons dû utiliser une fonction auxiliaire H). Nous pouvons donc en déduire la relation suivante entre les deux fonctions :

Proposition 9.19. [Relation entre les fonctions F et H] Lorsque $\text{Re}(\beta) > 0$, on a :

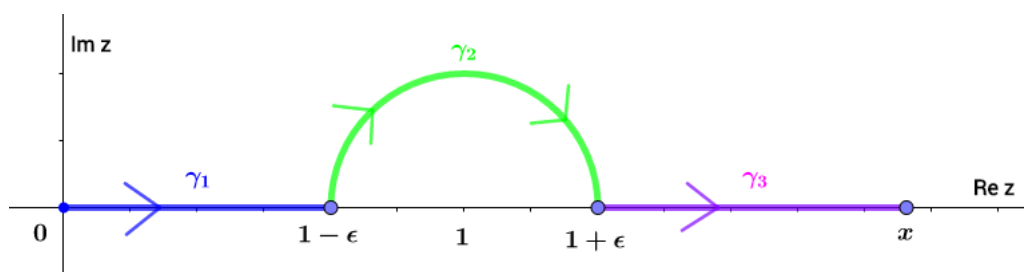
$$F(\beta) = G(\beta) + i\pi.$$

En particulier, on peut remplacer β par 1 dans la proposition 9.19 pour obtenir :

$$\begin{aligned} F(1) &= G(1) + i\pi \\ &= \int_{C^+} \frac{1}{\log t} dt + i\pi. \end{aligned}$$

[Étape 4 : Simplifier $F(1)$ pour en déduire le résultat souhaité]

On découpe le contour C^+ (défini en étape 2) en trois autres contours appelés respectivement γ_1 , γ_2 et γ_3 de la façon suivante :



D'après la relation trouvée à la fin de l'étape 3, on déduit que :

$$\begin{aligned}
 (9.20) \quad F(1) &= \int_{\gamma_1} \frac{1}{\log s} ds + \int_{\gamma_2} \frac{1}{\log s} ds + \int_{\gamma_3} \frac{1}{\log s} ds + i\pi \\
 &= \int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{\log t} dt + \int_{1+\epsilon}^x \frac{1}{\log t} dt + \int_{\gamma_2} \frac{1}{\log s} ds + i\pi.
 \end{aligned}$$

Nous allons voir que l'intégrale sur le contour γ_2 peut se calculer facilement. On multiplie par $(s-1)$ en haut et en bas de la fraction pour obtenir :

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{\log s} ds = \int_{\gamma_2} \frac{s-1}{\log s} \frac{ds}{s-1}.$$

Mais comme $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{s-1}{\log s} = 1$, on observe que l'intégrale :

$$\int_{\gamma_2} \frac{s-1}{\log s} \frac{ds}{s-1},$$

approche l'intégrale :

$$\int_{\gamma_2} \frac{ds}{s-1},$$

lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. D'après le théorème des résidus sur le demi cercle γ_2 (orienté dans le sens opposé au sens trigonométrique) :

$$\int_{\gamma_2} \frac{ds}{s-1} = -\pi i \operatorname{Res}_{s \mapsto 1/(s-1)}(1) = -\pi i.$$

En faisant tendre ϵ vers 0 dans la formule (9.20), on obtient :

$$\begin{aligned}
 F(1) &= Li(x) - i\pi + i\pi \\
 &= Li(x).
 \end{aligned}$$

On a donc bien démontré le résultat souhaité, à savoir que :

$$I_1 = Li(x).$$

9.3. Calcul de la seconde intégrale I_2 .

L'objectif de cette section est de calculer la seconde intégrale I_2 intervenant dans la formule principale de Riemann. Il s'agit de :

$$(9.21) \quad I_2 := -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s} \sum_{\rho} \log \left(1 - \frac{s}{\rho} \right) \right] x^s ds.$$

