

Joël Merker

DMA, École Normale Supérieure, Paris

www.dma.ens.fr/~merker/

I. Parcours scientifique et pédagogique

II. Géométrie de Cauchy-Riemann locale

III. Application de réflexion analytique

IV. Groupes de Lie locaux en dimensions 1, 2, 3

V. Conjectures de Kobayashi et de Green-Griffiths

VI. Hyperbolicité au sens de Kobayashi

VII. Philosophie du calcul

Candidature 2010

sur un poste de Professeur des universités

Université Paris XI Orsay, Mercredi 10 novembre 2010

I – Parcours scientifique et pédagogique

● Curriculum vitæ résumé :

- **1970** : Naissance à Bourg-la-Reine
- **1988** : Baccalauréat Série C à Besançon
- **1990** : Entrée à l'École Normale Supérieure
[après deux Deugs : mathématiques et philosophie]
- **1992** : Agrégation de **Mathématiques**
- **1994** : Agrégation de **Philosophie**
[après une Licence et une Maîtrise à la Sorbonne]
- **1995** : Caïman à l'École Normale (deux ans)
- **1996** : Doctorat, Paris 6 [J.-M. Trépreau dir.]
- **1997** : **CR au CNRS** [affectation au LATP, **Marseille**]
- **2006** : Habilitation à diriger des recherches
- **2006** : **Mobilité** à l'École Normale
- **2011** : Doctorat de philosophie des mathématiques spécialisé sur l'œuvre de Sophus Lie :

Merker, J. : *Sophus Lie, Friedrich Engel et le problème de Riemann-Helmholtz*, Hermann, Paris, 2010, **xxiii+325 pp.**

Merker, J. : *Sophus Lie and Friedrich Engel's Theory of Transformation Groups (Vol. I, 1888). Modern Presentation and English Translation*, **650 pages**, **Submitted to Springer, March 2010**

- **Publications :**

- ▷ **37** articles parus ou acceptés
- ▷ **10** opuscules de philosophie des mathématiques

- **Expérience d'enseignement et d'encadrement :**

- ▷ **2** cours de M2, **1** mémoire de M2
- ▷ **7** cours de L3 à Marseille
- ▷ **3** années de coordinations de soutenances de Magistère à l'École Normale (1996, 2007, 2009)
- ▷ **15** mémoires de M1 (ENS+Marseille)
- ▷ **8** leçons d'agrégation à l'École Normale

- **Responsabilités collectives :**

- ▷ **10** années de commission de spécialistes
- ▷ Rédaction de projets et rapports en commun
- ▷ Coordination de séminaires
- ▷ Conseil de laboratoire, ENS, DMA

- **Conférences hors séminaires :**

- ▷ **30** conférences internationales invitées depuis 1999

- **Mathematical Reviews+Zentralblatt :**

- ▷ **80** recensions

• **15 publications depuis 2006 :**

□ **Merker, J.** *Characterization of the Newtonian free particle system in $m \geq 2$ dependent variables*, Acta Applicandæ Mathematicæ, **92** (2006), no. 2, 125–207.

□ **Merker, J.** (avec Porten, E.) *A geometrical proof of the Hartogs extension theorem*, Publication DMA-ENS, no. 10 (2006), **22 colored illustrations** ; J. Geom. Anal. **17** (2007), no. 3, 513–546.

□ **Merker, J.** *Jets de Demailly-Semple d'ordres 4 et 5 en dimension 2*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, **3** (2008) no. 18, 861–933.

□ **Merker, J.** *Low pole order frames on vertical jets of the universal hypersurface*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **59** (2009), no. 3, 1077–1104.

□ **Merker, J.** *Lie symmetries and CR geometry*, Journal of Mathematical Sciences (N. Y.) **154** (2008), 817–922.

□ **Merker, J.** *Nonrigid spherical real analytic hypersurfaces in \mathbb{C}^2* , 29 pages, Complex Variables and Elliptic Equations, to appear.

□ **Merker, J.** (avec Porten, E.) *The Hartogs extension theorem on $(n - 1)$ -complete complex spaces*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **637** (2009), 23–39.

□ **Merker, J.** (avec Porten, E.) *Holomorphic extension of CR functions, envelopes of holomorphy and removable singularities*, International Mathematics Research Surveys, Volume **2006**, Article ID 28295, **287 pages**.

□ **Merker, J.** (avec Porten, E.) *Characteristic foliations on maximally real submanifolds of \mathbb{C}^n and removable singularities*, International Mathematics Research Papers, Volume **2006**, Article ID 72069, **131 pages**.

□ **Merker, J.** (avec Diverio, S., Rousseau, E.) *Effective algebraic degeneracy*, *Inventiones Mathematicæ* **180** (2010), 161–223.

□ **Merker, J.** *Sophus Lie, Friedrich Engel et le problème de Riemann-Helmholtz*, Hermann Éditeur des Sciences et des Arts, Paris, 2010, **xxiii+325 pp.**

□ **Merker, J.** *An algorithm to generate all polynomials in the k -jet of a holomorphic disc $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^n$ that are invariant under source reparametrization*, *J. Symbolic Computations* **45** (2010), 986–1074.

● **Prépublications soumises :**

□ **Merker, J.** *Vanishing Hachtroudi curvature and local equivalence to the Heisenberg sphere*, 16 pages, **soumis**

□ **Merker, J.** *Sophus Lie and Friedrich Engel's Theory of Transformation Groups (Vol. I, 1888). Modern Presentation and English Translation*, **650 pages**, **soumis à Springer-Verlag.**

● **Thèmes de recherche :**

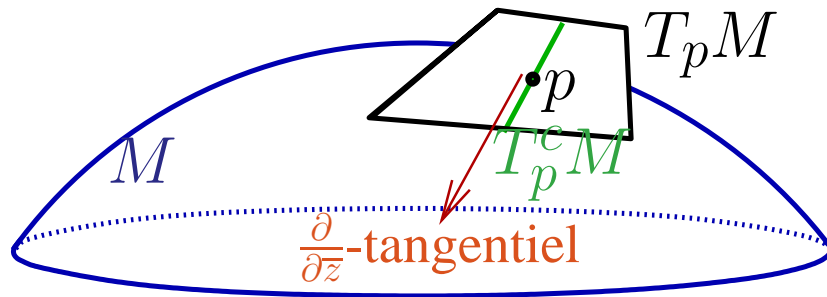
- ▷ Analyse en plusieurs variables complexes
- ▷ Analyse harmonique et disques de Bishop
- ▷ Géométrie de Cauchy-Riemann locale
- ▷ Philosophie des mathématiques
- ▷ Théorie de Lie-Cartan des EDP et G -structures
- ▷ Classification des actions de groupes de Lie
- ▷ Hyperbolicité en géométrie algébrique complexe

II – Géométrie de Cauchy-Riemann locale

- **Sous-variété Cauchy-Riemann CR-générique** :
Sous-variété **réelle** M dans \mathbb{C}^n telle que :

$$T_p M + i T_p M = T_p \mathbb{C}^n$$

pour tout point $p \in M$.



- **Fibré tangent complexe** :

$$T^c M := TM \cap i TM$$

= directions complexes-tangentes

- $\bar{\partial}_M$ -**tangentiel** : Dérivées $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$ qui existent dans ces directions complexes-tangentes.

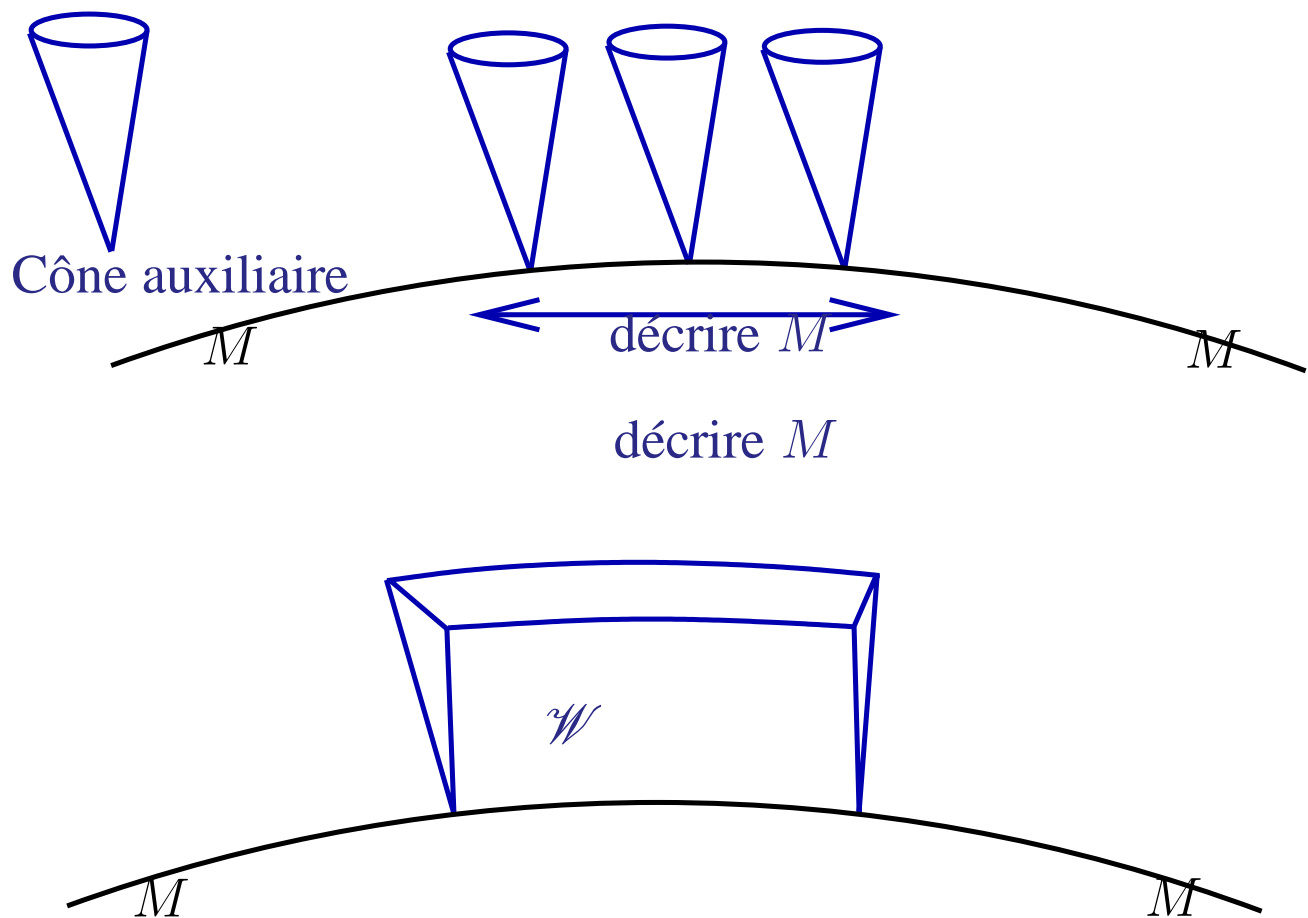
- **Fonctions Cauchy-Riemann (CR)** : Fonctions qui sont annulées par ces $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$ complexes-tangentiels :

$$0 = \bar{\partial}_M f.$$

- **Heuristiquement** : Les fonctions CR sont holomorphes dans les directions complexes, mais transversalement, elles peuvent être des fonctions réelles quelconques.

