

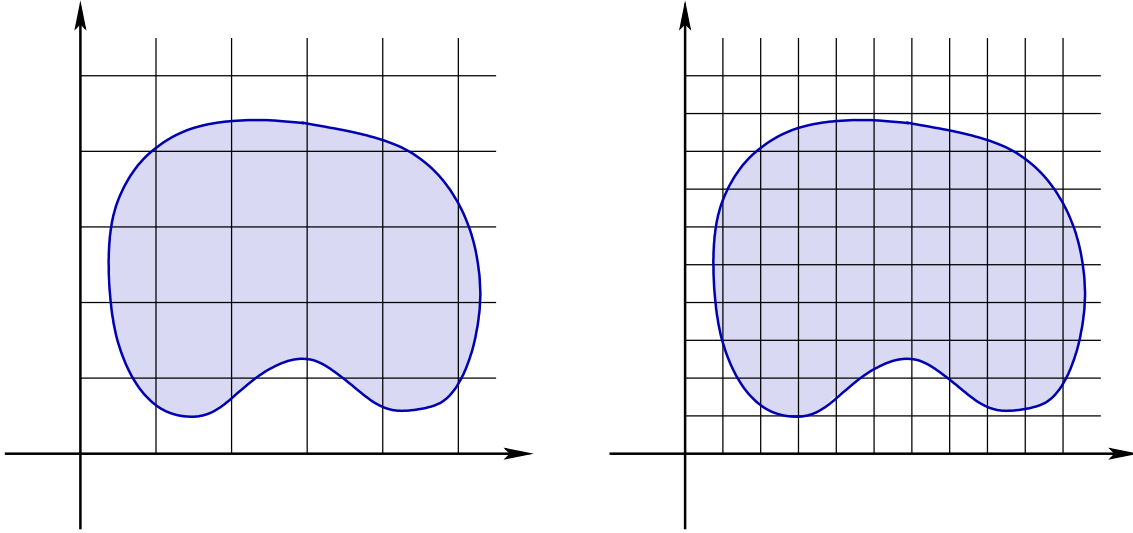
Intégrales doubles

François DE MARÇAY
Institut de Mathématique d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

2. Pavages du plan $\mathbb{R}^2$

Afin de déterminer l'aire — la mesure de surface — d'une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ du plan euclidien, une idée simple et naturelle consiste à utiliser des quadrillages de plus en plus fins.



Soit donc $\{0, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ le repère orthonormé canonique du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées cartésiennes (x, y) , où $\mathbf{i} = (1, 0)$ et $\mathbf{j} = (0, 1)$ sont les deux vecteurs de base. Pour deux paires quelconques de nombres réels $a < b$ et $c < d$, le produit d'intervalles semi-ouverts :

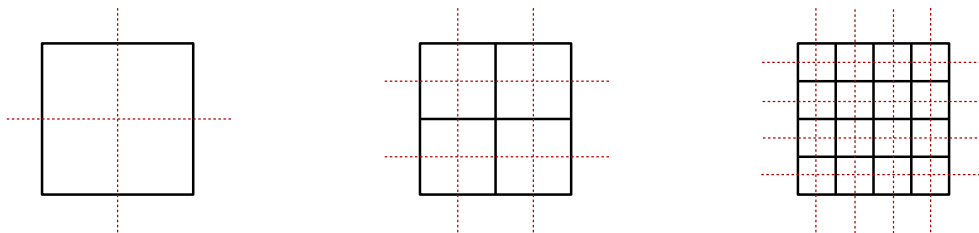
$$[a, b[\times [c, d[$$

est un rectangle élémentaire, ou *pavé*, semi-ouvert.

Lorsque a, b , et c, d sont des paires d'entiers consécutifs, la réunion de tels *pavés entiers* :

$$P_0 := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} [m, m+1[\times [p, p+1[= \mathbb{R}^2$$

recouvre tout le plan, sans intersections. L'ensemble de ces pavés $[m, m+1[\times [p, p+1[$ constitue alors un *pavage de profondeur 0*, où de manière plus imagée *carrelage*, qui sera noté P_0 .



Ensuite, découpons chaque carreau (pavé) de P_0 en son milieu, verticalement et horizontalement, pour obtenir le *pavage de profondeur 1* :

$$P_1 := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \left[\frac{m}{2}, \frac{m+1}{2} \right] \times \left[\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2} \right] = \mathbb{R}^2.$$

Ainsi, chaque pavé se fragmente en $2 \times 2 = 4$ sous-pavés. En itérant les coups de sabre, pour tout entier $k \geq 0$, on produit le *pavage de profondeur k* :

$$P_k := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right] \times \left[\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k} \right] = \mathbb{R}^2,$$

qui recouvre le plan par une réunion *disjointe* de carreaux d'aires de plus en plus petites :

$$\frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{2k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

On s'imagine alors aisément qu'en augmentant la profondeur, on a de plus en plus de chance de bien approximer l'« aire » d'une partie donnée $A \subset \mathbb{R}^2$.

3. Aire inférieure et aire supérieure d'un ensemble borné $A \subset \mathbb{R}^2$

Rappelons qu'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$ est dit *borné* s'il est contenu dans un disque de rayon assez grand — A ne s'évade pas à l'infini. Cela équivaut à dire que le *diamètre* de A , défini comme le supremum de la distance entre deux quelconques de ses points :

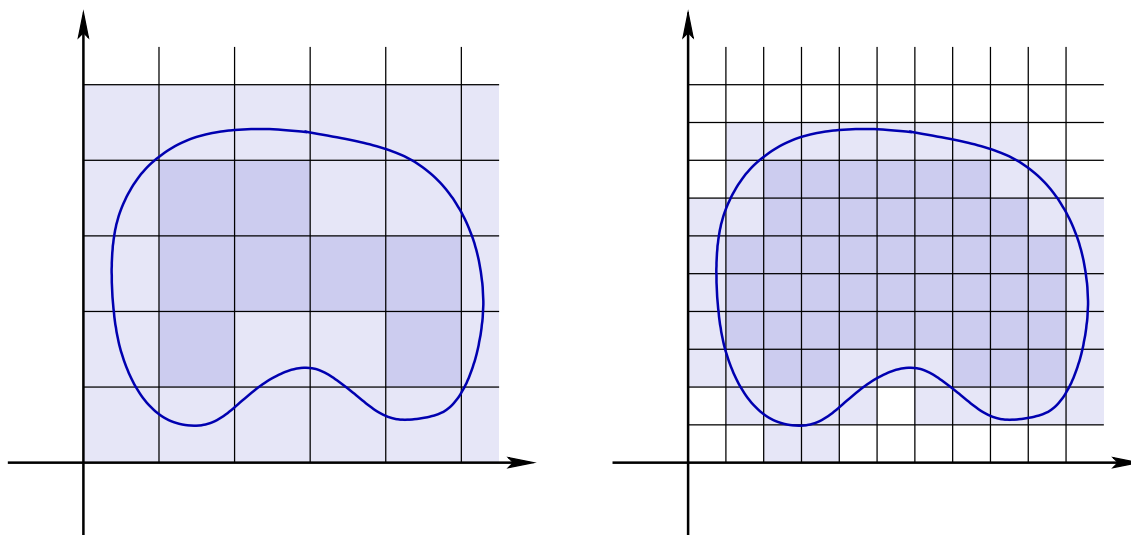
$$\begin{aligned} \text{diam } A &:= \sup_{\substack{(x_1, y_1) \in A \\ (x_2, y_2) \in A}} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &\in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

est *fini* :

$$\text{diam } A < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ borné.}$$

Nous supposons donc A borné, et notre objectif est de donner un sens mathématique rigoureux à la notion de « mesure » de l'étendue — aire, surface — de A . Évidemment, on convient que l'unité de mesure est :

$$\text{aire}([0, 1[\times [0, 1[) = 1 \cdot 1 = 1.$$



L'idée spontanée est de compter les pavés entièrement contenus dans l'ensemble :

$$N_0^- := \text{Card} \{ \text{pavés de } P_0 \text{ contenus dans } A \},$$

puis ceux, plus nombreux, qui le rencontrent :

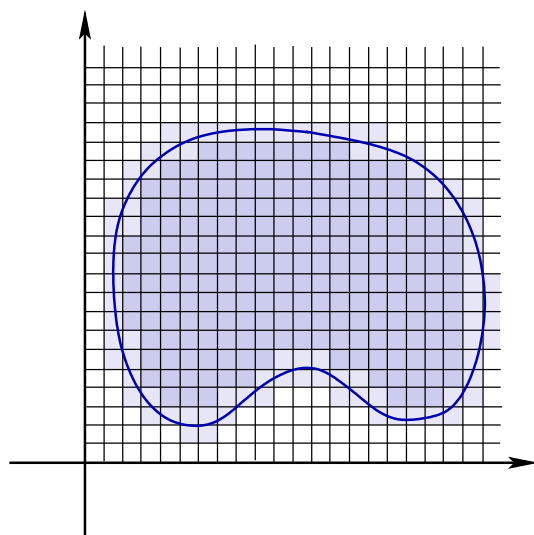
$$N_0^+ := \text{Card} \{ \text{pavés de } P_0 \text{ intersectant } A \}.$$

Évidemment, comme chaque pavé de P_0 est d'aire 1^2 , on a :

$$1^2 \cdot N_0^- \leq \overset{?}{\text{aire}(A)} \leq 1^2 \cdot N_0^+,$$

mais on ne sait pas encore calculer l'aire de A , ce qu'on signifie en la chapeautant par un point d'interrogation. En tout cas, puisque A est borné, on a :

$$N_0^+ < \infty.$$



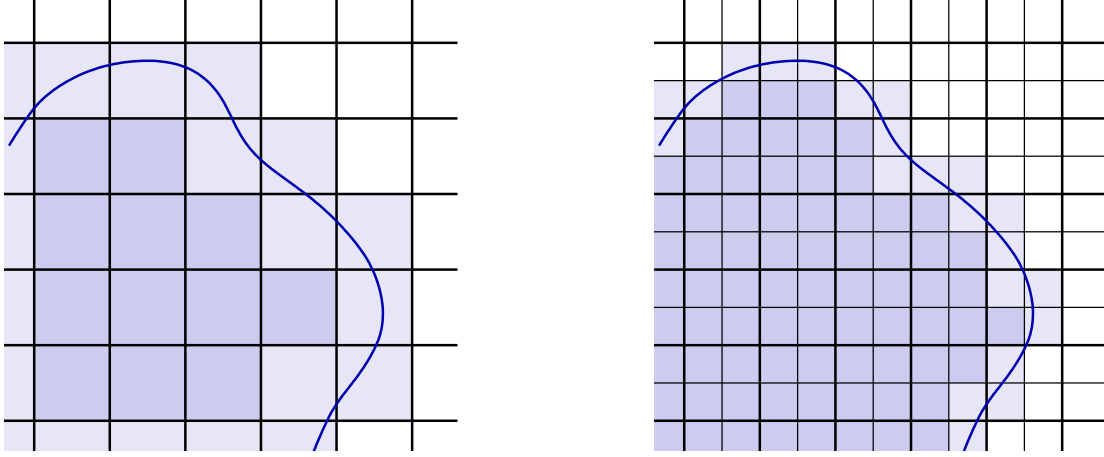
Passons ensuite au pavage suivant P_1 , plus fin que P_0 , et comptons de manière similaire :

$$N_1^- := \text{Card} \{ \text{pavés de } P_1 \text{ contenus dans } A \},$$

$$N_1^+ := \text{Card} \{ \text{pavés de } P_1 \text{ intersectant } A \}.$$

Pour la même raison, et comme chaque pavé de P_1 est d'aire $\frac{1}{2^2}$:

$$\frac{1}{2^2} N_1^- \leq \overset{?}{\text{aire}(A)} \leq \frac{1}{2^2} N_1^+.$$



Mais comme tous les sous-pavés d'un pavé contenu dans A sont toujours *aussi* contenus dans A , et comme les sous-pavés d'un pavé intersectant A n'intersectent *pas toujours* A , on déduit deux inégalités cruciales :

$$N_0^- \leq \frac{1}{2^2} N_1^- \quad \text{et} \quad \frac{1}{2^2} N_1^+ \leq N_0^+,$$

ce qui confirme l'intuition géométrique d'après laquelle la génération 1 approxime mieux l'«aire» de A que la génération 0 :

$$N_0^- \leq \frac{1}{2^2} N_1^- \leq \overset{?}{\text{aire}(A)} \leq \frac{1}{2^2} N_1^+ \leq N_0^+,$$

Sur cette pauvre aire (en question), l'étau se resserre si on itère. En effet, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, avec les deux comptages :

$$\begin{aligned} N_k^- &:= \text{Card} \{ \text{pavés de } P_k \text{ contenus dans } A \}, \\ N_k^+ &:= \text{Card} \{ \text{pavés de } P_k \text{ intersectant } A \}, \end{aligned}$$

le même raisonnement montre que lors du passage de P_{k-1} à P_k , l'approximation s'améliore nécessairement :

$$\frac{1}{2^{2(k-1)}} N_{k-1}^- \leq \frac{1}{2^{2k}} N_k^- \leq \overset{?}{\text{aire}(A)} \leq \frac{1}{2^{2k}} N_k^+ \leq \frac{1}{2^{2(k-1)}} N_{k-1}^+,$$

puisque tout pavé de P_{k-1} qui est inclus dans A donne 2^2 pavés de P_k *aussi* inclus dans A — ce qui démontre la première inégalité —, et puisque tout pavé de P_{k-1} qui rencontre A donne *au plus* 2^2 pavés de P_k qui rencontrent A — ce qui démontre la dernière inégalité.

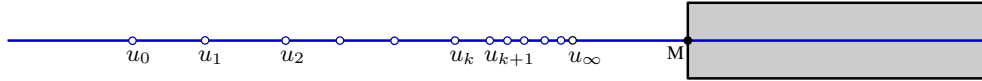
On obtient par conséquent à gauche une première suite de valeurs approchées de l'«aire» de A , première suite qui est *croissante et majorée* (par $N_0^+ < \infty$) :

$$\frac{1}{2^0} N_0^- \leq \frac{1}{2^2} N_1^- \leq \dots \leq \frac{1}{2^{2k}} N_k^- \leq \dots \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \text{?},$$

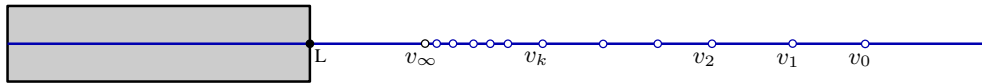
et à droite, on obtient une deuxième suite de valeurs approchées par excès qui est *décroissante et minorée* (par 0, puisque tout est positif) :

$$? \quad \overleftarrow{\lim}_{k \rightarrow \infty} \cdots \frac{1}{2^{2k}} N_k^+ \leq \cdots \leq \frac{1}{2^2} N_1^+ \leq \frac{1}{2^0} N_0^+.$$

Or le Cours d'Analyse a démontré qu'une suite numérique $(u_k)_{k=0}^\infty$ croissante $u_k \leq u_{k+1}$ et majorée $u_k \leq M < \infty$ possède toujours une limite $u_\infty \leq M$.



Inversement, on sait aussi qu'une suite numérique $(v_k)_{k=0}^\infty$ décroissante $v_{k+1} \leq v_k$ et minorée $v_k \geq L > -\infty$ possède toujours une limite $v_\infty \geq L$.

