INACTUALITÉ ET INADÉQUATION DE LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES DE WITTGENSTEIN

Joël MERKER

École Normale Supérieure
Département de Mathématiques et Applications
www.dma.ens.fr/∼merker/index.html

Prologue. Trop fréquemment, les mathématiques sont assimilées lointainement et sans nuances — même par les philosophes les plus ouvertement antiréalistes — à une entité immuable douée d'une autonomie de principe par rapport au champ hétéronome de l'expérience physique, biologique ou sociologique dans le monde. Mais depuis plus d'une cinquantaine d'années, on ne sait plus comment spéculer systématiquement sur le statut des théorèmes mathématiques en tenant compte de manière globale et survolante de leur explosion et de leur spécialisation, comme si ce monde dont la « réalité » encore jugée problématique se « réalisait » sous nos yeux malgré l'éternelle (et avantageuse) tentation de la dubitation philosophique, qui s'est vue contrainte de se professionnaliser en se détachant des sciences en action. Bien que le domaine philosophique contemporain assigné comme tel semble en effet ne plus pouvoir suivre en pensée cette complexification des contenus, et bien que la mathématique engendre, de concert avec l'avancée du temps historique, ses propres « irréversibles-synthétiques » dont le raffinement s'amplifie, il est néanmoins du devoir de l'*être-source du spéculatif philosophique* de se confronter à l'*être-ramifié du spéculatif mathématique* pour y puiser des ressources dynamisantes et structurantes. Si la mathématique pouvait enfin être reconnue comme une philosophie dialectique réalisée et productrice à plein régime de contenus argumentatifs authentiques, la philosophie générale devrait lui emboîter le pas sans réticence et se défier méthodiquement des cercles inactuels et reproductibles de raisonnements fermés.

Ce texte non théorisant n'a ici qu'une unique visée critique : limiter la portée du général nominal dont on sait abuser lorsque les raisonnements s’enlisent ; centrifuger et éclater les cercles ; ouvrir et ramifier les questions en visant les niveaux contemporains ; en un mot : raffiner les analyses épistémologiques jusqu’au point où notre temps y éprouve ses résistances fertiles.

Quel statut pour la proposition mathématique non démontrée ? D’après la conception réaliste en mathématiques, la vérité des énoncés mathématiques peut être réalisée sans que nous soyons en mesure de la connaître, de la reconnaître ou de la démontrer pleinement : des connexions rigoureuses existent toujours « en réserve », dans un « matériau » hypothético-déductif « potentiellement indéfini » que l’on « explore » ou que l’on « découvre ». Tout à l’opposé des visions « réalistes » et pour se démarquer des « naïvetés » qui les accompagnent, Wittgenstein affirme à divers endroits de ses remarques philosophiques qu’il existe une différence de nature profonde entre les propositions « pressenties », non démontrées, et celles qui sont déjà insérées dans une grammaire formelle et autonome, conçue comme système prédéfini de règles du jeu tel que l’arithmétique, ou la théorie des ensembles ou la topologie générale. Ce fossé conceptuel majeur est incontournable, inexpugnable et ne peut en aucune façon être comblé.

> La démonstration se distingue radicalement de la vérification d’une proposition ordinaire déjà comprise, en ce sens que « la démonstration fait partie de la grammaire de la proposition » (PG, p. 370) ; de sorte que « la proposition avec sa démonstration appartient à une tout autre catégorie que la proposition sans la démonstration » (PG, p. 371). La proposition non démontrée ne représente pas un fait mathématique dont nous ne savons pas encore et dont nous cherchons à savoir s’il est réalisé ou non. Son sens est uniquement celui d’une incitation à la recherche mathématique et d’une directive ou d’une suggestion pour la recherche. Mais, alors qu’une hypothèse empirique (par exemple, une hypothèse médicale) conserve le même sens, lorsqu’elle est vérifiée, la démonstration mathématique modifie la position de la proposition dans le langage lui-même, et donc son sens. [1], p. 60.

Différence de catégorie parce que seul l’effectivement démontré est inséré dans l’architecture syntaxique des énoncés mathématiques. Mais rien de tel pour le non-démontré : il est suspendu dans l’hypothétique, indécis et non sanctionné ; il est « autre », parce qu’il appartient à un autre univers de langage et de pensée. Voilà une démarcation bien claire et bien nette.

L'irréversible-synthétique en mathématiques. Pour l'intuition de compréhension, aucune difficulté à résumer cette thèse : les oppositions de nature sur lesquelles on insiste en philosophie appartiennent en effet aux informations les plus immédiatement saisissables par la pensée « archaïque et reptilienne » qui contrôle toutes les mobilisation neuronales du cerveau, donc de la pensée humaine effective. Répéter un *distinguo* est non seulement autorisé, mais cela est aussi nécessaire ; c'est une manière de chercher à circonscrire un fait essentiel, en le soumettant, sans l'épuiser, à une méditation variée qui éclaire les premières parois d'un fossé conceptuel.

Réexprimons donc l'idée en d'autres termes. Si l'on admet sans discuter, comme semble le faire Wittgenstein, que l'univers du non syntaxiquement sanctionné ne doit pas faire l'objet d'une recherche visant à lui conférer structures internes et logiques autonomes qui entretiennent des liens complexes et délicats avec l'ordre du discours formalisé, une chose est pour l'instant certaine : le champ mathématique est universellement traversé par ce que nous appellerons dorénavant l'*irréversible-synthétique*. Est *synthétique* tout raisonnement qui compose avec des objets de pensée et qui rassemble des éléments de connaissance en un tout cohérent, en travaillant de manière locale ou (partiellement) globale. Est *irréversible* tout phénomène physique qui ne fonctionne que dans un seul sens, sans pouvoir être renversé spontanément, comme par exemple la formation d'un précipité chimique ou l'oxydation du fer. Mais dans le domaine abstrait, l'irréversible ne peut pas être caractérisé en termes organiques, ou être quantifié en termes d'entropie. Parler d'« irréversibilité mathématique » ne constituerait certainement pas une expression adéquate, parce qu'il n'y a pas, dans le domaine de la pensée pure, de démonstrations en marche par elles-mêmes qu'il suffirait de déclencher en confrontant les définitions aux questions, dans un creuset magique et hypothétique que personne n'a encore découvert.

En mathématiques, nul automatisme empirique, et il n'y a pas d'essence motrice séparée.

Aussi l'« irréversible » doit-il se rapporter dans sa notion propre[1] à ce qui fait que l'essence des mathématiques est de démontrer synthétiquement, chaque démonstration *synthétique* faisant *basculer les contenus de manière irréversible dans le champ expansif des résultats rigoureusement établis*.

[1] Le biologique du rationnel doit notamment y consacrer son potentiel d'irréversibilité.

En résumé, la thèse forte autour de laquelle se concentre la pensée de Wittgenstein dit simplement que l'irréversible-synthétique domine le statut de la proposition mathématique : c'est dans l'*a posteriori* d'une synthèse, et seulement dans cet *a posteriori*, que s'affirme la signification mathématique d'un énoncé.

Insuffisances spéculatives. Toutefois, un réel danger de circularité menace toute position qui affirme unilatéralement une thèse d'opposition, quelle qu'en soit la portée. Parce qu'elle s'inscrit dans la temporalité propre du monde, l'opposition fondamentale entre l'« avant » et l'« après » appartient en effet aux dialectiques les plus évidentes et les plus omniprésentes pour ce qui est de la vie continue de l'esprit. D'un point vue spéculatif, on ne peut pas se cantonner à répéter cette constatation chaque fois qu'on la voit se manifester dans la vie propre des étants abstraits et concrets que l'on fréquente, *parce que* de très nombreuses questions théoriques invitent à explorer les failles imprécises de ce « fossé conceptuel » qui sépare démonstrations achevées et supputations provisoires.

• Quand peut-on parler de validation définitive d'un résultat mathématique ? Quel critère choisir ? Quelle ligne de démarcation proposer ?

• La pensée du conjectural doit-elle être considérée par principe comme définitivement éliminée à l'instant même où la proposition mathématique formalisée confirme l'attente de vérité ? Comment alors s'effectue une telle « cristallisation-élimination » ?

• À quel moment peut-on être certain que la proposition s'incrit véritablement dans le système grammatical autorisé ? Doit-on établir des nuances en fonction de la structure, de la longueur et de la complexité des preuves ? Si l'on décompose un théorème donné en fractions partiellement ou totalement vérifiées, doit-on être conduit à parler d'hétéronomie du champ démonstratif ?

• Lorsqu'il est soumis à révision (correction), comment un théorème donné modifie-t-il son inscription dans la grammaire générale des énoncés mathématiques ?

• Quel statut donner aux preuves formelles qui ont été publiées dans des revues de mathématiques internationales, mais qui se sont en vérité avérées incorrectes après examen ultérieur, et souvent imprévisible, par d'autres mathématiciens ? Le philosophe du « fossé conceptuel » a-t-il été victime d'une illusion, d'un mirage ? Quand et comment peut-il être certain qu'il s'en rend compte[2] ?

• À quel moment « *cela* » bascule-t-il ? et à quel moment « *cela* » repivote-t-il en arrière en cas d'erreur ? Où et quand mémoriser l'erreur ? Quel statut lui réserver ?

Dérobade philosophique. Or face à de telles questions préliminaires, Wittgenstein semble choisir de se soustraire sciemment, intentionnellement au devoir d'analyser et de penser la complexité des liens qui unissent la pensée intuitive, prospective et informelle au régime d'appropriation réglée qu'offrent axiomatisation et formalisation.

> La proposition mathématique non démontrée ne contient pas une anticipation d'un fait qui a pu être suggéré par des expériences et dont la démonstration se chargera d'établir l'existence. Wittgenstein dit d'elle qu'elle est « un poteau indicateur pour la recherche mathématique, une incitation à des constructions mathématiques » (PG, p. 371). Ce qui lui donne pour l'instant un sens mathématique est essentiellement le complexe de résonances, d'associations, d'analogies, *etc.* qu'elle suscite dans le système des mathématiques et qui fournit à la fois un stimulant et une direction à la recherche. [1], p. 195.

Poteau indicateur, poteau télégraphique, poteau-frontière, résonances imprécises, analogies — voilà ce à quoi semble être réduite la pensée en acte dans la recherche effective. Boîte noire, dirons-nous tout simplement : opaque au philosophe, elle fonctionne à une distance éloignée de lui ; et c'est bien de la tête « noire » du mathématicien qu'il est question ici ; pourtant, la tâche que s'assigne le philosophe wittgensteinien met *a priori* entre parenthèses le devoir de comprendre et de fréquenter les réseaux de raisonnements qui *produisent* les constructions mathématiques formalisées. C'est cela que pourrait être tenté de lui reprocher tout mathématicien professionnel habitué à *jongler entre les deux niveaux en diluant des frontières imprécises*, habitué à métamorphoser des briques de rigueur formelle en *forces argumentatives douées de mobilité questionnante*, habitué à *vivre*

---

[2] Wittgenstein dit bien : « La proposition avec sa démonstration appartient à une tout autre catégorie que la proposition sans la démonstration ». Onze années séparent les deux « preuves » du théorème des quatre couleurs publiées par Kempe en 1879 et Tait en 1880 de la découverte par Petersen en 1891 de la présence d'un « trou » tellement important qu'il fallut encore attendre 1976 (Appel et Haken, après des idées décisives de Birkhoff, Heesch et d'autres) pour que l'on domine la « zoologie » des milliers de noyaux « inévitables » qui remplaçaient le « centre » de la carte dont était parti Kempe.

pendant des années en compagnie de problèmes ouverts partiellement explorés, et dont il est incapable, tout autant que ses collègues et concurrents directs, d'évaluer l'horizon de difficulté rémanente, c'est bien cela en effet qu'on serait tenté d'opposer à Wittgenstein, si son discours portait véritablement sur les mathématiques tout entières, comme semblerait le prétendre son vocabulaire qu'il ne veut jamais spécifique ou spécialisé ; et même sans chercher la polémique — je dirais même plus, sans chercher l'affrontement avec des adversaires peut-être inconsistants à qui les vraies difficultés, tant qu'ils s'y dérobent, restent invisibles — on pourrait de surcroît se demander véritablement comment il a pu être possible, dans l'histoire des idées, que la parole très assertorique de certains qui n'ont jamais « créé » de mathématiques soit parvenue à énoncer et à faire circuler un discours qui puisse faire autorité, dans certains milieux philosophiques, quant à la manière dont les mathématiques « se » créent, l'emploi du pronominal réfléchi « se » montrant ici *cum grano salis* à quel point il s'agit d'une « boîte » absolument « noire » pour ceux qui tentent d'échafauder un discours universel à ce sujet.