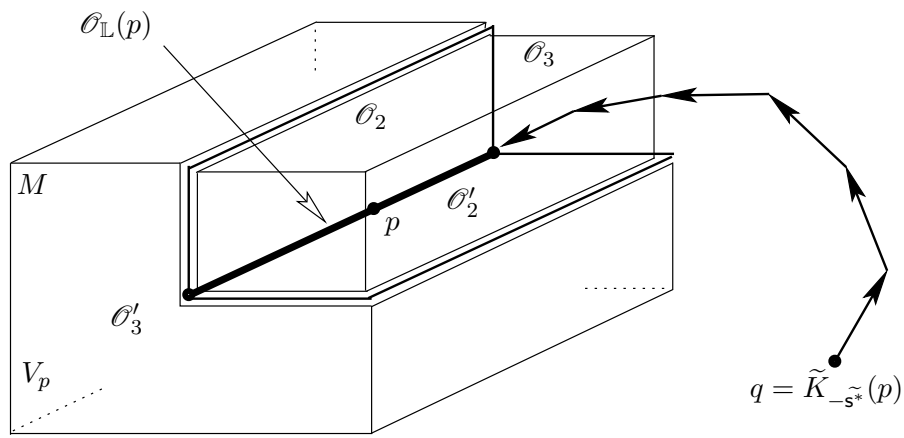
- **Wedge** : Ouvert à coin attaché à M :

$$\mathcal{W} := \{p + c : p \in M, c \in \text{Cône tronqué}\}$$

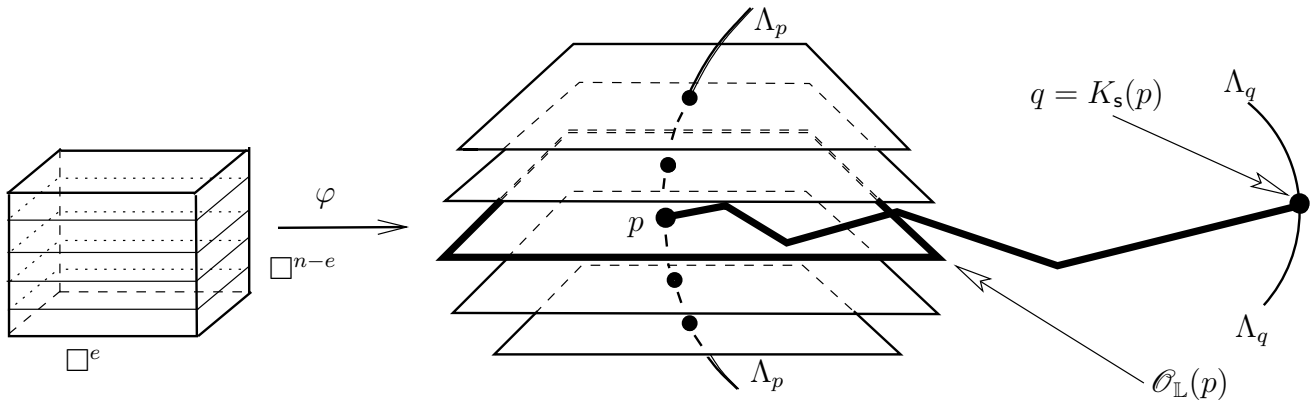


- **Quand M est une hypersurface** : Un wedge, c'est juste un des deux côtés de l'hypersurface.

- **Orbite CR** : Partir d'un point p de M et suivre toutes les courbes intégrales du fibré tangent complexe, c'est-à-dire se déplacer seulement dans les directions complexes-tangentes.



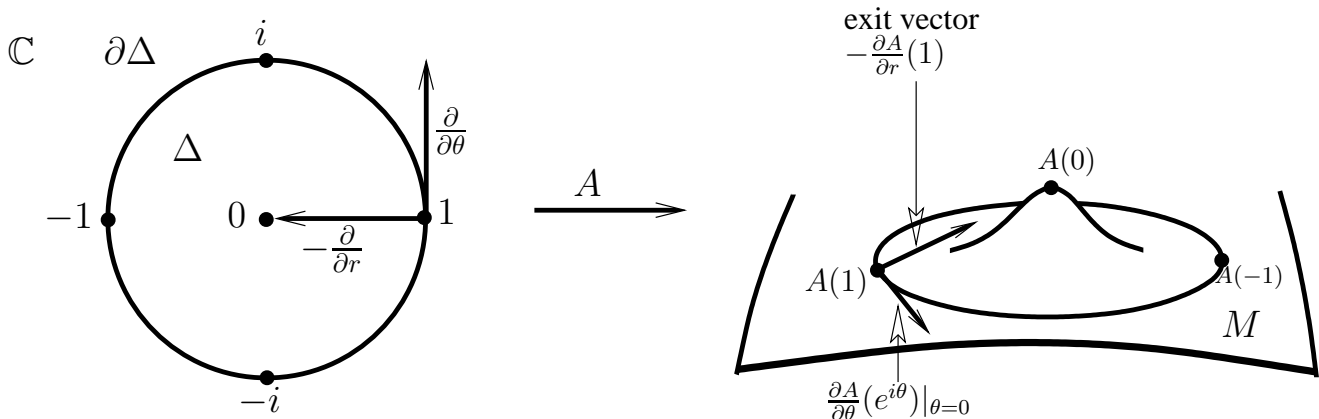
● **Théorie du contrôle : (Sussmann)**



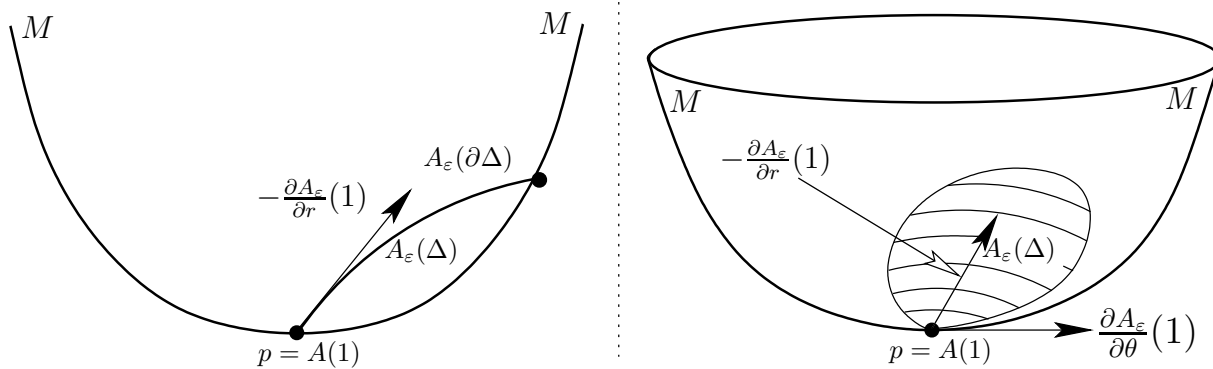
● **Synthèse :**

Théorème. [Merker, IMRN 1994] *Si M consiste en une seule orbite CR, il existe un wedge global attaché à M tel que toutes les fonctions CR sur M se prolongent holomorphiquement à ce wedge.*