Nous admettons (provisoirement) qu'il est possible de sortir le signe $\sum$ de la dérivée $\frac{d}{ds}$ et de l'intégrale dans la formule (9.21). On obtient alors :

$$\begin{aligned} I_2 &= - \sum_{\rho} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s} \log \left(1 - \frac{s}{\rho} \right) \right] x^s ds \\ &= - \sum_{\rho} H(\rho), \end{aligned}$$

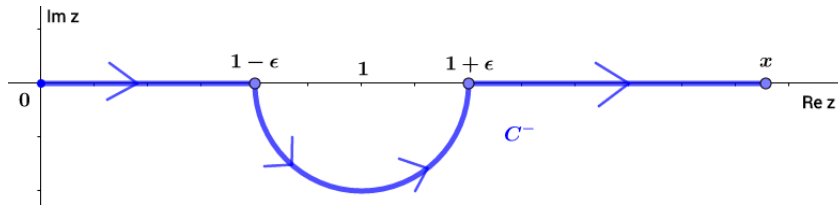
où la fonction H a été définie et étudiée dans la section 9.2 précédente. Nous avons vu que $H(\rho) = G(\rho)$ lorsque $\operatorname{Re}(\rho) > 0$ et $\operatorname{Im}(\rho) > 0$. On rappelle que la fonction G (définie aussi en section précédente) vaut par définition :

$$G(\beta) := \int_{C^+} \frac{t^{\beta-1}}{\log t} dt.$$

Il est possible de montrer de la même manière qu'en section précédente que $H(\rho) = G_2(\rho)$ lorsque $\operatorname{Re}(\rho) > 0$ et $\operatorname{Im}(\rho) < 0$, où la fonction G_2 est définie de la manière suivante :

$$G_2(\beta) := \int_{C^-} \frac{t^{\beta-1}}{\log t} dt,$$

avec C^- qui correspond au contour suivant :



On observe que les contours C^+ et C^- sont très proches l'un de l'autre. En effet, la seule différence entre les deux, est que le demi-cercle partant de $1 - \epsilon$ jusqu'à $1 + \epsilon$ passe au dessus de l'axe réel pour C^+ et passe en dessous pour C^- .

Par définition des fonctions G et G_2 , on obtient :

$$(9.22) \quad I_2 = - \left[\sum_{\operatorname{Im}(\rho) > 0} \left(\int_{C^+} \frac{t^{\rho-1}}{\log t} dt \right) + \sum_{\operatorname{Im}(\rho) < 0} \left(\int_{C^-} \frac{t^{\rho-1}}{\log t} dt \right) \right].$$

Il est important d'observer la chose suivante :

Observation 9.23. La formule fonctionnelle de la fonction $\xi : \xi(1-s) = \xi(s)$ (section 6.1), nous permet de déduire un résultat fondamental sur la symétrie des racines : $(\rho - 1)$ est racine de ξ si et seulement si, $(-\rho)$ est racine de ξ .

Nous pouvons utiliser l'observation précédente sur la seconde intégrale de la formule (9.22) pour ainsi pouvoir regrouper les deux séries en une seule :

$$(9.24) \quad I_2 = - \sum_{\operatorname{Im}(\rho) > 0} \left[\int_{C^+} \frac{t^{\rho-1}}{\log t} dt + \int_{C^-} \frac{t^{-\rho}}{\log t} dt \right].$$

Il reste à calculer les deux intégrales intervenant dans la formule (9.24).