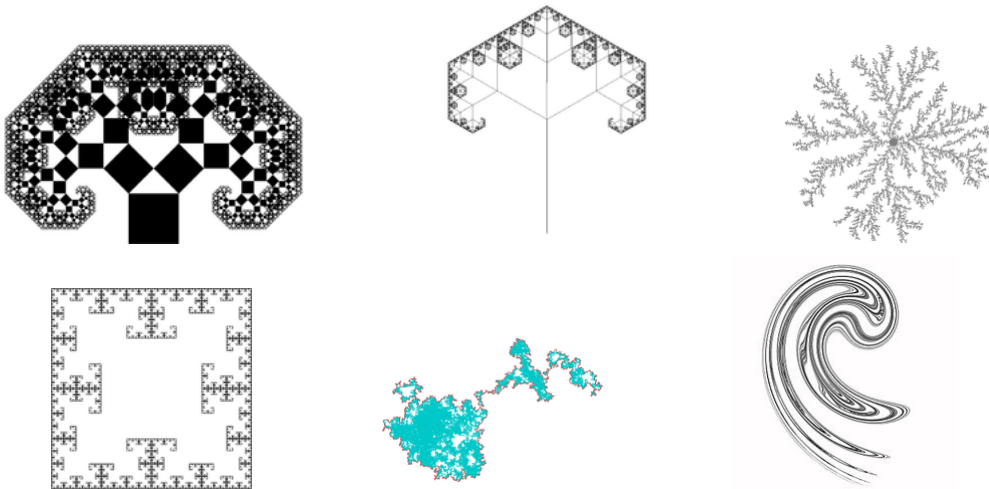


Grâce à ces deux théorèmes fondamentaux dont la démonstration rigoureuse remonte au début du 19^{ème} siècle, nous déduisons que nos deux suites approximantes ont une limite :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{2k}} N_k^- =: \text{aire}^-(A) \leq \overset{?}{\text{aire}(A)} \leq \text{aire}^+(A) := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{2k}} N_k^+,$$

et s'il doit exister une « *aire* » ou « *mesure de surface* » de A , elle est nécessairement *comprise* — pour des raisons géométriques évidentes — entre ces deux limites.

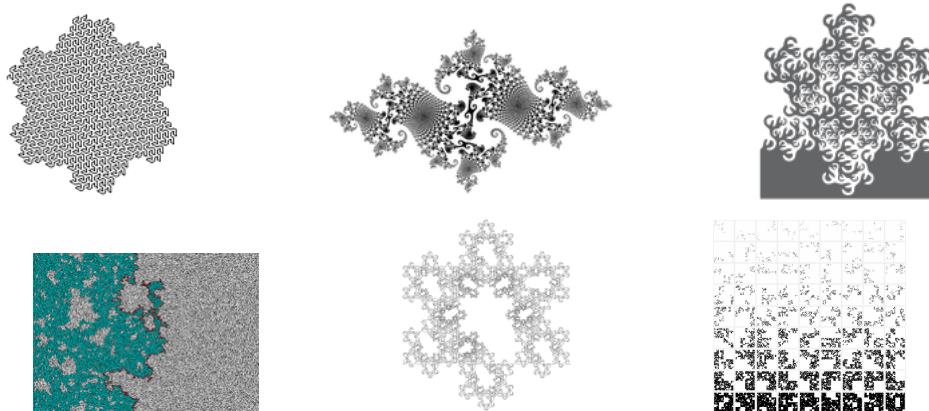
Terminologie 3.1. La limite croissante à gauche $\text{aire}^-(A)$ sera appelée *aire inférieure* de A , et la limite décroissante à droite $\text{aire}^+(A)$ sera appelée *aire supérieure* de A .



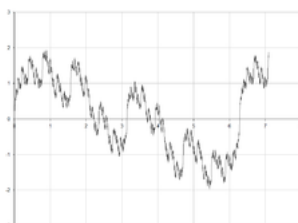
Malheureusement, il existe certains sous-ensembles bizarroïdes $A \subset \mathbb{R}^2$ — penser à des fractals, ou à des taches d'encre transpercées d'acide à toutes les échelles microscopiques — pour lesquels ces deux aires inférieure et supérieure diffèrent :

$$\text{aire}^-(A) \overset{\text{strictement}}{<} \text{aire}^+(A).$$

L'étude de tels ensembles va bien au-delà du niveau de ce cours, dans lequel tous les ensembles A considérés auront des frontières très simples et très régulières, et pour lesquels il est assez aisé de vérifier que ces deux aires inférieure et supérieure *coïncident*.



En tout état de cause, nous avons l'intuition que la plupart du temps, les approximations convergent vers une unique valeur.



Oublions, donc, ces figures fantomatiques qui semblent mystérieuses.

Définition 3.2. On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ du plan est *quarrable* si son aire inférieure est égale à son aire supérieure :

$$\text{aire}^-(A) = \text{aire}^+(A).$$

Terminologie 3.3. La valeur commune s'appelle alors l'*aire* de A :

$$\text{aire}(A) := \text{aire}^-(A) = \text{aire}^+(A).$$

Évidemment, l'ensemble vide $\emptyset \subset \mathbb{R}^2$ est quarrable, d'aire nulle :

$$\text{aire}(\emptyset) = 0.$$

Par des arguments mathématiques rigoureux — et arides —, on démontre des propriétés naturelles et intuitivement évidentes, que nous admettrons.

Lemme 3.4. Pour tout entier $k \geq 0$, tout pavé de profondeur k est quarrable, et a pour mesure de surface :

$$\text{aire}\left(\left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right] \times \left[\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}\right]\right) = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{2k}}. \quad \square$$

Plus généralement, considérons un rectangle semi-ouvert quelconque.

Lemme 3.5. Pour tous nombres réels :

$$-\infty < a < b < \infty \quad \text{et} \quad -\infty < c < d < \infty,$$

le rectangle $[a, b[\times [c, d[$ est quarrable, et a pour mesure de surface :

$$\text{aire}([a, b[\times [c, d[) = (b - a)(d - c). \quad \square$$

Il en va de même pour le rectangle fermé $[a, b] \times [c, d]$.

Grâce à ces énoncés élémentaires, l'ensemble :

$$\mathcal{Q} := \{A \subset \mathbb{R}^2 \text{ partie quarrable}\} \neq \emptyset$$

est non vide. Par construction, il existe alors une application bien définie :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ A &\longmapsto \text{aire}(A), \end{aligned}$$

qui attribue la valeur 0 à $\emptyset$, et la valeur 1 à tout pavé $[m, m+1[\times [p, p+1[$ de profondeur 1.

Proposition 3.6. *Si $A, B \in \mathcal{Q}$ sont deux parties quarrables du plan, alors :*

- (1) $A \cup B \in \mathcal{Q}$;
- (2) $A \cap B \in \mathcal{Q}$;
- (3) $A \cap B = \emptyset \implies \text{aire}(A \cup B) = \text{aire}(A) + \text{aire}(B)$;
- (4) $A \subset B \implies \text{aire}(A) \leq \text{aire}(B)$;
- (5) $\text{aire}(\Phi(A)) = \text{aire}(A)$ pour toute isométrie euclidienne Φ de $\mathbb{R}^2$. □

Rappelons que les isométries euclidiennes sont tout simplement des compositions de translations et de rotations dans le plan.

(3') Plus généralement, sans l'hypothèse $A \cap B = \emptyset$, on a :

$$\text{aire}(A \cup B) = \text{aire}(A) + \text{aire}(B) - \text{aire}(A \cap B).$$

4. Domaines de $\mathbb{R}^2$ à bords réguliers par morceaux

Dans les exercices mathématiques de calcul intégral, et dans les applications à la physique, les sous-ensembles $A \subset \mathbb{R}^2$ seront des *domaines* :

$$D \subset \mathbb{R}^2,$$

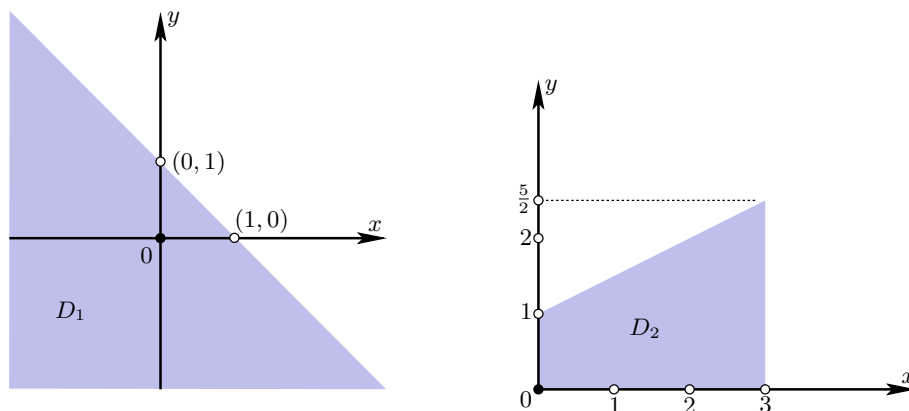
c'est-à-dire des ouverts connexes, toujours représentés par un nombre fini d'inégalités explicites :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_1(x, y) < 0, d_2(x, y) < 0, \dots, d_K(x, y) < 0\},$$

où les fonctions $d_k(x, y)$ pour $1 \leq k \leq K$ seront concrètes et compréhensibles. Donnons deux premiers exemples.

$$\begin{aligned} D_1 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1\}, \\ D_2 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y, 0 < x < 3, 2y - 2 < x\}. \end{aligned}$$

Ce premier domaine D_1 est un demi-plan, il n'est pas borné, donc nous l'écartons.



En pratique, pour dessiner un domaine de cette espèce :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_k(x, y) < 0, \quad k = 1, \dots, K\},$$

on trace toutes les courbes :

$$\gamma_k := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_k(x, y) = 0\} \quad (1 \leq k \leq K),$$

dans le plan. Pour D_1 , on a une unique droite $\{x + y - 1 = 0\}$, et pour D_2 , on a 4 droites :

$$\{y = 0\}, \quad \{x = 0\}, \quad \{x - 3 = 0\}, \quad \{-x + 2y - 2 = 0\}.$$

Rappelons que pour représenter une droite d'équation $ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$, on marque son point $(0, -\frac{c}{b})$ d'intersection avec l'axe des ordonnées $\{x = 0\}$, son point $(-\frac{c}{a}, 0)$ d'intersection avec l'axe des abscisses $\{y = 0\}$, puis on utilise une règle pour tracer la droite entre ces deux points.

Ensuite, chaque courbe $\{d_k(x, y) = 0\}$ délimite, comme frontière commune, deux parties du plan :

$$\{d_k(x, y) < 0\} \quad \text{et} \quad \{d_k(x, y) > 0\},$$

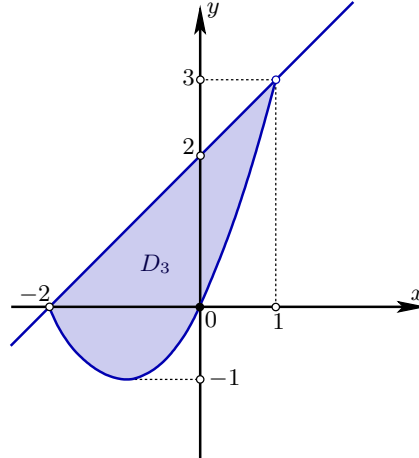
puis on repère la partie où la fonction d_k est (strictement) négative, et enfin, on *hachure* ce lieu. Le domaine $D = \bigcap_k \{d_k < 0\}$ est alors l'*intersection* des régions hachurées.

Évidemment, il faut voir/ré-écrire :

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y < 0, -x < 0, x - 3 < 0, -x + 2y - 2 < 0\}.$$

D'ailleurs, le sens des inégalités $d_k < 0$ n'a pas vraiment d'importance, on peut toujours s'y ramener, par exemple :

$$f - 5g > h \quad \Longleftrightarrow \quad -f + 5g + h < 0.$$



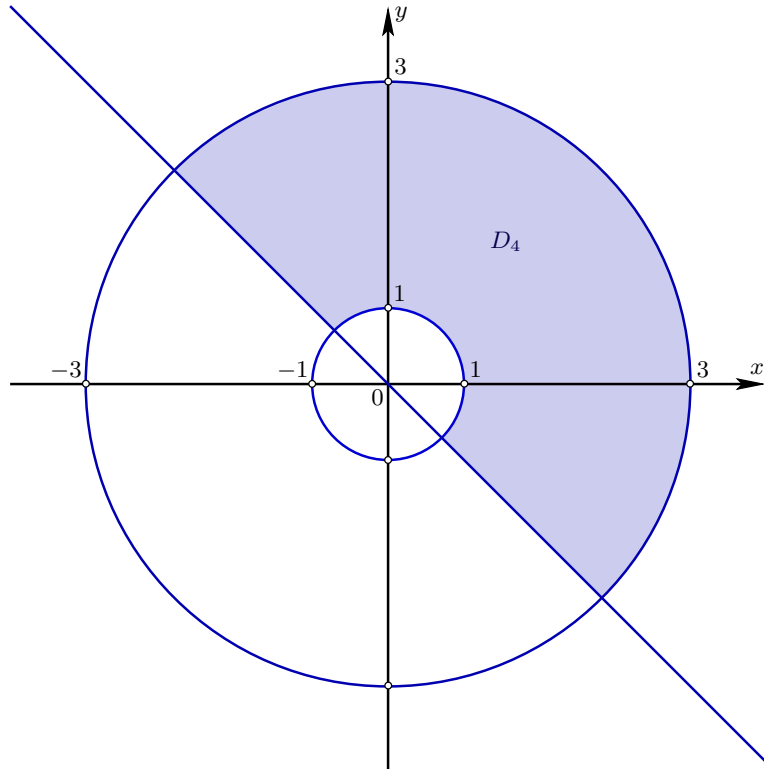
Voici un troisième exemple :

$$D_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2x < y < x + 2\},$$

que l'on peut ré-écrire :

$$\{(x + 1)^2 - 1 < y\} \cap \{y < x + 2\},$$

comme intersection de la partie au-dessus d'une parabole d'axe la droite $\{x = -1\}$ et au-dessous d'une droite de pente égale à 1. Ici, le bord ou la frontière ∂D_3 de ce secteur parabolique est constitué d'un segment et d'un arc de parabole.



Encore un autre exemple, un anneau scié :

$$D_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 3, x + y > 0\}.$$

Le bord ∂D_4 de ce demi-anneau est constitué de deux demi-cercles concentriques, et de deux segments de droites alignés.

Généralement, étant donné un domaine $D = \{d_1 < 0, \dots, d_K < 0\}$ comme ci-dessus, son bord ∂D est contenu dans la réunion finie des courbes :

$$\gamma_k := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_k(x, y) = 0\} \quad (1 \leq k \leq K).$$

Théorème 4.1. *Tout domaine borné du plan de la forme :*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_1(x, y) < 0, d_2(x, y) < 0, \dots, d_K(x, y) < 0\},$$

où $d_1, d_2, \dots, d_K$ sont des fonctions continûment différentiables, est quarrable, avec :

$$\text{aire}(D) = \text{aire}(D \cup \partial D). \quad \square$$

Autrement dit, le bord compte pour du beurre — miam ! Bien que la démonstration ne soit pas accessible avec les outils présentés dans ce cours, expliquons l'hypothèse concernant les fonctions $d_1, d_2, \dots, d_K$.

Une fonction :

$$d : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

est dite *continûment différentiable* si ses deux dérivées partielles :

$$\frac{\partial d}{\partial x}(x, y) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d(x + \varepsilon, y) - d(x, y)}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \frac{\partial d}{\partial y}(x, y) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d(x, y + \varepsilon) - d(x, y)}{\varepsilon}$$

existent en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et sont continues sur $\mathbb{R}^2$. En pratique, cela sera toujours le cas. Plus bas, la Définition 7.1 explicitera précisément ce qu'on entend par *continuité* d'une fonction de deux variables.

5. μ -partition d'un ensemble quarrable

Si, comme plus haut, $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ désigne l'ensemble des parties quarrables du plan euclidien $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire celles auxquelles on peut attribuer une aire, nous abrégerons dorénavant :

$$\mu := \text{aire},$$

la lettre grecque ' μ ' étant l'initiale du mot grec $\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$, signifiant 'mesure'.

