Introduction

On sait qu'à sa naissance, l'Analyse Complexe fut contemporaine de la constitution du concept abstrait de fonction numérique et qu'elle suscita l'invention des variétés différentiables ou «surfaces de Riemann» associées aux fonctions multiformes. À travers l'histoire, le souci de fondamentalité qui naquit en même temps qu'elle a su la délivrer de ses liens provisoires avec les formules concrètes et la transformer en une théorie abstraite qui est à la fois système et analyse.

Les systèmes conceptuels qui sont au fondement des sciences exactes se sont formés par des changements graduels d'anciens systèmes conceptuels et les raisons qui ont engendré de nouveaux modes d'exposition peuvent être réduites à certaines contradictions ou improbabilités qui se sont révélées dans des modes d'exposition antérieurs. C'est donc dans l'analyse des diverses liaisons entre les concepts mathématiques et dans la fécondation réciproque de l'Analyse et de la Géométrie qu'il faut envisager les sources du développement de l'analyse complexe.

On sait que les nombres complexes, nés dans l'Italie du *cinquecento*, sont apparus par miracle à travers la résolution de l'équation algébrique du troisième degré donnée par Tartaglia (1539) puis par Cardan (1547), alors qu'ils eussent pu demeurer enfouis dans les équations du second degré déclarées «impossibles». Dans son *Algèbre* de 1572, Bombelli invente $\sqrt{-1}$ et donne en un poème resté célèbre les règles algébriques fondamentales auquel il se plie. Poursuivant cette brève évocation historique, on rappelera la naissance remarquablement spéculative du plan complexe qui a été imaginée par Argand. Dans son mémoire de 1806, Argand fit jouer la « nécessité métaphysique » de la dimension deux. Bien que les entiers de Gauss $a+ib$, $a,b \in \mathbf{Z}$, $i=\sqrt{-1}$, préfigurent l'interprétation vectorielle, la voie qu'a emprunté Argand se démarque de l'algèbre. Argand cherche en effet à exprimer un analogue multiplicatif du nombre négatif -1 qui satisfait à l'équation additive $1-x=x-1$, et qui est en cela un « milieu multiplicatif ». À ce nombre -1 correspond un axe négatif répondant à l'axe positif. En y réfléchissant, et à la recherche du même succès, Argand trouve que ce troisième genre de direction qui devrait s'allier à l'idée de nombre imaginaire se dirigera de telle manière que la direction positive fût à elle comme celle-ci est à la direction négative. Milieu multiplicatif qui satisfait à la proportion $\frac{1}{x}=\frac{x}{-1}$, le nombre imaginaire se propulsera donc perpendiculairement et latéralement. Il pivotera autour de zéro, à distance égale des positifs et des négatifs : le plan est nécessaire.

En rapports étroits avec l'analyse infinitésimale, l'analyse circonstanciée des fonctions de variable réelle s'est concentrée aux XVII^e et XVIII^e siècles sur l'étude des fonctions dites «usuelles» ou «élémentaires». Du fait qu'elles comprennent les polynômes, le logarithme népérien, la fonction exponentielle, les fonctions trigonométriques et les expressions quelconques composées analytiquement de ces quantités, la théorie des fonctions s'est édifiée d'abord comme une combinatoire différentielle, visant à une classification des fonctions par ordre croissant de complexité. C'est le mathématicien suisse Leonhard Euler qui entreprit la première systématisation de leur diversité dans son *Introduction à l'Analyse des Infiniments petits*, parue en latin en 1748. Une telle multiplicité compositionnelle justifie la dénomination d'*Analyse* mathématique.

Cependant, l'un des traits unificateurs marquants de l'Analyse fut la découverte de la possibilité de représenter les fonctions usuelles par la somme de *séries convergentes* de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, lesquelles se prêtent d'une manière uniforme aux opérations arithmétiques. D'où un second sens du terme *Analyse*: de cette manière, les fonctions usuelles se trouvent décomposées en monômes $a_n(x-x_0)^n$; on les appelle donc *fonctions analytiques*.

Mais ce point de vue fut rapidement à l'origine de croyances erronées et contradictoires. L'opinion des géomètres sur la possibilité ou l'impossibilité de représenter une fonction arbitraire donnée graphiquement par une série convergente connut plus d'un siècle d'hésitations. L'Analyse devait se trouver alors confrontée à l'élaboration d'une «métaphysique mathématique» adéquate pour décider de cette question, qui avait pris naissance vers le milieu du XVIII^e siècle, à l'occasion des recherches sur les cordes vibrantes, dont s'occupaient Euler, Bernouilli, d'Alembert et Lagrange. Elle ne fut «résolue» par la négative qu'après la réévaluation des travaux de Bolzano, d'Abel et de Riemann par Weierstrass et par Cantor. Enfin, l'approfondissement de cette question devait susciter un champ immense de recherches, qui ne put se développer véritablement qu'au XX^e siècle, lorsque furent thématisées les classes de différentiabilité, les espaces de Hilbert, de Sobolev, de Hölder et de Banach.