Liberté mathématique. Aucun discours universel sur les actes de « basculement » vers des résultats vrais, nouveaux et sanctionnés n'est parvenu à s'ériger, à aucune période de l'histoire des mathématiques, en tant que champ de principes stables, série de méthodes directives, ou ordre réglé de découvertes potentielles.

Les mathématiques sont un outil de liberté. Adrien DOUADY.

Tous les mathématiciens professionnels savent la mathématique trop libre de par son caractère imprévisible, notamment parce qu'ils éprouvent journellement l'« exoticité » et l'« incompréhensibilité » de tous les résultats mathématiques qui sont éloignés de ce qu'ils connaissent de très près. Naïvetés, donc, que les séduisantes formules wittgensteiniennes ! — lorsqu'elles extrapolent dogmatiquement leur portée en abusant de généralité terminologique.

Au contact des mathématiques contemporaines et s'il se décidait à les fréquenter véritablement et à les analyser dans leur complexité actuelle, Wittgenstein ressuscité démultiplierait peut-être sa pensée, mais on ne pourrait pas alors tout à fait exclure que ses lecteurs épigones ne puissent plus être à même d'étudier ses travaux pour asseoir une autorité philosophique. Imaginons en effet ses paragraphes compacts de deux à vingt ou trente lignes — si faciles à lire pour le commun des philosophes — se métamorphoser en centaines de pages ciselées qui exigent des années de formation mathématique préalable ?

L'irréversible mathématique doit forcer à complexifier les règles du jeu exégétique.

Conjectures expérimentales étrangères aux démonstrations rigoureuses. Après cette brève contre-argumentation, reprenons l'examen des thèses wittgensteiniennes au sujet de l'induction en mathématiques.

> Wittgenstein soutient qu'il existe un gouffre conceptuel infranchissable entre la conjecture, qui anticipe les résultats d'une série d'expériences de calcul hypothétiques, et la démonstration, qui prescrit, de façon complètement impersonnelle et intemporelle, quelque chose à propos des résultats en question. La première, pour autant qu'elle ressemble à ce qu'on appelle ordinairement une conjecture, dit simplement qu'aucun contre-exemple ne se présentera, la seconde exclut que quelque chose puisse être appelé un contre-exemple. [1], p. 194.

Effectivement, la différence est radicale : rappelons par exemple le destin « attentiste sur plus d'un siècle » de la loi *quantitative* de répartition des nombres premiers[3] : par des arguments élémentaires, Legendre a montré en 1808 que l'ensemble des nombres premiers admet une densité nulle sur $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$; mais comme Euler avait déjà établi auparavant que la somme des inverses des nombres premiers diverge : $\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p} = +\infty$, cette densité nulle ne pouvait pas signifier une très forte raréfaction. Existe-t-il alors une loi mathématique qui décrit cette raréfaction de manière quantitative ?

Ce fut semble-t-il dès 1792 qu'à l'âge de 15 ans, Gauss émit la toute première *hypothèse quantitative précise* de raréfaction[4] : en examinant les tranches de 1 000 entiers dans les tables de nombres premiers (qu'il corrigeait au passage jusqu'à des entiers dépassant plusieurs millions), Gauss observa qu'au voisinage d'un entier n quelconque, la densité des nombres premiers est de l'ordre de $\frac{1}{\log n}$. Alors il émit l'hypothèse que le nombre

[3] *cf. e.g.* J.-P. DELAHAYE, *Merveilleux nombres premiers. Voyage au cœur de l'arithmétique*. Belin, Paris, 2000.

[4] Ce fait est attesté en 1848 dans une réponse de Gauss à l'astronome allemand Johan Encke qui aurait découvert une loi similaire ; les mentions éparses que Gauss formulaient dans sa maturité quant à ses découvertes de jeunesse sont à prendre très au sérieux, étant donné qu'il se refusait à publier la plupart de ses résultats partiels, et *a fortiori* les conjectures qu'il n'était pas parvenu à démontrer.

$\pi(n)$ de nombres premiers inférieurs ou égaux à n devrait être asymptotiquement égal au logarithme intégral[5] $\int_2^n \frac{dt}{\log t}$. L'approximation équivalente un peu moins précise $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$ a été conjecturée[6] par Legendre en 1808.

Premier moment expérimental, donc, purement observationnel et simplement cantonné à un suivi comptable ; patience obstinée de calculateur prodige et ingénu était ici requise[7]. Pour tester ou deviner des lois plausibles, il est *nécessaire*, sinon incontournable, d'*ériger au préalable*

---

[5] Extraits de la lettre de Gauss à Encke, 24 décembre 1849, traduite en anglais dans : L.J. GOLDSTEIN, *A history of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 599–615 : « Your remarks concerning the frequency of primes were of interest to me in more ways than one. You have reminded me of my own endeavors in this field which began in the very distant past, in 1792 or 1793 after I have acquired the Lambert supplements to the logarithmic tables. [...] I counted the primes in several chiliads [...]. I soon recognized that behind all of its fluctuations, this frequency is on the average inversely proportional to the logarithm, so that the number of primes below a given bound n is approximately equal to $\int \frac{dn}{\log n}$, where the logarithm is understood to be hyperbolic. Later on, when I became acquainted with the list in Vega's tables (1796) going up to 400 031, I extended my computations further, confirming that estimate. In 1811, the appearance of Chernau's cribrum gave me much pleasure and I have frequently (since I lack the patience for a continuous count) spent an idle quarter of an hour to count another chiliad here and there ; although I eventually gave it up without quite getting through a million. Only some time later did I make use of the diligence of Goldschmidt to fill some of the remaining gaps in the first million and to continue the computation according to Burkhardt's tables. Thus (for many years now) the first three millions have been counted and checked against the integral.

n	$\pi(n)$	$\int \frac{dn}{\log n}$	ERROR	YOUR FORMULA	ERROR
500 000	41 556	41 606,4	+50,4	41 596,9	+40,9
1 000 000	78 501	79 627,5	+126,5	78 672,7	+171,7
1 500 000	114 112	114 263,1	+151,1	114 374,0	+264,0
2 000 000	148 883	149 054,8	+ 171,8	149 233,0	+350,0
2 500 000	183 016	183 245,0	+229,0	183 495,1	479,1
3 000 000	216 745	216 970,6	+225,6	217 308,5	+563,5

[...] The chiliad from 101 000 — 102 000 in Lambert's Supplement is virtually crawling with errors ; in my copy, I have indicated seven numbers which are not primes at all, and supplied two missing ones. [...]. »

[6] En fait, dès 1798, Legendre affirmait que l'on a exactement $\pi(n) = \frac{n}{\log n + A(n)}$, « où $A(n)$ est approximativement égal à $1,08366\cdots$ ». Mais cet énoncé incorrect devait être mis en défaut assez rapidement.

[7] Gauss a donc poursuivi ces recherches bien des années après avoir publié ses *Disquisitiones Arithmeticae*. Mille pages environ sont nécessaires pour écrire ces 216 745 nombres premiers à raison de deux cent dix nombres premiers par page sur trois colonnes. Compter $\pi(n+1000) - \pi(n)$ est immédiat. Calculer une valeur numérique précise du logarithme intégral prend quelque temps. S'assurer que les tables ne comportent pas d'erreur est beaucoup plus délicat.

d'arides pyramides numériques pour en scruter les structures translucides noyées dans une opacité primordiale[8] — sinon, quelle vision transcendante viendrait secourir l'intuition prospective ? Et actuellement, la théorie dite « computationnelle » des nombres regorge de conjectures observationnelles quantitatives parfaitement certaines, sans qu'aucune des expériences numériques automatisées lancées sur des ordinateurs super-performants ne puisse offrir d'indication quant à un hypothétique champ démonstratif afférent : raison est donc donnée à Wittgenstein sur ce point, si l'on s'en tient aux exemples pour lesquels l'inconnu déductif reste sensiblement à l'écart du scruté expérimental.

Inexactitudes et expressions inappropriées. Toutefois, dans le court extrait de [1] reproduit ci-dessus p. 7, la manière même de s'exprimer est imparfaite et inadéquate, voire tout simplement « **fausse** », si l'on doit s'autoriser à employer, au sein d'un débat de philosophie des mathématiques, une terminologie typique de la pratique des mathématiciens.

Tout d'abord, l'adjectif « infranchissable » dans l'expression « gouffre conceptuel infranchissable » est absurde : au contraire, certaines conjectures ont été, sont et seront démontrées. Justement les mathématiciens inventent des concepts dont ils « remplissent » ces « fossés conjecturaux » jusqu'à pouvoir les *franchir*. Toute la difficulté est de pouvoir penser ce

[8] Voici un autre exemple célèbre que le labyrinthe de l'induction nous a transmis dans l'histoire des mathématiques. Soit n un entier naturel $\geqslant 1$. Question : de combien de manières distinctes peut-on casser n en morceaux discrets, *i.e.* écrire $n = a + b + c + \cdots$, où a, b, c, $\ldots$ sont des entiers $\geqslant 1$? En fait, il y a *deux* questions, suivant que l'on décide (ou non) de tenir compte de l'ordre dans lequel sont écrits les constituants de n. Avec distinction de l'ordre de sommation, la réponse est essentiellement *trop* simple : une démonstration par récurrence montre en effet qu'il y a juste 2^{n-1} possibilités, par exemple : $3 = 2 + 1 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1$. Mais les choses sont incroyablement plus compliquées lorsqu'on néglige l'ordre ; notons donc $p(n)$ le nombre de *partitions* de n ; par exemple pour $n = 5$, on a $p(5) = 7$, car $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

> There is a famous story concerning the search for some kind of pattern in the table of the $p(n)$'s. This is told of Major Mac Mahon who kept a list of these partition numbers arranged one under another up into the hundreds. It suddenly occured to him that, viewed from a distance, the outline of the digits seemed to form a parabola ! Thus the number of digits in $p(n)$, the number of partitions of n, is around $C\sqrt{n}$, or $p(n)$ itself is very roughly $e^{\alpha\sqrt{n}}$. The first crude assessment of $p(n)$!
> Among other things, however, this does not tell us not to expect any simple answers. Indeed later research showed that the true asymptotic formula for $p(n)$ is $\frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4\sqrt{3}\,n}$! D.J. NEWMAN.

mouvement complexe et mystérieux. Place aux paradoxes, aux questions et à la philosophie !