Rappelons que tout pavé fermé $[a, a + 1] \times [c, c + 1]$ de côté 1 a pour mesure :

$$(a + 1 - a) (c + 1 - c) = 1 \cdot 1 = 1,$$

et que les parties quarrables $A, B \in \mathcal{Q}$ satisfont la formule :

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Terminologie 5.1. On dira que deux parties quarrables $A, B \in \mathcal{Q}$ sont μ -disjointes quand leur intersection est d'aire nulle :

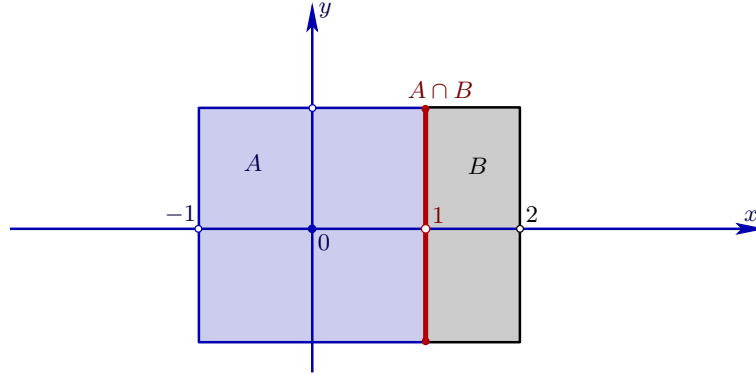
$$0 = \mu(A \cap B).$$

Cette propriété sera parfois notée :

$$\emptyset_\mu = A \cap B.$$

Dans cette circonstance, on a μ -additivité simple :

$$\begin{aligned} A \cap B = \emptyset_\mu &\implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \underbrace{\mu(A \cap B)}_0 \\ &= \mu(A) + \mu(B) - 0. \end{aligned}$$



Puisqu'on peut vérifier que tout segment de droite est d'aire nulle (heureusement !), deux pavés fermés n'ayant qu'un côté en commun satisfont cela, par exemple :

$$A := [-1, 1] \times [-1, 1] \quad \text{et} \quad B := [1, 2] \times [-1, 1],$$

$$A \cap B = \{1\} \times [-1, 1].$$

Définition 5.2. On appelle μ -partition d'une partie quarrable $A \in \mathcal{Q}$ toute famille finie $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de sous-ensembles $A_i \subset A$ satisfaisant :

- (1) $A_i \in \mathcal{Q}$ pour tout indice $1 \leq i \leq n$;
- (2) $A_1 \cup \dots \cup A_i \cup \dots \cup A_n = A$;
- (3) $A_{i_1} \cap A_{i_2} = \emptyset_\mu$, pour tous indices $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$.

En termes plus 'littéraires', une μ -partition de A est constituée d'une famille finie de parties quarrables, deux à deux μ -disjointes, dont la réunion donne A . On a alors évidemment :

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_i) + \dots + \mu(A_n).$$

Définition 5.3. On dira qu'une μ -partition $(A'_{i'})_{1 \leq i' \leq n'}$ de $A \in \mathcal{Q}$ est *plus fine* qu'une autre μ -partition $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ si tout A_i est réunion d'une sous-famille extraite de $(A'_{i'})_{1 \leq i' \leq n'}$, à savoir si pour tout i , il existe $A'_{i'_1}, \dots, A'_{i'_p}$ avec $1 \leq i'_1 < \dots < i'_p \leq n'$ tels que :

$$A_i = A'_{i'_1} \cup \dots \cup A'_{i'_p}.$$

Autrement dit, une μ -partition *plus fine* possède *plus* de morceaux de puzzle.

Dès qu'on connaît deux μ -partitions quelconques de A :

$$(A_i)_{1 \leq i \leq n} \quad \text{et} \quad (B_j)_{1 \leq j \leq m},$$

la famille des intersections :

$$(A_i \cap B_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

est une nouvelle μ -partition de A à $n \cdot m$ morceaux de puzzle, qui est plus fine que chacune des deux μ -partitions données.

Notation 5.4. On notera $\mathcal{P}_\mu(A)$ l'ensemble des μ -partitions de A , et une μ -partition donnée $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ sera notée en abrégé :

$$p := (A_i)_{1 \leq i \leq n}.$$

6. Intégrale double d'une fonction définie sur un ensemble quarrable

Considérons une partie quarrable $A \subset \mathbb{R}^2$, ainsi qu'une fonction *bornée* :

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R}.$$

D'après un théorème d'Analyse, l'infimum et le supremum de f sur A existent, et sont finis :

$$-\infty < m := \inf_{(x,y) \in A} f(x,y) \leq \sup_{(x,y) \in A} f(x,y) =: M < \infty.$$

Étant donné une μ -partition $p = (A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de A , introduisons aussi les infima et les suprema de f sur les A_i :

$$m_i := \inf_{(x,y) \in A_i} f(x,y) \quad \text{et} \quad M_i := \sup_{(x,y) \in A_i} f(x,y).$$

Ensuite, formons les deux sommes de Darboux 2-dimensionnelles :

$$\begin{aligned} s(p) &= s(A_\bullet) := m_1 \mu(A_1) + m_2 \mu(A_2) + \cdots + m_n \mu(A_n), \\ S(p) &= S(A_\bullet) := M_1 \mu(A_1) + M_2 \mu(A_2) + \cdots + M_n \mu(A_n). \end{aligned}$$

Il est clair que :

$$(6.1) \quad s(p) \leq S(p).$$

On peut alors développer la même théorie que celle de l'intégrale de Riemann en dimension 1, via les sommes de Darboux, dont voici, sans démonstrations, les passages importants. Deux propositions principales interviennent.

Proposition 6.2. *Si une μ -partition $(A'_{i'})_{1 \leq i' \leq n'}$ d'un ensemble quarrable $A \subset \mathbb{R}^2$ est plus fine qu'une autre μ -partition $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$, alors :*

$$s(A_i) \leq s(A'_{i'}) \quad \text{et} \quad S(A'_{i'}) \leq S(A_i). \quad \square$$

Cette proposition est absolument cruciale, car elle exprime qu'en raffinant les μ -partitions :

$$s(A_i) \leq s(A'_{i'}) \leq s(A''_{i''}) \leq \cdots \leq \int \int_A f(x,y) \stackrel{?}{dxdy} \leq \cdots \leq S(A''_{i''}) \leq S(A'_{i'}) \leq S(A_i),$$

on a de plus en plus de chances d'approcher la valeur d'une intégrale double de f sur A :

$$\int \int_A f(x,y) \stackrel{?}{\approx} \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \cdot (\text{valeur de } f \text{ sur } A_i),$$

en s'imaginant que si tous les A_i sont assez petits, les valeurs de f sur A_i sont presque constantes :

$$\inf_{A_i} f \approx \text{valeur(s) de } f \text{ sur } A_i \approx \sup_{A_i} f.$$

Bien entendu, ce (misérable) raisonnement 'à la physicienne' sera autoritairement exclu de notre '*mathematics select club*' ! Soyons rigoureux !

La deuxième proposition principale est encore plus cruciale.

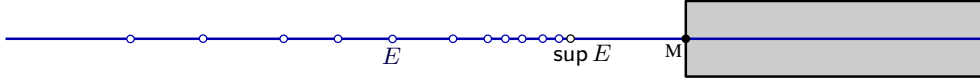
Proposition 6.3. *Étant donné deux μ -partitions quelconques $p \in \mathcal{P}_\mu(A)$ et $q \in \mathcal{P}_\mu(A)$, on a toujours :*

$$s(p) \leq S(q).$$

Preuve. La démonstration est très simple : la μ -partition intersection $p \cap q$ étant à la fois plus fine que p et plus fine que q , la Proposition 6.2 et l'inégalité (6.1) donnent :

$$s(p) \leq s(p \cap q) \leq S(p \cap q) \leq S(q). \quad \square$$

Grâce à cela, l'ensemble des nombres $s(p)$ quand p parcourt $\mathcal{P}_\mu(A)$ est *majoré* par $S(q_0)$, où $q_0 \in \mathcal{P}_\mu(A)$ est fixée quelconque. À présent, rappelons le

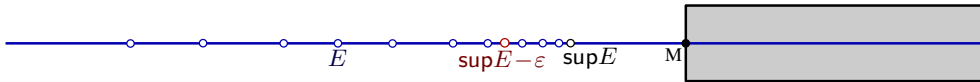


Lemme 6.4. [Borne supérieure] Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de nombres réels qui est borné supérieurement au sens où il existe une constante $M < \infty$ majorant tous ses éléments :

$$x \leq M \quad (\forall x \in E).$$

Alors E admet un supremum :

$$\sup E := \sup_{x \in E} x \leq M. \quad \square$$



Par définition, ce supremum est l'unique nombre réel $\sup E \in \mathbb{R}$ majorant *au mieux* tous les éléments :

$$x \leq \sup E \quad (\forall x \in E),$$

au sens où dès qu'on descend un tout petit peu la barre à droite, à savoir dès qu'on soustrait un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il n'est plus vrai que :

$$\overset{\text{faux}}{x \leq \sup E - \varepsilon} \quad (\forall x \in E).$$

De manière équivalente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ avec $x > \sup E - \varepsilon$. Attention ! En général, $\sup E < M$ strictement : le 'mur' M peut *a priori* être très loin du supremum $\sup E$, comme sur les figures.

Par conséquent, on peut introduire l'*intégrale inférieure* de f sur A :

$$\sigma_f(A) := \sup_{p \in \mathcal{P}_\mu(A)} s(p).$$

Ensuite, de manière symétrique, l'ensemble des nombres $S(q)$ quand q parcourt $\mathcal{P}_\mu(A)$ est *minoré* par $s(p_0)$, où $p_0 \in \mathcal{P}_\mu(A)$ est fixée quelconque.

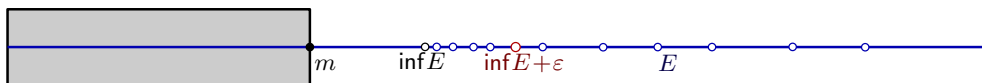


Lemme 6.5. [Borne inférieure] Si $E \subset \mathbb{R}$ est borné inférieurement au sens où il existe une borne finie $m > -\infty$ minorant tous ses éléments :

$$m \leq x \quad (\forall x \in E),$$

alors E admet un infimum :

$$m \leq \inf_{x \in E} x =: \inf E. \quad \square$$



Par définition, cet infimum est l'unique nombre réel $\inf E \in \mathbb{R}$ minorant *au mieux* tous les éléments :

$$\inf E \leq x \quad (\forall x \in E),$$

au sens où dès qu'on remonte un tout petit peu la barre à gauche, à savoir dès qu'on additionne un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il n'est plus vrai que :

$$\inf E + \varepsilon \overset{\text{faux}}{\leq} x \quad (\forall x \in E).$$

Par conséquent, on peut introduire l'*intégrale supérieure de f sur A* :

$$\Sigma_f(A) := \inf_{p \in \mathcal{P}_\mu(A)} S(p).$$

Par construction, on a évidemment :

$$\sigma_f(A) \leq \Sigma_f(A).$$

Définition 6.6. On dit qu'une fonction bornée $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ensemble quarrable $A \subset \mathbb{R}^2$ est *intégrable au sens de Darboux sur A* lorsque son intégrale inférieure coïncide avec son intégrale supérieure :

$$\sigma_f(A) = \Sigma_f(A).$$

On note alors cette valeur commune :

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy,$$

et on la nomme *intégrale double de f sur la partie quarrable A* .

Notation 6.7. L'ensemble des fonctions intégrables sur A sera noté :

$$\text{Int}(A, \mathbb{R}) := \{f: A \rightarrow \mathbb{R} : \text{bornées intégrables}\}.$$

Comme dans la théorie des intégrales de Riemann sur des segments de $\mathbb{R}$, on démontre plusieurs théorèmes fondamentaux.

Théorème 6.8. Soient A et B deux parties quarrables du plan qui sont μ -disjointes :

$$0 = \mu(A \cap B).$$

Pour toute fonction bornée $f: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$, on a l'équivalence :

$$f \text{ est intégrable sur } A \text{ et sur } B \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est intégrable sur } A \cup B.$$

Dans ce cas :

$$\iint_{A \cup B} f(x, y) \, dx dy = \iint_A f(x, y) \, dx dy + \iint_B f(x, y) \, dx dy. \quad \square$$

En élaguant les notations, on peut récrire cela :

$$\iint_{A \cup B} f = \iint_A f + \iint_B f.$$

Ensuite, le théorème suivant montre que l'espace $\text{Int}(A, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Théorème 6.9. *Si f et g sont deux fonctions bornées intégrables sur une partie quarrable $A \subset \mathbb{R}^2$, alors pour tous réels $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la combinaison linéaire :*

$$\lambda f + \mu g \in \text{Int}(A, \mathbb{R})$$

est aussi intégrable sur A , avec :

$$\iint_A (\lambda f(x, y) + \mu g(x, y)) dx dy = \lambda \iint_A f(x, y) dx dy + \mu \iint_A g(x, y) dx dy. \quad \square$$

Avant d'aller plus loin, exprimons un critère d'intégrabilité. Par construction, sur une partie quarrable $A \subset \mathbb{R}^2$, pour toute fonction bornée $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, pour toute paire de μ -partitions $p = (A_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $q = (B_j)_{1 \leq j \leq m}$ de A , on a des inégalités :

$$s(p) \leq \sigma_f(A) \leq \int \int_A^? f \leq \Sigma_f(A) \leq S(q),$$

et pour que $\int \int_A f$ existe, c'est-à-dire pour que $\sigma_f(A) = \Sigma_f(A)$, il faut et il suffit que l'on puisse rendre la différence :

$$S(q) - s(p) \text{ arbitrairement petite.}$$

En remplaçant p et q par la partition plus fine $p \cap q$ qui satisfait :

$$s(p) \leq s(p \cap q) \leq \int \int_A^? f \leq S(p \cap q) \leq S(q),$$

et en considérant $p \cap q$, on déduit le

Lemme 6.10. [Critère d'intégrabilité] *Pour que f soit intégrable (au sens de Darboux) sur A , il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une μ -partition p de A telle que :*

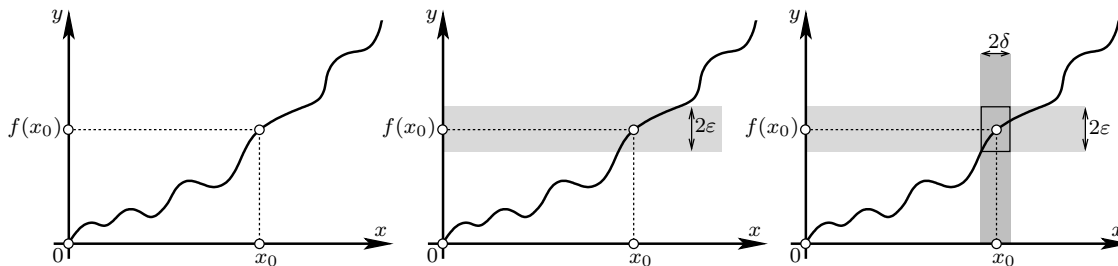
$$S(p) - s(p) \leq \varepsilon. \quad \square$$

7. Fonctions continues sur $D \cup \partial D$

Comme dans la théorie de l'intégrale de Riemann sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, il existe des fonctions bornées sur des ensembles quarrables $A \subset \mathbb{R}^2$ qui ne sont *pas* intégrables, *i.e.* pour lesquelles $\sigma_f(A) < \Sigma_f(A)$. Heureusement, dans pratiquement tous les cas existant en mathématiques et en physique, les fonctions considérées sont *continues* — quitte à redécouper A en un nombre fini de morceaux —, et nous allons démontrer que les fonctions continues *sont* intégrables. Avec cela, on peut élaborer des milliers d'exercices excitants !

Rappelons tout d'abord la définition des fonctions continues d'une variable $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. La définition classique due à Weierstrass stipule que f est continue en un point $x_0 \in]a, b[$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \left(\forall x \quad |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \right).$$



Géométriquement, quelle que soit la finesse $2\varepsilon > 0$ d'une bande horizontale centrée autour de la droite horizontale $\{y = f(x_0)\}$, il existe une bande verticale de largeur 2δ assez petite centrée autour de la droite verticale $\{x = x_0\}$ telle que toute la partie du graphe correspondante *reste entièrement enfermée dans la bande horizontale choisie à l'avance*.

Définition 7.1. Sur un sous-ensemble du plan $E \subset \mathbb{R}^2$, une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *continue en un point fixé* $(x_0, y_0) \in E$ lorsque :

$$(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \quad \text{entraîne} \quad f(x, y) \rightarrow f(x_0, y_0).$$

Ici, x tend vers x_0 et simultanément, y tend vers y_0 . Plus précisément, avec la norme euclidienne :

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| := \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

cela s'exprime rigoureusement par :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(x_0, y_0, \varepsilon) \quad \text{tel que} \quad \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \delta \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon.$$

Définition 7.2. Une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *continue sur* E quand elle est continue en *tout point* $(x_0, y_0) \in E$.