En vérité, si le rôle des fonctions analytiques reste fondamental dans toutes les mathématiques (l'analyticité ou l'algébricité des objets constitue en effet un paradigme existentiel de la multiplicité qui autorise leur classification possible), il a néanmoins fallu reconnaître, dès le milieu du XIX^e siècle, l'existence de fonctions bien moins régulières que les fonctions indéfiniment dérivables ou analytiques. On sait que Bolzano, dès 1834, avait séparé le concept de continuité de celui de dérivabilité et qu'il illustre cette séparation au moyen d'une fonction continue sur un intervalle mais nulle part dérivable. Parce que les travaux de Bolzano ne seront connus qu'à la fin du XIX^e siècle, c'est à Riemann que l'on doit la première distinction nette entre la continuité et la différentiabilité, laquelle sera formulée dans son mémoire d'habilitation de 1854. L'exemple de Riemann repose sur la série $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$, où (y) est une fonction qui dénote la différence entre y et l'entier le plus proche, *i.e.* $(y) = 0$ si $2y$ est un entier naturel, $(y) = \inf_{l \in \mathbf{Z}}(y-l)$ sinon. La fonction $f(x)$ est une série uniformément convergente pour toute valeur de x, mais dont l'ensemble (dense) de points de discontinuité est constitué de la suite des rationnels de la forme $\frac{p}{2q}$, $p, q \in \mathbf{Z}$ premiers entre eux, points où f possède un saut dont la valeur est égale à $\frac{\pi^2}{8q^2}$. Plus célèbre à nos jours est l'exemple construit par Weierstrass de la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, avec $a \in \mathbf{N}$ impair, $a \geq 1$, $0 < b < 1$ et avec $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, fonction qui est continue mais dont la dérivée n'existe en aucun point. Ces pathologies sont inscrites à dessein dans ces séries, *qui ne sont pas des séries de monômes.* On appelle encore *séries entières* les séries de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ qui sont le modèle local des fonctions analytiques.

Ainsi, contrairement aux fonctions analytiques, celles qui sont seulement continues, voire discontinues, se dérobent par nature à une saisie exhaustive. Il y a une indétermination nécessaire dans l'idée de «fonction arbitraire donnée graphiquement». Lorsqu'il a été disposé d'une telle fonction sur un intervalle déterminé, le mode de son prolongement en dehors de cet intervalle reste tout à fait arbitraire. Enfin, on peut à loisir modifier son graphe, le pincer près d'un point, le pousser sur des intervalles d'une longueur arbitrairement petite, tandis que l'ajout d'un terme $a_N(x-x_0)^N$ ou d'une somme quelconque convergente de tels termes *retentit sur la totalité de son graphe.* Il faut donc se représenter les fonctions continues arbitraires comme extrêmement plus générales et plus simples que les fonctions analytiques.

Dans ce vaste univers des fonctions arbitraires, les fonctions *analytiques* jouissent de propriétés vraiment exceptionnelles. Elles sont étroitement associées à la structure sérielle des sommes convergentes $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ de monômes. De plus, ces propriétés sont, dans le cas analytique *complexe* (*i.e.* $a_n, x \in \mathbf{C}$), harmonisées à un degré supérieur par la structure algébrique du corps des nombres imaginaires. L'analyse complexe est la théorie de ces propriétés exceptionnelles, que nous allons suggérer sur quelques exemples élémentaires.

D'une manière générale, le passage à l'étude des fonctions de variable complexe est indispensable et aussi naturel que le passage du corps des réels à celui, algébriquement clos, des nombres complexes. Par exemple, la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est analytique en tout point de l'axe des réels et pourtant, sa série de Taylor à l'origine $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, $|x| < 1$, cesse de converger pour $|x| > 1$. La cause en est incompréhensible dans le domaine réel : en effet, les points $x_0 = \pm 1$ de divergence de la série n'ont rien de singulier pour $f(x_0) = \frac{1}{2}$. Mais le passage à un domaine complexe explique aussitôt cette situation : le cercle unité $S^1 = \{z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbf{C};\ |z| = (x^2+y^2)^{1/2} = 1\}$ contient les points $z_0 = \pm\sqrt{-1}$ en lesquels la fonction $f^c(z) = \frac{1}{1+z^2}$ devient infinie et où la série cesse de converger.

Voici encore un deuxième exemple. La fonction $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$ prend des valeurs infinies aux points $x_0 = \pm 1$, ainsi que sa série de Taylor en 0, $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, $|x| < 1$. Dans l'intervalle $]-1, 1[$, les deux points $x_0 = \pm 1$ semblent alors constituer une limite absolue à l'existence de la fonction, qui resurgit pourtant sur $]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$, avec la même expression algébrique. Mais le passage au plan complexe permet aussitôt de contourner l'obstacle «pôle en x_0» le long de petits demi-cercles centrés en x_0 et appuyés sur l'axe des réels, et de reconstituer ainsi géométriquement l'homogénéité algébrique de la fonction $g^c(z) = \frac{1}{1-z^2}$. (Néanmoins, il n'y a aucune raison que les valeurs que l'on obtient en contournant le point x_0 dans le plan complexe « au-dessous » et « au-dessus » de l'axe des réels coïncident : la fonction logarithme autour du point 0 produit une différence de valeurs de 2π.)

Ainsi, les singularités de la théorie des fonctions analytiques réelles prennent-elles, après *complexi-*

fication $f \mapsto f^c$, $(\mathbf{R} \ni x \mapsto f(x)) \mapsto (\mathbf{C} \ni z \mapsto f(z))$, une allure géométrique entièrement nouvelle. Le point dans le plan complexe est circonscrit, isolable et contournable, provocateur d'autant de greffes circulaires qu'il ne délimite aucune frontière. Mais dans quelle mesure le passage à la théorie complexe est-il nécessaire et universel d'un point de vue spéculatif? Ce point mérite encore d'être éclairci.

Les exemples précédents introduisent en vérité à trois raisons profondes, à trois faits philosophiques convaincants, qui argumentent chacun en faveur d'une universalité principielle de l'Analyse Complexe, en tant qu'elle constitue une extension de la théorie des fonctions d'une variable réelle.