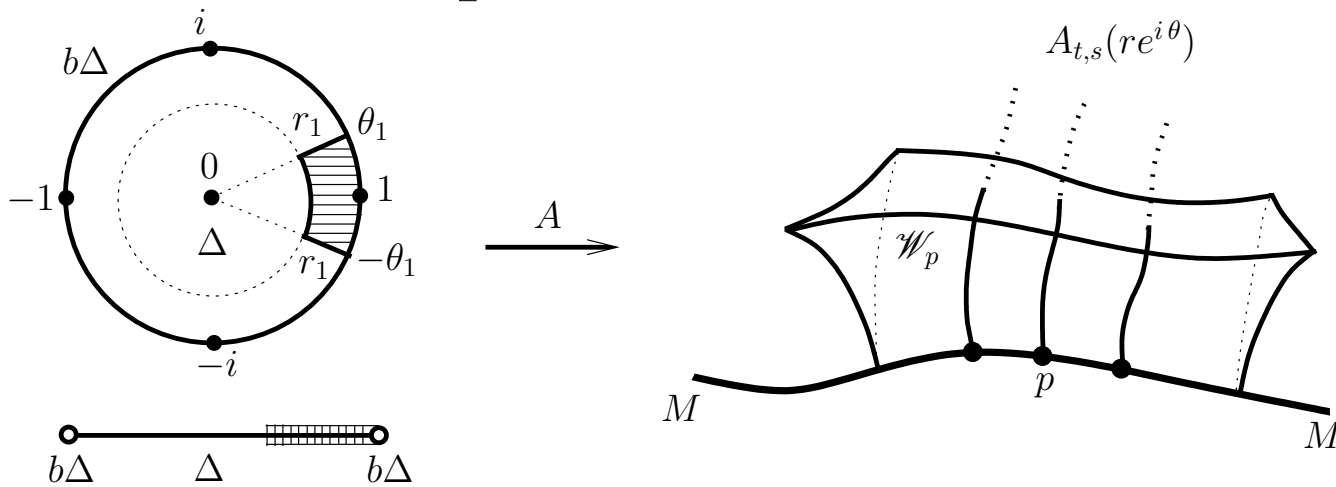
● **Disques de Bishop (membranes) :**



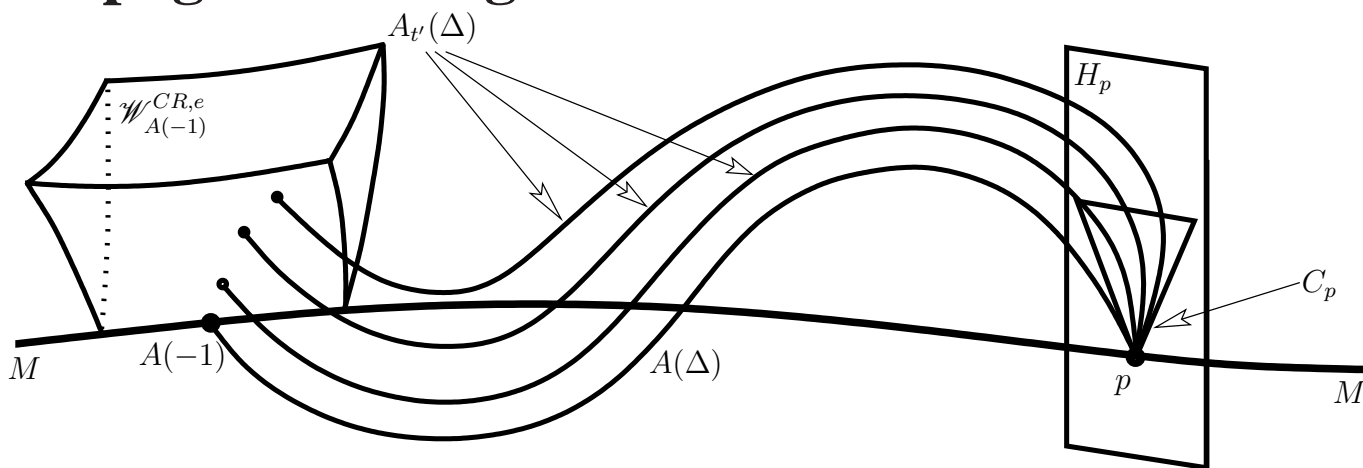
● **Disques en général non-tangents :**



● **Déformer les disques :**



● **Propager les wedges :**



II' – Problème de Painlevé CR

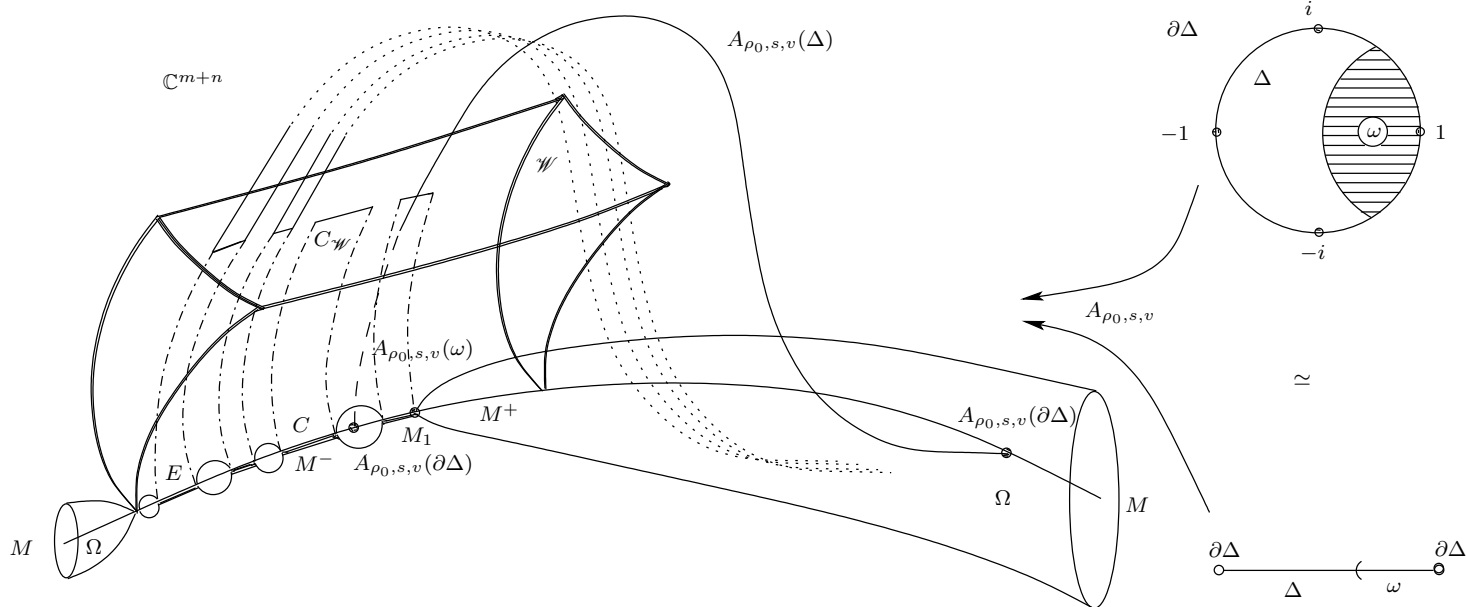
- **Contexte classique** : Soit Ω un domaine dans \mathbb{C} .
- **Riemann 1851** :
 $\text{holomorphe}(\Omega - \{p\}) \cap L_{loc}^\infty(\Omega) = \text{holomorphe}(\Omega)$.
- **Problème de Painlevé** : Caractériser géométriquement les compacts $K \subset \Omega$ tels que :
 $\text{holomorphe}(\Omega - K) \cap L_{loc}^\infty(\Omega) = \text{holomorphe}(\Omega)$.
- **Denjoy, Calderón, Coifman, McIntosh, Meyer** :
Lorsque le compact $K \subset \Omega$ est contenu dans une courbe lipschitzienne, cela est satisfait si et seulement si la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle de K s'annule.
- **Transférer Painlevé dans un cadre CR** :
 - Jöricke, Duval : M hypersurface strictement pseudoconvexe dans \mathbb{C}^2 .
 - Merker-Porten : contexte CR général.
 - Courbe lipschitzienne
 $\longleftrightarrow M^1 \subset M$ de codimension 1.
- **Donnée** : Soit M CR-générique de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$.
- **Définition** : Un sous-ensemble compact $K \subset M$ est dit $(\bar{\partial}_M, L^p)$ -**éliminable** ($1 \leq p \leq \infty$) si :
$$L_{loc}^p(M) \cap CR(M - K) = L_{loc,CR}^p(M).$$

Théorème. [Merker-Porten, Math. Z. 2002] *Si :*

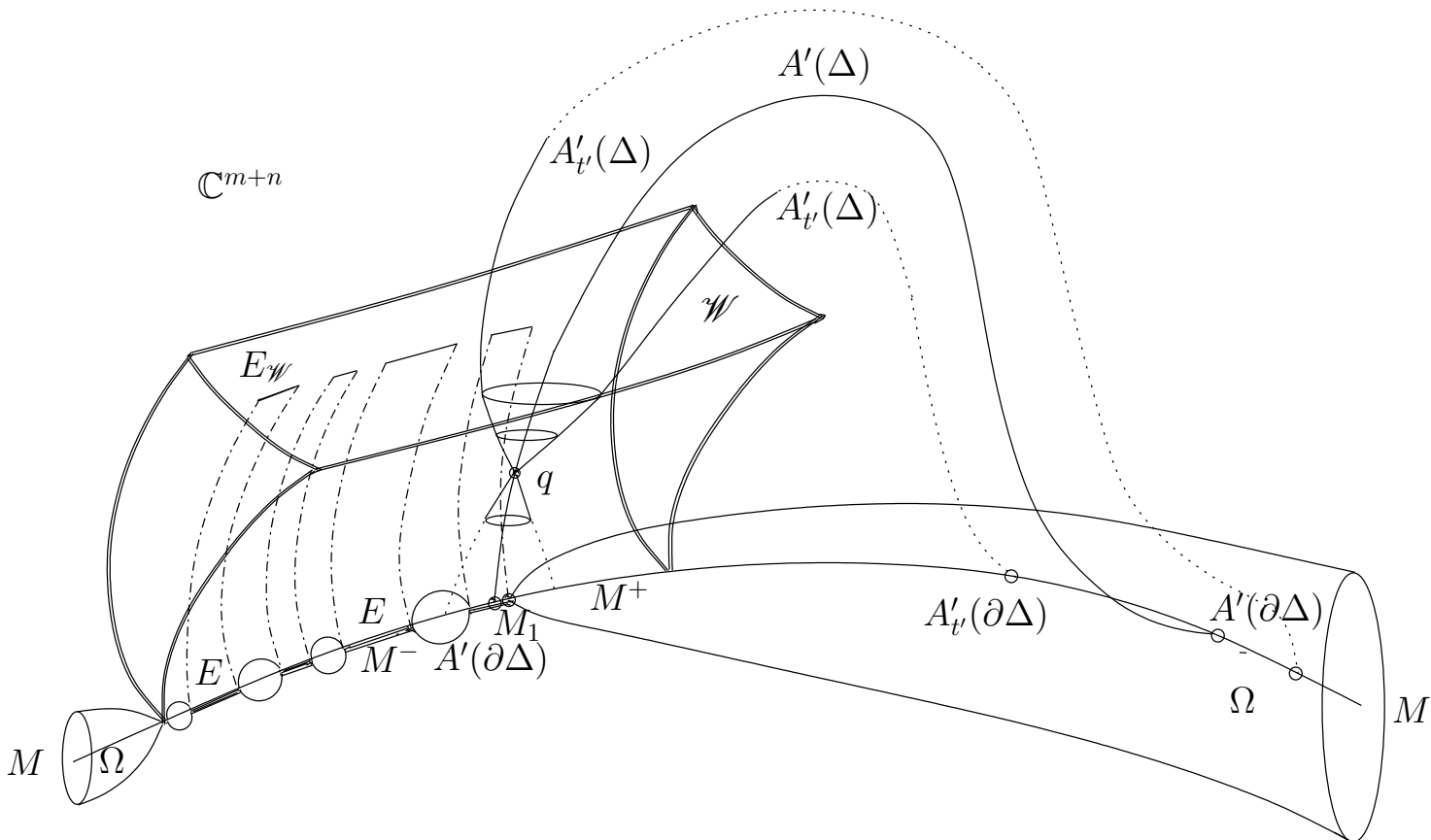
$$\text{Hausdorff}^{\dim M - 2}(K) = 0$$

alors K est $(\bar{\partial}_M, L^p)$ -éliminable.

• **Propagation de la singularité dans le wedge :**

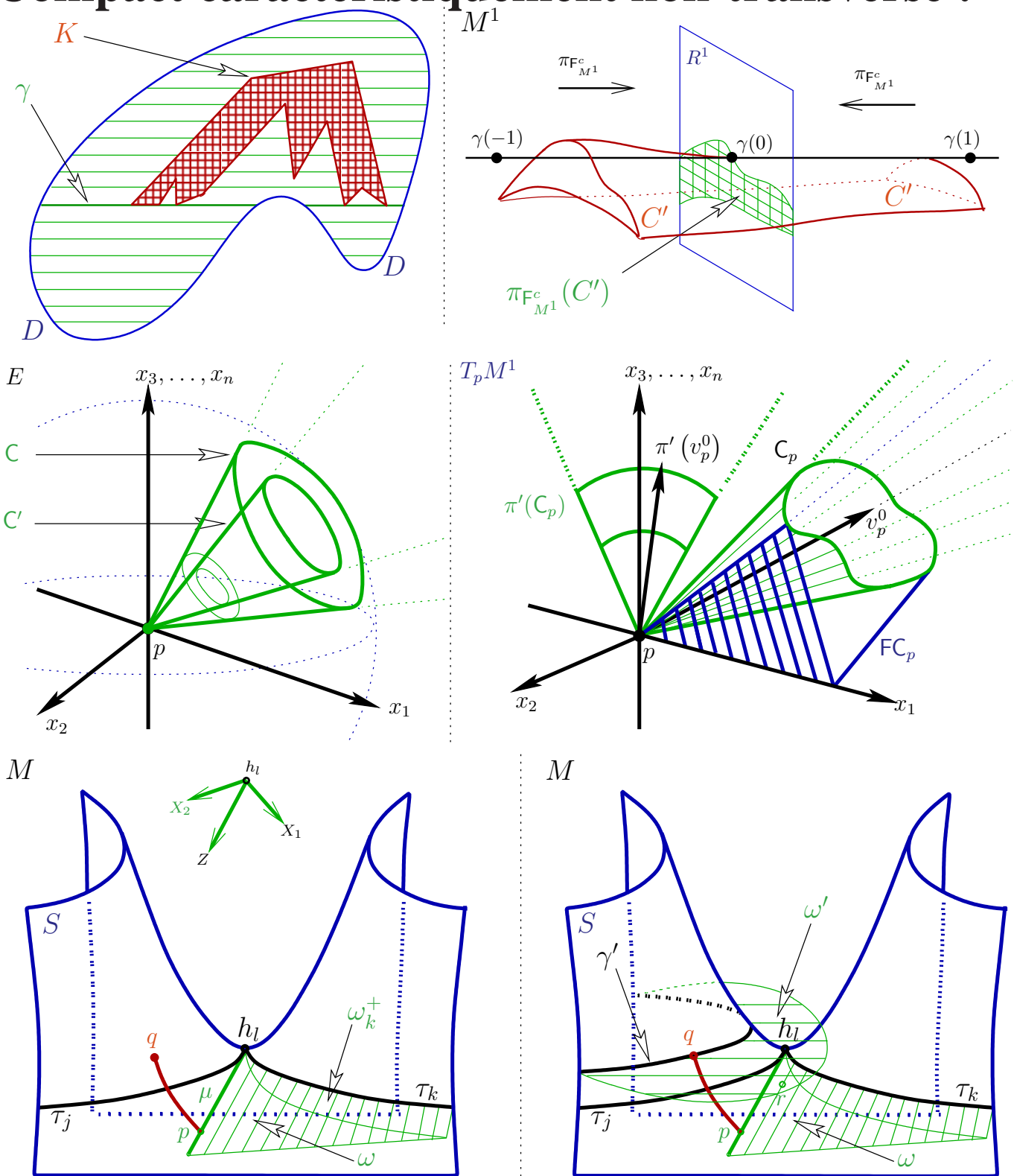


• **Déformations coniques :**



Théorème. [Merker-Porten, IMRN 2006, 131 pages] Si $M^1 \subset M$ est de codimension 1 et si $K \subset M^1$ est caractéristiquement non-transverse, alors K est $(\bar{\partial}_M, L^p)$ -éliminable.