> The brain of every mathematician carries a fragment of our "cloud in the tree", a little personal cloud where our synapses touch Hilbert's tree. These little clouds may have fractal geometry and thus relatively large boundaries. Hard to tell at this stage but one may take analogy from the study of the human movements where our neuron's system *avoids* most paths through many degrees of freedom as experiments show. This may be also the mathematical strategy of our brain, responsible for instance, for the equality $P = NP$ of everyday mathematics. We solve our problems essentially as fast as we state them. It took, probably, a couple of thousand brain-hours to state the Fermat theorem and mere instance (compared to $\exp 2000$) to solve it, no more than 10^5 brain-hours. (Actually, one has to compare the length of the proof to the time needed to find it. Maybe, the *shortest* proof of Fermat in reasonable units is of the order $\log$(time spent on the search of the proof).) This "practical equality" $P = NP$ is in flagrant contradiction with our mathematical intuition as we expect NP to be far away from P. Here is a fundamental gap in our understanding (if there any) of how mathematics works. We need, besides pure thought, biological, psychological study and/or computer experimentation. But as a community we shy away from such problems, scared of contamination by philosophy. Mikhail GROMOV.

Ensuite, la démonstration mathématique ne « prescrit » pas[9], elle *établit* (des propositions, des résultats, des théorèmes). On pourra certes admettre qu'elle « empile » des arguments, qu'elle « aligne » des raisonnements, qu'elle « combine » des techniques diverses. Mais le terme inapproprié « prescrire » est vraiment à proscrire, ne serait-ce que parce qu'il suggère quelque chose comme une décision de législateur ou un acte médical, bref une espèce de recommandation expresse, d'exigence, d'obligation ou d'ordre qu'il serait déraisonnable et fou de proférer face à certains problèmes très ouverts qui se posent avec tout un réservoir de potentialités imprévisibles.

Même s'il doit s'agir de règles, d'axiomes, ou de déclarations syntaxiques de concepts, « prescrire » ne peut en aucun cas absorber la portion principale de l'énergie de recherche en mathématiques. En effet, le champ mathématique n'est pas simplement « prescrit » ou « déclaré » par des démonstrations ou par des règles de langage, fussent-elle dûment établies avec toute la rigueur formelle, parce que la « prescription » ou plutôt la « déclaration » et la « mise en place » des « règles » n'est qu'un prologue au déploiement du champ de l'irréversible-synthétique, qui s'éclaire ensuite

[9] Nous poursuivons l'analyse critique de l'extrait en question, p. 7.

grâce à des quanta argumentatifs articulés et mobilisés dynamiquement *dans* les démonstrations.

De plus, affirmer que la « démonstration mathématique prescrit [. . .] quelque chose à propos des résultats en question » constitue une périphrase raccourcie, maladroite et trop rapide pour nommer le lien complexe qui unit les énoncés aux arguments, comme si ce que la démonstration dévoile du résultat qu'elle démontre devait subir un dédoublement et se constituer en même temps comme une réalisation exemplaire du point de vue grammatical prescriptif ; comme si les chaînes formalisées d'arguments lançaient, dans le champ de l'indéfini axiomatisé, un éclair qui se pétrifierait du même coup pour confirmer l'immanence fixée de l'univers des règles ; bref, comme si toute démonstration mathématique devait nécessairement être entraînée dans une métaphysique wittgensteinienne.

Ici encore, la généralité du vocabulaire invite à négliger la complexité des situations : le caractère toujours partiel des saisies axiomatico-formalistes dans la pratique mathématique, et la permanence des horizons imprécis de questionnement font que la démarcation même entre l'argumentatif et le déductif se fragmente à la fois dans l'histoire d'une spécialité et dans l'appréhension mentale des théorèmes. En tout cas, que l'on n'objecte pas que la rapidité d'exécution des phrases examinées expose inévitablement à certaines imperfections, car il s'agit bien ici d'un des problèmes les plus difficiles de la philosophie des mathématiques : penser la réalisation de l'irréversible-synthétique. Finesse de la spéculation et précision dans la terminologie doivent être d'emblée exigées.

Continuons : que fait la conjecture ? Non, elle n'« anticipe » pas « les résultats d'une série d'expérience de calculs hypothétiques » ! Même en se restreignant aux aspects purement expérimentaux de la théorie des nombres (le conjectural s'exerce en fait dans toutes les spécialités mathématiques), il serait fort réducteur de n'y voir qu'une prévision tout expérimentale d'expériences numériques futures. Bien que la phrase citée soit contrainte ici de continuer à maintenir une nette démarcation afin de garantir la cohérence locale de sa thèse, il nous faut rappeler que la conjecture énonce des règles, prétend des régularités, soupçonne des théorèmes, devine des lois, et s'exprime la plupart du temps dans le même langage formalisable que toutes les propositions qui sont dûment établies dans le sanctuaire hypothético-déductif. Une conjecture ordinaire, c'est un énoncé sans démonstration, l'énoncé vraiment possible d'un théorème vraisemblable que l'on pose dans un moment de suspens face à de l'inconnu qui résiste. Par définition, la conjecture est un énoncé potentiel fort d'une pensée structurée, bien que transversale au régime réglé des grammaires formelles, c'est un énoncé qui appelle une démonstration, ou qui subira une réfutation.

Dans la communauté internationale des mathématiciens, rares sont les conjectures qui s'affirment comme citadelles de pensée résistant à de multiples assauts intellectuels : en un mot, rares sont les conjectures dignes de ce nom, parce que la conjecture requiert d'embrasser des abysses synthétiques spécifiques qui focalisent un fort enjeu mathématique et face auxquelles on doit se sentir écartelé et trop faible pour s'autoriser à en dire quelque chose.

> As you said, Don [Zagier], the conjecture is the most responsible thing one can do and sometimes people make conjectures when they absolutely have no right to make conjectures. A conjecture really comes hard. I agree with you, Don, that one could make a serious conjecture once or twice in one's life, after deep thinking. You come to a deep understanding, and you cannot finish it, and you make a conjecture. You just cannot turn any question into a conjecture. Mikhail GROMOV

Il est par ailleurs surprenant de lire dans le même extrait (p. 7 *supra*) que la conjecture « dit simplement qu'aucun contre-exemple ne se présentera », car dans la forme même de son énonciation, la conjecture ne s'attarde en général pas à se contraposer elle-même : le spectre de sa fausseté contre-exemplifiable fait partie de sa rhétorique archaïque — inutile de rappeler cette donnée —, et seuls les mathématiciens les plus avisés seront à même de prendre à rebours les conjectures encore plus rares qui se trompent d'orientation, parmi celles qui sont connues comme étant d'un enjeu central[10]. Pour la même raison, il est fort inapproprié d'écrire — même en acceptant l'intrusion de points sophistiques involontaires — que la démonstration « exclut que quelque chose puisse être appelé un contre-exemple » : inapproprié en effet premièrement parce que les démonstrations mathématiques n'orientent presque jamais[11] leurs parcours en excluant des contre-exemples potentiels : leur structure manifeste en général un caractère argumentatif direct ; mais ce n'est pas tout, cela est inapproprié aussi, deuxièmement et même d'un point de vue wittgensteinien

---

[10] Le conjectural alimentaire de la recherche mathématique courante est ici tenu à l'écart de l'argumentation.

[11] La démonstration courante du théorème des quatre couleurs offre un exemple exceptionnellement riche de stratégie d'élimination systématique de contre-exemples potentiels.

« puriste », puisque, si l'on admet comme le soutient Wittgenstein que la structure logique intrinsèque de toute démonstration doit s'identifier au seul sens que l'on peut conférer à l'énoncé qu'elle démontre, alors toutes les fois qu'une démonstration ne procède pas en éliminant tous les contre-exemples imaginables (ce qui arrive la plupart du temps), il est faux qu'une démonstration « exclut que quelque chose puisse être appelé un contre-exemple ». À tout le moins, une démonstration sanctionnée doit exclure toute recherche de contre-exemple à l'énoncé précis qu'elle démontre, sans pour autant empêcher de réfléchir à l'optimalité des hypothèses en recherchant des contre-exemples à des énoncés légèrement modifiés plus ambitieux. Tout énoncé est accompagné d'un horizon coprésent de virtualités indécises concernant les hypothèses qui le constituent.

Reprise sur le théorème des nombres premiers. *Lucidité parfaite sur le fait que le sens de la proposition s'identifie au contenu de sa démonstration effective ; rigueur sur l'étrangeté irréductible de nature entre l'inductif et le déductif* : tel semble être l'apport majeur que Wittgenstein exprime de manière récurrente comme s'il s'agissait de sa « crispation spéculative » principale sur les mathématiques.

Sur le même exemple arithmétique continué, voici une confirmation historique des écarts temporels importants qui peuvent séparer les preuves des conjectures : après des travaux de Riemann, Bertrand, Tchebychev, Mertens et d'autres, ce ne fut qu'un siècle après les premières observations de Gauss, en 1896, que l'hypothèse quantitative de répartition fut dûment et rigoureusement démontrée par Hadamard et de la Vallée Poussin, en utilisant les méthodes transcendantes de la théorie des fonctions d'une variable complexe : *Le nombre* $\pi(n)$ *d'entiers positifs* $p \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *qui sont premiers tend vers l'infini de la même façon que* $\frac{n}{\log n}$. Autrement dit :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\log n}} = 1,$$

ce que l'on écrit parfois $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$.

Ainsi, la loi expérimentale pressentie se révèle correcte. Seule une démonstration est à même de spécifier comme vraie cette estimation quantitative. En l'occurence ici, les premières démonstrations étaient longues et délicates. Raison est donc donnée au philosophe analytique wittgensteinien, car tester ou découvrir expérimentalement cette loi en examinant une liste de nombres premiers avec l'aide des tables de logarithmes constitue une suite de gestes et d'actes de pensée (assez simples et plutôt répétitifs) qui n'ont absolument rien à voir avec des arguments de preuve délicats.

Concluons localement ces considérations : en revenant à l'extrait cité *supra* page 7, il s'agit encore et toujours du même « fossé conceptuel », ou plus exactement d'une *distinction fondamentale* entre :

1) les énoncés mathématiques (notamment en théorie des nombres) qui sont conjecturés grâce à des tests expérimentaux, à des calculs numériques effectués automatiquement, à des listes exhaustives de nombres, *etc.*, et :

2) les démonstrations mathématiques rigoureuses.

Approfondissons cela. En quoi et pourquoi est-il presque toujours beaucoup plus facile de formuler des conjectures expérimentales que de trouver des démonstrations ? Cette question est subtile. Commençons par une conjecture simple qu'aucune théorie n'accompage.

Conjecture de Collatz. Considérons le procédé suivant, que l'on peut expérimenter sur de nombreuses sites Internet. Étant donné un nombre entier initial arbitraire $n \geqslant 1$, le remplacer par $n/2$ s'il est pair, ou par $3n + 1$ s'il est impair ; itérer ce calcul ; observer que pour toutes les valeurs de n jusqu'à, disons 100 ($\sim 10^{18}$ en 2007), on redescend toujours à 1 (suivi du cycle $1 \to 4 \to 2 \to 1$) après un certain nombre d'itérations. *Conjecturer qu'il en va de même pour tout entier* n.