Premièrement, les nombres complexes ont pu apparaître provisoires dans la montée vers l'absolu jusqu'au moment où l'on maîtrisa les enjeux du théorème fondamental de l'algèbre, qui naquit graduellement dans les oeuvres de Girard, de Descartes, d'Euler, de Lagrange, de d'Alembert et de Gauss. *Tout polynôme $P(z)$ à coefficients complexes de degré $m \geq 1$ admet exactement m racines complexes comptées avec multiplicité.* Clôture algébrique universelle des corps de nombres, le corps $\mathbf{C}$ capture donc l'extension algébrique par excellence pour ces «soldats de l'algèbre» que sont les polynômes.

Deuxièmement, le plus étonnnant est le célèbre *théorème de Frobenius* (1878), d'après lequel le corps des nombres complexes fournissent la seule extension possible du corps des nombres réels avec préservation des opérations algébriques. (On sait cependant qu'en relaxant la commutativité s'ouvre le monde multiple de la *géométrie* et de l'*analyse non commutatives*, partie des mathématiques étroitement liée à la physique quantique.) Par conséquent, si $\mathbf{C}$ est l'horizon algébrique de $\mathbf{R}$, l'étude des fonctions de variable complexe doit vraisemblablement constituer un univers fonctionnel adéquat pour l'étude des fonctions de variable réelle.

Enfin, du point de vue géométrique, on sait que l'idée cruciale de *plan complexe* (ou de la bidimensionnalité des nombres complexes), absente des premiers travaux de Cauchy, n'apparut que tardivement dans l'histoire, dans les travaux précurseurs d'Argand, de Wessel et de Gauss. Or le plan instaure une géométrie là où l'analyste n'étudiait que des fonctions. Cette idée de plan qui est le support de l'algèbre des nombres imaginaires a inauguré et déployé la première interaction dans l'histoire des mathématiques entre *géométrie* et théorie fonctionnelle, dont l'approfondissement sans fin constitue l'un des thèmes majeurs des mathématiques contemporaines.

Fonctions analytiques complexes

La conception de fonction analytique selon les idées de Weierstrass (1861) est une conception locale et algébrique. Historiquement postérieure à la conception de Cauchy et de Riemann, elle repose sur l'idée de série convergente. Par définition, une fonction $f(x)$ est *analytique* au voisinage d'un point x_0 si elle se laisse développer par une série de puissances à coefficients numériques du type $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, qui converge pour tout x près de x_0. En fait, le concept d'*analyticité* est suffisamment général pour qu'il soit superflu ici de préciser les domaines d'appartenance de x et des coefficients a_n : le calcul sur ces séries possède en effet un sens sur le corps des réels comme sur le corps des complexes.

Pour fixer les idées, on désignera par x une variable réelle et par $z = x+iy$, $i = \sqrt{-1}$, une grandeur variable complexe, $|x| = \sup\,(x, -x) = (x^2)^{1/2}$, $|z| = (x^2+y^2)^{1/2}$. On démontre alors – et c'est élémentaire – qu'une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n$ ($Z = (x-x_0)$ ou $Z = (z-z_0)$) converge et définit un nombre si et seulement si la suite infinie des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $a_n \in \mathbf{R}$ ou $a_n \in \mathbf{C}$, satisfait une majoration du type $|a_n| \leq C(\rho_0)^n$, pour des nombres réels $C > 0$, $\rho_0 > 0$. Autrement dit, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n$ converge si elle est contrôlée terme à terme par la série connue $\sum_{n=0}^{\infty} C\rho_0^n Z^n = \frac{C}{1-\rho_0 Z}$, dont la somme est définie pour $|Z| < \frac{1}{\rho_0}$. En vérité, seule la «queue» de la série infinie influe sur sa convergence, c'est-à-dire le système projectif des restes d'ordre N, $R_N(Z) = \sum_{n\geq N} a_n Z^n$, N arbitrairement grand. En effet, les sommes $S_N(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n Z^n$ existent et sont toujours finies. Ainsi, on démontre aisément que la série converge dans l'ensemble des Z tels que $|Z| < \frac{1}{\rho} = R$ (intervalle de longueur $2R$ si $Z \in \mathbf{R}$, disque de rayon R si $Z \in \mathbf{C}$), où ρ est la borne inférieure des nombres ρ_0 tels que $|a_n| \leq C\rho_0^n$ pour tous n proches de ∞, *i.e.* supérieurs à un nombre N non précisé. La théorie des séries convergentes établit alors par le calcul que les fonctions analytiques sont indéfiniment dérivables (terme à terme), s'additionnent, se soustraient, se multiplient, se divisent (sous l'hypothèse de non annulation du dénominateur), se composent et s'inversent (sous des hypothèses naturelles).

Toutefois, la conception de fonction analytique selon les idées de Bernhard Riemann dévoile l'existence de mystères profonds (annoncés *supra*) dans le passage du réel au complexe, qui n'apparaissent plus dans la théorie de Weierstrass.

En 1851, Riemann présente à la faculté de philosophie de Göttingen sa thèse de doctorat, *Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe*, qui constitue le premier jalon théorique dans l'histoire de cette science. Si l'on en croit Félix Klein, la grande activité de travail mathématique qui a eu son point de départ dans l'oeuvre de Riemann et qui continue toujours, est uniquement la conséquence de la puissance incomparable de ses conceptions mathématiques, si *originales* et si *profondes*. De la thèse de 1851, comme de tous les textes qui lui sont postérieurs, émane une philosophie intrinsèque au développement des mathématiques que l'on peut qualifier de souci dialectique de l'extension des concepts et des liaisons de dépendance mutuelle qu'ils entretiennent entre eux. Les recherches de Riemann partent de concepts généraux, afin d'éviter que le travail ne soit entravé par des vues trop étroites et que le progrès de la connaissance des médiations dans la hiérachie génératrice des notions ne trouve un obstacle dans les préjugés traditionnels. La base que Riemann a su conférer à l'analyse complexe mérite que l'on s'y attarde et qu'on la restitue.