Proposition 9.25. Lorsque $\operatorname{Im}(\rho) > 0$, on obtient :

$$\int_{C^+} \frac{t^{\rho-1}}{\log t} dt = Li(x^\rho) - i\pi,$$

et

$$\int_{C^-} \frac{t^{-\rho}}{\log t} dt = Li(x^{1-\rho}) + i\pi.$$

Démonstration. On a :

$$\int_{C^+} \frac{t^{\beta-1}}{\log t} dt = \int_{C^+} \frac{t^\beta}{\log t} \frac{dt}{t}.$$

Ensuite on effectue le changement de variable $u := t^\beta$. Ainsi, $\log t = \frac{\log u}{\beta}$

et $\frac{dt}{t} = \frac{du}{u\beta}$. Il vient alors :

$$\int_{C^+} \frac{t^{\beta-1}}{\log t} dt = \int_0^{x^\beta} \frac{u\beta}{\log u} \frac{du}{\beta u} = \int_0^{x^\beta} \frac{du}{\log u}.$$

On reprend la même méthode de calcul de $F(1)$ effectuée dans l'étape 4 de la section 9.2. On rappelle que :

$$\int_0^{x^\beta} \frac{du}{\log u} := \int_0^{1-\epsilon} \frac{du}{\log u} + \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} \frac{du}{\log u} + \int_{1+\epsilon}^{x^\beta} \frac{du}{\log u},$$

où l'intégrale $\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon}$ représente l'intégrale sur le demi cercle supérieur partant de $1 - \epsilon$ jusqu'à $1 + \epsilon$.

D'après le calcul de $F(1)$, on en déduit que :

$$(9.26) \quad \int_{C^+} \frac{t^{\beta-1}}{\log t} dt = \int_0^{x^\beta} \frac{du}{\log u} = Li(x^\beta) - i\pi.$$

De la même manière, on trouve que :

$$(9.27) \quad \int_{C^-} \frac{t^{\beta-1}}{\log t} dt = Li(x^\beta) + i\pi.$$

Le signe "+" devant $i\pi$ dans la formule (9.27) provient du fait que le demi cercle situé dans le contour C^- est orienté dans le sens trigonométrique (contrairement au demi cercle situé dans le contour C^+ de la formule (9.26)). Enfin, il suffit de remplacer β par ρ dans (9.26) et β par $1 - \rho$ dans (9.27) pour obtenir le résultat souhaité. $\square$

En reprenant l'expression (9.24) et en appliquant la proposition 9.25, on en déduit que :

$$\begin{aligned} I_2 &= - \sum_{\operatorname{Im}(\rho) > 0} [Li(x^\rho) - i\pi + Li(x^{1-\rho}) + i\pi] \\ &= - \sum_{\operatorname{Im}(\rho) > 0} [Li(x^\rho) + Li(x^{1-\rho})]. \end{aligned}$$

Nous venons donc de terminer le calcul de l'intégrale I_2 . Toutefois, le résultat ci-dessus est juste si on peut sortir le symbole $\sum$ de l'intégrale dans (9.21). Riemann déclare que cette manipulation est valide mais il concède que cela nécessite une discussion plus précise. Mais il dit que c'est "facile" et passe au point suivant. Les calculs ci-dessus supposent que $\operatorname{Re}(\rho) > 0$. Or, il n'a pas été démontré que cela est vrai pour tout ρ . Hadamard a prouvé plus tard qu'il n'y a pas de racines ρ sur la ligne $\{\operatorname{Re}(\rho) = 0\}$, mais Riemann n'avait pas exclu cette possibilité : il l'avait ignorée.

9.4. Calcul des intégrales restantes I_3 , I_4 et I_5 .

Il reste trois intégrales à calculer pour obtenir la formule principale de Riemann. Tout d'abord, on observe que l'intégrale I_4 vaut 0 :

$$I_4 := -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{s \log \pi}{2} \right] x^s ds = 0,$$

$$\text{car } \frac{d}{ds} \left[\frac{\log \pi}{2} \right] = 0.$$

On intègre par parties dans l'intégrale I_3 pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 I_3 &:= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log \xi(0)}{s} \right] x^s ds \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\log \xi(0)}{s} x^s ds \\
 &= \log \xi(0) \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{s} ds \\
 (*) &= \log \xi(0).
 \end{aligned}$$

L'égalité (*) provient de la proposition 9.9 qui affirme que :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{s-0} ds = x^0 = 1.$$