Il n'existe pas de « recette mathématique » plus simple. Par exemple, pour $n = 6$, on obtient la suite 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. On peut en remplir le ventre des ordinateurs. Seule limite physique : la taille des données stockées. Pour $n = 11$, quatorze itérations sont nécessaires ; pour $n = 27$, cent-onze (!), et les termes intermédiaires montent jusqu'à 4 858, redescendent à 911, remontent à 9232, avant de redescendre à 1 en sursautant plusieurs fois. Où est la difficulté ? Dans l'absence de loi simple ? Dans le chaotique ?

En 1996, T. Oliveira e Silva a écrit un programme en langage C qui calcule les trajectoires de toutes les valeurs initiales n inférieures à une limite donnée. Une fois lancé, le programme couvre des intervalles de 2^{50} entiers. Sur un ordinateur d'une mémoire vive de 266 MHz, en tenant compte de raffinements algorithmiques suggérés par E. Roosendaal (un concurrent international), près de 400 millions d'entiers (en moyenne) peuvent être traités à chaque seconde. Ce test fut stoppé quand $100 \cdot 2^{50}$ fut atteint.

Depuis Juin 2004, les efforts de vérification ont repris. Les calculs tournent depuis plus de trois ans. Il sont distribués sur une vingtaine d'ordinateurs, utilisent des algorithmes révisés qui sont trois fois plus rapides que les précédents, et permettent de couvrir des intervalles de 2^{58} entiers (facteur d'amélioration : $2^8 = 256$). Au printemps 2007, Collatz est confirmé pour tous les entiers jusqu'à $14 \cdot 2^{58} \simeq 4 \cdot 10^{18}$. Par ailleurs, Collatz se vérifie rapidement[12] pour des entiers $n \leqslant 10^{500}$ tapés au hasard sur un clavier, parce que les calculs sont triviaux pour la machine.

La maxime capitale de l'induction. Soit une conjecture *ouverte* quelconque $\mathsf{Cjct}(n)$ portant sur une quantité qui dépend d'un entier n arbitraire. Voici ce que rappelle la « *maxime capitale de l'induction* » : quelle que soit la hauteur impressionnante — $n \leqslant 3\,000\,000$, $n \leqslant 10^{18}$, $n \leqslant 10^{20}$, *etc.* — jusqu'à laquelle $\mathsf{Cjct}(n)$ a été confirmée, elle *peut toujours* être fausse. Sa probabilité de justesse, comme sa probabilité de fausseté, sont essentiellement inquantifiables.

> On a essayé d'évaluer la probabilité des inductions ou des hypothèses en introduisant le concept de degré de confirmation d'une hypothèse relativement à des faits. Ce degré de confirmation coïncide à peu près avec une probabilité conditionnelle. Les logiques inductives que l'on construit sur cette relation se sont révélées des formalismes encombrants et inféconds. Il serait raisonnable de renoncer à trouver à l'induction un fondement logique. Jean LARGEAULT.

L'indécision pure quant à la potentialité d'être ou de ne pas être nous est imposée par l'imprévisibilité des mondes temporels. Misère et dénuement de l'entendement qui ignore !

Parfois, après des décennies de recherches, les réponses sont crucifiantes. Plus d'une conjecture importante s'est révélée contredite à des hauteurs exceptionnellement élevées de l'entier n^{13}.

> XXXV. Il n'est pas possible à celui qui commet clandestinement quelque chose de ce que les hommes ont convenu entre eux de ne pas commettre pour ne pas faire de tort ni en subir, d'être sûr qu'il ne sera pas découvert, même si, dans le présent, il y échappe dix mille fois, car, jusqu'à sa mort, l'incertain est s'il continuera à n'être pas découvert. ÉPICURE, *Maximes capitales*.

Aussi l'évidence expérimentale ne *doit*-elle pas exister. L'empiriste anti-inductif insiste : pour l'induction, il *doit* ne pas y avoir de principe

[12] `did.math.uni-bayreuth.de/personen/wassermann/fun/3np1.html`

[13] Citons par exemple la conjecture de Pólya, la conjecture de Mertens et les nombres de Skewes.

heuristique ou pseudo-probabiliste, *parce que* le faux est toujours disponible dans l'ouvert. Le philosophe analytique wittgensteinien navigue aussi dans ces prologues de la spéculation mathématique spécialisée. Peut-il alors y avoir un dogmatisme de l'indécision ? À tout le moins, le *maintien rigoureux de l'ouverture* constitue un *impératif catégorique* de la pensée mathématique.

Mais la croyance en la véracité ou en la fausseté de $\mathsf{Cjct}(n)\ \forall\, n$ doit forcer à engager des actes irréversibles. Encore une fois : s'orienter, se confronter, c'est se potentialiser, donc s'imprévisibiliser. Il va ainsi dans le monde mathématique.

Pour la conjecture de Collatz (ouverte depuis 1937), aucun appareil théorique n'existe : c'est un cas exceptionnel. La sonde innocente :

$$n \longmapsto \begin{cases} n/2 \ \text{ si } \ n \ \text{ est pair} \\ 3n+1 \ \text{ si } \ n \ \text{ est } \textit{im}\text{pair} \end{cases}$$

est lancée dans l'indéfini potentiel primordial $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$. Il y a une *règle de calcul*, au sens de Wittgenstein. Mais aucun encadrement théorique n'est connu, y compris pour d'autres sondes analogues[14].

Mathematics is not yet ready for such problems. Paul ERDÖS.

Quel contraste entre cette règle d'itération simplissime et le chaos des résultats obtenus ! L'« écart », le « fossé conceptuel » se fait d'autant plus sentir qu'aucune démonstration n'existe en germe. On ne dispose que d'un raisonnement probabiliste non rigoureux pour se convaincre d'une éventuelle véracité de cette conjecture[15].

---

[14] LAGARIAS, J.C. : *The* $3x+1$ *problem and its generalizations*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 3–23.

[15] Si l'on considère seulement les nombres impairs dans la suite de Collatz, alors *en moyenne* le nombre impair suivant est multiplié par $3/4$. Voici l'argument heuristique.

Prenons un entier n_0 *impair* et itérons le procédé de Collatz jusqu'à obtenir un prochain entier impair n_1. Que vaut en moyenne le rapport $n_1 \big/ n_0$? En supposant que le devenir est soumis à des lois probabilistes équidistribuées et mélangeantes, on a : une fois sur deux $n_1 = (3n_0 + 1)\big/2$; une fois sur quatre $n_1 = (3n_0 + 1)\big/2^2$; une fois sur huit $n_1 = (3n_0 + 1)\big/2^3$; *etc.* ; par conséquent, la croissance moyenne de taille attendue entre deux entiers impairs consécutifs n_0 et n_1 devrait être égale à :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{3}{2^2}\right)^{1/4} \left(\frac{3}{2^3}\right)^{1/8} \cdots = \frac{3}{4} < 1.$$

Ainsi, cet argument suggère qu'en moyenne, les itérés impairs décroissent d'un facteur $\frac{3}{4}$. Mais l'hypothèse d'équidistribution et de mélange n'a pas encore pu être démontrée ; de plus, comme le raisonnement est probabiliste, même s'il était rigoureux, il ne pourrait pas exclure l'existence de cycles élevés qui seraient exceptionnels par rapport au comportement moyen.

S'il doit y avoir des lois prédisant le comportement de ces suites, il faut les extraire du chaos expérimental. Deux lois conjecturales ont été observées[16]. Elles raffinent la perception de ce problème, sans donneraucune indication de preuve.

- L'*excursion maximale* de n, à savoir la valeur entière maximale de sa trajectoire (9 232 pour $n = 27$) semble se comporter asymptotiquement comme n^2, tout en fluctuant autour de cette valeur.
- Le *temps d'arrêt* d'un entier n, à savoir le plus petit nombre d'itérations nécessaires pour passer en-dessous de n (et se ramener, par récurrence à un entier déjà examiné), semble se comporter comme $\log n$, avec des fluctuations plus importantes.

Libération par le contre-exemple ? Phénomène radicalement irréversible, l'avènement d'un contre-exemple libère immédiatement de la question initialement posée, il libère d'un travail de calcul indéfini, il arrête net une poursuite aveugle du programme. À cet instant, toutes les intentions doivent changer, tous les projets doivent être réorientés, toutes les intuitions être réorganisées, et on stoppe les 20 ordinateurs calculant en parallèle depuis plus de trois ans, et les 50 chercheurs concernés dans le monde se remettent en question. C'est cela l'« *irréversible mathématique* ».

Virtualités pérennes du principe de raison. Mais très souvent, le contre-exemple révélé ne libère en rien de la question en tant que question, parce que la question ne s'était qu'imparfaitement exprimée dans la conjecture. La conjecture prétendait que les êtres qu'elle interrogeait jouissaient d'une certaine simplicité comportementale encadrée par certaines loi quantitatives, mais elle n'effaçait pas toutes les complexités adventices de ces êtres qui s'étaient déjà pré-exprimées dans les moments de virtualisation collatérale.

Le conjectural commence toujours par prétendre pour lui-même que le simple domine, en tant que forme d'ensemble des phénomènes. Puis, s'il se trompe, il corrige, il affine, il repousse, il accepte, il complexifie. Curieusement, la dialectique du conjectural ne cesse de remobiliser le même mouvement inépuisable de pensée qui cherche à prévoir et à deviner des lois mathématiques régulatrices. Si le « principe de raison » a envahi la pensée technicienne, comme l'a parfois déploré Heidegger, cela même reste un mystère pour nous de savoir ce qu'il y reste de pensée métaphysique et

[16] Sur la page : `www.ieeta.pt/~tos/3x+1.html`, le lecteur trouvera deux graphiques convaincants.

comment cette pensée métaphysique irrigue encore continûment la pensée technique.

Actifier la question. Supposons découvert un cycle de Collatz très élevé — un contre-exemple — mais faisons rigoureusement abstraction des questions nouvelles qui surgiraient après coup. Le chaos stochastique des boucles attirées par le cycle $1 \to 4 \to 2 \to 1$ *que l'on avait déjà observé avant l'avènement dudit contre-exemple* n'en serait pas moins mystérieux, *toujours* en question. Les questions demeurent parce que le questionnement focalise son faisceau sur des affirmations hypothétiques transitoires. Mais le questionnement est toujours déjà éclaté au moment où il s'exprime. Le questionnement est un acte spécifique de décision multiple que l'on peut toujours reproduire, exporter, ramifier et faire éclater. *Le questionnement est un acte élémentaire*, un acte naturel qui va de soi, et cet acte est analogue dans sa finitude aux actes argumentatifs élémentaires du discours déductif (nous y reviendrons). La forme même des questions mathématiques est essentiellement simple, atomique.

Pourquoi la question mathématique atomique produit-elle de l'irréversible-synthétique organique ?

Ici transparaît une thèse de philosophie des mathématiques que nous jugeons capitale mais que nous ne dévoilerons pas encore pour l'instant.

> We have to assume that we are very stupid and our natural questions are stupid, and only by hard work, by conceptualizing, working hard, calculating, whatever, we can make good questions or good mathematics. And it's naive to think that we all have intuition or something. It's a stupid opinion. That's what I believe.
>
> Mikhail GROMOV.