● Compact caractéristiquement non-transverse :



III – Application de réflexion analytique

- Soit : $M \subset \mathbb{C}^n$ CR-générique **analytique réelle** :
 $\text{codim } M = d \geq 1.$

- Dans des coordonnées adaptées : Graphe local :

$$\bar{w} = \Theta(\bar{z}, z, w),$$

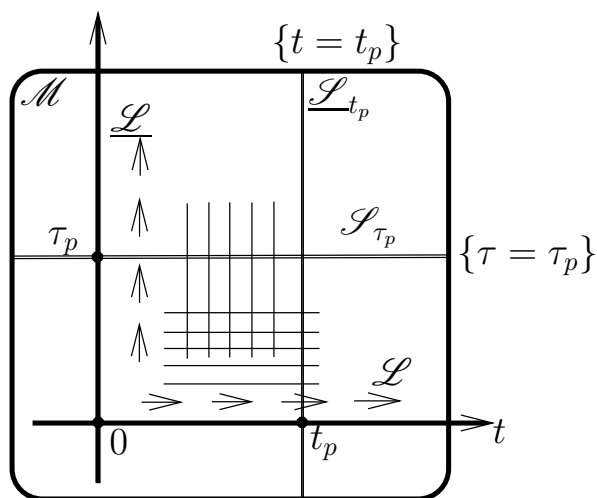
où $w \in \mathbb{C}^d$ et où la série Θ converge.

- Donc on peut complexifier : Remplacer (\bar{z}, \bar{w}) par des variables indépendantes (ζ, ξ) :

$$\xi = \Theta(\zeta, z, w).$$

- Mieux vaut travailler avec cette variété complexe :

$$\mathcal{M} \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n.$$



La complexification d'une sous-variété analytique réelle porte une paire de feuilletages invariants qui sont les sous-variétés intégrales des complexifiés des champs de vecteurs de types $(1, 0)$ et $(0, 1)$ et qui s'identifient aussi aux sous-variétés de Segre complexifiées.

- Paire invariante de feuilletages :

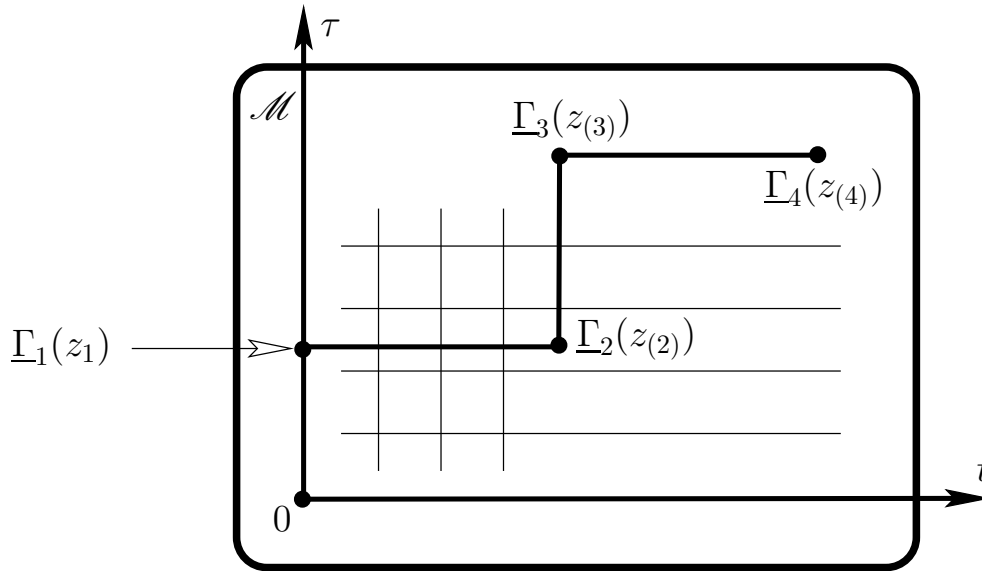
$\mathcal{M} \cap \{(\zeta, \xi) = (\zeta_p, \xi_p)\}$ tranches **horizontales**

$\mathcal{M} \cap \{(z, w) = (z_p, w_p)\}$ tranches **verticales**.

- **Chaînes de Segre** : Partir de l'origine $0 \in \mathcal{M}$, se déplacer verticalement d'une certaine hauteur z_1 , atteindre le point :

$$\Gamma_1(z_1).$$

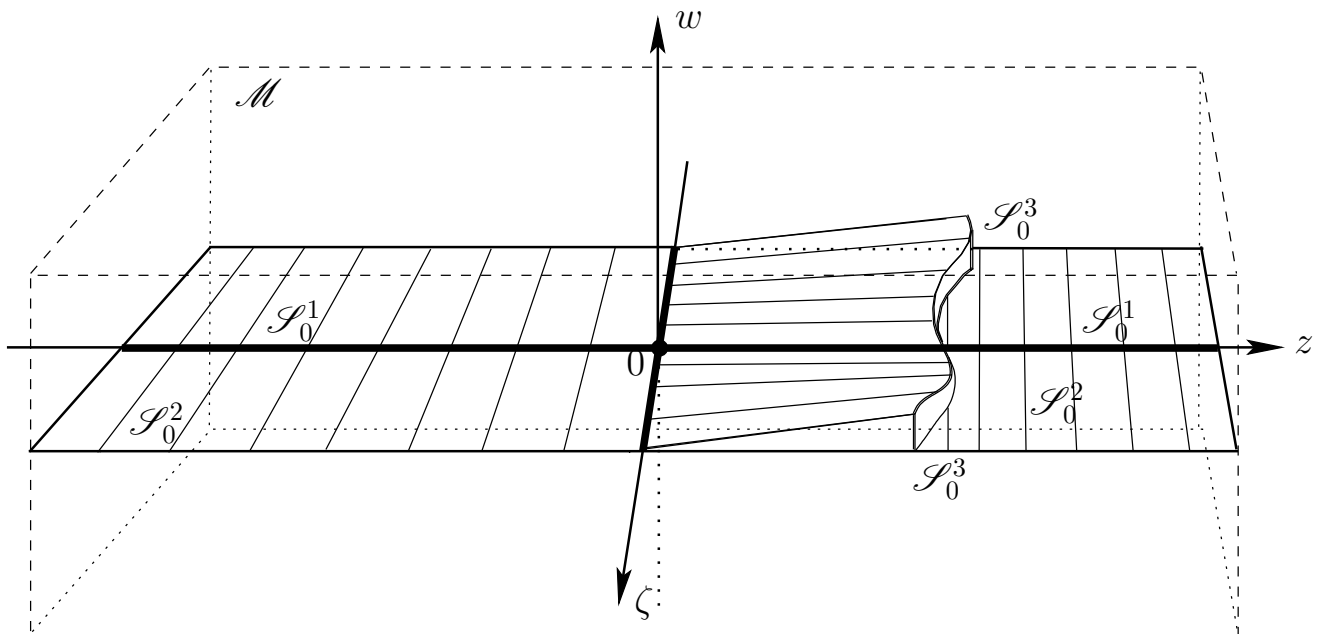
$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$



- Repartir du point ainsi atteint, se déplacer horizontalement d'une certaine longueur z_2 , atteindre le point :

$$\Gamma_2(z_1, z_2),$$

et ainsi de suite.



- **Définition** : M est dite **minimale** en 0 si pour k assez grand, la k -ème chaîne de Segre $\Gamma_k(z_1, \dots, z_k)$ recouvre un voisinage de 0 dans \mathcal{M} .

- **Proposition** : $\iff M$ consiste en une seule orbite CR.

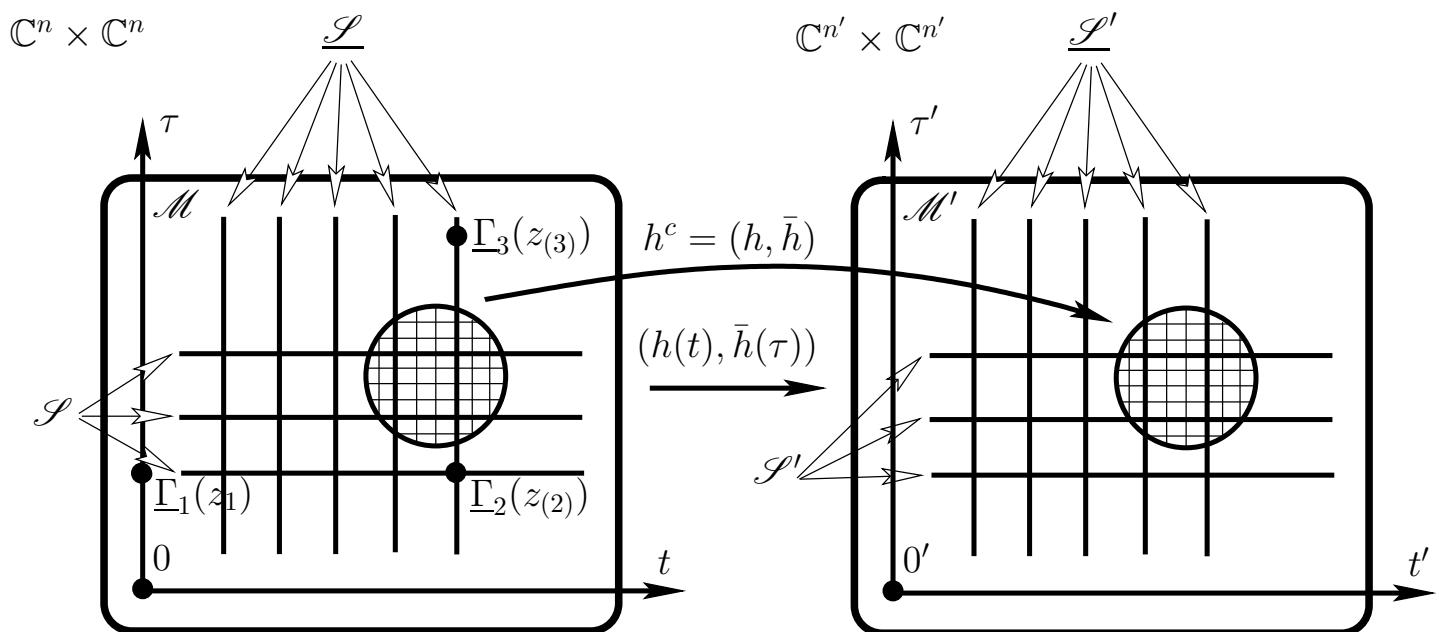
- **Considérer maintenant une application holomorphe locale** :

$$\mathbb{C}^n \supset M \ni (z, w) \longmapsto \mathbf{h}(z, w) \in M' \subset \mathbb{C}^{n'}$$

- **L'application complexifiée** :

$$h^c(z, w \mid \zeta, \xi) := (h(z, w), \bar{h}(\zeta, \xi)),$$

est à variables séparées, donc elle respecte horizontalité et verticalité \equiv racine de la **rigidité CR analytique**.