Partant de l'idée de fonction d'une variable réelle comme grandeur u dépendant d'une grandeur réelle x, Riemann commence dans sa thèse de 1851, par affirmer qu'une telle définition ne stipule aucune loi entre les valeurs isolées de la fonction, pour retourner ensuite contre elle cette affirmation de généralité pure. Dans le cas des fonctions *continues*, il existe en effet des expressions analytiques par lesquelles on peut représenter explicitement une approximation de ces fonctions sur un intervalle donné. En effet, d'après le théorème attribué à Weierstrass et connu d'Euler et de Lagrange, pour toute fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, $a<b$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un polynôme $P(x)=\sum_{1\leq j\leq m} a_j x^{m-j}$ tel que $|f(x)-P(x)|<\varepsilon$, $x\in[a,b]$. Il est donc indifférent de définir la dépendance de la grandeur u de la grandeur x comme donnée arbitrairement ou bien comme reposant sur des opérations de calcul déterminées.

Si donc l'on souhaite indiquer ce que l'on devra entendre par fonction arbitraire d'une variable complexe, on pourra prendre comme base la classe des fonctions qui se trouvent définies, *par extrapolation*, comme les *complexifiées* de fonctions $f(x)$ de variable x, classes de fonctions où l'expression «fonction *de* $z=(x+iy)$» contient un *génitif approché* et valable «à la limite». Car ce génitif est déterminé dans le cas de polynômes $P(x)=\sum_{1\leq j\leq m} a_j x^{m-j}$, pour lesquels P «de» z désigne bien évidemment $P(z)=\sum_{1\leq j\leq m} a_j z^{m-j}$.

Or, une grandeur arbitraire $w=u+iv$ dépendant de valeurs complexes $x+iy$ ne dépend pas forcément *de* z, mais peut dépendre tout aussi bien de $\bar{z}=x-iy$. En vérité, une telle fonction quelconque w dépend des deux variables x et y. Elle s'écrit indifféremment $\tilde{w}(z,\bar{z})$ ou $w(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$, puisque $x=(z+\bar{z})/2$ et $y=(z-\bar{z})/2i$. Ainsi, il est possible d'écrire la différentielle réelle de $w(x,y)$, $dw(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+i(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy)$ au moyen des différentielles $dz=dx+idy$ et $d\bar{z}=dx-idy$ et des opérateurs de dérivation définis par $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y})$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y})$. On obtient $dw(x,y)=\frac{\partial w}{\partial z}dz+\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$ et si l'on définit les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ par $\partial f=\frac{\partial f}{\partial z}dz$ et $\overline{\partial}f=\frac{\partial f}{\partial d\bar{z}}d\bar{z}$, on peut écrire $d=\partial+\overline{\partial}$. Maintenant, si la grandeur w est composée par une combinaison d'opérations élémentaires du calcul, la dérivée $\frac{\partial w}{\partial z}$ sera toujours indépendante de la différentielle dz. Elle est égale à $P'(z)\sum_{1\leq j\leq m-1} a_j(m-j)z^{m-j-1}$, si la grandeur $w=P(z)$ est polynômiale. En effet, $\lim_{h\to 0}((z+h)^k-z^k)/h=kz^{k-1}$ coïncide formellement avec $\frac{\partial z^k}{\partial z}$, qui vaut donc kz^{k-1}, comme dans le cas où $z=x$ est une variable réelle.

Il est donc évident, en admettant le raisonnement d'extrapolation prédédent (dont la légitimité n'est pas établie) que $w(x,y)$ ne pourra être une fonction «de z» qu'à la condition que le terme de droite dans l'équation s'annule, *i.e.* $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=0$, ce qui sécrit aussi $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$. Réciproquement, si cette condition différentielle est satisfaite, on s'aperçoit qu'elle exprime que w ne dépend pas de $\bar{z}$. En ayant soin de notifier le saut et l'absence de justification complète dans ce raisonnement, Riemann prendra comme point de départ cette indépendance et énonce par conséquent la définition fondamentale : *Une grandeur variable complexe w est dite une fonction d'une autre grandeur variable complexe z lorsqu'elle varie avec elle de telle sorte que la valeur de la dérivée $\frac{dw}{dz}$ est indépendante de la valeur de la différentielle dz*, *i.e.* si $w=u+iv$ satisfait aux équations dites *de Cauchy-Riemann*,

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0, \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Elles sont équivalentes à l'équation $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=0$, signifiant précisément que w ne dépend pas de $\bar{z}$. Par convention, on notera $f(z)$ la dépendance de w par rapport à z et on appellera *holomorphes* les fonctions qui satisfont $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}=0$. Si $\omega\subset\mathbf{C}$ est ouvert, $\mathcal{O}(\omega)$ désignera l'algèbre des fonctions holomorphes sur

ω.

Ce passage marque un tournant historique et conceptuel majeur dans la théorie des fonctions, provoquant l'intervention des techniques de la théorie des équations aux dérivées partielles et de la théorie du potentiel (en mathématiques et en physique), par ses relations étroites avec les fonctions harmoniques de deux variables. Mais le phénomène le plus *spectaculaire* de la théorie va être que la seule formulation de la définition précédente rend *ispo facto* la fonction $w = f(z)$ développable en série entière ; ou encore, la seule existence de la dérivée première $\frac{dw}{dz}$ la rend infiniment dérivable et même analytique. Le destin de la théorie à une variable aura été marqué par l'usage de formules intégrales, dites «de Cauchy» (voir *infra*), mais le passage à plusieurs variables a conduit au XX^e siècle à l'étude des opérateurs aux dérivées partielles *elliptiques* $\mathcal{P}(x, y, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$, dont $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ ou $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ sont des exemples, et qui ont la propriété d'être très régularisants : *Toute solution g de $\mathcal{P}g = f$ est $\mathcal{C}^\infty$ si le second membre f l'est.*

L'outil le plus adéquat pour l'étude des fonctions holomorphes reste la *formule intégrale de Cauchy*, qui semble être la formule-clé de l'analyse complexe, d'où se déduisent ladite propriété et tous ses éléments fondamentaux.