La plupart du temps, nous aurons affaire à des ensembles $E = D \cup \partial D$ qui sont des domaines $D \subset \mathbb{R}^2$ bordés par un nombre fini de courbes $\{d_k(x, y) = 0\}$, et à des fonctions :

$$f: D \cup \partial D \rightarrow \mathbb{R},$$

continues dans D union son bord ∂D . La classe des fonctions continue est stable par les opérations usuelles. Nous admettrons la

Proposition 7.3. (1) *Les fonctions polynomiales :*

$$\sum_{\text{finie}} a_{k,\ell} x^k y^\ell \quad (a_{k,\ell} \in \mathbb{R}),$$

sont continues sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

(2) Si $f: D \cup \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: D \cup \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont des constantes, alors $\lambda f + \mu g$ et $f \cdot g$ sont aussi continues sur $D \cup \partial D$.

(3) Si de plus $g: D \cup \partial D \rightarrow \mathbb{R}^*$ ne s'annule jamais, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur $D \cup \partial D$.

(4) Si $f: D \cup \partial D \rightarrow I \subset \mathbb{R}$ est continue et prend ses valeurs dans un certain sous-intervalle I de $\mathbb{R}$, et si $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue d'une variable, alors $\phi \circ f$ est continue sur $D \cup \partial D$. $\square$

Par exemple :

$$(x, y) \mapsto e^{xy} - 5 \sin(x + y) + 3 \sqrt{x^2 + y^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et n'est pas continue en $(0, 0)$.

Dans les exemples concrets, pendant les séances TD et aussi lors des examens, les fonctions à étudier seront fabriquées comme sommes, produits, quotients non singuliers, compositions, de fonctions classiques élémentaires connues :

$$x^2, \quad y^\ell, \quad e^x, \quad \log y, \quad \sin x, \quad \cos y, \quad \cosh x, \quad \sinh y, \quad \sqrt{x}, \quad \sqrt[\ell]{y}, \quad \text{etc.},$$

et seront continues dans les domaines $D \cup \partial D$ jusqu'à leur bord ∂D . La plupart du temps, on se contentera de vérifier qu'elles sont bien définies, *e.g.* qu'on ne divise pas par 0, qu'on ne prend pas la racine carrée ou le logarithme d'un nombre < 0 , *etc.*

Notre objectif, maintenant, est de démontrer que les fonctions continues $f: D \cup \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ définies sur des domaines-types sont intégrables. Une section préliminaire est nécessaire.

8. Sous-ensembles compacts du plan $\mathbb{R}^2$

En cours de Topologie Générale (niveau L2 ou L3), on démontre que les domaines bornés $D \cup \partial D$ avec leur bord ∂D comme ci-dessus sont des ensembles *fermés*. On peut prendre comme définition le

Théorème 8.1. [Admis] Pour un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$, on a l'équivalence :

$$E \text{ est compact} \quad \Longleftrightarrow \quad E \text{ est fermé et borné.} \quad \square$$

Le concept d'ensemble compact est très important dans toutes les mathématiques actuelles. Mais qu'entend-on par « fermé » ?

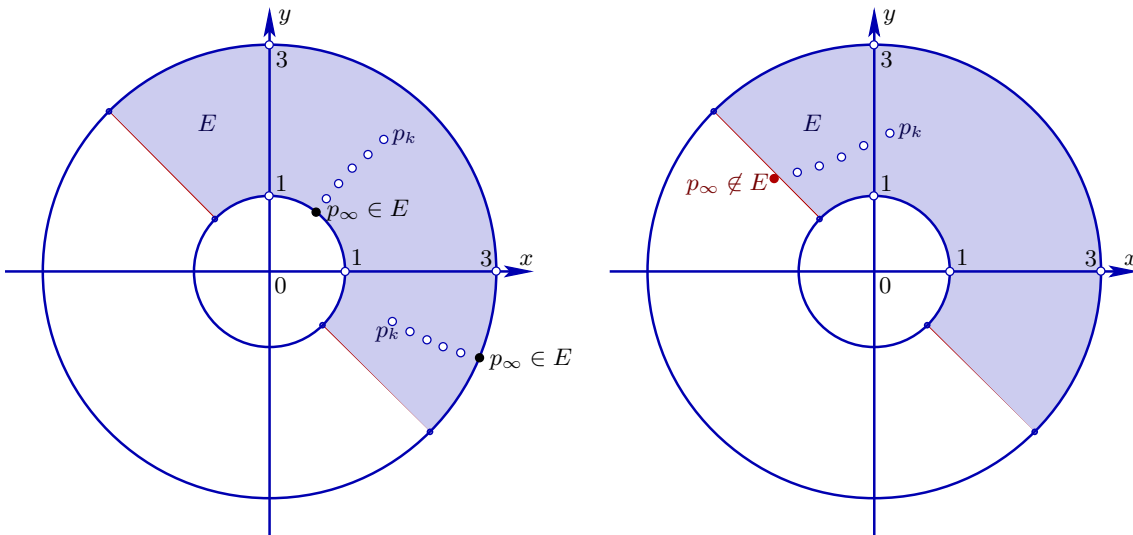
Définition 8.2. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ est dit *fermé* si, pour toute suite de points :

$$(p_k)_{k=1}^\infty, \quad p_k \in E,$$

qui converge vers un certain point $p_\infty \in \mathbb{R}^2$, on a encore :

$$p_\infty \in E.$$

Autrement dit, les suites de points de E ne peuvent s'échapper de E : caserne !



Par (contre-)exemple, le demi-anneau semi-fermé et semi-ouvert :

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3, x + y > 0\}$$

n'est *pas* fermé (partout) — noter les deux inégalités faibles ' $\leq$ ', distinctes de l'inégalité stricte ' $>$ '. En effet, si une suite $(p_k)_{k=1}^\infty$ tend vers un point p_∞ d'un des deux demi-cercles (figure de gauche), on a encore $p_\infty \in E$, car l'inégalité est faible. Mais si p_∞ est sur l'un des deux segments (figure de droite), on a :

$$p_\infty \notin E,$$

car l'inégalité $x + y > 0$ est stricte, donc la droite $\{x + y = 0\} \cap E = \emptyset$.

Définition 8.3. La *fermeture* (ou *adhérence*) $\overline{E}$ d'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ est la réunion de tous les points $p_\infty \in \mathbb{R}^2$ qui sont limites :

$$p_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k$$

de suites quelconques de points $p_k \in E$ convergeant dans $\mathbb{R}^2$.

Intuitivement, on ajoute à E tous les points qui se trouvent au bord. Par exemple — noter le changement pour la dernière inégalité — :

$$\overline{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3, x + y \geq 0\}.$$

En général, il suffit de remplacer les inégalités strictes par des inégalités faibles. Pour nous, l'énoncé utile sera le suivant.

Théorème 8.4. [Admis] *La fermeture d'un domaine borné défini par des fonctions continûment différentiables :*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_1(x, y) < 0, \dots, d_K(x, y) < 0\},$$

est :

$$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_1(x, y) \leq 0, \dots, d_K(x, y) \leq 0\}.$$

De plus son bord est contenu — souvent strictement — dans la réunion des courbes :

$$\partial D := \overline{D} \setminus D \subset \bigcup_{1 \leq k \leq K} \{d_k(x, y) = 0\}. \quad \square$$

Ainsi, nous étudierons des domaines bornés $D \subset \mathbb{R}^2$ dont la fermeture $\overline{D} = D \cup \partial D$ est un sous-ensemble *compact* de $\mathbb{R}^2$. Ici, le mot « compact » suggère l'idée d'objet bien délimité, sans passoire, empoignable, visible, concret.

Théorème 8.5. [Admis] *Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble compact, i.e. fermé et borné. Alors toute fonction continue $f \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$ sur A est en fait uniformément continue sur A .*

Ce concept de *continuité uniforme* est aussi très important en Analyse. Il exprime que le $\delta = \delta(x_0, y_0, \varepsilon)$ dans la condition de continuité de f en un point $(x_0, y_0) \in A$:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(x_0, y_0, \varepsilon) > 0$ tel que $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \delta \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon$,
ne dépend en fait *pas* de $(x_0, y_0) \in A$, au sens de la

Définition 8.6. Une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur une sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$ est dite *uniformément continue* si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{tel que} \quad \left(\begin{array}{l} \forall (x, y) \in A \quad \forall (x', y') \in A \\ \|(x, y) - (x', y')\| \leq \delta \implies |f(x, y) - f(x', y')| \leq \varepsilon \end{array} \right).$$

Toute fonction uniformément continue est continue, mais l'implication générale inverse :

$$f \text{ continue} \implies f \text{ uniformément continue}$$

n'est vraie que pour des fonctions définies sur des sous-ensembles compacts $A \subset \mathbb{R}^2$, ce que dit le théorème ci-dessus.

Un deuxième théorème préliminaire est nécessaire.

Théorème 8.7. *Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble compact, et soit $f \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$ une fonction continue. Alors :*

- (1) *L'image $f(A) \subset \mathbb{R}$ est aussi un sous-ensemble compact — i.e. fermé et borné ;*
- (2) *Il existe $p_- \in A$ et $p_+ \in A$ tels que :*

$$f(p_-) = \inf_{q \in A} f(q) \quad \text{et} \quad f(p_+) = \sup_{q \in A} f(q). \quad \square$$

Cette deuxième propriété exprime que les bornes inférieure et supérieure d'une fonction continue sont *atteintes* — nul besoin de prendre une limite — en certains points du compact.

9. Intégrale double d'une fonction continue sur un compact quarrable

Nous pouvons enfin énoncer et démontrer le théorème fondamental de ce chapitre.

Théorème 9.1. *Toute fonction continue sur un compact quarrable y est intégrable.*

Démonstration. À tout $\varepsilon > 0$, la continuité uniforme de f sur A fait correspondre un $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que :

$$\|(x, y) - (x', y')\| \leq \delta \implies |f(x, y) - f(x', y')| \leq \varepsilon.$$

Puisque A est quarrable, il existe une μ -partition $p = (A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de A dont les constituants A_i sont tous de diamètre inférieur à δ . Il suffit en effet de prendre les intersections de A avec un pavage P_k de profondeur k assez grande pour que la diagonale de ces pavés carrés satisfasse $\sqrt{2} \frac{1}{2^k} \leq \delta$. Quitte à ajouter la frontière de ces pavés, qui est d'aire nulle, nous pouvons supposer que tous les A_i sont fermés, donc compacts.

Alors sur chaque A_i pour $1 \leq i \leq n$, le Théorème 8.7 garantit que f atteint ses bornes inférieure et supérieure :

$$\begin{aligned} \exists (x_i^-, y_i^-) \in A_i, \quad m_i &:= f(x_i^-, y_i^-) = \inf_{A_i} f, \\ \exists (x_i^+, y_i^+) \in A_i, \quad M_i &:= f(x_i^+, y_i^+) = \sup_{A_i} f. \end{aligned}$$

Or puisque le diamètre de A_i est inférieur à δ , on a :

$$\|(x_i^-, y_i^-) - (x_i^+, y_i^+)\| \leq \delta \implies (0 \leq) M_i - m_i \leq \varepsilon.$$

Il en résulte, pour cette μ -partition p :

$$\begin{aligned} S(p) - s(p) &= \sum_{i=1}^n M_i \mu(A_i) - \sum_{i=1}^n m_i \mu(A_i) \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \\ &= \varepsilon \mu(A_1 + \cdots + A_i + \cdots + A_n) = \varepsilon \mu(A), \end{aligned}$$

et comme $\varepsilon \mu(A)$ est arbitrairement petit si $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, puisque $\mu(A)$ est une constante, le Critère d'intégrabilité 6.10 est vérifié. Ceci conclut la démonstration de ce théorème fondamental. $\square$

10. Valeur absolue d'une intégrale double et formule de la moyenne

En théorie de l'intégration, les inégalités sont un outil très fréquemment utile.

Théorème 10.1. *Si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur une partie quarrable $A \subset \mathbb{R}^2$, et si $f \geq 0$, alors :*

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy \geq 0.$$

Démonstration. En effet, pour une fonction bornée positive $f: A \rightarrow \mathbb{R}_+$, pour toute μ -partition $p = (A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de A , les bornes inférieures $m_i \geq 0$ de f sur les A_i sont évidemment toutes positives, donc $s(p) \geq 0$, et enfin en prenant le supremum, le résultat reste positif :

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \sigma_f(A) = \sup_{p \in \mathcal{P}_\mu(A)} s(p) \geq 0. \quad \square$$

Corollaire 10.2. *Si f et g sont intégrables sur A , alors :*

$$f \leq g \quad \implies \quad \iint_A f(x, y) \, dx dy \leq \iint_A g(x, y) \, dx dy.$$

Démonstration. En effet, il suffit d'appliquer le théorème précédent à la fonction positive $g - f \geq 0$. $\square$

De la même façon qu'en théorie de l'intégrale de Riemann 1-dimensionnelle, on établit le résultat suivant, exceptionnellement important, en Analyse, en Théorie des nombres, et en Géométrie.

Théorème 10.3. *Si une fonction bornée $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur une partie quarrable $A \subset \mathbb{R}^2$, alors :*

$$\left| \iint_A f(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_A |f(x, y)| \, dx dy. \quad \square$$

Toutefois, dans ce cours de L1 majoritairement concentré sur des calculs exacts, nous l'utiliserons peu souvent.

Voici maintenant ce qu'on appelle la *Première formule de la moyenne*.

Théorème 10.4. *Soit $f \in \text{Int}(A, \mathbb{R})$ une fonction intégrable sur $A \subset \mathbb{R}^2$ quarrable. Alors en posant :*

$$m := \inf_A f \quad \text{et} \quad M := \sup_A f,$$

on a :

$$m \cdot \mu(A) \leq \iint_A f(x, y) \, dx dy \leq M \cdot \mu(A).$$

Démonstration. En effet, $m \mu(A)$ et $M \mu(A)$ sont respectivement les $s(p)$ et $S(p)$ correspondant à la μ -partition $p = A$ réduite à un seul élément, la partie A elle-même tout entière. $\square$

Définition 10.5. Le nombre :

$$\lambda := \frac{1}{\mu(A)} \iint_A f(x, y) \, dx dy$$

se nomme *valeur moyenne* de f sur A .

Si A est une partie compacte du plan, et si f est continue sur A , alors il existe $(x_0, y_0) \in A$ tel que $f(x_0, y_0) = \lambda$ grâce au théorème des valeurs intermédiaires. On obtient ainsi le

Théorème 10.6. Si $A \subset \mathbb{R}^2$ est quarrable et si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, il existe un $(x_0, y_0) \in A$ tel que :

$$\frac{1}{\mu(A)} \iint_A f(x, y) \, dx dy = f(x_0, y_0). \quad \square$$

11. Échantillonnage de Riemann

Un autre point de vue, plus proche de l'esprit original de Bernhard Riemann dans sa thèse d'habilitation soutenue en 1854 à l'Université de Göttingen en Allemagne, mérite d'être présenté.

Comme précédemment, soit $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée définie sur un sous-ensemble quarrable du plan $A \subset \mathbb{R}^2$. Pour toute μ -partition $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de A , nous posons à nouveau :

$$m_i := \inf_{(x,y) \in A_i} f(x, y) \quad \text{et} \quad M_i := \sup_{(x,y) \in A_i} f(x, y).$$

Par définition, le *diamètre* de chaque A_i est le nombre réel positif :

$$\delta_i := \sup_{\substack{(x,y) \in A_i \\ (x',y') \in A_i}} \|(x, y) - (x', y')\|.$$

Définition 11.1. Le *pas* de la μ -partition $p = (A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de A est :

$$\text{pas}(p) := \delta := \max_{1 \leq i \leq n} \delta_i.$$

Maintenant, pour tout indice fixé $1 \leq i \leq n$, choisissons arbitrairement un réel $\theta_i \in [m_i, M_i]$, par exemple :

$$\theta_i := f(x_i, y_i) \quad \text{avec} \quad (x_i, y_i) \in A_i \text{ quelconque,}$$

et introduisons la *somme de Riemann* :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(p) &:= \theta_1 \mu(A_1) + \theta_2 \mu(A_2) + \cdots + \theta_n \mu(A_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \theta_i \mu(A_i). \end{aligned}$$

Puisque $m_i \leq \theta_i \leq M_i$, il est clair que :

$$\sum_{i=1}^n m_i \mu(A_i) \leq \mathcal{R}(p) \leq \sum_{i=1}^n M_i \mu(A_i),$$

c'est-à-dire :

$$s(p) \leq \mathcal{R}(p) \leq S(p).$$

Comme dans la théorie des intégrales de Riemann en dimension 1, on établit le

Théorème 11.2. Si $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur $A \subset \mathbb{R}^2$ quarrable, alors :

$$\lim_{\text{pas}(p) \rightarrow 0} \mathcal{R}(p) = \iint_A f(x, y) dx dy. \quad \square$$

L'intérêt, c'est qu'on approxime la valeur de l'intégrale par des sommes échantillonnées 'au hasard' : chaque morceau A_i 'pèse' :

$$f(x_i, y_i) \cdot \text{aire}(A_i),$$

où $f(x_i, y_i)$ est une valeur de la fonction en un point (x_i, y_i) choisi arbitrairement dans A_i . Quels que soient les choix de valeurs, il y a convergence vers l'intégrale double : c'est remarquable !