Par définition de la fonction ξ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 \xi(0) &:= \Pi(0)(0-1)\pi^0\zeta(0) \\
 &= 1 \times (-1) \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Ainsi $\log \xi(0) = -\log 2$ donc l'intégrale I_3 vaut :

$$I_3 = -\log 2.$$

Il ne nous reste plus qu'une seule intégrale à calculer pour conclure cette longue démonstration. Il s'agit de I_5 , dont on rappelle la définition :

$$(9.28) \quad I_5 := \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s} \log \Pi\left(\frac{s}{2}\right) \right] x^s ds.$$

D'après la formule (3.7) sur la fonction Π de la section 3 :

$$\Pi\left(\frac{s}{2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{2n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s/2}.$$

En passant au log dans l'expression ci-dessus, il vient :

$$\log \Pi\left(\frac{s}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\log\left(1 + \frac{s}{2n}\right) + \frac{s}{2} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right].$$

On remplace ensuite la formule ci-dessus dans l'intégrale (9.28). On sort ensuite le symbole $\sum$ de l'intégrale (on admet cette manipulation) et on

obtient :

$$\begin{aligned}
 I_5 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s} \left(-\log\left(1 + \frac{s}{2n}\right) + \frac{s}{2} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) \right] x^s ds \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(\frac{d}{ds} \left[-\frac{1}{s} \log\left(1 + \frac{s}{2n}\right) \right] + \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \right) x^s ds \\
 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s} \log\left(1 + \frac{s}{2n}\right) \right] + 0 \right) x^s ds \\
 &= - \sum_{n=1}^{\infty} H(-2n),
 \end{aligned}$$

où la fonction H a été définie et étudiée en section 9.2. Nous avons vu en section 9.2 que $H(\beta) = G(\beta)$. Cependant, cette formule est valable uniquement lorsque $\operatorname{Re}(\beta) > 0$, et notre objectif est de trouver une formule pour $H(-2n)$. Pour obtenir une formule semblable lorsque $\operatorname{Re}(\beta) < 0$, nous allons définir une nouvelle fonction :

$$E(\beta) := - \int_x^{\infty} \frac{t^{\beta-1}}{\log t} dt,$$

où on rappelle que x est fixé depuis le départ et il est supposé être supérieur à 1 strictement. La fonction E est bien définie car l'intégrale converge lorsque $\operatorname{Re}(\beta) < 0$, d'après le critère classique des intégrales de Riemann. En dérivant sous le signe intégrale, il vient :

$$\begin{aligned}
 E'(\beta) &= - \int_x^{\infty} t^{\beta-1} dt \\
 &= \left[-\frac{t^{\beta}}{\beta} \right]_x^{\infty} \\
 &= 0 + \frac{x^{\beta}}{\beta} \\
 &= H'(\beta).
 \end{aligned}$$

Ainsi les fonctions E et H diffèrent d'une constante lorsque $\operatorname{Re}(\beta) < 0$. En prenant en particulier $\beta \in \mathbb{R}$ et en faisant tendre β vers $-\infty$, on trouve que $E(\beta) \rightarrow 0$ et que $H(\beta) \rightarrow 0$. Donc la constante est nulle : ainsi

$E(\beta) = H(\beta)$. Pour conclure, on revient au calcul de I_5 du départ :

$$\begin{aligned}
 I_5 &= - \sum_{n=1}^{\infty} H(-2n) \\
 &= - \sum_{n=1}^{\infty} E(-2n) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{t^{-2n-1}}{\log t} dt \\
 &= \int_x^{\infty} \frac{1}{t \log t} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (t^{-2})^n \right] dt \\
 (*) &= \int_x^{\infty} \frac{1}{t \log t} \frac{t^{-2}}{1 - t^{-2}} dt \\
 &= \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2 - 1) \log t}.
 \end{aligned}$$