Conjecture de Proth-Gilbreath. Deuxième exemple de conjecture purement expérimentale sans arrière plan théorique dont on peut abreuver les ordinateurs. Voici la recette, attribuée à Gilbreath, mais qui remonte à Proth au 19ième siècle. L'idée consiste à « dévisser » la complexité des nombres premiers en calculant leurs différences successives, ce à quoi Euler s'était adonné avec succès sur de multiples exemples.

Écrire les nombres premiers les uns à la suite des autres sur une première ligne ; écrire sur une seconde ligne la valeur absolue des différences entre deux nombres consécutifs ; itéter cette opération ; conjecturer que chaque ligne commence par **1** :

$k \diagdown n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	**2**	**3**	**5**	**7**	**11**	**13**	**17**	**19**	**23**	**29**	**31**	**37**	**41**	**43**	**47**	**53**
1	**1**	2	2	4	2	4	2	4	6	2	6	4	2	4	6	
2	**1**	0	2	2	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2		
3	**1**	2	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0			
4	**1**	2	0	0	0	0	2	2	2	2	0	0				
5	**1**	2	0	0	0	2	0	0	0	2	0					
6	**1**	2	0	0	2	2	0	0	2	2						
7	**1**	2	0	2	0	2	0	2	0							
8	**1**	2	2	2	2	2	2	2								
9	**1**	0	0	0	0	0	0									
10	**1**	0	0	0	0	0										
11	**1**	0	0	0	0											
12	**1**	0	0	0												
13	**1**	0	0													
14	**1**	0														
15	**1**															

Plus précisément, soit $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11, \ldots,$ les nombres premiers listés dans l'ordre croissant et posons :

$$\left[\begin{array}{ll} d_0(n) := p_n, & n \geqslant 1, \\ d_{k+1}(n) := \big|d_k(n) - d_k(n+1)\big|, & k \geqslant 0, \quad n \geqslant 1. \end{array}\right.$$

Le tableau montre que $d_k(1) = 1$ pour $1 \leqslant k \leqslant 15$. En 1959, la conjecture $d_k(1) = 1$ pour tout k a été confirmée par Killgrove et Ralston jusqu'aux profondeurs $k \leqslant 63\,419$, et pour tous les entiers premiers $< 792\,731$. En 1993, A.M. Odlyzko[17] confirme le phénomène pour tous les entiers premiers $< 10^{13}$, de telle sorte que $d_k(1) = 1$ jusqu'à une profondeur $\lesssim 3,4 \cdot 10^{11}$.

Pour une première ligne $d_0(n)$ qui serait constituée d'entiers quelconques, le calcul de $d_k(1)$ requiert en général *a priori* la connaissance de tous les $d_j(i)$ pour $i + j \leqslant k + 1$, de sorte que pour $k \sim 3,4 \cdot 10^{11}$, il faudrait calculer aproximativement $5 \cdot 10^{22}$ nombres — au-delà des capactités technologiques actuelles. Mais pour une première ligne constituée des nombres premiers $d_0(n) = p_n$, le tableau montre qu'après un temps assez court, il n'y a plus que des 0 et des 2 après le **1** attendu, et dans un tel cas, *i.e.* si, pour un N on peut trouver un K avec $d_1(1) = \cdots = d_K(1) = 1$ tel que $d_K(n) = 0$ ou 2 pour tout $2 \leqslant n \leqslant N$, alors il est immédiat que l'on

[17] *Iterated absolute values of differences of consecutive primes*, Math. Comp. **61** (1993), no. 203, 373–380.

a ensuite $d_k(1) = 1$ pour tout $K \leqslant k \leqslant N + K - 1$. Ce phénomène se confirme et permet de réduire considérablement les temps de calcul.

> A rigorous proof of Gilbreath's conjecture appears out of reach, given our knowledge of primes. [...] About half of the machine time was spent in sieving for primes, and half in computing the iterated absolute values of the differences. A.M. ODLYZKO.

Retour sur Wittgenstein : deux universalités incomparables. Reprenons l'opposition wittgensteinienne.

> Ce qui n'est pas concevable, aux yeux de Wittgenstein, est que l'universalité qui nous est fournie par la démonstration, lorsque nous avons réussi effectivement à démontrer la proposition, puisse être celle-là même que des expériences répétées, effectuées avec la méthode de contrôle, nous avaient permis de supputer : « Où est censée ressortir de la démonstration la même universalité que les essais antérieurs rendaient probables ?» (PG, p. 361.) Je peux assurément formuler l'hypothèse douée de sens que, si je teste l'un après l'autre les nombres pairs pour voir s'ils satisfont ou non la proposition de Goldbach, je ne rencontrerai aucun contre-exemple de mon vivant. Mais comment une démonstration de la proposition dans laquelle il n'est question ni de moi, ni de qui que ce soit, ni de ce que je ferai ou ne ferai pas, pourrait-elle démontrer cette supposition ? [1], p. 194.

Certainement, la démonstration ne ressort pas d'une série de tests numériques. La nécessité universelle argumentée transcende la confirmation expérimentale. Mais ici, encore une fois, on projette le débat sur une opposition dualiste simplifiée. Alors que l'irréversibilité historique de la mathématique impose une complexité toujours grandissante aux dialectiques de la découverte, les oppositions en restent ici à un stade non ramifié. L'histoire des confirmations expérimentales s'étend sur plusieurs siècles ; les pratiques ont évolué ; et l'ontologie physique du calcul s'est considérablement enrichie à cause de la reproduction planétaire des machines électroniques. Atteindre un record de confirmation expérimentale pour la conjecture de Goldbach n'a vraiment rien de trivial actuellement ; nous en reparlerons dans un instant.

De plus, l'affirmation « si je teste l'un après l'autre les nombres pairs pour voir s'ils satisfont ou non la proposition de Goldbach, je ne rencontrerai aucun contre-exemple de mon vivant » part d'une prémisse insensée : aucun individu n'a jamais consacré, et ne consacrera jamais l'intégralité de la durée de sa vie à énumérer les cas d'une conjecture telle que celle de Goldbach les uns à la suite des autres jusqu'à son dernier souffle. Résumer sa vie à une finitude éprouvée sur le parcours répétitif d'une seule conjecture, ce serait se condamner et se crucifier. Mais en vérité, nul ne songe à se priver du jeu de l'imprévu et du plaisir de décider de ses propres changements d'orientation intellectuelle.

Autre objection : aujourd'hui, les confirmations expérimentales ne s'effectuent plus à la première personne. Le « je » de l'activité mathématique singulière n'a plus aucun sens, parce qu'il y a un « nous » commun et international de la confirmation expérimentale, qui tend de plus à se dépersonnaliser à cause de l'électronisation du calcul, et de sa transmissibilité par les canaux de communication. Les travaux de confirmation expérimentale se partagent entre les chercheurs.

Poursuivons la critique. Afin de défendre strictement sa thèse dualiste du « fossé » entre expériences numériques et grammaires formelles, le philosophe analytique wittgensteinien affirme que la démonstration rigoureuse d'une proposition mathématique ne peut avoir aucune incidence sur les suppositions qui se formulent *en tant que telles* dans le champ de l'expérience. Ou tout du moins, il affirme que l'universalité hypothétique qui est suggérée dans l'expérience n'est pas subsumée par l'universalité logique de la démonstration, et partant, que l'universalité présumée conserve son autonomie et son irréductibilité de principe. Cette affirmation unilatérale est erronée, et ce, pour quatre raisons.

- Parce qu'elle change le statut de la supposition expérimentale en certitude universelle, la démonstration a un impact immédiat : le caractère hypothétique, problématique et ouvert de la confirmation disparaît du même coup, et toutes les tâches de vérification calculatoire se métamorphosent en simples exercices d'application numérique.

- Pour ce qui concerne la production et l'assimilation de l'irréversible-synthétique, le principe de libre circulation entre l'*a priori* et l'*a posteriori* exige que l'étudiant ou le chercheur doive toujours pouvoir *se réinscrire temporairement dans une situation d'ignorance artificialisée*[18].

- Dès qu'une conjecture est confirmée par une preuve, d'autres suppositions plus ambitieuses peuvent être formulées en partant de raisonnements heuristiques analogues. L'homologie de structure se reproduit.

[18] C'est bien parce qu'on y efface les marques de l'indécision dialectique originelle quant à l'irréversible-synthétique que les textes mathématiques sont si difficiles à lire.

- La métaphysique audacieuse de la recherche entrelace tous les niveaux formels et informels, avec toujours la même confiance affirmée qu'il doit exister des lois et des démonstrations potentielles.

Certes, la nécessité apodictique de la démonstration ne *démontre* pas quelque chose à propos des suppositions que nous formulons en interrogeant les structures arithmétiques, ni même au sujet de la mystérieuse faculté que nous avons d'énoncer de telles suppositions, mais à tout le moins, il y a là un grand problème de métaphysique des mathématiques qu'on ne peut pas se contenter d'écarter obsessionnellement comme l'a fait Wittgenstein. L'optimisme de Hilbert (*non ignorabimus*) et la méditation rétrograde de Heidegger (domination universelle du principe de raison) ressurgissent comme questions ouvertes de philosophie des mathématiques.

Exemple. Ainsi, nous affirmons que même après qu'une démonstration rigoureuse a été produite, on peut exiger un retour vers l'expérimental numérique, soit comme confirmation d'une sorte d'harmonie préétablie, soit comme pénétration indépendante dans la réalité problématique des mathématiques. Par exemple, dans les années 1910 à 1920, G. Hardy et S.Ramanujan[19] ont découvert une formule approchée pour le nombre $p(n)$ de partitions d'un entier n, dont le terme principal est :

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\,\frac{d}{dn}\,\frac{e^{\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n-\frac{1}{24}}}}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}.$$

> [This formula] enables us to approximate to $p(n)$ with an accuracy which is almost uncanny. We are able, for example, by using 8 terms of our formula, to calculate $p(200)$, a number of 13 figures, with an error of $0,004$. I have set out the details of the calculation :

[19] *cf.* G.H. Hardy, *Some famous problems of the theory of numbers and in particular Waring's problem. An inaugural lecture delivered before the University of Oxford*, Oxford, Clarendon Press, 1920.

$$\begin{array}{r} 3\,972\,998\,993\,185,896 \\ 36\,282,978 \\ -87,555 \\ 5,147 \\ 1,424 \\ 0,071 \\ 0,000 \\ 0,043 \\ \hline 3\,972\,999\,029\,388,004 \end{array}$$

The value of $p(200)$ was subsequently verified by Major MacMahon, by a direct computation which occupied over a month.
G.H. HARDY.

Conjecture de Goldbach. Venons en maintenant à un autre exemple célèbre de conjecture ouverte : *tout nombre entier pair* $\geqslant 4$ *est somme de deux nombres premiers*. Plus précisément, pour tout entier pair $2n \geqslant 4$, il existe p et q appartenant à l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers tels que $2n = p + q$.

Le principe initial de la confirmation expérimentale est extrêmement simple : il suffit en principe de se constituer au préalable une liste de tous les nombres premiers (en utilisant par exemple le crible d'Ératosthène, ce qui expose à la question d'efficacité et aux difficultés d'implémentation) jusqu'à une certaine grandeur, de les additionner deux à deux et d'examiner si tous les nombres entiers n sont ainsi obtenus jusqu'à une certaine grandeur.