Il y a aussi une réciproque à ce résultat, que nous admettrons aussi sans démonstration (austère, trop austère).

Théorème 11.3. Toute fonction intégrable au sens de Riemann :

$$\lim_{\text{pas} \rightarrow 0} \mathcal{R}(p) \text{ existe,}$$

est aussi intégrable (au sens de Darboux), i.e. appartient à $\text{Int}(A, \mathbb{R})$. $\square$

12. Ensembles cubables

Plaçons-nous dans l'espace $\mathbb{R}^3$ de la géométrie euclidienne à 3 dimensions, rapporté à un repère orthonormé $\{0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Appelons *pavé* (semi-ouvert) tout produit d'intervalles :

$$[a, b[\times [c, d[\times [e, f[,$$

avec $a < b, c < d, e < f$ des réels quelconques. Comme dans la Section 2, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère le *pavage de profondeur k* de l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier :

$$P_k := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right[\times \left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k} \right[\times \left[\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k} \right[.$$

Nous voulons donner un sens mathématique précis à la notion intuitive de « *volume* », ou « *étendue* », d'une partie bornée $B \subset \mathbb{R}^3$. Pour $k \in \mathbb{N}$ quelconque, introduisons à cet effet :

$$\begin{aligned} N_k^- &:= \text{Card} \{ \text{pavés de } P_k \text{ contenus dans } B \}, \\ N_k^+ &:= \text{Card} \{ \text{pavés de } P_k \text{ intersectant } B \}. \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue à celui vu en dimension 2 dans la Section 3 donne, pour tout $k \geq 1$:

$$\frac{1}{2^{3(k-1)}} N_{k-1}^- \leq \frac{1}{2^{3k}} N_k^- \leq \frac{1}{2^{3k}} N_k^+ \leq \frac{1}{2^{3(k-1)}} N_{k-1}^+.$$

De la sorte, nous obtenons deux suites :

$$\begin{aligned} \left(\frac{N_k^-}{2^{3k}} \right)_{k \in \mathbb{N}} & \text{ croissante et majorée,} \\ \left(\frac{N_k^+}{2^{3k}} \right)_{k \in \mathbb{N}} & \text{ décroissante et minorée.} \end{aligned}$$

Ces deux suites sont donc convergentes, et nous noterons :

$$\text{Volume}^-(B) := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k^-}{2^{3k}},$$

$$\text{Volume}^+(B) := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k^+}{2^{3k}},$$

quantités que nous nommerons *volume inférieur* de B et *volume supérieur* de B .

Définition 12.1. On dira qu'une partie bornée $B \subset \mathbb{R}^3$ est *cubable* si :

$$\text{Volume}^-(B) = \text{Volume}^+(B).$$

Cette valeur commune s'appellera *volume* de B , et sera abrégée :

$$\text{Volume}(B) \equiv \mu(B).$$

Enfin, l'ensemble des parties cubables de $\mathbb{R}^3$ sera noté :

$$\mathcal{C} := \{B \subset \mathbb{R}^3 : B \text{ est cubable}\}.$$

Maintenant, comme pour les parties quarrables du plan, on démontre :

$$A \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad B \in \mathcal{C} \quad \implies \quad A \cap B \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad A \cup B \in \mathcal{C},$$

et aussi naturellement, que :

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

De plus, on vérifie que :

$$\begin{aligned} (b-a)(d-c)(f-e) &= \mu([a, b[\times [c, d[\times [e, f[) \\ &= \mu([a, b] \times [c, d] \times [e, f]). \end{aligned}$$

13. Signification de l'intégrale double

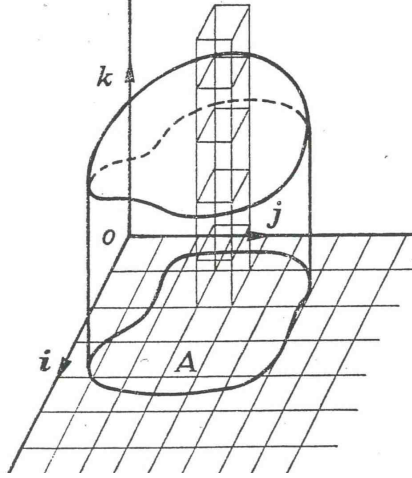
Sur une partie quarrable $A \subset \mathbb{R}^2$, soit une fonction à valeurs réelles positives :

$$A \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}_+.$$

Introduisons l'*hypographe* de f :

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

et étudions les volumes inférieur et supérieur de cet ensemble B , au moyen des pavages P_k de l'espace $\mathbb{R}^3$.



Tout pavé inclus dans B se projette orthogonalement sur $\mathbb{R}^2$ en un pavé-plan inclus dans A . Tout pavé qui rencontre B se projette en un pavé-plan qui rencontre A .

D'autre part, les intersections avec A des pavés-plans de profondeur k constituent une μ -partition de A , que l'on désignera par :

$$p_k \in \mathcal{P}_\mu(A).$$

À partir de ces remarques, il est aisé de se convaincre que :

$$\frac{N_k^-}{2^{3k}} \leq s(p_k) \leq S(p_k) \leq \frac{N_k^+}{2^{3k}},$$

d'où il résulte, en laissant $k \rightarrow \infty$, que :

$$\text{Volume}^-(B) \leq \sigma_f(A) \leq \Sigma_f(A) \leq \text{Volume}^+(B).$$

De plus, comme la frontière de A a une aire nulle, la réunion des pavés-plans de profondeur k qui rencontrent cette frontière possède une aire qui tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$. On peut alors démontrer rigoureusement que :

$$\text{Volume}^-(B) = \sigma_f(A) \quad \text{et} \quad \Sigma_f(A) = \text{Volume}^+(B).$$

Il en découle l'équivalence suivante.

Théorème 13.1. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ une partie quarrable, et soit $f: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive bornée. Pour que f soit intégrable sur A , il faut et il suffit que son hypographe :

$$B := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, 0 \leq z \leq f(x, y) \right\},$$

soit cubable. Dans ce cas :

$$\text{Volume}(B) = \mu(B) = \iint_A f(x, y) \, dx dy.$$

□

14. Calculs d'intégrales doubles sur un pavé compact

Soit un pavé fermé (donc compact) :

$$A := [a, b] \times [c, d],$$

avec des réels :

$$-\infty < a < b < \infty \quad \text{et} \quad -\infty < c < d < \infty.$$

Nous nous proposons de ramener le calcul de l'intégrale double :

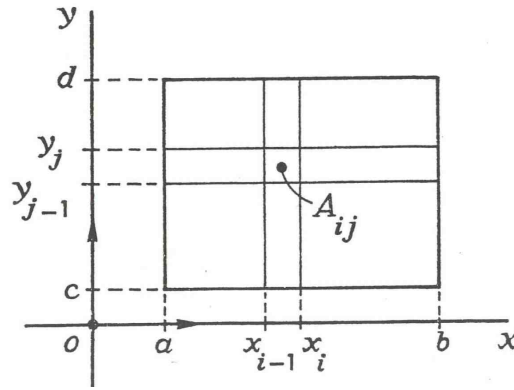
$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) \, dx dy$$

d'une fonction continue $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ à deux calculs d'intégrales simples. À cette fin, effectuons une μ -partition $p = (A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ de ce pavé A en les $n \cdot m$ sous-pavés :

$$A_{i,j} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m),$$

associés à deux subdivisions arbitraires des deux intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$:

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = b, \\ c &= y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{m-1} < y_m < y_{m+1} = d. \end{aligned}$$



Introduisons aussi les infima et les suprema :

$$m_{i,j} := \inf_{(x,y) \in A_{i,j}} f(x,y) \quad \text{et} \quad M_{i,j} := \sup_{(x,y) \in A_{i,j}} f(x,y).$$

Nous allons utiliser la définition de l'intégrale double qui passe par les sommes de Riemann. Soient des nombres arbitraires :

$$m_{i,j} \leq \theta_{i,j} \leq M_{i,j},$$

que nous choisirons plus tard, et envisageons, pour la μ -partition $p = (A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ de $A = [a, b] \times [c, d]$, la somme de Riemann :

$$\mathcal{R}(p) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) \cdot \theta_{i,j}.$$

Nous pouvons alors réorganiser cette sommation en deux moments successifs, dont le premier est :

$$\mathcal{R}(p) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sum_{j=1}^m (y_j - y_{j-1}) \theta_{i,j}.$$

Quand on fixe l'indice i , pour tout j avec $1 \leq j \leq m$, nous décidons de choisir pour $\theta_{i,j}$ la valeur moyenne de la fonction continue $y \mapsto f(x_i, y)$ dans l'intervalle $[y_{j-1}, y_j]$:

$$\theta_{i,j} := \frac{1}{y_j - y_{j-1}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_i, y) \, dy.$$

Alors d'après la règle de Chasles pour les intégrales, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (y_j - y_{j-1}) \theta_{i,j} &= \sum_{j=1}^m \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_i, y) dy \\ &= \int_c^d f(x_i, y) dy. \end{aligned}$$

Il en résulte que si on pose :

$$\psi(x) := \int_c^d f(x, y) dy,$$

on obtient :

$$\mathcal{R}(p) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \psi(x_i).$$

Comme on peut aisément démontrer que cette fonction $x \mapsto \psi(x)$ est continue, donc intégrable, on reconnaît ici à droite une somme de Riemann pour le calcul de l'intégrale simple :

$$\int_a^b \psi(x) dx.$$

Par suite :

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \psi(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dx dy.$$

En résumé, nous avons établi le

Théorème 14.1. *Sur un pavé compact $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, l'intégrale d'une fonction réelle continue vaut :*

$$\begin{aligned} \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \\ &= \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \end{aligned} \quad \square$$

Évidemment, cette deuxième expression s'obtient simplement en échangeant $x \longleftrightarrow y$. Un cas particulier mérite une mention, quand la fonction :

$$f(x, y) = g(x) h(y)$$

est produit de deux fonctions d'une variable. Dans ce cas, on voit que l'intégrale double est le produit de deux intégrales simples indépendantes :

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right).$$

Comme illustration de ce théorème fondamental qui permet de ramener le calcul d'une intégrale double à deux calculs d'intégrales simples, proposons-nous de calculer :

$$I := \iint_{[1,2] \times [0,1]} \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy.$$

D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^2 x \, dx \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} \, dy \\
 &= \int_1^2 x \, dx \left[\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^2 x \log \frac{x^2 + 1}{x^2} \, dx \\
 &= \frac{1}{4} \int_1^4 \log \frac{t + 1}{t} \, dt,
 \end{aligned}$$

[Poser $x^2 = t$]

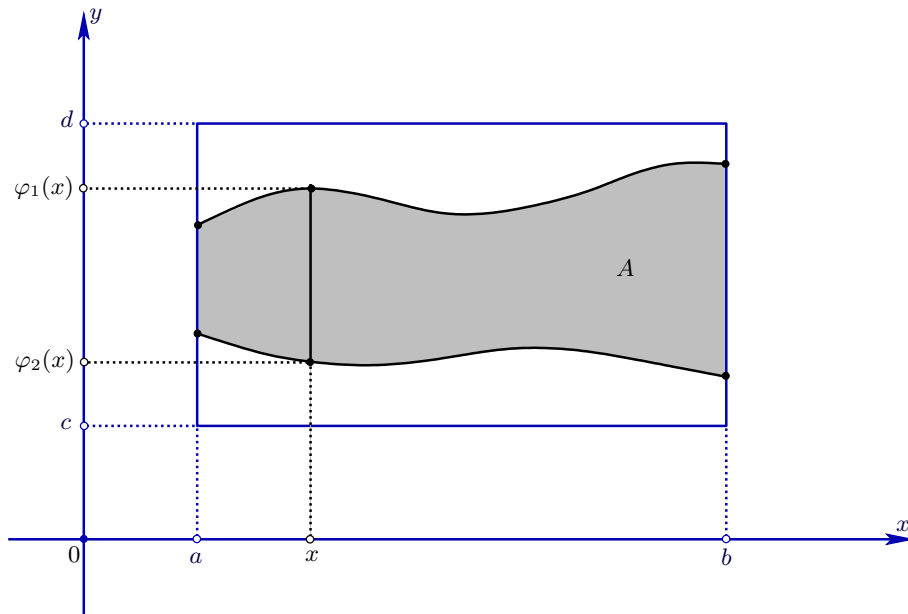
et en connaissant une primitive de $\log t$ qui s'obtient en observant que $(t \log t)' = \log t + 1$, on trouve :

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{4} \left[(t + 1) \log t - t \log t \right]_1^4 \\
 &= \frac{1}{4} \left(5 \log 5 - 4 \log 4 - 2 \log 2 + \underline{1 \log 1} \right) \\
 &= \frac{1}{4} (5 \log 5 - 5 \log 4) \\
 &= \frac{5}{4} \log \frac{5}{4}.
 \end{aligned}$$

□

15. Intégrale double sur un compact simple

Au lieu d'un pavé, nous allons intégrer plus généralement sur un ensemble dont le toit et la cave sont éventuellement bosselés.



C'est-à-dire que nous allons intégrer sur un compact-type de la forme :

$$A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\},$$

où $a < b$ et où φ_1, φ_2 sont deux fonctions numériques *continues* sur l'intervalle $[a, b]$ satisfaisant $\varphi_1 \leq \varphi_2$.

Terminologie 15.1. On dit que A est un *compact simple*.

On peut démontrer — et nous l'admettons — que ces compacts simples A sont quarrables.