Représentation de Cauchy

Le théorème général dont nous partirons est appelé *formule de Cauchy-Green.* Soit $\omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert dont le bord $\partial\omega$ et une réunion finie de courbes différentiables ($\mathcal{C}^1$) par morceaux. Si $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\omega}, \mathbf{C})$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{\omega} = \omega \cup \partial\omega$ ($f(x, y)$ différentiable par rapport à x et à y), on a la *formule de Stokes* :

$$\int_{\partial\omega} f(\eta)\; d\eta + \int\int_{\omega} \partial f/\partial\bar{\eta}(\eta)\; d\eta \wedge d\bar{\eta} = 0. \tag{1}$$

Ici, la forme différentielle $d\eta \wedge d\bar{\eta} = 2i d\eta_1 \wedge d\eta_2$, $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, doit être entendue comme un élément différentiel de surface (au sens des physiciens et *orienté*) « $d\eta_1 d\eta_2$ », par rapport auquel on intègre une fonction ou une densité. La formule précédente est tout simplement l'analogue bidimensionnel de la formule (tautologique) de Taylor intégrale, $[f(b) - f(a)] + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial u}\, du = 0$, pour toute $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$. Sa démonstration repose sur la théorie des fonctions de variable réelle : il suffit de découper ω en bandes parallèles à l'axes des x et d'appliquer la formule de Taylor intégrale sur chaque bande.

Si f satisfait aux équations de Cauchy-Riemann, *i.e.* si $\partial f/\partial\bar{\eta} \equiv 0$ dans ω, on en déduit la première *formule de Cauchy*,

$$\int_{\partial\omega} f(\eta)\; d\eta = 0. \tag{2}$$

En désignant maintenant un point spécial $z \in \omega$, on peut l'isoler en traçant un cercle $\gamma(z, \varepsilon) = \partial D(z, \varepsilon)$ de centre z et de rayon $\varepsilon > 0$, bord d'un disque $D(z, \varepsilon)$, et appliquer la formule (1) à l'ouvert $\omega_1 = \omega - D(z, \varepsilon)$, de bord $\partial\omega_1 = \partial\omega \cup \gamma(z, \varepsilon)$, et à la fonction $\frac{f(\eta)}{\eta - z}$ au lieu de $f(\eta)$, faire tendre enfin ε vers zéro – telle est la recette –, pour en déduire la *formule de Cauchy-Green* :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\omega} \frac{f(\eta)}{\eta - z}\; d\eta + \int\int_{\omega} \frac{\partial f/\partial\bar{\eta}(\eta)}{\eta - z}\; d\eta \wedge d\bar{\eta}. \tag{3}$$

(La fonction $(\eta - z)^{-1}$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur le plan complexe. Le terme $f(z)$ vient de la limite, quand $\varepsilon \to 0$, de $\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(z,\varepsilon)} \frac{f(\eta)}{\eta - z}\, d\eta$. Enfin, $\int\int_{D(z,\varepsilon)}$ s'évanouit quand $\varepsilon \to 0$.)

Si f satisfait aux équations de Cauchy-Riemann, *i.e.* si $\partial f/\partial\bar{\eta} \equiv 0$ sur ω, on en déduit la deuxième *formule de Cauchy* :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\omega} \frac{f(\eta)}{\eta - z}\; d\eta\ : \tag{4}$$

La valeur de f en un point $z \in \omega$ est déterminée pas l'intégrale sur la frontière $\partial\omega$ des valeurs de $f(\eta)/(\eta - z)$.

La même formule vaut pour tout domaine $\omega_1 \subset \omega$, à bord $\partial\omega_1$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, si $z \in \omega_1$. En particulier, pour $\omega_1 = D(a, r) \subset\subset \omega$ un disque de centre $a \in \omega$ et de rayon $r > 0$, contenu dans ω, de bord le cercle $\gamma(a, r)$. La formule (4) s'écrit alors

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(a,r)} \frac{f(\eta)}{\eta - z}\; d\eta, \tag{5}$$

et c'est la *formule intégrale de Cauchy locale.*

L'une des premières conséquences de (5) est le *principe du maximum du module*: *le module* $|f|$ *d'une fonction holomorphe* $f \in \mathcal{O}(\omega)$ *non constante ne peut avoir de maximum local en aucun point* $a \in \omega$. Sinon, si $|f(z)| < |f(a)|$ pour tout $z \in D(a, \varepsilon) \subset \omega$, $\varepsilon > 0$, $z \neq a$, on a (posant $\eta = a + \varepsilon e^{i\theta}$, $d\eta = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$) :

$$|f(a)| = \left| \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta \right| \leq \sup_{\eta \in \gamma(a,\varepsilon)} |f(\eta)| < |f(a)|,$$

ce qui est contradictoire. L'énoncé est valable pour le *minimum*, au lieu du maximum, de $|f|$ lorsque f ne s'annule pas dans ω (en effet, $\sup 1/|f| = \inf |f|$). Ainsi, le graphe $\Gamma_{|f|} = \{(z, |f(z)|) \in \omega \times \mathbf{R}^+\}$ de $|f|$ au-dessus de ω ne possède que des points-selle aux points $(a, |f(a)|)$ tels que $|f(a)| \neq 0$. Enfin, il en découle que $\sup_{z \in \omega} |f(z)| = \sup_{z \in \partial\omega} |f(z)|$ et $\inf_{z \in \omega} |f(z)| = \inf_{z \in \partial\omega} |f(z)|$: *les extrema de* $|f|$ *sont situés sur le bord de* ω. Ce sont typiquement les intuitions de la théorie du potentiel qui se prolongent dans la formule de Cauchy.