Pour confirmer cela dans un intervalle d'entiers $[a, b]$, deux méthodes ont été utilisées. On doit trouver deux ensembles de nombres premiers $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}$ tels que

$$\big\{2n : \ a \leqslant 2n \leqslant b\big\} \subset \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \big\{p_1 + p_2 : \ p_1 \in \mathcal{P}_1, \ p_2 \in \mathcal{P}_2\big\}.$$

Fixons un entier $\delta \geqslant 1$. Dans la première méthode on choisit :

$$\mathcal{P}_1 = \big\{p_1 \in \mathcal{P} : \ 2 \leqslant p_1 \leqslant b - a + \delta\big\}, \qquad \mathcal{P}_2 = \big\{p_2 \in \mathcal{P} : \ a - \delta \leqslant p_2 \leqslant a\big\}.$$

Dans la seconde méthode on choisit :

$$\mathcal{P}_1 = \big\{p_1 \in \mathcal{P} : \ 2 \leqslant p_1 \leqslant \delta\big\}, \qquad \mathcal{P}_2 = \big\{p_2 \in \mathcal{P} : \ a - \delta \leqslant p_2 \leqslant b\big\}.$$

Les calculs montrent que δ peut en fait être choisi très petit par rapport à b pour trouver au moins un couple $(p_1, p_2) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ tel que $2n =$

$p_1 + p_2$. L'évidence numérique supportant cette conjecture est très forte, car le nombre $g(2n)$ de *partitions de Goldbach*, *i.e.* de manière d'écrire $2n = p + q$ avec $p, q \in \mathcal{P}$ et $p \leqslant q$, croît rapidement avec $2n$.

La première méthode a été implémentée sur des ordinateurs dès les années 1960. Parce qu'elle exige d'effectuer des tests de primalités sur de grands intervalles d'entiers $[a - \delta, b]$, la seconde est moins économique, mais elle seule permet d'accéder à la *partition de Goldbach minimale* d'un entier pair $2n$ quelconque, c'est-à-dire au couple d'entiers premiers $\big(p_{\min}(2n), q_{\min}(2n)\big)$ avec $p_{\min}(2n) \leqslant q_{\min}(2n)$ tels que *pour tout autre* partition de Goldbach $2n = p + q$ avec $p \leqslant q$, on a $p_{\min} < p$.

En vérité, la recherche des partitions de Goldbach minimales expose à une difficulté imprévisible : lorsque $2n$ augmente régulièrement, les entiers premiers $p_{\min}$ sautent de manière assez chaotique[20]. Par exemple, juste avant $100 = \mathbf{3} + 97$, on a $98 = \mathbf{19} + 79$. Ce phénomène pourra-t-il être embrassé dans une démonstration d'une longueur raisonnable ? Sinon, pourra-t-on le contourner grâce à une structure globale de l'ensemble des partitions de Golbach de tous les entiers pairs ?

L'expérimental numérique force à éclater les questions.

Calculs au front. Depuis février 2005, T. Oliveira e Silva (en compétition avec d'autres concurrents internationaux) pilote une cinquantaine d'ordinateurs qui travaillent en parallèle pour chercher la partition de Goldbach minimale d'entiers pairs appartenant à des intervalles de longueur 10^{12}. En avril 2007, 10^{18} a été atteint. Les calculs mémorisent le nombre de fois que chaque (relativement petit) nombre premier p est utilisé dans une partitition de Goldbach minimale, ainsi que le plus petit entier pair $2n$ pour lequel $p_{\min}(2n) = p$.

> On a 2.2GHz Athlon64 3500+ processor, testing an interval of 10^{12} integers near 10^{18} takes close to 75 minutes. The execution time of the program grows very slowly, like $\log(N)$, where N is the last integer of the interval being tested, and it uses an amount of memory that is roughly given by $13\sqrt{N}/\log N$. The program is now running on the spare time of around 50 computers (20 DETI/UA and 30 at PSU), either under GNU/Linux or under Windows 2000/XP. We have reached 10^{18} in April 2007, and are now double-checking a small part of the results. T. Oliveira e Silva

[20] Le lecteur trouvera une représentation graphique de la *voile de Goldbach* à la page : `wardley.org/images/misc/goldbach/`

Pour tout entier premier p, les spécialistes se sont aussi intéressés à $S(p)$ = le plus petit entier pair $2n$ tel que p apparaît dans la partition de Goldbach minimale de $2n$. Le record actuel (automne 2007) est détenu par J. Fettig et N. Sobh : c'est $p = 9341$ pour $2n = 906\,03057\,95622\,79642$. En 1989, A. Granville, J. van de Lune et H.J.J. te Riele[21] ont conjecturé, en invoquant un argument probabiliste, que p ne devait par croître plus rapidement que $\log^2 S(p) \log\log S(p)$. Mais les données expérimentales contredisent cette estimation qui devrait être remplacée par $\frac{1}{3}\left[\log S(p) \log\log S(p)\right]^2$.

L'expérimental numérique éprouve les cohérences heuristiques.

> Explorer l'univers des nombres comme le monde physique ? Aucun domaine n'a engendré autant de conjectures indémontrées (mais en partie vérifiables à l'aide de calculs) que l'arithmétique des nombres premiers. Contrairement à l'idée que les mathématiciens proposent le plus souvent de leur discipline, les démonstrations y semblent parfois reléguées au second plan. De toute façon, disent les mathématiciens eux-mêmes, nous n'arrivons pas à démontrer nos conjectures, et l'état actuel de nos connaissances rend impensable que nous réussissions dans un proche avenir. J.-P. DELAHAYE.

Digression sur la nature physique du calcul. Mais quelle *magie* alors nous délivrent les ordinateurs ? Rien d'autre qu'une mécanisation des gestes de calcul de type eulérien ou gaussien, lorsque lesdits gestes s'astreignent *sans pensée latérale* à aligner les résultats successifs obtenus par application d'une certaine règle définie d'engendrement arithmétique.

> D'un bout à l'autre du calcul [dans la preuve du théorème des quatre couleurs], n'importe qui peut étudier et vérifier chaque détail. Le fait qu'un ordinateur puisse traiter en quelques heures plus de cas particuliers qu'un humain ne pourrait espérer le faire dans toute sa vie ne change rien au concept même de démonstration. W. HAKEN.

L'ordinateur programmé par le théoricien expérimental des nombres n'est donc rien de plus qu'un « Train de calculs à Grande Vitesse » lancé dans l'indéfini primordial et irréductible qu'est la suite des nombres entiers.

> Tous les calculs sont empiriques au sens trivial où ils supposent la mise en œuvre d'une manipulation de symboles, que ce soit mentalement, avec du papier et un crayon, ou à l'aide d'une machine ! Martin GARDNER.

[21] *Checking the Goldbach conjecture on a vector computer*, Number Theory and Applications, R.A. Mollin (ed.), pp. 423–433, Kluwer Academic Press, 1989.

Grâce aux microprocesseurs, la « physicalité du calcul » est ainsi enrichie à un niveau micro- ou nano-scopique toujours plus profondément lointain des bouliers orientaux, tables de calculs, bâtonnets de Neper, machines à calcul mécaniques (Vinci, Schikard, Pascal) ou machines à calcul électromécaniques, qui étaient initialement conçues à l'échelle physique de l'homme. *En dernier recours, les symboles en mouvement nécessitent toujours un support matériel pour s'exécuter dynamiquement*. Les « gestes de calcul » peuvent être compressés dans l'espace-temps et augmentés en volume : telle est la seule et unique « magie » des ordinateurs. Et pour ce qui est de l'essence même du calcul, la vraie et seule « magie » qui nous entoure tous remonte aux babyloniens : c'est la possibilité — au lieu de solliciter membres et neurones — de piloter cailloux ou électrons dans l'univers mobile du monde physique pour que ces éléments physiques calculent automatiquement.

PHYSICALITÉ FONDAMENTALE DU CALCUL. *Qu'il soit manuel ou digital, arithmétique, algébrique, numérique, probabiliste ou diagrammatique, tout calcul exécuté ou programmé par les hommes est irréductiblement discret, fini et imprimé de manière transitoire sur des supports physiques. Aucun calcul « transcendant » à une effectuation incarnée physiquement n'est possible. Tous les calculs pour lesquels l'ordinateur est très performant (décimales de π ; bases de Gröbner ; tests de primalité ; analyse matricielle ; schémas numériques des équations aux dérivées partielles ; statistiques ; tris de données) sont dans leur principe effectif identiques à ceux que l'on conduit en ayant recours à n'importe quel autre véhicule physique pour le mouvement des symboles.*

(Il reste toutefois très incertain que la puissance des ordinateurs soit sans conteste effectivement supérieure à celle d'un Euler ou d'un Gauss, même envisagés artificiellement comme n'étant que calculateurs de génie : nous y reviendrons en temps voulu. Par ailleurs, il existe de nombreux domaines des mathématiques qui ne se prêtent absolument pas à une « physicalisation », ni à aucun type d'assistance électronique.)

Dialectique a priori de l'existentiel. L'atomicité symbolique du quantificateur « $\exists$ » qui sert à exprimer conjectures et théorèmes dans le même langage formel ne doit pas faire croire que l'existence se réduise à un concept non problématique. En mathématiques, l'existence ouverte est d'une complexité dialectique imprévisible ; ses variations spéculatives peuvent s'avérer troublantes.

Rappelons que le débat philosophique entre l'existence abstraite et l'existence effective en mathématiques (formalistes contre constructivistes, Hilbert contre Gordan) est causé, en amont des polémiques, par le fait que certains énoncés mathématiques peuvent souvent être jugés comme imparfaits, partiels et donc encore ouverts du point de vue de la connaissance mathématique[22].

Ici — phénomène surprenant et paradoxal —, la conjecture de Goldbach montre qu'*un trop-plein d'existence peut faire obstacle à une connaissance mathématique achevée* : l'expérience montre en effet que le nombre de couples de nombres premiers (p_1, p_2) tels que $n = p_1 + p_2$ augmente très rapidement avec n. La dialectique *a priori* de l'existentiel ouvert doit donc s'enrichir de ce cas de figure, et le considérer comme métaphysiquement disponible à l'avenir.

Heuristique semi-rigoureuse. En 1923, grâce à des arguments informels mais pertinents, Hardy et Littlewood ont conjecturé que le nombre $\pi_2(n)$ de représentations de tout entier n assez grand comme somme de deux nombres premiers $n = p_1 + p_2$ devait être asymptotiquement égal à :

$$2\,\varpi_2\,\frac{n}{\big(\log n\big)^2}\prod_{p|n;\ p\geqslant 3}\frac{p-1}{p-2},$$

où n est pair et où ϖ_2 est la *constante des nombres premiers jumeaux* : $\varpi_2 = \prod_{p\geqslant 3}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^2}\Big) = 0,66016\cdots$. Cette valeur asymptotique est bien confirmée jusqu'à $n \leqslant 10^{17}$. Les manuels ou digitaux confirment la présence du facteur $\prod_{p|n;\ p\geqslant 3}\frac{p-1}{p-2}$ découvert par Sylvester en 1871 et qui produit de petites oscillations dans la valeur expérimentale de $\pi_2(n)$ lorsque n varie. Nous y reviendrons.

Considérons maintenant quelques conjectures ou questions ouvertes en arithmétique des nombres premiers qui sont simples à comprendre et à énoncer.

Conjecture des nombres premiers jumeaux : *Il existe un nombre infini de paires de nombres premiers $(p, p+2)$ séparés seulement par un écart de* 2. Autrement dit :

$$\liminf_{n\to\infty}\, p_{n+1} - p_n = 2.$$

[22] Nous développerons cette thèse en temps voulu.

