L'héritage de philosophie des mathématiques

Communication au Colloque :

Une pensée et son site : l'oeuvre philosophique de Jean-Toussaint Desanti

Bastia, 5-7 Juin 1997

Joël Merker[1]

RÉSUMÉ. Situation d'ouverture inhérente aux mathématiques. Rejet forcé de l'épistémologie dogmatique. Critique de la solution historique pure et approfondissement de la position d'immanence. Dialectique riemannienne de la Question-Idée génératrice et Platonisme Originaire. *Herméneutique indécise de la position d'hypothèses.* Dialectique du réalisable et de l'irréalisable. *Nécessité réalisationnelle.* Une théorie mathématique n'est telle que par l'*intention centrale* qui dirige vers des *réalisations* effectives.

L'insuffisance philosophique croisée des solutions empiriste, logiciste, formaliste, intuitioniste et platonicienne devant le problème des genèses, où s'opère le passage de la puissance à l'acte et de l'essence à l'existence, a le double mérite : 1. d'exiger la réactivation des champs réflexifs immanents aux mathématiques et 2. d'accentuer le mystère de la *recherche* intuitive ou formelle.

En effet, les travaux logiques des années trente ont révélé, dans l'appareil technique même, le destin négatif de la question du fondement des mathématiques, l'illégitimité du réductionnisme hilbertien et les incohérences de l'attitude d'empirisme intuitif.

Conséquences pour la philosophie des mathématiques (Cavaillès) :

1) L'expérience mathématique est expérience de contenus objectifs et la pseudo-expérience de la conscience disparaît. Seule une philosophie du concept peut donner une doctrine de la science.

2) Nécessité d'adopter un point de vue *interne* au mouvement des mathématiques. Objectivité du devenir conceptuel et de l'enchaînement des contenus.

3) L'effectivité inhérente aux mathématiques leur provient d'une dialectique interne *historiée*. Libération du contingent par l'effectif, mais l'effectif dans son effectuation est contingent.

4) La théorie de la science est ainsi *théorie de l'histoire de la science.* C'est dans l'enchaînement historique des concepts qu'il faut la chercher.

---

1. Département de Mathématiques et Informatique, École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05. **merker@dmi.ens.fr**

Classification Mathématique AMS 1991: 00A30

Mots-clé: Philosophie des Mathématiques, Réalisation.

Ainsi, concept contre conscience, dialectique interne contre activité génératrice et épistémologie historienne contre philosophie de la conscience fonderaient ce paradigme rêvé grâce auquel se déploie le mouvement qui explique l'atteinte de la vérité et la surrection du sens.

Toutefois, avec ses exigences d'autonomisation, la solution cavaillésienne authentique en appelle davantage à la procession illimitée de modes intuitifs originaux par l'analyse sans fin du noyau des gestes sensibles qu'à la médiation du cercle historique. L'intelligibilité d'un résultat imprévisible se produit toujours à la rencontre de gestes réglés.

Mais c'est encore épuiser trop vite la *profondeur* du *travail* mathématique.

En effet, pourquoi les mathématiques classiques, sillonnées de toutes parts d'impossibilités, aboutissent-elles à des incarnations et accèdent-elles à des domaines où s'actualise l'attente idéale de relations effectives? Comment la genèse des réels à partir des idées est-elle possible? Où gît le principe des vérités incessantes?

(Les rapports mutuels des données motrices primitives restent enveloppés de mystère; on n'aperçoit pas si elles sont nécessairement liées entre elles, et si le champ mathématique secrète une manière d'engendrer qui lui est propre.)

Pour les partisans du schéma herméneutique, la mathématique est, dans ses déploiements, la mise en acte d'un rapport herméneutique à des énigmes. C'est le texte mathématique qui véhicule la relance implicite des tenants de question. La prolifération axiomatique serait symptomatique de l'ouverture indéfinie d'au moins trois questions principales: l'Infini, le Continu, l'Espace.

Néanmoins, cette valeur herméneutique est elle-même injustifiée dans la théorie du processus de réalisation conceptuelle afférente à des questions mathématiques précises. L'intensité d'une ouverture dirime le renvoi au texte, du moins le dépasse, en tant qu'elle peut être posée pour elle-même dans l'indécision pure.

Exemple. À quelle condition, nécessaire et suffisante, une équation algébrique est-elle résoluble par radicaux? (Galois 1831). Conscience [textuelle] plus explicite des questions en jeu chez Lagrange 1771: «Il serait donc souhaitable que l'on pût juger *a priori* du succès des méthodes [exposées] dans les degrés supérieurs au quatrième»).

D'après son caractère inaugural, l'approfondissement spectaculaire dû à Galois s'inscrit dans une nécessité indifférente au sensible comme à sa réévaluation formelle. La relance et le processus d'axiomatisation ne sont donc pas les seuls et ne possèdent en tout cas de signification que relativement au concret interrogatif déjà existant (persistant). La puissance des réalisations de l'esprit se mesure surtout aux exigences de respect d'un abstrait interrogatif pur. D'où la bimodalité du mathématique philosophique: métaphysique ayant enfin surmonté ses prolégomènes dans une Science qui est Pensée.