On déduit aussi de (5) l'analyticité locale des fonctions holomorphes. Soit $a \in \omega$. Après une translation $z \mapsto z - a$, on peut supposer $a = 0$. Dans la formule de Cauchy $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(0,r)} \frac{f(\eta)}{\eta - z}\, d\eta$, $z \in D(0, r)$, $\eta \in \gamma(0, r)$, on a $|\eta| = r > |z|$. On peut donc écrire $(\eta - z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \eta^{-k-1}$, d'où un *développement en série entière de* f :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(0,r)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \eta^{-k} \right) \frac{d\eta}{\eta} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(0,r)} f(\eta) \eta^{-k} \frac{d\eta}{\eta} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

avec, directement, $|a_k| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(re^{i\theta})| r^{-k}$: ce sont les *inégalités de Cauchy* (ici, $r \leq \mathrm{dist}\,(z, \partial\omega)$). On en déduit aussi le *théorème de Liouville*: *Toute fonction holomorphe bornée sur* $\mathbf{C}$ *est constante.* En effet, $r^{-k} \to 0$ lorsque $r \to \infty$, si $k \geq 1$, donc $f \equiv a_0$. Et aussi le *théorème fondamental de l'algèbre*: *Tout polynôme* $P(z) = \sum_{1 \leq j \leq m} a_j z^{m-j}$, $m \in \mathbf{N}$, $a_j \in \mathbf{C}$, *de degré* $m \geq 1$, *admet une racine complexe.* Sinon, $1/P(z)$ est holomorphe bornée sur $\mathbf{C}$, donc constante par Liouville, ce qui n'est pas!

Ainsi, la formule de Cauchy (4)-(5) délivre sans effort un faisceau d'informations remarquables sur les fonctions holomorphes. Réciproquement, étant donné une fonction $f(\eta)$ intégrable sur $\partial\omega$, il est clair que la fonction qui à $z \in \omega$ associe $\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\omega} \frac{f(\eta)}{\eta - z}\, d\eta$ est holomorphe en z. La réciproque de (2) existe aussi, et c'est le *théorème de Morera* (1889) : *Si une fonction* f *continue dans* ω *est telle que* $\int_\gamma f(\eta)\, d\eta = 0$, *pour tout contour* $\gamma \subset \omega$, *alors* $f \in \mathcal{O}(\omega)$.

Théorie des résidus

Dans la formule de Cauchy, les conditions relatives à l'existence d'une dérivée $\frac{df}{dz}$ ne jouent plus le premier rôle, mais puisque les *ombres invisibles* $\int\int_{\omega_1} \frac{\partial f / \partial \bar\eta(\eta)}{\eta - z}\, d\eta \wedge d\bar\eta$ de (3)-(4) s'annulent pour tout ouvert $\omega_1 \subset \omega$, nous sommes entraînés dans un nouveau champ d'intuitions géométriques. En considérant la différence de (4) écrite pour ω et pour $\omega_1 \subset \omega$, nous sommes placés devant la nécessité d'inventer une nouvelle *géométrie de Chasles bidimensionnelle* sur les contours qui rende compte conceptuellement de l'égalité $\int_{\partial\omega} \frac{f(\eta)}{\eta - z}\, d\eta - \int_{\partial\omega_1} \frac{f(\eta)}{\eta - z}\, d\eta = 0$.

(On sait que la géométrie différentielle a conquis la généralité maximale pour cette nouvelle géométrie, à travers la célèbre *formule de Stokes* $\int_\Sigma d\varphi = \int_{\partial\Sigma} \varphi$, qui, si $d\varphi = 0$, entraîne que $\int_{\partial\Sigma} \varphi - \int_{\partial\Sigma_1} \varphi = \int_{\Sigma - \Sigma_1} d\varphi = 0$: *L'extension géométrique de* $\Sigma - \Sigma_1$ *s'évanouit du point de vue fonctionnel* (relativement à φ). Ici, φ est une forme différentielle, Σ est une variété singulière à bord $\partial\Sigma$ appliquée dans une variété différentiable M et la formule est valable en toute dimension. Dans notre cas, $\Sigma = \omega$, $d(fdz) = (\partial + \bar\partial)(fdz) = \frac{\partial f}{\partial \bar z} dz \wedge d\bar z = 0$ si $f \in \mathcal{O}(\omega)$.)

On a vu que tout ouvert ω instaure l'espace virtuel des bords d'ouverts $\partial\omega_1$ qu'il contient, comme autant de lacets découpés dans sa *matière géométrique* amorphe et traversable, extension vide ou éther holomorphe. Plus généralement, on est conduit à introduire l'*espace des chaînes à coefficients entiers* $\gamma = \sum_{j=1}^m n_j \gamma_j$ *de lacets* $\gamma_j : S^1 \to \omega$ orientés, $n_j \in \mathbf{Z}$, tracés dans l'ouvert. Ici, γ_j est une application différentiable définie sur le cercle unité S^1 et on note par abus γ_j l'image $\gamma_j(S^1)$ héritant de l'orientation naturelle de S^1. Par exemple, un ouvert comme celui qui intervient dans la formule de Cauchy-Green, s'il est borné et connexe, est généralement bordé par un bord extérieur $\gamma_0(S^1)$ orienté dans le sens trigonométrique et m «trous» $\gamma_1(S^1), ..., \gamma_m(S^1)$, orientés dans le sens inverse, *i.e.* le sens des aiguilles d'une montre. L'espace des chaînes ne fait qu'amener à l'existence la généralisation des bords d'ouverts adaptée au calcul de l'intégrale $\int_\gamma f(\eta)\, d\eta$, qui est par définition égale à

$$\sum_{j=1}^{m} n_j \int_{\gamma_j} f(\eta)\, d\eta = \sum_{j=1}^{m} n_j \int_0^{2\pi} f(\gamma_j(e^{i\theta}))\gamma_j'(e^{i\theta}) ie^{i\theta}\, d\theta.$$