LES APPLICATIONS FORMELLES COMPLEXIFIÉES RESPECTENT LES PAIRES DE FEUILLETAGES

- **Notons** :

$$\xi' = \Theta'(\zeta', z', w')$$

les équations de \mathcal{M}' .

- Pour k entier : Définissons le **morphisme des k -jets** de Θ' par rapport à la variable ζ' seulement :

$$(\zeta', z', w') \longmapsto \left(\zeta', \text{Jet}_{\zeta'}^k \Theta'(\zeta', z', w') \right).$$

- **Cinq conditions de non-dégénérescence sur \mathcal{M}' suivant que ce morphisme est :**

(nd1) [...\...];

(nd2) de **rang** maximal possible ;

(nd3) **fini** ;

(nd4) [...\...];

(nd5) de **rang générique** maximal possible.

- **Prolifération de contributions partielles et non synthétiques** : Baouendi-Rothschild, Meylan, Ebenfelt, Zaitsev, Mir, Lamel, Coupet, Sukhov, Damour.

- **Toutefois : Les mathématiques (et la philosophie) exigent des résultats conceptuels et unificateurs.**

- **Cinq conditions de non-dégénérescence sur h** : Regarder la restriction de h aux tranches horizontales.

(cr1) **CR-inversible** [...\...];

(cr5) **CR-transversale** [...\...];

- **Cela multiplie encore les contributions partielles !**

- [M. 96] **Concept invariant et unificateur** :
- **Application de réflexion CR associée à h** :

$$\xi' - \Theta'(\zeta', h(z, w)).$$

Théorème. [Annales de Toulouse 2005, 113 pages] *Si M est minimale à l'origine et si l'application formelle h est CR-transversale, alors pour tout système de coordonnées (z', w') dans lesquelles la variété CR complexifiée \mathcal{M}' est représentée par $\xi' = \Theta'(\zeta', z', w')$, l'application de réflexion associée est **convergente**, c'est-à-dire :*

$$\xi' - \Theta'(\zeta', h(z, w)) \in \mathbb{C}\{\zeta', \xi', z, w\}^{d'}.$$

Corollaire. [Annales de Toulouse 2005, 113 pages] *Si M et M' sont Nash-algébriques, alors l'application de réflexion $\xi' - \Theta'(\zeta', h(z, w))$ est elle aussi Nash-algébrique.*

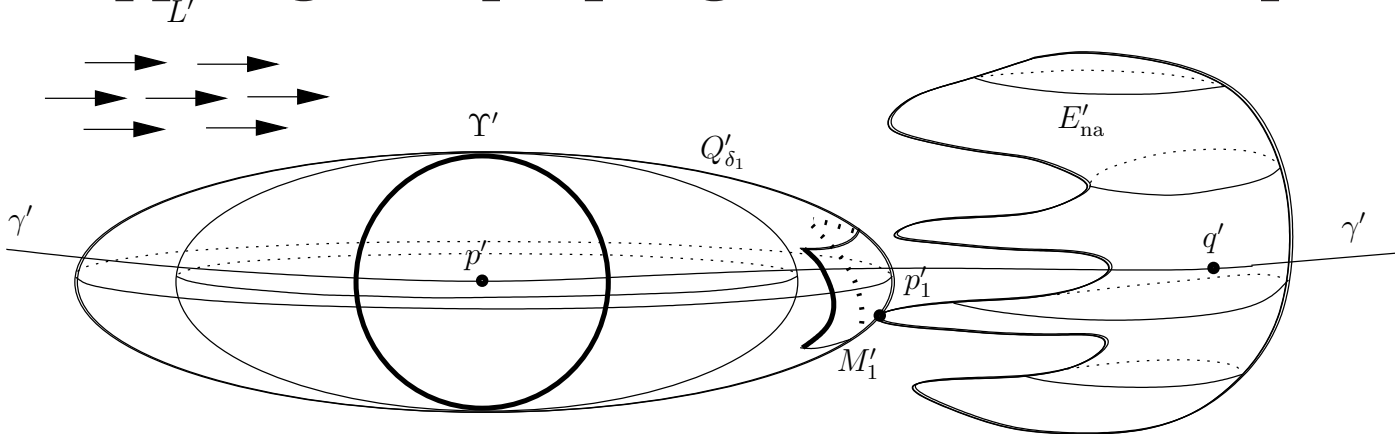
- **Auparavant, résultat définitif** :

Théorème. [Bulletin SMF 2001] *Sans aucune hypothèse sur h , si M et M' sont Nash-algébriques avec M minimale au moins en un point, alors l'application de réflexion $\xi' - \Theta'(\zeta', h(z, w))$ est algébrique après réduction éventuelle de M' .*

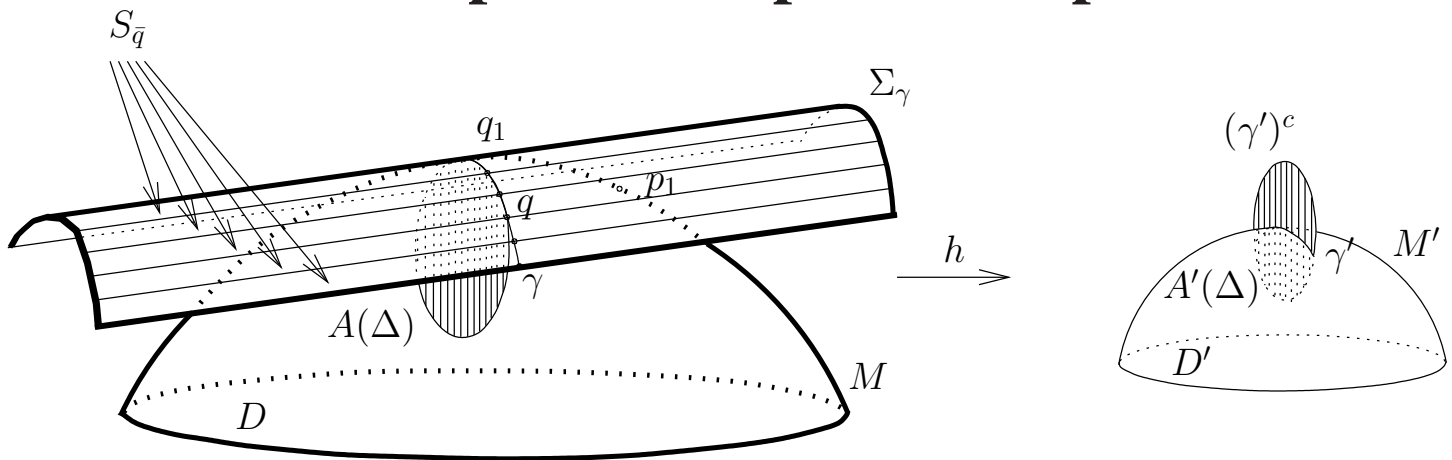
• **Analyticité de l'application de réflexion CR lisse :**

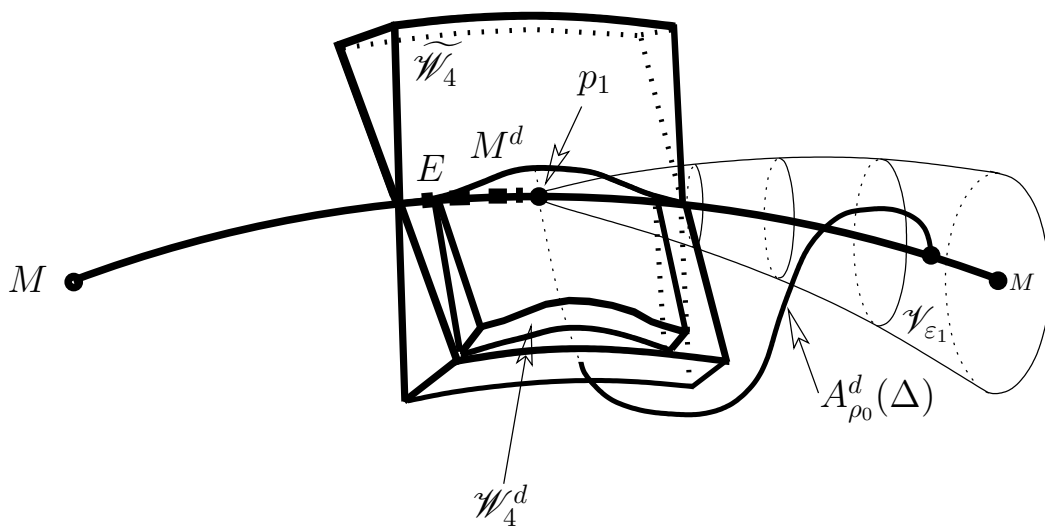
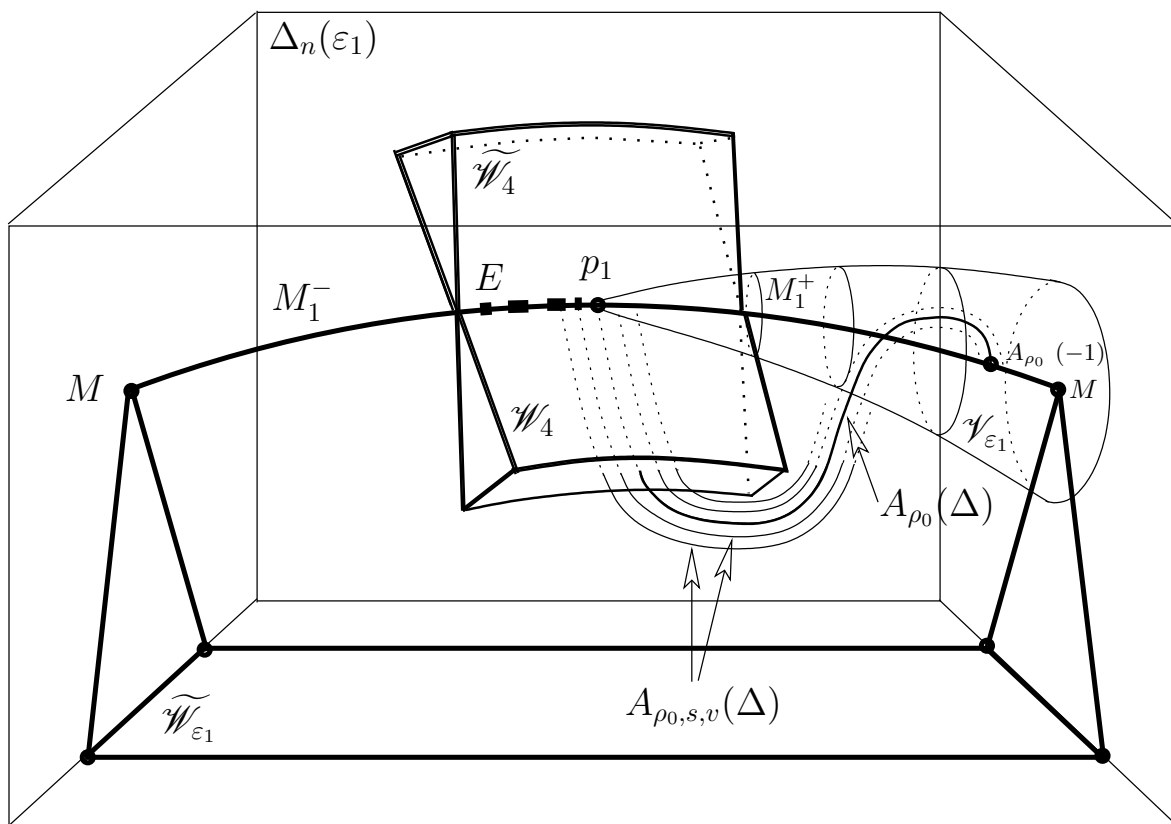
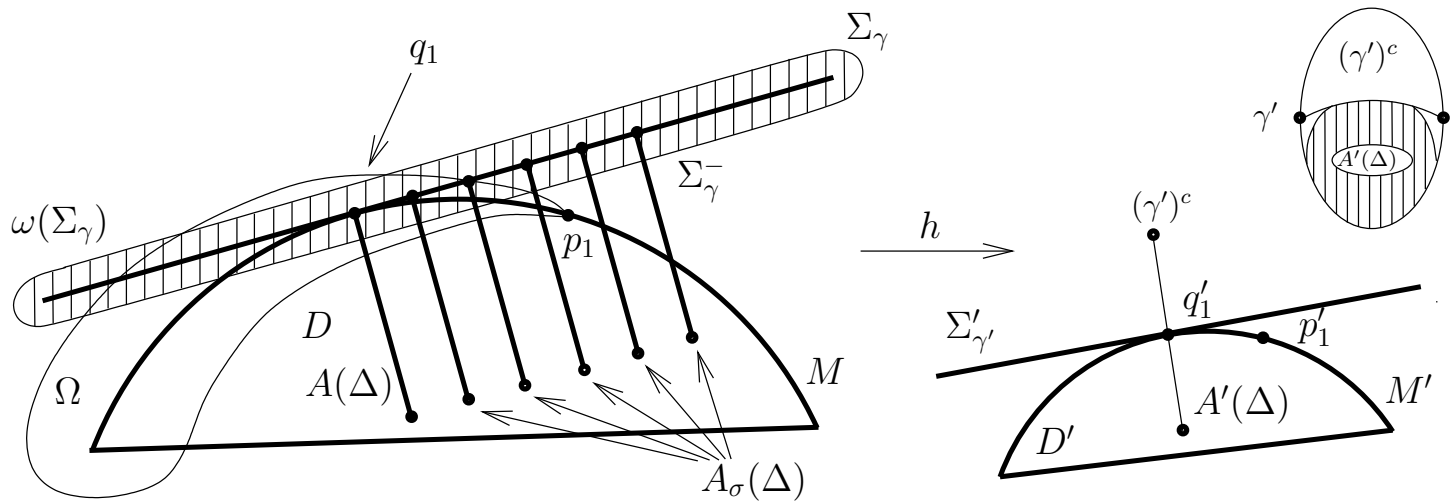
Théorème. [Fourier 2002, 82 pages] *Si $h: M \rightarrow M'$ est un difféomorphisme CR de classe \mathcal{C}^∞ entre deux hypersurfaces analytiques réelles globalement minimales de \mathbb{C}^n , alors la fonction de réflexion associée $\xi' - \Theta'(\zeta', h(z, w))$ et centrée en $p \times \bar{p}'$ se prolonge holomorphiquement à un voisinage de $p \times \bar{p}'$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.*