L'égalité (*) est validée par le fait que $|t^{-2}| < 1$ (car $x > 1$) donc la série géométrique converge bien sur l'intervalle d'intégration $[x; +\infty[$. Nous venons donc de terminer le calcul de l'intégrale I_5 :

$$I_5 = \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2 - 1) \log t}.$$

En rassemblant les calculs des cinq intégrales, nous venons ainsi de démontrer la magnifique *formule principale de Riemann* :

$$\begin{aligned}
 J(x) &= Li(x) - \sum_{\text{Im}(\rho) > 0} \left[Li(x^\rho) + Li(x^{1-\rho}) \right] + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2 - 1) \log t} - \log 2 \\
 &= Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^\rho) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2 - 1) \log t} - \log 2.
 \end{aligned}$$

10. LA FORMULE ANALYTIQUE DE $\pi(x)$

L'objectif de Riemann est d'obtenir une formule de $\pi(x)$ à partir de $J(x)$. Puisque le nombre de premiers au carré inférieur à x est égal au nombre de premiers inférieurs à $x^{1/2}$ (qui est égal à $\pi(x^{1/2})$) et que ce raisonnement reste valable pour les p^n , on retrouve naturellement le lemme 7.4 :

$$(10.1) \quad J(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \dots + \frac{1}{n}\pi(x^{1/n}) + \dots$$

La série dans (10.1) est en réalité une somme finie car $x^{1/n} < 2$ pour n assez grand, d'où $\pi(x^{1/n}) = 0$. Riemann veut ensuite inverser la relation (10.1) pour obtenir la fonction π en fonction de J .

Proposition 10.2. *Pour tout $x \geq 0$, on a :*

$$\pi(x) = J(x) - \frac{1}{2}J(x^{1/2}) - \frac{1}{3}J(x^{1/3}) - \frac{1}{5}J(x^{1/5}) + \frac{1}{6}J(x^{1/6}) + \dots + \frac{\mu(n)}{n}J(x^{1/n}) + \dots,$$

où

$$\begin{aligned} \mu(n) &= 0 \text{ si } n \text{ est divisible par un nombre premier au carré;} \\ \mu(n) &= -1 \text{ si } n \text{ est le produit d'un nombre impair de nombres premiers distincts;} \\ \mu(n) &= 1 \text{ si } n \text{ est le produit d'un nombre pair de nombres premiers distincts.} \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la formule d'inversion de Möbius :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(nx) \iff f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)g(nx).$$

Cette formule est valable lorsque $\sum f(nx)$ et $\sum g(nx)$ convergent absolument. On pose $g(nx) := J(x^{1/n})$ et $f(x) := \frac{\pi(x^{1/n})}{n}$. Ainsi les séries $\sum f(nx)$ et $\sum g(nx)$ sont absolument convergentes car il s'agit de sommes finies en réalité (pour chaque x fixé).

Par définition :

$$g(x) = J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(x^{1/n})}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} f(nx).$$

Donc d'après la formule d'inversion de Möbius :

$$f(x) = \pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)g(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)J(x^{1/n}).$$

□

En combinant le résultat de la proposition 10.2 et la formule principale de Riemann :

$$(10.3) \quad J(x) = Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho}) - \log 2 + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2 - 1)\log t},$$

donne la formule analytique pour $\pi(x)$ désirée.

Théorème 10.4. [Formule analytique de $\pi(x)$] *Pour tout $x > 1$:*

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \left[Li(x^{1/n}) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho/n}) - \log 2 + \int_{x^{1/n}}^{\infty} \frac{dt}{t(t^2 - 1)\log t} \right].$$

Cette formule pour $\pi(x)$ se compose de trois types de termes. A savoir, ceux qui ne grandissent pas lorsque x croît (le deux derniers termes de la formule (10.3)), ceux qui augmentent lorsque x croît mais qui oscillent en signe (les termes issus de $Li(x^{\rho})$) et ceux qui croissent régulièrement lorsque x croît (les termes résultant de $Li(x)$). Si on garde uniquement le dernier type de termes, la formule pour $\pi(x)$ devient alors :

$$\pi(x) \approx Li(x) - \frac{1}{2}Li(x^{1/2}) - \frac{1}{3}Li(x^{1/3}) - \frac{1}{5}Li(x^{1/5}) + \frac{1}{6}Li(x^{1/6}) + \dots$$

Empiriquement, on trouve une bonne approximation de $\pi(x)$. Au final, le premier terme est essentiellement une bonne approximation.