(Pour ce calcul, les lacets peuvent fort bien se recouper ; les chaînes sont plus générales que les bords de domaines différentiables par morceaux.) L'idée de traversée fantôme de l'étendue géométrique s'incarne alors dans le concept mathématique d'*homotopie entre lacets*, ou entre chaînes, dont le rôle est d'atteindre l'égalité

$$\int_\gamma f(\eta)\, d\eta = \int_{\gamma_1} d\eta,$$

à travers l'annulation dans (1) du terme $\int\int \partial f/\partial\bar\eta(\eta) d\eta \wedge d\bar\eta$: dans le cas des bords d'ouverts, on a vu que l'égalité $\partial(\omega - \omega_1) = \partial\omega - \partial\omega_1$ dans l'espace des chaînes faisait l'affaire ; en général, l'égalité (1) montre que $\int_\gamma f(\eta) d\eta = \int_{\gamma_t} f(\eta)\, d\eta$ si la chaîne γ_t est une petite déformation de γ dans ω, c'est un résultat technique naturel. Il est même facile de le voir : on se ramène au cas d'un seul lacet par linéarité, et alors γ et γ_t bordent un ouvert ω_t sur lequel $\int\int_{\omega_t} \partial f/\partial\bar\eta(\eta)\, d\eta \wedge d\bar\eta = 0$. Alors, par définition, deux lacets ou chaînes γ et γ_1 seront dits *homotopes* s'il existe une famille *continue* à un paramètre de lacets ou chaînes γ_t tracés dans ω, $0 \leq t \leq 1$, telle que $\gamma|_{t=0} = \gamma$ et $\gamma|_{t=1} = \gamma_1$. Dans ces conditions, le théorème généralisé de Cauchy est vrai et il s'énonce : *Si les chaînes γ et γ_1 sont homotopes,* $\int_\gamma f(\eta)\, d\eta = \int_{\gamma_1} f(\eta)\, d\eta$. En effet, pour $0 \leq t, u \leq 1$ proches, γ_t et γ_u délimitent un domaine orienté $\omega_{t,u}$ multiple au-dessus de $\mathbf{C}$ pour lequel $\int\int_{\omega_{t,u}} \partial f/\partial\bar\eta(\eta) d\eta \wedge d\bar\eta = 0$ en comptant toutes les contributions. De proche en proche, l'égalité vaut donc pour les deux chaînes homotopes.

Les chaînes sont donc rangées dans des compartiments étanches et tout nombre $\int_\gamma f(\eta) d\eta$ dépend seulement de la classe d'homotopie de γ et donne un renseignement sur la topologie du domaine. On peut voir ainsi intervenir les propriété structurales de connexion simple ou multiple relatives à la topologie du domaine de base ω. Si par exemple $\omega = D(0,1)\backslash\{0\}$ est le disque unité épointé, un lacet qui fait une fois le tour de 0 n'est pas homotope à un lacet qui en fait deux fois le tour. Un domaine ω est dit simplement connexe si tout les lacets sont homotopes à un lacet constant. Il est dit m-connexe, $m \geq 0$, si m est le nombre minimal de rétrosections qu'il faut tracer pour le rendre simplement connexe. Par *rétrosection*, on entend un arc qui va du bord au bord du domaine.

Ce qui est remarquable en l'occurrence, c'est que l'étude structurale des propriétés algébriques de l'application $(f, \gamma) \mapsto \int_\gamma f(\eta)\, d\eta$, définie sur les classes d'homotopie de l'espace des chaînes, permet de reconstituer les propriétés topologiques du domaine ω, ou d'une surface de Riemann S. Pour illustrer l'interaction entre géométrie d'un domaine de référence et structure de l'espace de fonctions holomorphes qu'il supporte, nous allons nous contenter d'évoquer le théorème des résidus.

Pour tout point $z \in \omega$ et tout lacet $\gamma : S^1 \to \omega$, on définit l'indice de γ par rapport à z comme étant «le nombre orienté de fois que γ tourne autour de z» et on le note $\mathcal{I}\mathrm{nd}\ (\gamma; z)$. Comme cet invariant intuitif est évidemment un invariant d'homotopie de $\mathbf{C} - \{z\}$, il suffit, pour le définir rigoureusement, et pour le deviner géométriquement, de choisir une déformation γ_1 de γ dans $\mathbf{C} - \{z\}$ qui s'enroule autour de z en demeurant sur un cercle de centre z et de rayon $\varepsilon > 0$ et de compter alors le nombre de tours positifs moins le nombre de tours négatifs de γ_1 autour de z. Les boucles de γ qui sont retenues par d'éventuels «trous» de ω situés au loin sont sans influence sur $\mathcal{I}\mathrm{nd}\ (\gamma; z)$. Aussi, cet indice peut être défini *analytiquement* par l'intégrale

$$\mathcal{I}\mathrm{nd}\ (\gamma; z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\eta}{\eta - z}.$$

La démonstration découle des indications précédentes.