Comme sur la figure, désignons alors par c un minorant de φ_1 , et par d un majorant de φ_2 :

$$c \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq d \quad (\forall x \in [a, b]).$$

Ensuite, sur le pavé rectangulaire quarrable :

$$B := [a, b] \times [c, d],$$

soit la nouvelle fonction :

$$g(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & \text{lorsque } (x, y) \in A, \\ 0 & \text{lorsque } (x, y) \notin A. \end{cases}$$

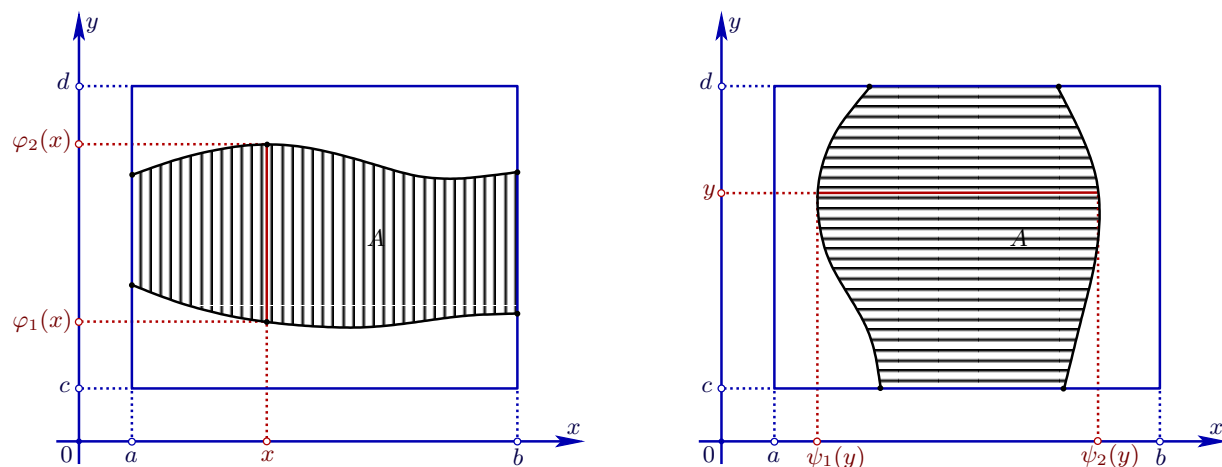
Cette fonction g est intégrable sur B , puisqu'elle l'est séparément sur A , et sur $B \setminus A$, et de plus, on a clairement :

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B g(x, y) dx dy.$$

Or maintenant, on peut calculer cette nouvelle intégrale en appliquant le Théorème 14.1 jusqu'à obtenir :

$$\begin{aligned} \iint_B g(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d g(x, y) dy \\ &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy, \end{aligned}$$

puisque g est identiquement nulle sur les deux intervalles $[c, \varphi_1(x)[$ et $]\varphi_2(x), d]$. En résumé, nous avons établi le



Théorème 15.2. *L'intégration d'une fonction f intégrable sur un compact simple :*

$$A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\},$$

vaut :

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

En échangeant $x \longleftrightarrow y$, avec un compact simple de la forme :

$$A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d \right\},$$

l'intégrale vaut :

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

□

Parfois un compact simple peut s'écrire simultanément sous ces deux formes, à la fois « en piles » :

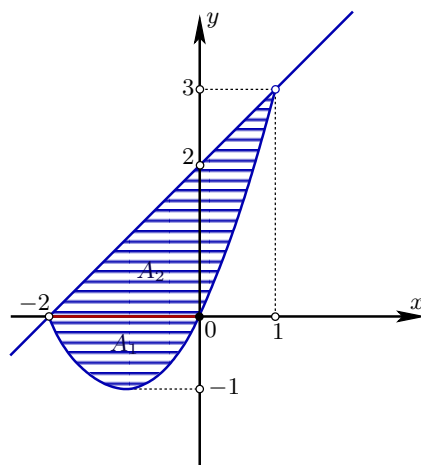
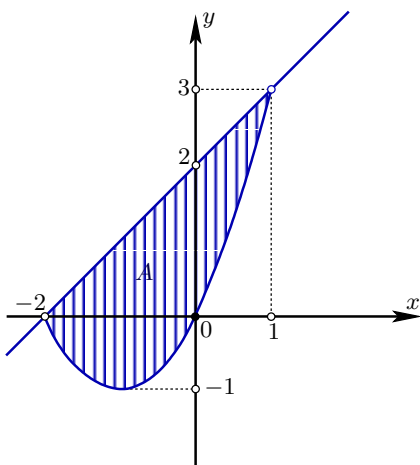
$$\{a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

et aussi « en tranches » :

$$\{\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}.$$

Voici un exemple déjà présenté :

$$A := \overline{D}_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2x \leq y \leq x + 2\}.$$



En appliquant la formule du Théorème 15.2 qui découpe ce secteur parabolique en piles verticales, on calcule aisément :

$$\begin{aligned}
 \text{aire}(A) &= \iint_A dx dy = \int_{-2}^1 dx \int_{x^2+2x}^{x+2} 1 \cdot dy \\
 &= \int_{-2}^1 (x+2 - (x^2+2x)) dx \\
 &= \left[-\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 \\
 &= -\frac{1}{2} + 2 + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{8}{3} \\
 &= \frac{9}{2}.
 \end{aligned}$$

Toutefois, si on désire appliquer le découpage en tranches horizontales, il faut commencer — voir la figure — par décomposer $A = A_1 \cup A_2$ en les deux domaines :

$$\begin{aligned}
 A_1 &:= \{y \leq 0, \ x^2 + 2x - y \leq 0\} \iff \left\{ -1 \leq y \leq 0, \ \frac{-2 - \sqrt{4+4y}}{2} \leq x \leq \frac{-2 + \sqrt{4+4y}}{2} \right\}, \\
 A_2 &= \{y \geq 0, \ y - 2 \leq x \leq -1 + \sqrt{1+y}\},
 \end{aligned}$$

en observant la simplification dans la formule classique qui donne les deux racines de l'équation quadratique $x^2 + 2x - y = 0$:

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4+4y}}{2} = -1 \pm \sqrt{1+y}.$$

Grâce à cette décomposition adaptée, il vient :

$$\begin{aligned}
 \text{aire}(A) &= \text{aire}(A_1) + \text{aire}(A_2) \\
 &= \int_{-1}^0 (-1 + \sqrt{1+y} - (-1 - \sqrt{1+y})) dy + \int_0^3 (-1 + \sqrt{1+y} - (y-2)) dy
 \end{aligned}$$

mais le calcul devient quelque peu plus exigeant :

$$\begin{aligned}
 \text{aire}(A) &= \left[2\frac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^0 + \left[y + \frac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}} - \frac{y^2}{2} \right]_0^3 \\
 &= \frac{4}{3} - 0 + 3 - 0 + \frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} - \frac{9}{2} + 0 \\
 &= \frac{9}{2}.
 \end{aligned}$$

Moralité : Avec les intégrales doubles, il vaut mieux réfléchir avant d'emprunter un chemin de calcul !

16. Simplifications en présence de symétries

Très souvent (*e.g.* en physique), le domaine quarrable A sur lequel on intègre possède une symétrie visible à l'œil nu, c'est-à-dire qu'il existe une application S qui est *involutive* au sens où $S \circ S = \text{Id}$:

$$\begin{aligned}
 S: \quad A &\longrightarrow A \\
 (x, y) &\longmapsto S(x, y),
 \end{aligned}$$

telle que :

$$f(x, y) = f(S(x, y)) \quad (\forall (x, y) \in A).$$

Il en découle que $A = A_1 \cup A_2$ se décompose en deux ensembles quarrables :

$$A_2 = S(A_1) \quad \text{avec} \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset_\mu,$$

et par additivité des intégrales doubles, on obtient :

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = 2 \iint_{A_1} f(x, y) \, dx dy.$$

Si, à l'opposé :

$$-f(x, y) = f(S(x, y)),$$

alors tout disparaît :

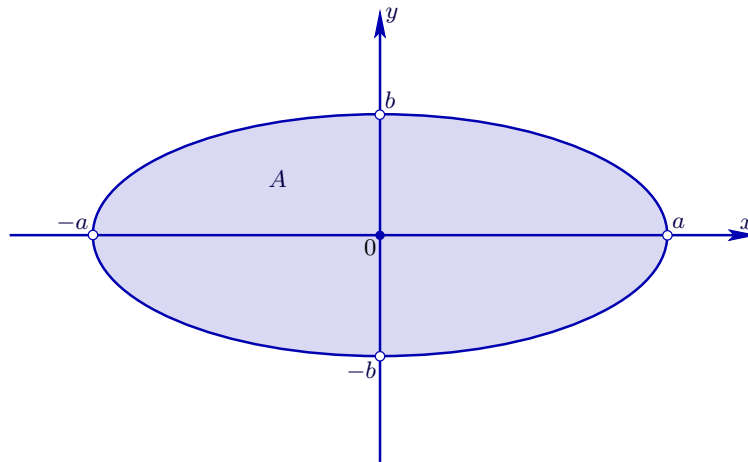
$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = 0.$$

Exemple 16.1. Proposons-nous de calculer l'intégrale double :

$$I := \iint_A (x^2 - y^2) \, dx dy,$$

sur le disque elliptique :

$$A := \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0 \right\}.$$

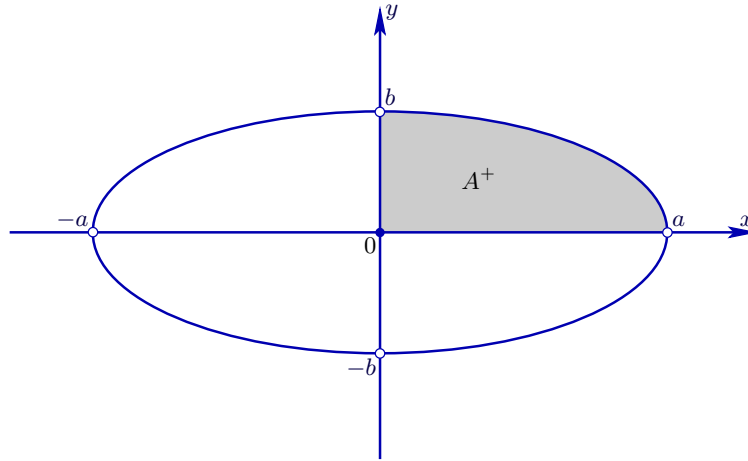


Observons que les pliages autour de $0x$ et autour de $0y$:

$$(x, y) \longmapsto (x, -y) \quad \text{et} \quad (x, y) \longmapsto (-x, y)$$

laissent A invariant, et ne changent pas non plus les valeurs de la fonction à intégrer :

$$x^2 - (-y)^2 = (-x)^2 - y^2 = x^2 - y^2.$$



Par conséquent, en introduisant le quart supérieur droit :

$$A^+ := \left\{ x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0 \right\},$$

il est clair que :

$$I = 4 \iint_{A^+} (x^2 - y^2) dx dy.$$

Ce quadrant elliptique est aussi représenté par les inégalités :

$$0 \leq x \leq a \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

donc en application du Théorème 15.2, il vient :

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^a \left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} (x^2 - y^2) dy \right) dx \\ &= 4 \int_0^a \left[x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dx \\ &= 4 \int_0^a \left\{ x^2 b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{1}{3} b^3 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \right\} dx. \end{aligned}$$

Afin de calculer commodément cette intégrale simple, effectuons le changement de variable :

$$x = a \sin t \quad \text{avec} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right],$$

d'où :

$$dx = a \cos t dt \quad \text{et aussi} \quad \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \cos t,$$

ce qui transforme :

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^2 \sin^2 t b \cos t - \frac{1}{3} b^3 \cos t \underbrace{\cos^2 t}_{1 - \sin^2 t} \right) a \cos t dt \\ &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \left[\left(a^2 + \frac{b^2}{3} \right) \sin^2 t - \frac{b^2}{3} \right] dt. \end{aligned}$$

À ce moment, nous constatons que nous devons intégrer la fonction $\cos^2 t \sin^2 t$, dont il n'est pas immédiat de trouver une primitive. Alors nous devons rappeler le

Théorème 16.2. [Formule de de Moivre] Pour tout nombre réel $t \in \mathbb{R}$, et avec $i := \sqrt{-1}$, on a :

$$e^{it} = \cos t + i \sin t. \quad \square$$

En passant au conjugué complexe :

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t,$$

et en additionnant comme il faut — exercice — on obtient le

Théorème 16.3. [Formules d'Euler] Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{et} \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}. \quad \square$$

Grâce à ces formules, nous pouvons énoncer et démontrer un lemme utile à la poursuite de nos calculs.

Assertion 16.4. On a la formule de trigonométrie :

$$4 \cos^2 t \sin^2 t = \frac{1 - \cos 4t}{2}.$$

Preuve. En passant aux exponentielles complexes grâce aux formules de de Moivre et d'Euler, le calcul devient assez aisé :

$$\begin{aligned} 4 [\cos t \sin t]^2 &= 4 \left[\frac{(e^{it} + e^{-it})}{2} \cdot \frac{(e^{it} - e^{-it})}{2i} \right]^2 = 4 \cdot \frac{[e^{2it} - e^{-2it}]^2}{4 \cdot (-4)} \\ &= \frac{e^{4it} - 2 + e^{-4it}}{-4} = \frac{1 - \cos 4t}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Grâce à cette formule, nous pouvons déterminer la valeur de :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t \sin^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} \, dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Ensuite, grâce à une formule trigonométrique connue (ou que l'on re-démontre en raisonnant d'une manière analogue), il vient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 (1 + \cos 2t) \, dt = \left[2t + \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

Grâce à ces deux calculs d'intégrales laborieux, nous pouvons enfin conclure, via $\frac{1}{4} \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{4}$:

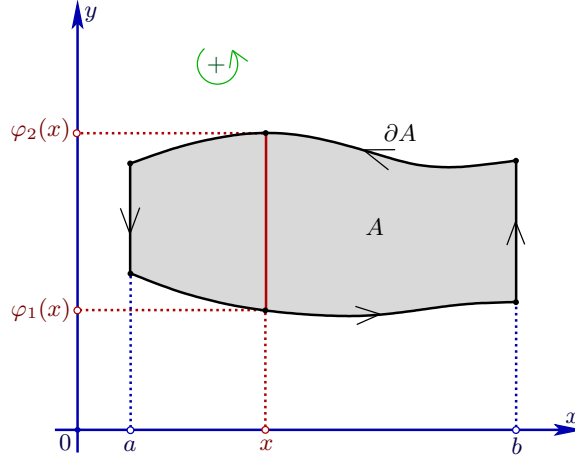
$$\begin{aligned} I &= ab \left[\frac{\pi}{4} \left(a^2 + \frac{b^2}{3} \right) - \pi \frac{b^2}{3} \right] \\ &= \frac{\pi}{4} ab (a^2 - b^2). \quad \square \end{aligned}$$

17. Formule de Green-Riemann

Comme dans le Théorème 15.2, considérons un compact simple $A \subset \mathbb{R}^2$ défini par :

$$a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),$$

où $\varphi_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions *dérivables* et à dérivées *continues* sur $[a, b]$, avec $\varphi_1 \leq \varphi_2$.



La frontière ∂A de A est réunion de 4 courbes dont 2 segments verticaux, éventuellement réduits à un seul point — voir la figure gauche ci-dessus — :

$$\begin{aligned} \partial A = & \{a \leq x \leq b, y = \varphi_1(x)\} \\ & \cup \{x = b, \varphi_1(b) \leq y \leq \varphi_2(b)\} \\ & \cup \{b \geq x \geq a, y = \varphi_2(x)\} \\ & \cup \{x = a, \varphi_2(a) \geq y \geq \varphi_1(a)\}. \end{aligned}$$

Comme sur la figure, orientons la frontière ∂A de A de telle sorte qu'un point mobile la parcourant voie toujours A à sa gauche.

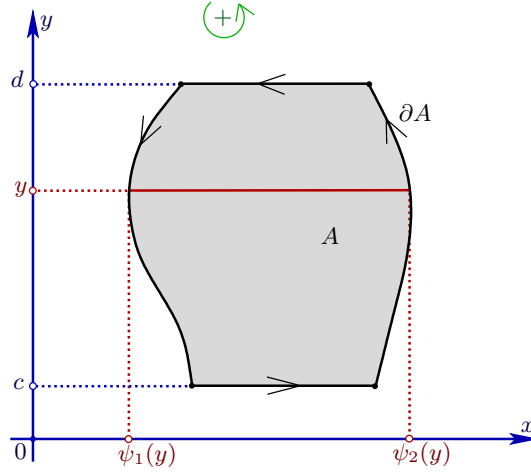
Soit alors $(x, y) \mapsto P(x, y)$ une fonction continue sur ce compact simple A , admettant une dérivée partielle $\frac{\partial P}{\partial y}$ continue sur A . Le Théorème 15.2 permet de calculer :

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\ &= \int_a^b \left[P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x)) \right] dx. \end{aligned}$$

On reconnaît ici l'*intégrale curviligne* de $-P dx$ le long du bord orienté ∂A :

$$\iint_A \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial A} P(x, y) dx.$$

On observera que sur les deux segments verticaux, l'intégrale curviligne s'annule identiquement, car $x = \text{constante}$ implique $dx = 0$.



Considérons maintenant un autre compact simple A défini par des inégalités dans lesquelles les rôles de x et de y sont échangés :

$$\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \quad \text{et} \quad c \leq y \leq d,$$

avec deux fonctions $\psi_1: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et à dérivées continues sur $[c, d]$, satisfaisant $\psi_1 \leq \psi_2$.

La frontière ∂A de A est réunion de 4 courbes, dont 2 segments horizontaux éventuellement réduits à un seul point — voir la figure droite ci-dessus — :

$$\begin{aligned} \partial A = & \{ \psi_1(c) \leq x \leq \psi_2(c), y = c \} \\ & \cup \{ x = \psi_2(y), c \leq y \leq d \} \\ & \cup \{ \psi_2(d) \geq x \geq \psi_1(d), y = d \} \\ & \cup \{ x = \psi_1(y), d \geq y \geq c \}. \end{aligned}$$

Comme sur la figure, orientons la frontière ∂A de A de telle sorte qu'un point mobile la parcourant voie toujours A à sa gauche.