• **Support générique par gonflement d'un ellipsoïde :**



• **Recouvrement par un chapeau Levi-plat :**





IV – Groupes de Lie locaux en dimensions 1, 2, 3

- **Classification des variétés CR :**
 - Élie Cartan 1932 : hypersurfaces dans \mathbb{C}^2 .
 - Loboda ; Fels-Kaup [[Acta Math. 2008, 82 pages](#)]
 - Incomplet** dans \mathbb{C}^3 .
- **Revenir aux œuvres de Sophus Lie, systématiques.**
- **Classification des actions de groupes de Lie locaux :**
 - Complet chez Lie dans \mathbb{C}^2 .
 - Trois branches sur quatre complètes chez Engel-Lie dans \mathbb{C}^3 .
- **Reconstruire et moderniser les classifications de Lie**
 - Terminer le travail dans \mathbb{C}^3
 - Environ **300** groupes de Lie attendus
 - Travail de longue haleine**
- **Actuellement :**
 - Un livre de 320 pages chez Hermann [[arxiv](#)]
 - Un livre de 650 pages soumis à Springer [[arxiv](#)]
- **Samuel Pocchiola [élève ENS en doctorat] :**
 - Travail de classification
 - Construction de connexions de Cartan CR
- **Masoud Sabzevari [élève à Ispahan]**
 - Construction de connexions de Cartan CR

V – Conjectures de Kobayashi et de Green-Griffiths

- **Contexte** : Tout est sur \mathbb{C} , tout est holomorphe.
- **Petit théorème de Picard** : Toute application holomorphe :

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$$

de \mathbb{C} à valeurs dans la sphère de Riemann moins trois points distincts est nécessairement *constante*.

- **Idée de preuve** : La fonction modulaire permet de montrer que le revêtement universel de $\mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ est le disque unité :

$$\begin{array}{c} \mathbb{D} \\ \downarrow \\ f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, p_2, p_3\} \end{array} .$$

Comme \mathbb{C} est simplement connexe, f se relève en une application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$, qui est nécessairement constante d'après le théorème de Liouville. \square

- **Même phénomène dans le cas compact** : Toute application holomorphe $f: \mathbb{C} \rightarrow S$ à valeurs dans une surface de Riemann compacte quelconque de genre ≥ 2 est nécessairement *constante*, puisque S est aussi uniformisée par le disque unité \mathbb{D} .

- **Objectif** : Étudier le problème en dimension supérieure [nombreux auteurs] :

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \text{variété},$$

par exemple dans \mathbb{C}^{n+1} avec $n \geq 1$.

- **Deux directions de recherche** :

- Contexte *logarithmique* (comme Picard) :

Variété compacte \ sous-variété stricte.

- Contexte *purement compact* :

$f: \mathbb{C} \longrightarrow$ variété projective compacte.

- **Géométrie projective** : Partir de \mathbb{C}^{n+1} (non compact) et lui ajouter suffisamment de points à l'infini (et même un hyperplan), ce qui *compactifie* \mathbb{C}^{n+1} en l'*espace projectif complexe* :

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}.$$

- **Définition standard** : Dans l'espace euclidien à une dimension de plus $\mathbb{C}^{n+2} \setminus \{0\}$ moins l'origine, considérer des *coordonnées homogènes* :

$$[Z] := [Z_0: Z_1: \cdots: Z_n: Z_{n+1}]$$

avec la convention que pour tout $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tout $[cZ]$ dont les coordonnées sont c -dilatées est équivalent à $[Z]$:

$$[cZ_0: cZ_1: \cdots: cZ_n: cZ_{n+1}] = [Z_0: Z_1: \cdots: Z_n: Z_{n+1}].$$

L' *espace projectif complexe* $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ est alors l'ensemble de tels éléments homogènes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C}) &:= \{ [Z_0 : Z_1 : \cdots : Z_n : Z_{n+1}] \} \\ &= \{ z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n, Z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+2} \setminus \{0\} \} / (z \sim \mathbb{C}^* z).\end{aligned}$$

• **Géométriquement** : \mathbb{P}^{n+1} s'identifie à l'ensemble des *droites* passant par l'origine dans \mathbb{C}^{n+2} , et c'est une vraie *variété, compacte* de surcroît.

• **Ultra-présent dans les travaux de Lie** : (Plücker, Poncelet, Clebsch, Von Staudt) Sous-groupes du groupe $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$ des automorphismes de l'espace projectif (stratifications ; théorie géométrique des invariants) :

□ Classification des sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{pgl}_1(\mathbb{C})$;

□ Classification des sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{pgl}_2(\mathbb{C})$ (aucun manuel moderne ne mentionne ce résultat que Lie jugeait fondamental, car il permet d'étudier la dimension 3 en projectivant l'isotropie linéarisée d'un point, idée qui remonte à Helmholtz) ;

□ Classification des sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{pgl}_3(\mathbb{C})$ (Engel et Lie ont quasiment complété ce cas).

• **Généraliser Picard** :

Points \longleftrightarrow Sous-variétés de codimension 1.

- **Hypersurfaces projectives compactes génériques :**

$$X^n = \{ [Z_0 : Z_1 : \dots : Z_n : Z_{n+1}] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1} :$$

$$\text{Polynôme}(Z_0, Z_1, \dots, Z_n, Z_{n+1}) = 0 \} ,$$

dont le degré $\mathbf{d} \gg 1$ est *grand*, et qui est *générique*, c'est-à-dire que les coefficients A_{β} de leur polynôme définissant :

$$0 = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^{n+2} \\ |\beta| = \mathbf{d}}} A_{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n+1}} Z_0^{\beta_0} Z_1^{\beta_1} \dots Z_{n+1}^{\beta_{n+1}}$$

sont *génériques au sens de Zariski*, i.e. varient hors d'un certain sous-ensemble algébrique strict.

- **Conjecture de Kobayashi 1970 (cas logarithmique - Picard) :** Toute application holomorphe :

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1} \setminus X$$

à valeurs dans le complémentaire d'une hypersurface générique de grand degré est nécessairement *constante*. En fait, le degré optimal conjecturé est :

$$\deg X = \mathbf{d} \geq 2 \dim \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1} + 1.$$

- **Conjecture de Kobayashi 1970 (cas compact) :** Toute application holomorphe :

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow X$$

à valeurs dans une hypersurface générique de grand degré est nécessairement *constante*. À nouveau, le degré

optimal conjecturé est :

$$\deg X = \mathbf{d} \geq 2 \dim X + 1.$$

• **Nécessité de la généricité** : Dans les hypersurfaces homogènes de type Fermat :

$$0 = Z_0^d + Z_1^d + \cdots + Z_n^d + Z_{n+1}^d$$

on a toujours des applications application triviales non constantes :

$$\mathbb{C} \ni \zeta \longmapsto (\zeta, \sqrt[d]{-1} \zeta, 0, \dots, 0, 0).$$

• **Ces deux conjectures de Kobayashi restent très ouvertes et difficiles en dimension n quelconque, même sans viser le degré optimal !**

• **Prolifération ontologique et réservoir inépuisable de problèmes mathématiques** : Les sous-variétés algébriques, aussi nombreuses que les polynômes quelconques, interviennent en **Algèbre, Arithmétique, Analyse, Géométrie algébrique, Singularités, Théorie de Lie-Cartan, Équations aux dérivées partielles, Dynamique holomorphe, ...**

• **Classification fondamentale en dimension 1** : (Hyper)Surfaces de Riemann compactes :

parfois : $X^1 \subset \mathbb{P}^2$ toujours plongeables : $X^1 \subset \mathbb{P}^3$

□ Genre zéro : Sphère de Riemann \mathbb{P}^1 , uniformisée par elle-même.

□ Genre un : Tores complexes, uniformisés par \mathbb{C} .

□ Genre ≥ 2 : Ontologie riche, surfaces toutes uniformisées par le disque unité \mathbb{D} . Dans ce cas, le fibré cotangent T_X^* a beaucoup de sections, à savoir il y a beaucoup de 1-formes holomorphes globales sur la surface de Riemann X .