Observation 10.5. *A partir de l'approximation précédente, on retrouve le fameux théorème des nombres premiers :*

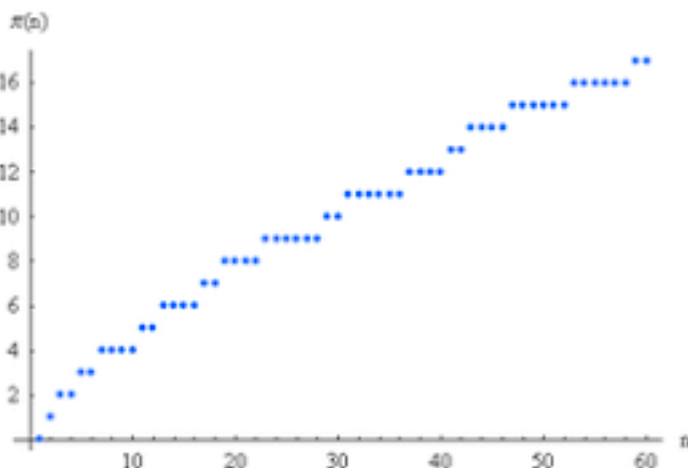
$$\pi(x) \sim Li(x),$$

lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Riemann suggère d'utiliser l'approximation suivante :

$$\pi(x) \approx Li(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} Li(x^{1/n}),$$

qui est l'écriture la plus précise et la plus concise simultanément.



11. QUESTIONS NON RÉSOLUES PAR RIEMANN

Riemann lui même, dans une lettre reprise dans les notes qui suivent sa publication, repère deux affirmations comme n'étant pas encore complètement prouvées : il s'agit de l'affirmation selon laquelle l'équation $\xi(1 + i\alpha) = 0$ a environ $\frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi}$ racines réelles pour $\alpha \in]0, T[$, et l'affirmation que l'intégrale (9.21) peut être évaluée terme à terme. Il n'émit aucun doute quant à la validité de ces affirmations, et déclara que les deux démonstrations attendues seraient issues d'une nouvelle représentation de la fonction ξ , qu'il n'a pas encore suffisamment simplifiée pour la publier. Pourtant, comme vu plus haut, la première de ces affirmations (si l'on suppose qu'il fallait comprendre que l'erreur relative dans l'approximation tend vers 0 lorsque T tend vers l'infini) n'a jamais été prouvée. La seconde a été démontrée par von Mangoldt en 1895, mais par une méthode très différente de celle suggérée par Riemann. En effet, il a commencé par montrer que la formule de Riemann pour $J(x)$ est valide, puis à partir de là, que la valeur terme à terme de l'intégrale (9.21) doit être correcte.

Manifestement, Riemann pensait avoir donné une preuve de la formule produit de $\xi(s)$, mais au moins à la lecture du papier donné plus haut, on ne peut pas considérer sa preuve comme étant complète. En particulier, l'estimation du nombre de racines ρ de l'ensemble $\{\rho \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Im}(\rho) \leq T\}$ sur laquelle la preuve est basée, doit être remise en question. Ce ne fut qu'en 1893 que Hadamard démontra la formule produit, et en 1905 que von Mangoldt démontra l'estimation du nombre de racines dans $\{\rho \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Im}(\rho) \leq T\}$.