Soit alors $(x, y) \mapsto Q(x, y)$ une fonction continue sur ce compact simple admettant une dérivée partielle $\frac{\partial Q}{\partial x}$ continue sur A . Le Théorème 15.2 permet de calculer :

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \\ &= \int_c^d \left[Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y) \right] dy, \end{aligned}$$

ce qui s'exprime en termes d'intégrale curviligne comme :

$$\iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{\partial A} Q(x, y) dy.$$

Afin de pouvoir appliquer simultanément les deux formules précédentes, énonçons une

Définition 17.1. On appelle *compact élémentaire* tout compact défini indifféremment par :

$$a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),$$

les fonctions φ_1 et φ_2 étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, ou bien par :

$$c \leq x \leq d \quad \text{et} \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),$$

les fonctions ψ_1 et ψ_2 étant $\mathcal{C}^1$ sur $[c, d]$.

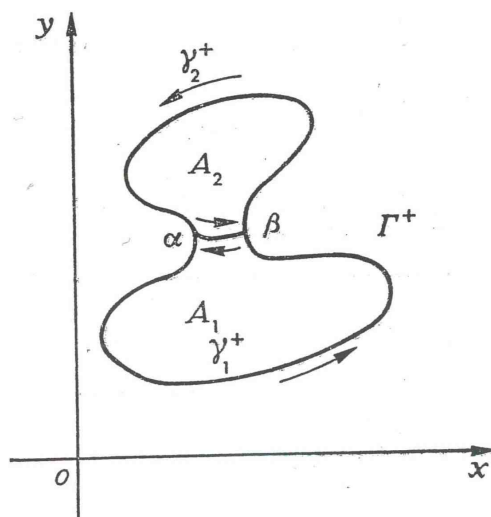
Par exemple, un disque circulaire fermé, un disque elliptique fermé, un pavé de côtés parallèles aux axes de coordonnées, sont des compacts élémentaires.

En retranchant membre à membre les deux formules qui précèdent, nous obtenons enfin le

Théorème 17.2. [de Riemann-Green] *Sur un compact élémentaire $A \subset \mathbb{R}^2$ de frontière orientée ∂A , si deux fonctions continues $P, Q: A \rightarrow \mathbb{R}$ ont des dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}$ continues sur A , alors :*

$$\iint_A \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy = \int_{\partial A} (P dx + Q dy). \quad \square$$

Plus généralement, ce théorème de Riemann-Green reste valable quand A est réunion d'un nombre fini de compacts élémentaires deux à deux μ -disjoints.



Il suffit de prouver cela pour la réunion de deux compacts élémentaires μ -disjoints A_1 et A_2 dont les frontières γ_1 et γ_2 ont une intersection non vide $\alpha\beta$.

Alors le Théorème 17.2 de Riemann-Green appliqué à A_1 et à A_2 séparément exige le calcul de deux intégrales curvilignes prises le long de γ_1 et de γ_2 ; l'arc $\alpha\beta$ est parcouru deux fois, mais en des sens contraires. Par suite, la somme des intégrales curvilignes précédentes est égale à l'intégrale curviligne prise le long de la frontière ∂A de la réunion $A_1 \cap A_2$. (Cette frontière est alors réunion de deux arcs à dérivée continue.)

18. Calculs d'aires planes en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires

Considérons d'abord un compact simple A défini par :

$$a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),$$

avec $\varphi_1 \leq \varphi_2$. Pour évaluer l'aire de A , considérons la fonction :

$$P(x, y) := y, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 1.$$

La formule de Riemann-Green donne alors :

$$\iint_A dx dy = - \int_{\partial A} y dx.$$

Or puisque la première intégrale est égale à l'aire de A , il vient :

$$\mu(A) = - \int_{\partial A} y dx.$$

De la même façon, si A est un compact simple défini par :

$$\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \quad \text{et} \quad c \leq y \leq d,$$

avec $\psi_1 \leq \psi_2$, alors en considérant la fonction $Q := x$, on obtient une formule alternative pour l'aire de A :

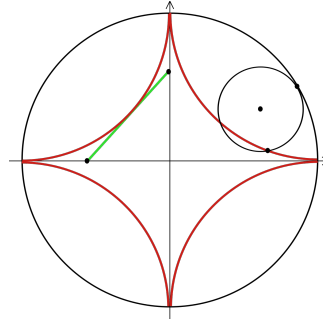
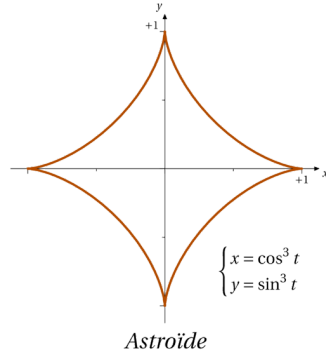
$$\mu(A) = \int_{\partial A} x dy.$$

Par conséquent, nous obtenons le

Théorème 18.1. *L'aire d'un compact élémentaire $A \subset \mathbb{R}^2$, ou de la réunion A d'un nombre fini de compacts élémentaires μ -disjoints, vaut :*

$$\mu(A) = \frac{1}{2} \int_{\partial A} (x dy - y dx).$$

□



Exemple 18.2. [Aire de l'astroïde] Soit l'astroïde défini de manière paramétrique avec $t \in [0, 2\pi]$ par :

$$x(t) = a \cos^3 t \quad \text{et} \quad y(t) = a \sin^3 t.$$

Cette courbe est frontière d'un compact A , réunion de 4 sous-régions deux à deux symétriques par rapport aux axes de coordonnées. On a ainsi :

$$\mu(A) = \frac{4}{2} \int_{\gamma} (x dy - y dx),$$

γ étant la réunion de l'arc d'astroïde correspondant à $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et de deux portions des axes $0x$ et $0y$.

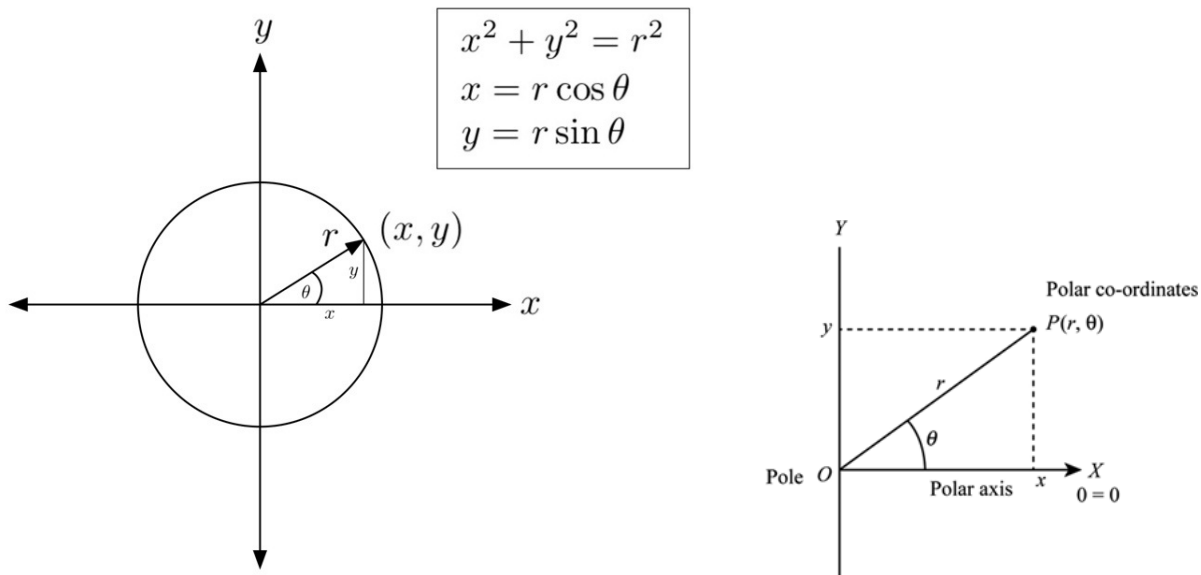
Sur l'astroïde, on a :

$$\begin{aligned} x dy - y dx &= a \cos^3 t \cdot 3a \cos t \sin^2 t + a \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cos^2 t \\ &= 3a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) dt \\ &= 3a^2 \sin^2 t \cos^2 t dt. \end{aligned}$$

En se souvenant que $\sin^2 t \cos^2 t = \frac{1 - \cos 4t}{8}$, on obtient, par suite, pour l'aire demandée :

$$\mu(A) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{8} a^2 (1 - \cos 4t) dt = \frac{6}{8} a^2 \left[t - \frac{\sin 4t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8} a^2 \pi.$$

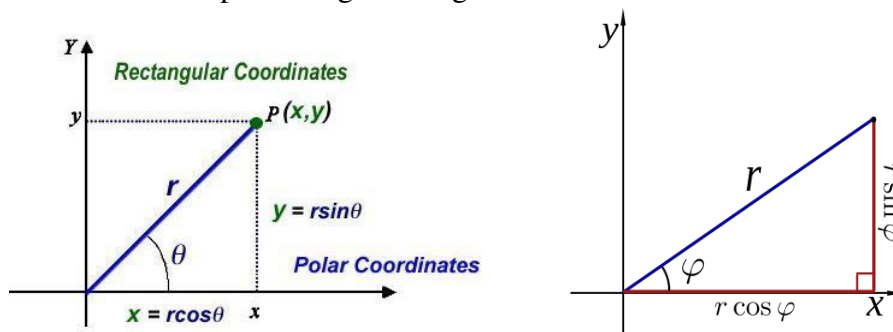
Passons maintenant à des calculs d'aire en coordonnées polaires.



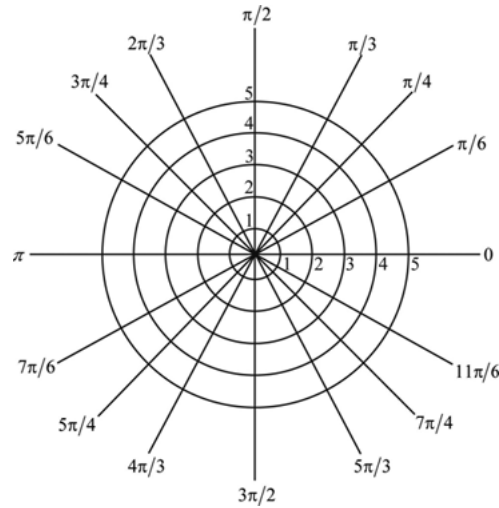
Commençons par un rappel sur les coordonnées polaires. On écrit :

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

avec un rayon $\rho \geq 0$ et un angle $0 \leq \theta < 2\pi$. Parfois, le rayon ρ se note r , et d'autres lettres que θ sont utilisées pour désigner l'angle.



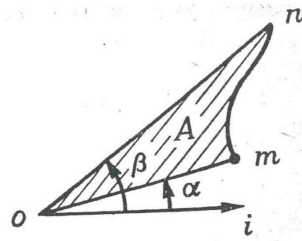
Les valeurs d'angles remarquables sont illustrées comme suit.



Maintenant, soit un arc mn donné par une équation :

$$\rho = f(\theta),$$

avec une certaine fonction f définie sur un intervalle $[\alpha, \beta]$, qui y possède une dérivée continue.

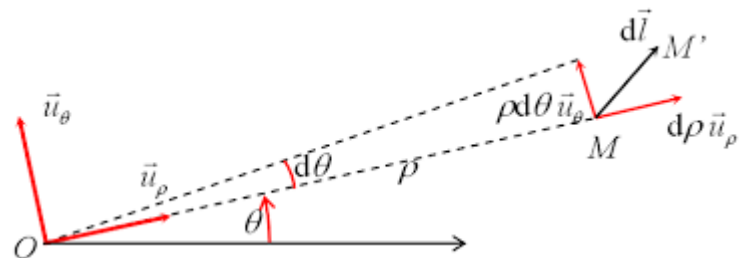
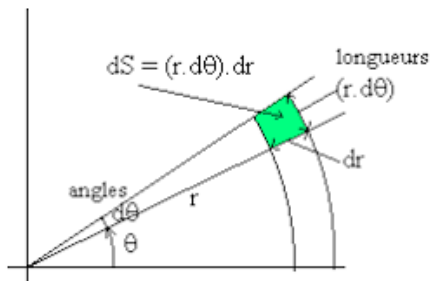


Nous supposons de plus que la réunion de l'arc mn et des rayons $0m$ et $0n$ est la frontière d'un compact élémentaire. Une différentiation donne :

$$dx = d\rho \cos \theta - \rho \sin \theta d\theta, \quad dy = d\rho \sin \theta + \rho \cos \theta d\theta,$$

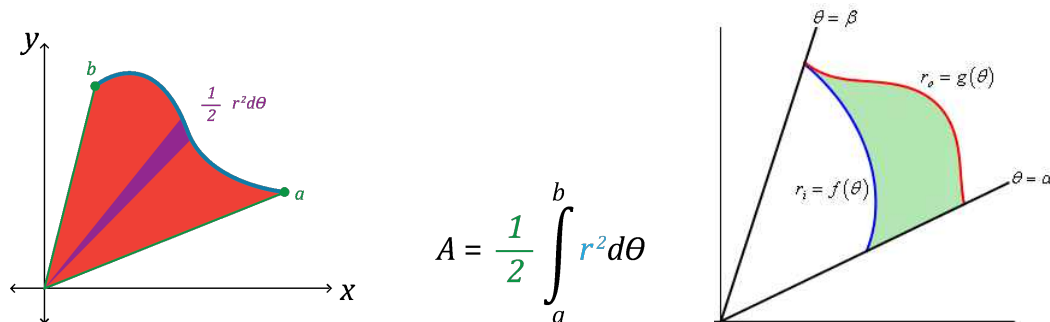
et, par conséquent :

$$\begin{aligned} x dy - y dx &= \underline{\rho \cos \theta \sin \theta d\rho} + \rho^2 \cos^2 \theta d\theta - \underline{\rho \sin \theta \cos \theta d\rho} + \rho^2 \sin^2 \theta d\theta \\ &= \rho^2 d\theta. \end{aligned}$$



Par suite, pour l'aire du compact élémentaire A , la formule de Riemann-Green devient, puisque $\theta = \text{constante}$ entraîne $d\theta = 0$ sur les deux rayons $0m$ et $0n$:

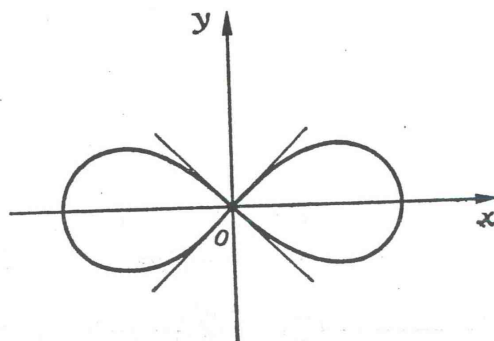
$$\mu(A) = \frac{1}{2} \int_{mn} \rho^2 d\theta.$$



Exemple 18.3. [Aire de la lemniscate de Bernoulli] La lemniscate de Bernoulli est la courbe qui admet pour équation polaire :

$$\rho = a \sqrt{\cos 2\theta},$$

où $a > 0$ est une constante, et où la variable d'angle θ parcourt les deux intervalles $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ et $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$, ce qui donne les deux lobes bien visibles sur la figure.



Chacun de ces deux lobes est un secteur élémentaire. Pour l'aire totale de A , on a, par raison de symétrie :

$$\mu(A) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \rho^2 d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos 2\theta d\theta = a^2 \left[\sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2. \quad \square$$

19. Formule de changement de variables dans les intégrales doubles

En dimension 1, à savoir sur la droite numérique $\mathbb{R}$, la formule de changement de variable dans une intégrale riemannienne s'exprime le plus souvent dans une circonstance différentiable bijective.