• **Présenter maintenant une trichotomie similaire en dimension supérieure $n \geq 2$.**

• **Supposer** : L'hypersurface $X^n \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ est géométriquement lisse, donc son fibré tangent T_X et son fibré cotangent (dual) T_X^* sont des fibrés vectoriels holomorphes de rang n :

$$\begin{array}{c} T_X^* \\ \downarrow \\ X \end{array}$$

• **Fibré canonique** : Formes différentielles extérieures de degré maximal n :

$$\Lambda^n T_X^*.$$

• **C'est $\Lambda^n T_X^*$ qui généralise le T_X^* du cas $n = 1$.**

• **Dans une carte locale** : On a $X \simeq \mathbb{C}^n$ dans des coordonnées (w_1, \dots, w_n) , une base de formes de degré 1 est constituée de dw_1, \dots, dw_n , et alors une n -forme différentielle extérieure quelconque s'écrit :

$$h(w_1, \dots, w_n) dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n,$$

où $h = h(w_1, \dots, w_n)$ est **une** fonction holomorphe. Donc le fibré canonique $\Lambda^n T_X^*$ est un fibré vectoriel de rang **1**.

• **Or les fibrés de rang 1 sur l'espace projectif sont connus.**

• **Fibrés en droites « canonique » :** Par définition, l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ est la variété des droites de $(\mathbb{C}^{n+2}, 0)$ passant par l'origine. Au-dessus de chaque point de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$, on peut donc prendre la droite qui lui correspond afin de former un fibré dit « tautologique » :

$$\begin{array}{c} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}}(-1) \\ \downarrow \\ \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1} \end{array}$$

dont les fibres sont ces droites.

• **Fibré vectoriel dual :**

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}}(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}}(-1)^*,$$

et ce fibré correspond aux hyperplans de $(\mathbb{C}^{n+2}, 0)$.

• **Puissances tensorielles :**

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}}(k) := [\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}}(1)]^{\otimes k},$$

et il y a autant de sections de ce fibré qu'il y a de polynômes homogènes de degré k :

$$Q(Z_0, Z_1, \dots, Z_n, Z_{n+1}).$$

- **Restriction à X :**

$$\mathcal{O}_X(k) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}}(k)|_X,$$

qui est encore un fibré de rang **1**.

- **Formule d'adjonction :** Pour toute hypersurface $X^n \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ de degré **d**, on vient de voir que les n -formes différentielles constituent un fibré de rang **1**, de même que les $\mathcal{O}_X(k)$ et en fait on a l'isomorphisme :

$$\Lambda^n T_X^* \simeq \mathcal{O}_X(\mathbf{d} - n - 2).$$

- **L'hypersurface X est dite de type général si :**

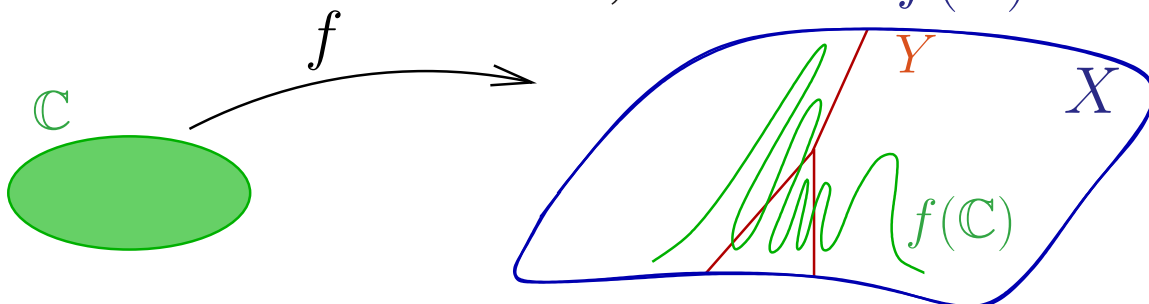
$$\boxed{\mathbf{d} \geq n + 3},$$

ce qui entraîne que $\Lambda^n T_X^*$ et ses puissances tensorielles :

$$[\Lambda^n T_X^*]^{\otimes k} \simeq \mathcal{O}_X(k(\mathbf{d} - n - 2))$$

ont alors beaucoup de sections holomorphes.

- **Conjecture de Green-Griffiths (1979) :** Sous cette hypothèse que X soit de type général, il existe un sous-ensemble algébrique propre $Y \subset X$ tel que toute courbe holomorphe entière non constante $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ est nécessairement contenue dans Y , à savoir : $f(\mathbb{C}) \subset Y$.



● **Conjectures de Lang, Vojta ; théorème de Faltings :**
Dictionnaire entre le monde holomorphe et le monde arithmétique (sur n'importe quel corps de nombres).

● **Restons dans le monde holomorphe.**

● **Dimension 2 :** $X^2 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3(\mathbb{C})$: Réponses positives :

□ Siu-Yeung 1996 : $d \geq 10^{13}$.

□ McQuillan, 1999 : $d \geq 36$.

□ Demailly-El Goul, 2000 : $d \geq 21$.

□ Paun, 2008 : $d \geq 18$.

● **Dimension 3 :** $X^3 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4(\mathbb{C})$:

□ Rousseau 2007 : $d \geq 593$.

Théorème. [Diverio-Merker-Rousseau, Inventiones 2010]
Si $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ est une hypersurface projective algébrique générique, il existe un sous-ensemble algébrique propre $Y \subsetneq X$ tel que $f(\mathbb{C}) \subset Y$ pour toute courbe holomorphe entière non constante :

● *pour* $\dim X = 4$, *lorsque* $\deg X \geq 3203$;

● *pour* $\dim X = 5$, *lorsque* $\deg X \geq 35355$;

● *pour* $\dim X = 6$, *lorsque* $\deg X \geq 172925$.

Théorème. [Ibidem] *En dimension quelconque $n \geq 2$ avec $X^n \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}(\mathbb{C})$ générique, même conclusion lorsque :*

$$\deg X \geq 2^{n^5}.$$

- **Je travaille actuellement pour améliorer 2^{n^5} .**

- **Présenter quelques idées simples :**

- **On travaille avec des hypersurfaces :**

$$X^n = \{ (z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}) \in \mathbb{P}^{n+1} :$$

$$P(z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}) = 0 \},$$

de dimension $n \geq 1$, définies comme lieu des zéros d'un certain polynôme qui sont géométriquement lisses, maintenant vues en coordonnées affines $(z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1})$.

- **Considérer une courbe holomorphe entière non constante :**

$$\mathbb{C} \ni \zeta \longmapsto f(\zeta) \in X.$$

- **Immédiatement :** Différentier par rapport à $\zeta \in \mathbb{C}$ la contrainte initiale :

$$P(f_1(\zeta), f_2(\zeta), \dots, f_n(\zeta), f_{n+1}(\zeta)) \equiv 0.$$

- **Ordre d'une telle différentiation :**

$\kappa :=$ un tel ordre de dérivation

- **Introduire des variables de jets indépendantes :**

$$f'_{j_1}(\zeta) \longleftrightarrow z'_{j_1}, \quad f''_{j_2}(\zeta) \longleftrightarrow z''_{j_2}, \quad \dots,$$

- **Coordonnées sur l'espace des κ -jets entiers :**

$$\left(z'_{j_1}, z''_{j_2}, \dots, z^{(\kappa)}_{j_\kappa} \right) \in \underbrace{\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \times \dots \times \mathbb{C}^{n+1}}_{\kappa \text{ times}}.$$

- **Équation pour $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$, écrite en coordonnées affines, qui est un polynôme de degré d :**

$$0 = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \\ |\alpha| \leq d}} a_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_{n+1}^{\alpha_{n+1}}.$$

- **Effectuer réellement les différentiations jusqu'à l'ordre 4 :**

$$0 = \sum_{\alpha} a_{\alpha} z^{\alpha}$$

$$0 = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \left(\sum_{j_1} \frac{\partial(z^{\alpha})}{\partial z_{j_1}} z'_{j_1} \right)$$

$$0 = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \left(\sum_{j_1} \frac{\partial(z^{\alpha})}{\partial z_{j_1}} z''_{j_1} + \sum_{j_1, j_2} \frac{\partial^2(z^{\alpha})}{\partial z_{j_1} \partial z_{j_2}} z'_{j_1} z'_{j_2} \right)$$

$$0 = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \left(\sum_{j_1} \frac{\partial(z^{\alpha})}{\partial z_{j_1}} z'''_{j_1} + \sum_{j_1, j_2} \frac{\partial^2(z^{\alpha})}{\partial z_{j_1} \partial z_{j_2}} 3 z'_{j_1} z''_{j_2} + \sum_{j_1, j_2, j_3} \frac{\partial^3(z^{\alpha})}{\partial z_{j_1} \partial z_{j_2} \partial z_{j_3}} z'_{j_1} z'_{j_2} z'_{j_3} \right)$$

$$0 = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \left(\sum_{j_1} \frac{\partial(z^{\alpha})}{\partial z_{j_1}} z''''_{j_1} + \sum_{j_1, j_2} \frac{\partial^2(z^{\alpha})}{\partial z_{j_1} \partial z_{j_2}} (4 z'_{j_1} z'''_{j_2} + 3 z''_{j_1} z''_{j_2}) + \right. \\ \left. + \sum_{j_1, j_2, j_3} \frac{\partial^3(z^{\alpha})}{\partial z_{j_1} \partial z_{j_2} \partial z_{j_3}} 6 z'_{j_1} z'_{j_2} z''_{j_3} + \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4} \frac{\partial^4(z^{\alpha})}{\partial z_{j_1} \partial z_{j_2} \partial z_{j_3} \partial z_{j_4}} z'_{j_1} z'_{j_2} z'_{j_3} z'_{j_4} \right).$$

Lemme. [M. 2009] *L'équation obtenue en différentiant la condition que $f(\zeta) \in X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ jusqu'à un ordre arbitraire $\kappa \geq 1$ se lit comme suit :*

$$0 = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} a_\alpha \sum_{e=1}^{\kappa} \sum_{1 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_e \leq \kappa} \sum_{\mu_1 \geq 1, \dots, \mu_e \geq 1} \sum_{\mu_1 \lambda_1 + \dots + \mu_e \lambda_e = \kappa} \frac{\kappa!}{(\lambda_1!)^{\mu_1} \mu_1! \dots (\lambda_e!)^{\mu_e} \mu_e!} \sum_{j_1^1, \dots, j_{\mu_1}^1=1}^{n+1} \dots \sum_{j_1^e, \dots, j_{\mu_e}^e=1}^{n+1} \frac{\partial^{\mu_1 + \dots + \mu_e} (z^\alpha)}{\partial z_{j_1^1} \dots \partial z_{j_{\mu_1}^1} \dots \partial z_{j_1^e} \dots \partial z_{j_{\mu_e}^e}} z_{j_1^1}^{(\lambda_1)} \dots z_{j_{\mu_1}^1}^{(\lambda_1)} \dots z_{j_1^e}^{(\lambda_e)} \dots z_{j_{\mu_e}^e}^{(\lambda_e)}.$$

• **Espoir** : Grâce à ces $\kappa + 1$ équations *compliquées*, construire d'autres équations qui sont satisfaites par les composantes :

$$f_j(\zeta), f'_{j_1}(\zeta), f''_{j_2}(\zeta), \dots, f_{j_\kappa}^{(\kappa)}(\zeta);$$

ensuite, éliminer soigneusement **toutes** les **vraies dérivées** $f'_{j_1}, f''_{j_2}, \dots, f_{j_\kappa}^{(\kappa)}$, et déduire que les composantes **non différenciées** f_j satisfont nécessairement une équation algébrique non triviale [solution à la conjecture de Green-Griffiths], ou même tellement de telles équations algébriques non triviales que cela force en fait l'application blue f à être constante [solution à la conjecture de Kobayashi].