Conjecture de Polignac. *Pour tout écart pair $2k$, il existe une infinité de paires de nombres premiers $(p, p+2k)$ séparés par $2k$.*

Existe-t-il une infinité de nombres premiers de la forme $n^2 + 1$? On sait qu'il en existe une infinité de la forme $n^2 + m^2$ ou $n^2 + m^2 + 1$.

Existe-t-il toujours un nombre premier entre n^2 et $(n+1)^2$? En 1882, Opperman conjectura que $\pi(n^2+n) > \pi(n^1) > \pi(n^2-n)$, ce qui est aussi très probable.

Écarts entre nombres premiers consécutifs. En 1936, Cramér conjectura que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\big(\log p_n\big)^2} = 1,$$

d'où en particulier : il existe des écarts arbitrairement grands entre nombres premiers qui se suivent.

Fréquence des écarts entre nombres premiers consécutifs. Wolf, Odlyzko et Rubinstein ont conjecturé que l'écart le plus fréquent entre deux nombres premiers est égal au produit des n premiers nombres premiers

$$\mathsf{E}(n) := 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times p_n$$

pour tous les nombres compris entre

$$\mathsf{h}(n) := \exp\Big(\frac{2 \times 3 \times \cdots \times p_{n-1}(p_n - 1)}{\log\big[(p_n-1)/(p_n-2)\big]}\Big)$$

et $\mathsf{h}(n+1)$. Ici, $\mathsf{h}(3) \simeq 10^{36}$ est déjà bien au-delà du domaine accessible à une expérimentation systématique[23], et *a fortiori* aussi $\mathsf{h}(4) \simeq 10^{428}$, $\mathsf{h}(5) \simeq 10^{8656}$, *etc.*

Métaphysique du « tout ce qui est possible se réalise ». Dans le domaine des nombres premiers, on peut formuler de très nombreuses conjectures simples au sujet d'ensembles de nombres astreints à satisfaire un certain nombre de propriétés définies. Tout le possible qui n'est pas exclu par des conditions nécessaires raisonnables et évidentes semble pouvoir prétendre à une plénitude d'être, à une infinitude, à une quantifiabilité explicite. Face à la réalité problématique irréductible des nombres entiers, et

[23] Contrairement aux conjectures précédentes, l'expérimentation numérique ne peut pas constituer ici la source principale d'alimentation prospective. Le dispositif initial du philosophe analytique wittgensteinien est donc spéculativement incomplet : il faut aussi tenir compte des conjectures qui hybrident un champ expérimental insuffisant à des raisonnements heuristiques semi-rigoureux.

bien qu'il semble ne pas y avoir de principe supérieur pour expliquer comment les réalisations mathématiques sont possibles, la posture métaphysique du conjectural engageme vers les potentialités du possible. Parce que l'expérience acquise par l'histoire des mathématiques témoigne de réussites passées, les actes conjecturaux sont généralisables, universalisables et reproductibles. Les formes du questionnement mathématique s'organisent en une algèbre libre, ouverte et non systématisable.

Mais d'un autre côté, la conjecture n'est qu'une forme d'accès préliminaire aux réalités problématiques des mathématiques. Les formes abstraites générales de l'interrogation exposent à de l'irréversible-synthétique qui exige une circulation permanente des questions dans les preuves.

> The achievement of the mathematicians who found the Prime Number Theorem was quite a small thing compared with that of those who found the proof. [. . .] The whole history of the Prime Number Theorem, and the other big theorems of the subject, shows that you cannot reach any real understanding of the structure and meaning of the theory, or have any sound instincts to guide you in further research, until you have mastered the proofs. It is comparably easy to make clever guesses ; indeed there are theorems, like the "Goldbach's theorem", which have never been proved and which any fool could haved guessed. G. H. HARDY.

Raisonnement absurde. Reprenons maintenant notre analyse critique des expressions qui sont employées par le philosophe analytique wittgensteinien. Voici un autre extrait.

> Cette idée qu'il existe une différence de nature, et non pas simplement de degré, entre la démonstration et l'expérience, qui fait que la démonstration ne peut pas démontrer exactement ce qui a été conjecturé (*sic*), est liée au fait que, dans la proposition mathématique, l'expression « nécessairement tous » constitue pour ainsi dire un mot unique (*cf.* PG, p. 429) et que l'on ne peut en détacher le « tous » pour le comparer à celui de l'expérience. Supposer que tous les nombres naturels ont une certaine propriété veut dire supposer que, si on les passait tous en revue successivement, on constaterait que chacun d'entre eux a cette propriété. Mais que peut vouloir dire supposer que tous les nombres naturels ont *nécessairement* une certaine propriété, si ce n'est précisément supposer l'existence d'une démonstration de la proposition universelle ? [1], p. 195.

Ici, la spéculation dérape : aveuglée par le même et unique dipôle conjectures/preuves, elle exagère les différences conceptuelles en extrapolant la signification de l'écart. Ici, *la tentation sophistique menace l'exégète*. Même en admettant que les énoncés visés se métamorphosent souvent au cours d'une recherche, et donc que les démonstrations ne démontrent pas toujours nécessairement ce qui a été initialement conjecturé ou visé, l'affirmation brutale « la démonstration ne peut pas démontrer exactement ce qui a été conjecturé » est inadmissible :

- Sans autre nuance restrictive que par insertion furtive de l'adverbe « exactement », cette affirmation péremptoire se présente comme valable pour *toute* proposition conjecturée et pour et *toute* démonstration ! Indignation chez les mathématiciens !
- Par une sorte d'argument d'autorité philosophique, cette affirmation semble suggérer que celui qui démontre est toujours naïf de croire que ce qu'il démontre est effectivement ce qu'il annonce comme ce qu'il va démontrer.
- De plus, cette affirmation élimine brutalement tout ce qui fait l'intention d'un projet déductif.
- Enfin, plus grave encore, par l'insertion du verbe modal « peut », cette affirmation catégorique se présente comme une vérité de fait qui limite *a priori* la portée de toute démonstration par rapport à un énoncé.

Et pour justifier cette absurde affirmation, en faisant un appel rhétorique distendu et indirect à la périphrase imprécise « est liée au fait que », on greffe un appel au quantificateur logique universel afin de convaincre définitivement son lectorat de philosophie analytique : en tant qu'il est porteur d'une nécessité logique, le quantificateur universel « $\forall$ » transcende le caractère inductif de la conjecture.

Ensuite, l'obsession portant sur le « fossé conceptuel » entre expériences et preuves conduit à écrire une phrase surprenante : « Supposer que tous les nombres naturels ont une certaine propriété veut dire supposer que, si on les passait tous en revue successivement, on constaterait que chacun d'entre eux a cette propriété » : éh bien justement non ! Sauf de manière accessoire et partielle, ce n'est vraiment pas d'une vérification indéfinie que parle une supposition mathématique ! Et ce, pour deux raisons.

Premièrement, à l'échelle humaine, l'infini n'existe pas ; on ne peut jamais supposer qu'une infinité de nombres entiers soient passée en revue : cela n'existe pas ; cela ne peut pas exister. La thèse lucide sur la physicalité du calcul que nous avons énoncée il y a quelques instants a pour conséquence immédiate de borner (disons par 10^{70}) le nombres d'opérations jamais effectuables dans l'univers.

Deuxièmement, qu'elles soient conjecturales-ouvertes, conjecturées-établies, ou simplement établies-admises, la plupart des propositions mathématiques s'expriment dans un langage logique, avec des quantificateurs existentiels ou universels. Il est lointain, le temps où le langage axiomatique balbutiait !

Le conjectural s'inscrit d'emblée dans le langage du démonstratif.

En mathématiques, l'universalité et l'existentialité du conjectural sont du même type métaphysique que l'universalité et l'existentialité du démonstratif. La différence entre les deux est toute modale : elle a trait au caractère d'*ouverture* des énoncés. Bien que la tradition classique de philosophie des mathématiques semble s'être résolument écartée de l'ouverture comme concept, de grands mathématiciens comme Riemann ou Hilbert nous ont légué quelques précieuses pensées à ce sujet. Nous y reviendrons ultérieurement.

Poursuivons la critique. En mathématiques, un raisonnement est absurde lorsqu'il est contradictoire. Jusqu'à nouvel ordre, le principe de non-contradiction doit être rigoureusement respecté. En philosophie spéculative, notamment dans la *Weltanschaaung* hégélienne, on admet que ce principe puisse être remis en cause. Mais en philosophie analytique, il est encore considéré à juste titre comme exigence minimale. Or dans cet extrait, la cohérence locale des raisonnements n'est pas respectée, parce que l'universalité et l'existentialité de la proposition mathématique conjecturale s'expriment la plupart du temps dans un langage formalisé qui attend une démonstration complète exprimée dans le même langage et qui est accompagnée de démonstrations partielles, d'idées initiales, d'arguments heuristiques.

Maintien du fossé conceptuel. Encore une citation témoignant de la circularité de la spéculation. Le commentaire critique est laissé en exercice.

> La tentation à laquelle il faut résister, en l'occurence, est celle qui consiste à considérer une série d'expériences de mesure susceptibles de conduire à l'idée du théorème de Pythagore et la démonstration du théorème comme deux symptômes différent du même état de chose, le deuxième ayant simplement sur le premier l'avantage d'être beaucoup plus sûr, et pour tout dire, infaillible. Wittgenstein réagit à ce genre de suggestion en remarquant que : « rien n'est plus funeste pour la compréhension philosophique que la conception de la démonstration et de l'expérience comme étant deux méthodes de vérification différentes, donc tout de même comparables » (PG, p. 361). [1], p. 195.

Retour sur le théorème des nombres premiers ; doxas anachroniques. La régularité $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$ est surprenante : elle aurait tout aussi bien pu se révéler fausse, si l'on s'en était tenu à l'exercice spéculatif universel que nous offre la *doxa* pure et *a priori* du conjectural. À partir du moment où la suite des nombres premiers est considérée comme irréductible à toute saisie formelle totalisante parce qu'indéfiniment riche et complexe, comment cette suite pourrait-elle jouir de régularités aussi simples que $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$? Et si l'on doit admettre que de telles régularités simples existent effectivement, comment se constituer une intuition fiable des structures plausibles ?

Voilà encore un autre type de question qui demeure toujours en suspens et toujours disponible : *comment un résultat établi s'insère-t-il dans l'intuition provisoirement constituée qu'on a d'un champ rationnel* ?

Bien que l'irréversible-synthétique engendre ses raisonnements rigoureux, il est totalement faux que l'*a posteriori* démonstratif efface l'ouverture fondamentale qui est inhérente à la proposition non démontrée. L'imparfait demeure et l'ouverture latérale non écrite reste coprésente. La faculté d'interrogation est intacte : dès lors qu'on cherche à comprendre une démonstration en profondeur, on doit métamorphoser, retourner et dés-*a postérioriser* tous les raisonnements. On doit faire ressurgir les questions décisives qui ont orienté l'irréversible-synthétique vers la mise au point d'arguments spécifiques. La consignation des résultats mathématiques dans un langage formel élague des dialectiques qu'il faut reconstituer.