De plus, la question originale de la validité de l'approximation $\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}$, reste non résolue par la publication de Riemann. Il peut être montré que l'erreur relative de cette approximation approche 0 quand x tend vers l'infini si et seulement si il en va de même pour l'erreur relative dans l'approximation $J(x) \sim Li(x)$. Donc la question originale est équivalente à la question de savoir si $\sum \frac{Li(x^\rho)}{Li(x)}$ tend vers 0 : mais malheureusement, cette approche n'apporte pas de véritables pistes pour une solution. Cependant, en 1896 Hadamard et de la Vallée Poussin montrèrent indépendamment le théorème des nombres premiers : théorème qui implique que l'erreur relative dans $\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}$ doit approcher 0 quand x tend vers l'infini.

Finalement la publication de Riemann a soulevé une question bien plus grande que celles pour lesquelles elle a apporté une solution : la question de la validité de *l'hypothèse de Riemann*.

12. ANNEXE

Le résultat que nous allons expliciter ici intervient dans la seconde démonstration de l'équation fonctionnelle de ζ , il s'agit de :

Proposition 12.1. *Pour tout $z \in \cup_{n=1}^{+\infty} \{z \in \mathbb{C} : |z| = (2n+1)\pi\}$, on a :*

$$\frac{1}{|e^z - 1|} \leq \sqrt{2}.$$

Nous allons d'abord essayer de reformuler le problème afin de faciliter sa résolution.

Tout d'abord nous allons raisonner sur le carré de $\frac{1}{|e^z - 1|}$ afin de simplifier l'écriture. Soit $z \in \cup_{n=1}^{+\infty} \{z \in \mathbb{C} : |z| = (2n+1)\pi\}$, posons $\phi \in [0, 2\pi[$ et $\rho \geq 0$ tel que $e^z = \rho e^{i\phi}$. On a alors :

$$\frac{1}{|e^z - 1|^2} = \frac{1}{(\rho \cos(\phi) - 1)^2 + (\rho \sin(\phi))^2} = \frac{1}{\rho^2 - 2\rho \cos(\phi) + 1}.$$

On souhaite donc démontrer que :

$$\rho^2 - 2\rho \cos(\phi) + \frac{1}{2} \geq 0.$$

Si l'on note $z = (2n+1)\pi e^{i\theta}$ pour $\theta \in [0, 2\pi[$ et pour un certain n de $\mathbb{N}^*$, on a $e^{(2n+1)\pi e^{i\theta}} = e^{(2n+1)\pi \cos(\theta)} e^{i(2n+1)\pi \sin(\theta)}$. Par identification on a :

$$\begin{aligned} \rho &= e^{(2n+1)\pi \cos(\theta)}, \\ \phi &= (2n+1)\pi \sin(\theta). \end{aligned}$$

On souhaite donc avoir $e^{2(2n+1)\pi \cos(\theta)} - 2e^{(2n+1)\pi \cos(\theta)} \cos((2n+1)\pi \sin(\theta)) \geq -\frac{1}{2}$. Or le terme à gauche de cette inégalité est pair en la variable θ .

Ainsi, si l'on pose la fonction F_n définie par :

$$\begin{aligned} F_n : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\longmapsto e^{2(2n+1)\pi \cos(\theta)} - 2e^{(2n+1)\pi \cos(\theta)} \cos((2n+1)\pi \sin(\theta)), \end{aligned}$$

le problème revient à montrer la proposition :

Proposition 12.2. *Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout θ de $[0, \pi]$ on a, $F_n(\theta) \geq -\frac{1}{2}$.*

Mais pour ce faire, nous allons avoir besoin d'un petit lemme préliminaire.

Lemme 12.3. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité :*

$$1 - \cos(t) \leq \frac{t^2}{2}.$$

Démonstration. La dérivée de la fonction $t \mapsto \frac{t^2}{2} + \cos(t) - 1$, est la fonction $t \mapsto t - \sin(t)$. Or on sait que :

Sur $] -\infty, -\frac{\pi}{2}]$, on a $t \leq -1 \leq \sin(t)$.

Sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, on a $t \leq \sin(t)$ par convexité du sinus.

Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin(t) \leq t$ par concavité du sinus.

Sur $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$, on a $\sin(t) \leq 1 \leq t$.