• **Notation** : Noter :

$$J^\kappa(\mathbb{C}, X),$$

l'ensemble des zéros des $\kappa + 1$ équations compliquées écrites ci-dessus et l'appeler l'espace des κ -jets entiers de X .

- **Voir cet espace dans** : l'espace complet :

$$J^\kappa(\mathbb{C}, \mathbb{P}^{n+1})$$

des κ -jets entiers à valeurs dans \mathbb{P}^{n+1} .

- **Ainsi, la stratégie actuelle principale vers Green-Griffiths et vers Kobayashi est :**

- Étape I : Trouver beaucoup polynômes de jets :

$$P(z_j, z'_{j_1}, z''_{j_2}, \dots, z^{(\kappa)}_{j_\kappa})$$

qui fournissent des équations différentielles globales :

$$0 \equiv P(f_j(\zeta), f'_{j_1}(\zeta), f''_{j_2}(\zeta), \dots, f^{(\kappa)}_{j_\kappa}(\zeta))$$

satisfaites par **toute** courbe holomorphe entière non constante $f: \mathbb{C} \rightarrow X$.

- Étape II : Trouver tellement de telles équations différentielles que l'on peut **éliminer** toutes les vraies dérivées $f'_{j_1}, f''_{j_2}, \dots, f^{(\kappa)}_{j_\kappa}$.

- **Approche extrinsèque fondamentale de Yum-Tong :**

- Étape I : Travailler dans extrinsèquement dans \mathbb{P}^{n+1} (c'est programmatique). Je travaille actuellement pour tenter de réaliser cette approche qui exige des calculs considérables dont j'ignore pour l'instant s'ils pourront aboutir.

□ Étape II : À partir d'une unique équation différentielle, produire suffisamment d'autres équations différentielles indépendantes de telle sorte que l'on puisse vraiment éliminer les vraies dérivées $f'_{j_1}, f''_{j_2}, \dots, f^{(\kappa)}_{j_\kappa}$. J'ai réalisé cette approche en dimension n arbitraire pour les jets d'ordre n (addendum en cours à Fourier pour les jets d'ordre quelconque)

• **Approche intrinsèque de Green-Griffiths-Demailly** :

□ Step I : Introduire deux sortes de fibrés de jets *intrinsèques* sur $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$, sans porter attention aux jets dans $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$.

□ Step II : Pas de contrepartie intrinsèque chez Green-Griffiths-Demailly : actuellement on applique l'approché extrinsèque de Siu.

Extrinsèque ou intrinsèque, quelle est la meilleure approche ?

Démonstration

Étape 1 : Les courbes holomorphes entières $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ satisfont des équations différentielles algébriques.

Étape 2 : Beaucoup de telles équations différentielles donnent le Y qui absorbe les courbes holomorphes entières. [Siu 2004 ; M., Annales de Fourier 2009].

Étape 1. *Toute courbe holomorphe entière non constante $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ satisfait des équations différentielles algébriques globales lorsque $d = \deg X$ est assez grand.*

• **Dimension 2 :** [Green-Griffiths 1979] optimal :

$$\deg X \geq 5.$$

• **Dimension 3 :**

□ [Rousseau 2006] $\deg X \geq 97$.

□ [M., 30 Mai 2009] $\deg X \geq 34$.

• **Dimension 4 :**

□ [Diverio 2008] $\deg X \geq 298$.

□ [D.M.R. 2009] $\deg X \geq 259$.

• **Dimension 5 :**

□ [Diverio 2008] $\deg X \geq 1222$.

• **Dimension 6 :**

□ [D.M.R. 2009] $\deg X \geq 4352$.

Très loin de : $\deg X \geq n + 3 = 6, 7, 8, 9, \dots$

- Revenir à la borne générale 2^{n^5} : Pour l'Étape 1 :

Théorème. [Diverio-Merker-Rousseau, Inventiones 2010]
 Avec les jets de Demailly d'ordre $\kappa = n$ égal à la dimension, j'obtiens des équations différentielles algébriques pour des hypersurfaces X de degré :

$$\deg X \geq 2^{n^4} n^{4n^3} 3^{n^3} n^{3n^2} (n+1)^{n^2+1} n^{2n} 12,$$

- Étape 2 : Ajouter un facteur modeste n^2 et arrondir :

$$\deg X \geq 2^{n^5}.$$

- **Donc c'est surtout l'Étape 1 qui n'est pas adéquate !**

- **Mais en dimension 2 :** Green-Griffiths atteignaient en 79 la borne optimale :

$$\deg X \geq 2 + 3 = 5$$

pour l'Étape 1

- **Observation :** Chez Green-Griffiths, l'ordre κ des jets tendait vers l'infini.

- **Or jusqu'à maintenant :** Les jets raffinés de Demailly ne sont pas compris, même lorsque $\kappa = n$.

\implies On a réussi à contourner maladroitement cet obstacle, ce qui explique la borne gigantesque 2^{n^4} .

- **Conclusion :** Il faut revenir aux jets de Green-Griffiths.

Théorème. [M., arXiv, 89 pages] *Existence d'équations différentielles algébriques en degré optimal :*

$$\deg X \geq n + 3.$$

Plus précisément :

équations différentielles algébriques **minoré par**

$$\geq \frac{m^{(\kappa+1)n-1}}{(\kappa!)^n ((\kappa+1)n-1)!} \left\{ \frac{(\log \kappa)^n}{n!} d (d - n - 2)^n - \text{Reste inférieur} \right\}.$$

• **Pour atteindre le degré optimal $n + 3$:** Il faut que l'ordre κ des dérivées tende vers ∞ .

• **Lionel Darondeau [élève ENS en M2 + doctorat] :** Généraliser la théorie aux applications de $\mathbb{C}^p \rightarrow X$.

• **Concepts et outils pour la preuve du théorème :**

- Fibrés vectoriels holomorphes.
- Théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch.
- Théorie des représentations de $GL_n(\mathbb{C})$.
- Diagrammes de Young.
- Fibrés de Schur.
- Cohomologie asymptotique.
- Résolutions localement libres.
- Asymptotique des tableaux semi-standard.
- Polyzêtas à plusieurs variables.
- Séries hypergéométriques multiples.
- Combinatoire de marches dirigées.
- C'est un **travail d'Analyse** : inégalités, estimations.

Théorème. [Ibidem] Le fibré gradué $\text{Gr}^\bullet \mathcal{E}_{\kappa, m}^{GG} T_X^*$ associé au fibré $\mathcal{E}_{\kappa, m}^{GG} T_X^*$ des κ -jets de poids m de Green-Griffiths s'identifie à la somme directe suivante de fibrés de Schur :

$$\text{Gr}^\bullet \mathcal{E}_{\kappa, m}^{GG} T_X^* = \bigoplus_{\ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots \geq \ell_n \geq 0} \left(\mathcal{S}^{(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)} T_X^* \right)^{M_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n}^{\kappa, m}},$$

avec des multiplicités $M_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n}^{\kappa, m} \in \mathbb{N}$ égales au nombre de fois qu'un diagramme de Young $\text{YD}_{(\ell_1, \dots, \ell_n)}$ dont les lignes ont les longueurs $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots \geq \ell_n \geq 0$ peut être rempli par des entiers strictement positifs $\lambda_i^j \leq \kappa$ placés à la i -ème ligne et à la j -ème colonne de manière à constituer un tableau semi-standard, avec la contrainte supplémentaire que la somme de tous ces entiers :

$$\begin{aligned} m &= \lambda_1^1 + \dots + \lambda_1^{\ell_n} + \dots + \lambda_1^{\ell_2} + \dots + \lambda_1^{\ell_1} \\ &+ \lambda_2^1 + \dots + \lambda_2^{\ell_n} + \dots + \lambda_2^{\ell_2} \\ &+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \\ &+ \lambda_n^1 + \dots + \lambda_n^{\ell_n} \end{aligned}$$

soit égale au degré d'homogénéité prescrit m .

Inaccessible avec les jets de Demailly-Semple :

Le plus haut niveau de jets **plafonne** à : $n = \kappa = 4$

VI – Hyperbolicité au sens de Kobayashi

- Objectif : Établir qu'il existe une borne d_n effective en fonction de n telle que toutes les hypersurfaces projectives complexes $X^n \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}(\mathbb{C})$ sont hyperboliques au sens de Kobayashi (aucun résultat complet connu).
- Stratégie : Construire des différentielles de jets purement en coordonnées.
- Explorer les liens entre hyperbolicité et les conjectures de Lang, de Vojta.
- Aller vers la théorie de Nevanlinna à plusieurs variables.
- Explorer la théorie (analytique) des nombres en relation avec l'Analyse Complexe et le calcul raffiné à plusieurs variables.

VII – Philosophie du calcul

Situation d'ouverture universelle du calcul. La pensée qui calcule est toujours inscrite dans une situation d'ouverture *absolument universelle*, qui s'exprime par une *question générique* : « *comment décider du prochain acte ?* » La question est en effet constamment : « *quel acte de calcul effectuer ?* » C'est *la* question, il n'y a qu'*elle*, et elle est tout le temps « *là* ».

Rappelons le *schematum* de l'exponentielle : tout arbre discret qui présente des points de bifurcation croît de manière exponentielle, même quand dans une certaine *proportion*, une partie de ses branches naissantes est supprimée aléatoirement. Ici, c'est-à-dire *dans l'universel indécis du calcul*, la pensée est *a priori* confrontée à une *exponentiation potentielle* de ses actes, et donc à l'impossibilité de tout embrasser. Il faut par conséquent définir une *posture décisionnelle viable*. Là est tout l'enjeu pour qui veut engendrer de l'irréversible-synthétique en mathématiques.

Métaphysique de l'instant propre de tout acte. Les exigences du principe de raison ne sont presque jamais respectées d'une manière absolue. Formulées au niveau le plus élevé, *ces exigences voudraient que chaque acte mathématique porte en lui des raisons justifiantes qui le motivent et qui l'expliquent*. Ces exigences voudraient

que soient effacées au mieux les traces rémanentes de mystère qui entachent l'instant propre de tout acte. Les mathématiques ne sont-elles pas une science des causalités abstraites, objectives et *a priori*? À son plus haut niveau, l'exigence de penser en raison voudrait donc que soit mis au point un langage mathématique totalisant qui *exprime à chaque instant les motivations et les causalités de tout acte et de tout calcul.*

Il est dans la nature des mathématiques des temps modernes (en contraste avec celles de l'Antiquité) que nous possédons un levier sous la forme de notre langage symbolique et de notre terminologie, grâce à quoi les raisonnements les plus complexes sont réduits à un certain mécanisme. De cette manière, la science a gagné infiniment en richesse, mais elle a autant perdu en beauté et en caractère, comme on le fait ordinairement dans la pratique.

Gauß, Werke, **10**, 1, p. 434.

Chaque fois que l'on utilise le calcul et chaque fois qu'on emploie des concepts, j'exige que l'on reste toujours conscient des stipulations originelles [ursprünglichen Bedingungen], et que tous les résultats du mécanisme ne soient jamais considérés comme des propriétés en dehors d'une autorisation claire **. *Ibidem.*

Fin