Partant,

1. L'ouverture mathématique questionnante possède une structure universelle, inamovible et reproductible.

De là surgit alors le problème de rechercher les natures simples interrogatives au moyen desquelles puisse s'établir le système de la pensée mathématique. La présentation formaliste de théories axiomatisées répond peut-être seulement à l'éclatement nécessaire des concepts provoqué par *l'exigence de question pure* (Abel, Galois et Riemann), et (ré)habilitée malgré lui par l'école de Hilbert (Zermelo, Gödel).

Exemples. Le destin riemannien de la géométrie, les théories quadratiques sur des corps de nombres, la nature récursive de la calculabilité.

D'où l'impératif mathématique :

2. Il est nécessaire d'approfondir les interstices d'un enchaînement d'hypothèses. (Riemann, 1854, *Sur le fondement de la géométrie*).

Le point de vue qui l'emporte ici est celui de la *synthèse des conditions nécessaires*, et non celui de l'analyse des notions premières (Lautman contre Carnap). Double conséquence : la Question-Idée fédératrice déploie le champ d'une cloturation espérée,

a. évidemment impossible pour la question : «*Et d'abord, que doit-on entendre par* $\int_a^b f(x)dx$ *?*», (Riemann, 1854, *Habilitation*) *cf.* intégrales de Cauchy, Riemann, Jordan, Borel, Lebesgue, Stieltjes, Radon, Daniell, Haar ;

b. mais possible pour la quasi totalité des problèmes mathématiques (Hilbert, 1900) : description d'invariants complets, classification de structures, équivalences entre espaces fonctionnels et nature géométrique ou topologique d'un domaine, conditions optimalement suffisantes, conditions nécessaires et suffisantes, caractérisations.

Ainsi, l'exigence d'autonomisation est reconnaissance de l'intimement mathématique : procession illimitée de tensions interrogatives qui prétextent à la manière platonisante d'un horizon de réponse préexistant. L'opératoire y est subordonné, le geste l'accompagne : contre Cavaillès. Tout platonisme, fût-il transcendantalement constitué, se heurte à ses propres exigences : la pensée n'avance sur des terres sûres qu'en rabotant l'extrinsèque et en éliminant les hypothèses. Autant, sinon plus intensément que la philosophie,

3. *Les mathématiques sont impliquées dans une herméneutique indécise de la position d'hypothèses.* (Riemann, Lebesgue, Hilbert, Grothendieck).

Ainsi s'explique *a posteriori* la *dialectique des liaisons* que soutiennent entre elles

I) certaines idées abstraites, dominatrices par rapport aux mathématiques ;

II) et surtout : la multitude des idées géométrico-conceptuelles issues d'un *Ars Inveniendi* éclaté (mathématiques riemanniennes).

La question de l'existence réelle d'une dialectique des idées dans l'édification mathématique ne réfute pas l'analyse d'Albert Lautman : l'enjeu véritable est la compréhension de l'engagement de l'abstrait dans la genèse du concret. D'où la nécessité pour la philosophie des mathématiques d'aborder aussi le champ de la physique : déduction du temps, déduction de la relativité générale, déduction de la contextualité quantique (Lautman). Au niveau I, comme au niveau II,

4. *L'essence de la vérité mathématique est de se dévoiler dans un mouvement corrélatif d'assomption vers l'anhypothétique.*

De ces remarques, il semble que l'on puisse admettre et suggérer :

1) En accord avec l'épistémologie historienne : la nécessité d'immersion dans l'élément *destin d'une théorie*, histoire d'un problème ou approfondissement d'un champ thématique ;

2) Afin de sonder la pensée mathématique : l'urgence d'une analyse philosophique concernant la *profondeur* des théories incarnées et des réponses complétées.

5. *Une nécessité réalisationnelle est à l'oeuvre dans les mathématiques.*

Exemples. Indépendance du système des axiomes de Zermelo-Fraenkel et de l'Hypothèse du Continu, d'après Gödel et Cohen, Équivalence entre pseudoconvexité et convexité holomorphe, d'après Oka, Lelong, Bremermann et Hörmander, Cohérence de l'anneau local des germes de fonctions holomorphes, d'après Oka-Cartan, Résolution des singularités, d'après Zarisky et Hironaka, Théorème des quatre couleurs, Conjectures de Weil, d'après Grothendieck-Deligne, Classification des groupes finis simples, Grand théorème de Fermat, d'après Taniyama-Weyl, Ribet, Hellegouarch et Wiles.

L'effectif, dans son effectuation mathématique, est cloturant [2]. Il appartient au philosophe de répondre de la polymorphie du réussible.

2. Hilbert, en 1900, pour l'avoir exprimé, aura surpris. La conviction que tout problème mathématique déterminé doit être forcément susceptible d'une solution rigoureuse n'est pas sans rapport avec l'idée que l'intuition de vérité et le désir d'élévation dirigent le réel mathématique provisoire.