Théorème 19.1. Soit un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, soit $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^1$ avec $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$, d'où le difféomorphisme :

$$\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)],$$

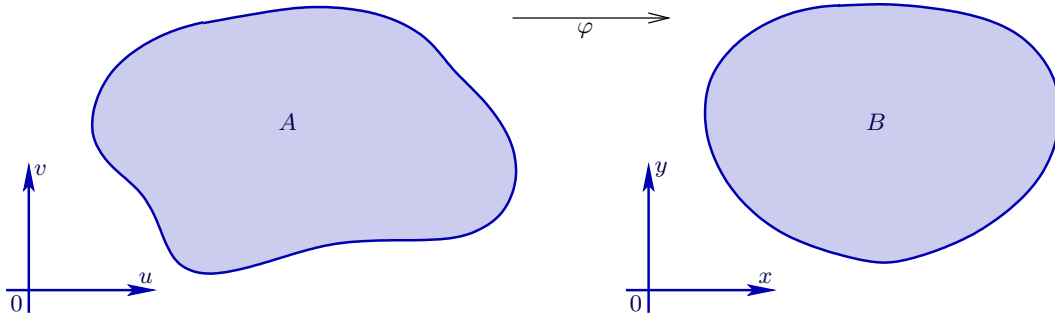
avec $-\infty < \varphi(a) < \varphi(b) < \infty$. Alors pour toute fonction Riemann-intégrable $f: [\varphi(a), \varphi(b)] \rightarrow \mathbb{C}$, la composée $f \circ \varphi$ est aussi Riemann-intégrable et :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx.$$

Lorsque $\varphi' < 0$, cette formule est tout aussi satisfaite. □

En prenant $f \equiv 1$, on retrouve la formule fondatrice du calcul intégral :

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(x) dx.$$



Notre objectif est de généraliser maintenant cette formule aux intégrales doubles. Soient donc deux plans euclidiens distincts $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$ munis de deux systèmes de coordonnées (cartésiennes ou curvilignes) :

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On suppose donnés deux compacts à bords quarrables :

$$A \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad B \subset \mathbb{R}^2,$$

ainsi qu'une application entre eux :

$$\begin{aligned} \varphi: \quad A &\xrightarrow{\sim} B \\ (u, v) &\longmapsto (f(u, v), g(u, v)) =: (x, y), \end{aligned}$$

qui satisfait toutes les hypothèses suivantes.

- (1) φ est bijective $A \xrightarrow{\sim} B$.
- (2) En restriction aux bords, $\varphi|_{\partial A}: \partial A \xrightarrow{\sim} \partial B$ est aussi bijective.
- (3) φ est continue, et la bijection inverse $A \xleftarrow{\sim} B: \varphi^{-1}$ est aussi continue.
- (4) φ admet des dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ qui sont continues sur A .
- (5) φ conserve l'orientation.

Terminologie 19.2. On dit que φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme entre A et B .

Nous supposons de plus que A et B sont des compacts élémentaires, ou des réunions finies de compacts élémentaires μ -disjoints. Cette hypothèse générale déjà considérée précédemment, apparaîtra encore dans les énoncés des théorèmes.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ & \searrow G \circ \varphi & \downarrow G \\ & & \mathbb{R}. \end{array}$$

Problème 19.3. Exprimer l'intégrale d'une fonction intégrable $G(x, y)$ sur B :

$$\iint_B G(x, y) dx dy = \iint_A \text{quelque chose},$$

en fonction d'une intégrale d'une certaine fonction sur A .

Nous allons commencer par le cas simple de la fonction $G \equiv 1$, c'est-à-dire :

$$\text{aire}(B) = \iint_B 1 dx dy = \iint_A ?.$$

Grâce au Théorème 18.1, on a :

$$\text{aire}(B) = \frac{1}{2} \int_{\partial B} (x dy - y dx).$$

Ensuite, ∂B est une courbe 1-dimensionnelle, et l'application :

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \partial A &\xrightarrow{\sim} \partial B \\ (u, v) &\longmapsto (f(u, v), g(u, v)) = (x, y) \end{aligned}$$

effectue un changement de variable 1-dimensionnel préservant l'orientation qui permet de ramener à A l'intégrale considérée :

$$\begin{aligned} \text{aire}(B) &= \frac{1}{2} \int_{\partial A} (f dg - g df) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial A} \left(f \left[\frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv \right] - g \left[\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \right] \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial A} \left\{ \underbrace{\left(f \frac{\partial g}{\partial u} - g \frac{\partial f}{\partial u} \right)}_{=: P(u, v)} du + \underbrace{\left(f \frac{\partial g}{\partial v} - g \frac{\partial f}{\partial v} \right)}_{=: Q(u, v)} dv \right\}. \end{aligned}$$

Alors le Théorème 17.2 de Riemann-Green s'applique :

$$\frac{1}{2} \int_{\partial A} (P du + Q dv) = \frac{1}{2} \iint_A \left(- \frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial u} \right) du dv,$$

donc on doit calculer :

$$\begin{aligned} - \frac{\partial P}{\partial v} &= - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u} - f \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u} + g \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}, \\ \frac{\partial Q}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} + f \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} - g \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}. \end{aligned}$$

Quand on additionne, deux paires de termes (soulignées) s'annihilent, et par conséquent :

$$\begin{aligned} \text{aire}(B) &= \iint_B 1 \, dx dy = \frac{1}{2} \iint_A \left(-\frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial u} \right) dudv \\ &= \iint_A \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u} \right) dudv. \end{aligned}$$

On voit ainsi apparaître une quantité fondamentale.

Définition 19.4. La *matrice jacobienne* d'une application de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\varphi: (u, v) \longmapsto (f(u, v), g(u, v))$$

en un point (u, v) est la matrice 2×2 :

$$\text{Jac}(\varphi)(u, v) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} (u, v).$$

Le *déterminant jacobien* de φ est la fonction de (u, v) :

$$\begin{aligned} \det \text{Jac}(\varphi) &:= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u}. \end{aligned}$$

Théorème 19.5. *Sous les hypothèses précédentes concernant le $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme $\varphi: A \xrightarrow{\sim} B$ entre deux compacts élémentaires, ou entre deux réunions finies de compacts élémentaires μ -disjoints, on a :*

$$\text{aire}(B) = \iint_B 1 \, dx dy = \iint_A \det \text{Jac}(\varphi)(u, v) \, dudv. \quad \square$$

À présent, traitons le cas de l'intégration $\iint_B G$ d'une fonction continue quelconque, donc intégrable. Une astuce consiste à utiliser le Théorème 10.4 de la moyenne, qui stipule, pour une fonction F continue sur A , l'existence d'un point $(u_0, v_0) \in A$ avec :

$$\frac{1}{\mu(A)} \iint_A F(u, v) \, dudv = F(u_0, v_0).$$

Appliquée à $F := \det \text{Jac}(\varphi)$, cette formule donne le

Corollaire 19.6. *Il existe (au moins) un point $(u_0, v_0) \in A$ satisfaisant :*

$$\mu(B) = \det \text{Jac}(\varphi)(u_0, v_0) \cdot \mu(A). \quad \square$$

Rappelons que nous avons abrégé $\text{aire} = \mu$. Nous pouvons enfin énoncer et démontrer le théorème principal de cette Section **19**.

Théorème 19.7. [Formule de changement de variables dans les intégrales doubles] *Soit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme entre deux compacts élémentaires $A \subset \mathbb{R}_{u,v}^2$ et $B \subset \mathbb{R}_{x,y}^2$:*

$$\begin{aligned} \varphi: A &\xrightarrow{\sim} B \\ (u, v) &\longmapsto (f(u, v), g(u, v)) =: (x, y), \end{aligned}$$

ou plus généralement, entre deux réunions finies de compacts élémentaires μ -disjoints. Alors pour toute fonction continue G sur B , on a :

$$\begin{aligned} \iint_B G(x, y) \, dx dy &= \iint_A G \circ \varphi \cdot \det \text{Jac}(\varphi)(u, v) \, dudv \\ &= \iint_A G(f(u, v), g(u, v)) \cdot \det \text{Jac}(\varphi)(u, v) \, dudv. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une μ -partition de A en (petits) compacts élémentaires au moyen de laquelle on approxime bien l'intégrale de $G \circ \varphi \cdot \det \text{Jac}(\varphi)$. À travers φ , soit la μ -partition image :

$$(B_i)_{1 \leq i \leq n} := (\varphi(A_i))_{1 \leq i \leq n},$$

qui est une μ -partition de B . Le Corollaire 19.6 donne, pour tous $i = 1, 2, \dots, n$, des points $(u_i, v_i) \in A_i$ tels que :

$$\mu(B_i) = \det \text{Jac}(\varphi)(u_i, v_i) \cdot \mu(A_i) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Soient alors les points-images :

$$(x_i, y_i) := \varphi(u_i, v_i) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Les deux sommes de Riemann sont *égales* :

$$\sum_{i=1}^n G(x_i, y_i) \cdot \mu(B_i) = \sum_{i=1}^n G \circ \varphi(u_i, v_i) \cdot \det \text{Jac}(\varphi)(u_i, v_i) \cdot \mu(A_i).$$

En raffinant la μ -partition, ces deux sommes de Riemann tendent vers les intégrales doubles respectives :

$$\begin{aligned} \iint_B G(x, y) \, dx dy &\longleftarrow \sum_{i=1}^n G(x_i, y_i) \mu(B_i) \\ &= \sum_{i=1}^n G \circ \varphi(u_i, v_i) \det \text{Jac}(\varphi)(u_i, v_i) \mu(A_i) \\ &\longrightarrow \iint_A G \circ \varphi(u, v) \det \text{Jac}(\varphi)(u, v) \, dudv. \quad \square \end{aligned}$$

20. Intégrales doubles en coordonnées polaires

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ rapporté à un repère orthonormé $\{0, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, considérons l'application φ de passage aux coordonnées polaires définie par :

$$\varphi: (r, \theta) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) =: (x, y).$$

Nous savons que pour toute constante θ_0 fixée, si on se limite à faire varier $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ dans un intervalle semi-ouvert de longueur 2π partant de θ_0 , et si on se limite à des rayons $r > 0$ strictement positifs, alors φ établit une bijection :

$$\varphi: \mathbb{R}_+^* \times [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

sur le plan euclidien épointé de son origine. De plus, cette bijection est continûment différentiable avec :

$$dx = \cos \theta \, dr - r \sin \theta \, d\theta,$$

$$dy = \sin \theta \, dr + r \cos \theta \, d\theta,$$

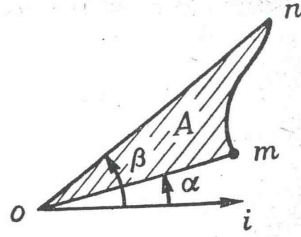
et par suite, le déterminant jacobien de φ en un point (r, θ) vaut :

$$\begin{aligned} \det \text{Jac}(\varphi) &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= \cos \theta \, r \cos \theta - (-r \sin \theta) \sin \theta \\ &= r. \end{aligned}$$

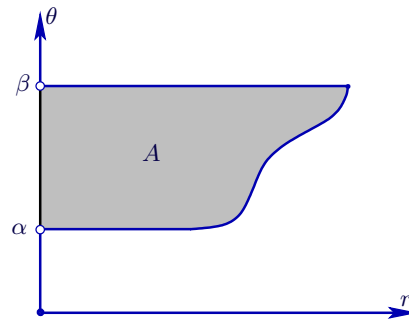
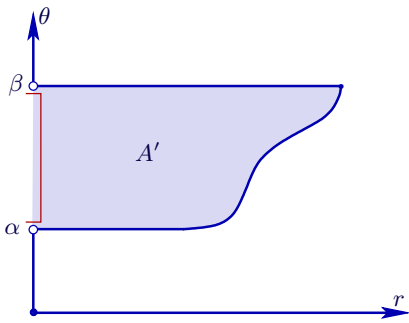
En application du Théorème 19.7, pour une réunion finie A de compacts élémentaires inclus dans $\mathbb{R}_+^* \times [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$, pour $B := \varphi(A)$, et pour toute application continue G sur B , nous obtenons la formule très importante de calculs d'intégrales en coordonnées polaires :

$$\iint_B G(x, y) \, dx \, dy = \iint_A G(r \cos \theta, r \sin \theta) \, r \, dr \, d\theta$$

Un cas spécial intéressant se produit quand A n'est pas forcément contenu dans $\mathbb{R}_+^* \times [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$, à savoir quand $A \ni 0$ contient l'origine, comme nous l'avons déjà vu.



Supposons en effet que B soit un secteur angulaire élémentaire, limité par deux rayons Om et On , ainsi que par un arc mn , rencontré en un seul point par une droite passant par θ , d'équation polaire $r = f(\theta)$.



Désignons par A' la partie du pavé $\mathbb{R}_+^* \times [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ définie par :

$$0 < r \leq f(\theta) \quad \text{et} \quad \alpha \leq \theta \leq \beta.$$

Alors A' est en bijection, via φ , avec $B \setminus \{0\}$:

$$\varphi(A') = B \setminus \{0\}.$$

Désignons par A le compact déduit de A' par adjonction du segment :

$$r = 0, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta.$$

Alors A et A' ont même aire et pour toute fonction continue G sur B , la composée $G \circ \varphi$ est continue sur A et on a l'égalité :

$$\iint_B G(x, y) dx dy = \iint_{A'} G \circ \varphi r dr d\theta = \iint_A G \circ \varphi r dr d\theta.$$

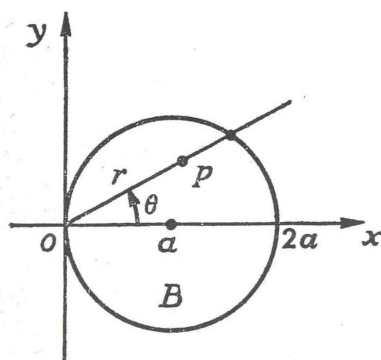
En définitive, la formule de changement de variables peut encore s'appliquer au cas où B est réunion finie de secteurs angulaires élémentaires, deux à deux μ -disjoints.

Exemple 20.1. Proposons-nous de calculer l'intégrale double :

$$I := \iint_B (x^2 + y^2) dx dy,$$

sur le disque circulaire B de rayon $a > 0$ centré en le point $(a, 0)$ défini par :

$$x^2 + y^2 - 2ax \leq 0.$$



Désignons par φ l'application :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

sur la partie A définie par :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2a \cos \theta.$$

On a :

$$\varphi(A) = B,$$

et de plus, si on désigne par A' la partie définie par :

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < r \leq 2a \cos \theta,$$

alors φ est une bijection de A' sur $B \setminus \{0\}$.

On peut donc appliquer la formule du changement de variables en coordonnées polaires :

$$I = \iint_A r^2 r dr d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} r^3 dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} (2a \cos \theta)^4 d\theta = 8a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta.$$

Enfin, en remarquant que :

$$\begin{aligned} (\cos^2 \theta)^2 &= \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{4} (\cos 2\theta)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \frac{(1 + \cos 4\theta)}{2}, \end{aligned}$$

on trouve aisément :

$$I = \frac{3\pi a^4}{2}.$$

□

Exemple 20.2. Revenons à l'Exemple 16.1 :

$$I := \iint_B (x^2 - y^2) dx dy,$$

où B est le disque elliptique :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0.$$

Nous avons vu que $I = \frac{\pi}{4} ab (a^2 - b^2)$, et nous souhaitons montrer qu'un changement de variables approprié permet d'arriver plus rapidement au résultat.

Considérons en effet l'application φ :

$$x = a u \cos v, \quad y = b u \sin v,$$

sur le pavé A_1 défini par :

$$0 < u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ici, φ est une bijection de A_1 sur $B_1 \setminus \{0\}$, où B_1 est le secteur elliptique :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Remarquons que φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de A_1 sur B_1 , dont le jacobien vaut :

$$\begin{vmatrix} a \cos v & -a u \sin v \\ b \sin v & b u \cos v \end{vmatrix} = a b u.$$

Le Théorème 19.7 de changement de variables donne alors :

$$I = 4 \iint_A (x^2 - y^2) dx dy = 4 \iint_{A_1} (a^2 \cos^2 v - b^2 \sin^2 v)^2 u^2 a b u du dv,$$

d'où :

$$I = 4 a b \int_0^1 u^3 du \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \cos^2 v - b^2 \sin^2 v) dv,$$

et nous sommes ramenés au calcul de deux intégrales simples indépendantes. En utilisant (exercice) :

$$1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 v dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v dv,$$

nous concluons que :

$$I = 4 a b \frac{1}{4} \frac{\pi}{4} (a^2 - b^2) = \frac{\pi}{4} ab (a^2 - b^2).$$

□

21. Exercices

Exercice 1. EE