La théorie des résidus répond au problème de calcul explicite d'intégrales de fonctions holomorphes sur des chaînes, lorsque le domaine ω d'existence est donné par $\omega = \Omega - \{q_1, q_2, ..., q_m\}$, où Ω est un ouvert simplement connexe de $\mathbf{C}$ et $q_1, ..., q_m$ sont des points distincts de Ω. Il en est ainsi pour quasiment toutes les fonctions usuelles, algébriques, elliptiques, fonction Gamma, fonctions hypergéométriques de Gauss, fonctions de Bessel, Legendre, Jacobi, *etc.* Le théorème des résidus fait naturellement intervenir la notion d'*indice* d'une courbe par rapport à un point.

Pour traiter d'abord le cas $m=1$, soit $q=0$, soit $f \in \mathcal{O}(D(0,1)-\{0\})$ une fonction holomorphe dans un disque épointé, soit $\gamma=\gamma(0,\varepsilon)$ le cercle de centre 0 et de rayon $\varepsilon>0$, $0<\varepsilon<1$, et posons $a_k=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,\varepsilon)} f(\eta)\eta^{-k-1}\,d\eta$. D'après le théorème de Cauchy, a_k ne dépend pas de ε. De plus, $|a_k| \leq M_\varepsilon \varepsilon^{-k}$, où $M_\varepsilon=\sup_{|z|=\varepsilon}|f(z)|<\infty$, inégalité qui dépend de ε : nous allons l'exploiter. Fixons $z \in D(0,1)-\{0\}$, choisissons $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon>0$ tels que $\varepsilon_1<|z|<\varepsilon$ et considérons la série $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k z^k=\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k z^k+\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Sa queue négative (*resp.* positive) est majorée par la $M_{\varepsilon_1}\sum_{k=-\infty}^{-1}(|z|/\varepsilon_1)^k$ (*resp.* $M_\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty}(|z|/\varepsilon)^k$, qui convergent toutes deux. La fonction $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k z^k$ est donc définie et holomorphe dans $D(0,1)-\{0\}$, et comme à $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$ serait associée par le même calcul la série $\sum_{k\in\mathbf{Z}}(1+k)a_k z^k$, on voit que $\frac{\partial}{\partial \bar z}(f-\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k z^k)$ est identiquement nulle. On en déduit le *développement de f en série de Laurent* (1838) :

$$f(z)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,\varepsilon)} f(\eta)\eta^{-k-1}\,d\eta\right)z^k.$$

Maintenant, et tautologiquement :

$$a_{-1}=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(\eta)\,d\eta=\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\int_\gamma \frac{1}{2i\pi}\eta^k\,d\eta=a_{-1},$$

puisque, *pour tout $l \in \mathbf{Z}$ différent de -1*, $\int_\gamma \eta^l\,d\eta=\frac{\varepsilon^{l+1}}{2i\pi}\int_0^{2\pi} ie^{i(l+1)\theta}\,d\theta=0$. Ainsi, *l'intégrale de f le long de γ de f ne conserve que le résidu $Res\,(f;0)=a_{-1}$*, qui est le coefficient devant le terme *spécial* $\frac{1}{z}$ de son développement en série de Laurent.

Évidemment, on aura

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(\eta)\,d\eta=\mathcal{I}\mathrm{nd}\,(\gamma;0)\,\mathrm{Res}(f;0)=\mathcal{I}\mathrm{nd}\,(\gamma;0)\,a_{-1}$$

pour une chaîne γ quelconque tracée dans $D(0,1)-\{0\}$.

Le *théorème des résidus* s'énonce alors dans le cas général : Soit $\omega=\Omega-\{q_1,...,q_m\}$ un domaine simplement connexe épointé de m points q_i distincts, soit $f\in\mathcal{O}(\omega)$ et soit γ une chaîne tracée dans ω. Alors

$$\int_\gamma f(\eta)\,d\eta=2i\pi\sum_{k=1}^{m}\mathcal{I}\mathrm{nd}\,(\gamma;q_k)\,\mathrm{Res}\,(f;a_k)$$

donne la valeur explicite de l'intégrale de f prise sur γ.

Ce théorème inaugure un principe de calcul uniforme pour des intégrales exceptionnelles qui échappaient par nature aux méthodes réelles, telles que $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi$, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2i\pi ux}}{x^2+a^2}\,dx=\frac{\pi}{a}e^{-2\pi a|u|}$, $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}, 0<\alpha<1$, $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\mathrm{Log}\,x}{x+1}\,dx=-\pi^2\frac{\cos\pi\alpha}{\sin^2\pi\alpha}$, etc.

En jetant ses filets dans le plan complexe, l'analyste repêche donc les singularités qui orchestrent l'harmonie secrète et comme résiduelle des fonctions holomorphes.

• Ahlfors L., (1963) *Complex Analysis*, New York, McGraw-Hill.– Bourbaki N., (1960) *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann.– Cartan H., (1961) *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Paris, Hermann.– Chabat B., (1990) *Introduction à l'analyse complexe*, 2 Vol., Moscou, Mir.– Châtelet G., (1993), *Les enjeux du mobile*, Paris, Seuil.– Dieudonné J., (1968) *Calcul infinitésimal*, Paris, Hermann.– Hervé M., (1982), *Les fonctions analytiques*, Paris, PUF.– Hille E., (1959) *Analytic function theory*, Boston, Ginn and Co.– Lautman A., (1938), *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques*, Paris, Hermann.– Riemann B., (1892) *Oeuvres mathématiques de Riemann* (*Gesammelte mathematische Werke*), trad. L. Laugel, Paris, 1895, repr. en fac-similé, Paris, Gabay, 1991.– Rudin W., (1970) *Real and Complex Analysis*, New York, McGraw-Hill.– Saks S. and Zygmund A., (1970) *Fonctions analytiques*, Paris, Masson.– Valiron G., (1955) *Cours d'analyse mathématique*, 2 Vol., Paris, Masson.– Weyl H., (1964) *The concept of a Riemann surface*, London, Addison-Wesley.