Donc la dérivée est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{t^2}{2} + \cos(t) - 1$ admet son minimum en 0, et elle y vaut 0. Par conséquent elle est toujours positive, d'où le résultat. $\square$

A présent repassons au résultat qui nous intéresse. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$, minorons $F_n(\theta)$, sur chacun des trois intervalles suivants :

$$\begin{aligned} I_1 &:= \left[0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right], \\ I_2 &:= \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right], \\ I_3 &:= \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \pi\right]. \end{aligned}$$

Pour ce faire notons ρ la quantité $e^{(2n+1)\pi \cos(\theta)}$ pour θ successivement fixé dans I_2 , puis dans I_1 et I_3 .

Commençons par I_2 : soit $\theta \in I_2$, nous allons minorer par 0. Il suffit que l'on ait $\cos((2n+1)\pi \sin(\theta)) \leq 0$. Posons alors $t = \frac{\pi}{2} - \theta$, ainsi on a $|t| \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ et $\sin(\theta) = \sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \cos((2n+1)\pi \sin(\theta)) &= \cos((2n+1)\pi \cos(t)) \\ &= \cos((2n+1)\pi + (2n+1)\pi(\cos(t) - 1)) \\ &= -\cos((2n+1)\pi(\cos(t) - 1)) \\ &= -\cos((2n+1)\pi(1 - \cos(t))). \end{aligned}$$

Le lemme précédent donne alors :

$$\begin{aligned} 0 &\leq (2n+1)\pi(1 - \cos(t)) \leq (2n+1)\pi \frac{t^2}{2} \\ &\leq (2n+1)\pi \frac{1}{2} \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Donc on obtient comme désiré :

$$-\cos((2n+1)\pi(1 - \cos(t))) = \cos((2n+1)\pi \sin(\theta)) \leq 0.$$

Pour les segments suivants, nous allons utiliser la propriété valable pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}] : \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x)$.

Posons $\theta \in I_1$. On a alors :

$$\begin{aligned}\rho &= e^{(2n+1)\pi \cos(\theta)} \geq e^{(2n+1)\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)} \\ &= e^{(2n+1)\pi \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)} \\ &\geq e^{2\sqrt{2n+1}} \\ &\geq e^2.\end{aligned}$$

Donc on obtient la minoration voulue :

$$F_n(\theta) \geq \rho^2 - 2\rho = \rho(\rho - 2) \geq e^2(e^2 - 2) \geq 0 \geq -\frac{1}{2}.$$

Finalement posons $\theta \in I_3$. On a alors :

$$\begin{aligned}\rho &= e^{(2n+1)\pi \cos(\theta)} \leq e^{(2n+1)\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)} \\ &= e^{-(2n+1)\pi \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)} \\ &\leq e^{-2\sqrt{2n+1}} \\ &\leq e^{-2}.\end{aligned}$$

Mais dans ce cas, on a $\cos(\theta) \leq 0$, donc $\rho \in [0, 1]$. On a donc entre autre : $-\rho^2 \geq -\rho$. On utilise alors cette inégalité afin d'obtenir la minoration voulue :

$$F_n(\theta) \geq \rho^2 - 2\rho \geq -\rho^2 - 2\rho \geq -\rho - 2\rho = -3\rho \geq -3e^{-2} \geq -\frac{1}{2}.$$

Finalement, on a bien $F_n(\theta) \geq -\frac{1}{2}$ pour tout θ de $[0, \pi]$.

On a donc bien pour tout $z \in \cup_{n=1}^{+\infty} \{z \in \mathbb{C} : |z| = (2n+1)\pi\}$:

$$\frac{1}{|e^z - 1|} \leq \sqrt{2}.$$

13. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Harold Mortimer Edwards. *Riemann's Zeta Function*.
- Edward Charles Titchmarsh. *The Theory of the Riemann Zeta-Function*.
- François De Marçay. *Analyse Complexe*.
- Melvyn Nathanson. *Additive Number Theory*.