Le penseur wittgensteinien se trompe donc ici sur un point crucial : le temps de la pensée circule dans tous les sens et voyage de manière anachronique entre l'*a priori* et l'*a posteriori*, entre la démonstration actuelle et sa saisie comme horizon, même si l'irréversible biologique et la flèche du temps imposent que ces voyages s'effectuent au détriment du vieillissement corps, même si les répétitions, les hésitations, les reprises, les corrections se déploient linéairement dans un temps biologique irréversible. On ne fait jamais réellement abstraction du fait qu'un énoncé dit quelque chose que l'esprit embrasse aisément en un instant, alors que l'étude des démonstrations exige en général des heures de concentration et de réflexion.

De plus, la démonstration ne supplante jamais définitivement son champ expérimental originaire. Quiconque est intéressé par la répartition des nombres premiers aura avantage à reprendre les tests de Gauss, et il découvrira, comme Gauss, des oscillations locales presque chaotiques dans cette répartition, oscillations que le théorème $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$ est visiblement incapable de quantifier et au sujet desquelles il ne dit rien. En extrayant les régularités essentielles, le conjectural se focalise sur les grandes structures. Mais l'expérimental latéralise, complexifie et ramifie les intuitions questionnantes. Les lois ne sont pas données d'emblée avec les listes expérimentales : tout ce que l'on peut dire, c'est qu'elles y transparaissent *peut-être*. L'expérience scientifique confirme toujours la déraisonnable efficacité du principe de raison. Formuler une loi conjecturale requiert toujours un acte synthétique de l'esprit.

Permanence du provisoire et de la problématicité. Aussi le schéma simplifié « conjectures versus preuves » que le philosophe analytique retient d'une lecture de Wittgenstein ne correspond-il vraiment pas à la complexité des situations de recherche que provoque l'interrogation expérimentale, toujours ouverte à des phénomènes subsidiaires. Dire que des questions nouvelles renaissent une fois les résultats acquis serait encore insuffisant, parce que :

Les questions intrinsèques perdurent au sein des architectures achevées.

Au sein même des démonstrations purifiées, l'ouverture se maintient dans les questions qui sont déjà tranchées.

Par ailleurs, et d'une manière générale, dans la pratique mathématique, il y a un certain nombre de questions universelles reproductibles. Ici par exemple, au sujet de la preuve de type Hadamard et de la Vallée-Poussin, quelques questions à caractère essentiellement universel peuvent être posées :

- comment les nombres premiers s'intègrent-ils dans l'analyse complexe ?
- quels sont les arguments décisifs ? comment les distinguer des arguments élémentaires ?
- quelles sont les intuitions globales survolantes de la preuve ?
- *la démonstration que je lis constitue-t-elle la « bonne » démonstration ?*

Rien de plus permanent et de plus ineffaçable que les questions de compréhension, notamment en mathématiques. C'est parce que le conjectural contient des traces indélébiles de problématicité qu'il est ineffaçable.

Considérons par exemple la quatrième question. À ce jour, essentiellement deux démonstrations de l'équivalence $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$ sont connues. La première, due à Hadamard et de la Vallée Poussin, utilise la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, la théorie des intégrales, les séries et produits infinis, l'intégration dans le champ complexe, l'étude des valeurs au bord de fonctions holomorphes, et des arguments de type taubérien : elle n'est décidément pas « élémentaire ». Hadamard et de la Vallée Poussin ont d'abord démontré que $\zeta(s)$ ne s'annule pas dans le demi-plan fermé $\{\mathrm{Re}\, s \geqslant 1\}$, et ensuite établi des estimées techniques de croissance $\zeta(s)$ en ∞, afin d'intégrer sur certains contours de Cauchy allant à l'infini pour obtenir les coefficients de séries de Dirichlet (comme $\zeta(s)$). L'étude préliminaire de $\zeta(s)$ a été simplifiée par Tchebychev, Titchmarsh et Mertens. Le recours aux séries de Fourier (Wiener, Ikehara, Heins) offre une alternatives aux arguments finaux de Hadamard et de la Vallée Poussin. Mais actuellement, la preuve la plus concise et la plus directe, qui n'utilise presque rien de plus que la formule de Cauchy, a été mise au point par D. J. Newman[24] en 1980, en modifiant astucieusement les contours d'intégration de Hadamard et de la Vallée Poussin. Par ailleurs, en 1949, Selberg et Erdös ont élaboré une deuxième preuve « épurée » qui évite le recours à l'analyse complexe, mais cette preuve est relativement longue (une trentaine de pages) et elle ne semble pas motiver ou offrir des développements ultérieurs.

Démultiplication artificielle des énoncés. Les démonstrations sont mobiles, transitoires, modifiables, améliorables. Wittgenstein dit que toute

---

[24] Dans un article dédié au centième anniversaire du théorème des nombres premiers qui est paru en 1997 à l'*American Mathematical Monthly*, vol. **10**, 705–708, Don ZAGIER restitue la preuve de Newman en trois pages d'une limpidité et d'une concision remarquables. La preuve procède en six moments. Pour $s \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$, définissons :

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \Phi(s) := \sum_p \frac{\log p}{p^s}, \qquad \vartheta(x) := \sum_{p \leqslant x} \log p,$$

où la lettre p est utilisée pour désigner les nombres premiers.
I : $\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ pour $\mathrm{Re}\, s > 1$.
II : $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ se prolonge holomorphiquement à $\{\mathrm{Re}\, s > 0\}$.
III : $\vartheta(x) = \mathrm{O}(x)$.
IV : $\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$ est holomorphe et $\zeta(s)$ ne s'annule pas dans $\{\mathrm{Re}\, s \geqslant 1\}$.
V : $\int_1^\infty \frac{\vartheta(x)-x}{x^2}\, dx$ est une intégrale convergente.
VI : $\vartheta(x) \sim x$.
Le théorème des nombres premiers découle alors aisément de **VI**, puisque, pour tout $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\vartheta(x) &= \sum_{p \leqslant x} \log p \leqslant \sum_{p \leqslant x} \log x = \pi(x) \log x \\
\vartheta(x) &\geqslant \sum_{x^{1-\epsilon} \leqslant p \leqslant x} \geqslant \sum_{x^{1-\epsilon} \leqslant p \leqslant x} (1-\epsilon) \log x \\
&= (1-\epsilon) \log x \left[\pi(x) + \mathrm{O}(x^{1-\epsilon})\right].
\end{aligned}$$

nouvelle démonstration *fabrique* une nouvelle connexion. Rien de plus exact. Mais dans certains cas de figure tels que le théorème des nombres premiers, la position wittgensteinienne absolutiste s'expose à une difficulté spéculative qui lui sera immédiatement objectée par tout mathématicien en acte : comment maintenir l'irréductibilité de nature entre énoncé et démonstration, quand l'énoncé en question dont on cherche une démonstration nouvelle a déjà été démontré par plusieurs voies rigoureuses ? L'énoncé reste-t-il irréductiblement ouvert et conjectural ? Doit-on exiger de la philosophie des mathématiques qu'elle respecte le principe logique de non-contradiction ?

Parfois, deux démonstrations distinctes fournissent deux théorèmes essentiellement équivalents mais qui sont légèrement différents, leur différence pouvant être exprimée visiblement dans les énoncés : raison est alors donnée à Wittgenstein. C'est notamment le cas dans les mathématiques contemporaines, fortes d'un extrême raffinement, où des équipes en compétition internationales développent des approches concurrentes et bien distinctes pour étudier un même type de problèmes : la différence des techniques utilisées remonte alors jusqu'aux énoncés dans les publications. Est nouveau tout résultat dont la démonstration est nouvelle.

Mais pour maintenir la cohérence globale de sa posture philosophique, Wittgenstein semble prétendre que deux énoncés sont réellement distincts dès lors que leur démonstrations diffèrent. Mais que dire des énoncés tels que $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$ qui sont exactement les mêmes parce qu'ils sont déjà atomiques et simples ? Faut-il chercher à faire transparaître à tout prix les différences argumentatives des preuves dans les énoncés ? Comment penser les degrés de la différence ? Faut-il supprimer les énoncés et ne mémoriser que les démonstrations spécifiques ?

On se trouve ainsi ramené à une vaste question : qu'est-ce qu'un énoncé (une proposition, un théorème) mathématique ? Tous les mathématiciens se posent la question suivante : quelle forme donner à un énoncé que l'on vient de démontrer ? Aucune réponse définitive ou dogmatique ne peut être proposée. Élasticité stylistique et souplesse du langage complexifient encore le jeu de la publication. Pensée et écriture mathématiques sont incapables de fixer définitivement leur rhétorique.

Par convention au moins, l'énoncé doit extraire une information synthétique essentielle. La règle usuelle veut que l'énoncé soit relativement court par rapport à la démonstration, ce qui est la plupart du temps le cas.

Mais en vérité, nous retrouvons ici un des caractères distinctifs fondamentaux de l'irréversible-synthétique : c'est bien parce que les mathématiques sont faites d'obstacles, c'est bien parce que les problèmes à résoudre exigent d'escalader ou de contourner lentement des montagnes que l'irréversible-synthétique existe et se divise en énoncés et démonstrations. Il y a là encore un problème crucial et très difficile que la philosophie des mathématiques ne doit pas avoir la tentation d'occulter : comment l'irréversible-synthétique est-il possible ?

Arguments heuristiques en théorie analytique des nombres. En suivant Hardy[25], restituons deux arguments heuristiques simples qui conduisent à l'équivalence $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$ du théorème des nombres premiers, ou, ce qui revient au même, à la conclusion :

$$p_m \sim m \log m,$$

où p_m est le m-ième nombre premier.

Voici le premier argument. Partons de l'identité d'Euler, valable uniformément pour $\mathrm{Re}\, s > 1$:

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{(1-2^{-s})(1-3^{-s})(1-5^{-s})\cdots} = \frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots = \sum_{m\geqslant 1} \frac{1}{m^s},$$

où le produit porte sur l'ensemble des nombres premiers $\mathcal{P} = \{2,3,5,7,11,\ldots\}$. Il est naturel que le produit $\prod \frac{1}{1-p^{-s}}$ et la série $\sum \frac{1}{m^s}$ divergent de la même manière[26] lorsque s tend vers 1 en restant dans le demi-plan $\mathrm{Re} s > 1\}$. Clairement, la série tronquée $\sum_{m\leqslant n} \frac{1}{m}$ diverge comme $\log n$. Par ailleurs, si on développe le logarithme du produit :

$$\begin{aligned} \log \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} &= \sum_p \log \frac{1}{1-p^{-s}} \\ &= \sum_p \frac{1}{p^s} + \left(\sum_p \frac{1}{2\,p^{2s}} + \sum_p \frac{1}{3\,p^{3s}} + \cdots \right) \end{aligned}$$

---

[25] *Ramanujan. Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*, Chelsea, New York, 1940.

[26] La manière dont ces deux quantités divergent est nécessairement la même, puisque l'identité d'Euler est valide quel que soit s satisfaisant $\mathrm{Re}\, s > 1$. Toutefois, c'est en estimant la contribution principale de divergence pour chacun des deux membres qu'on peut être amené soit à commettre une erreur, soit (si on ne s'est pas trompé sur le choix des termes divergents principaux, ce qui est le cas ici) à éprouver de réelles difficultés à transformer le raisonnement heuristique en démonstration rigoureuse.

en tenant compte du fait que tous les termes $\sum_p \frac{1}{k\,p^{ks}}$ pour $k \geqslant 2$ convergent, on s'attend à ce que, lorsque $s \to 1$, la première somme $\sum \frac{1}{p}$ diverge comme $\log\left(\sum \frac{1}{m}\right)$, ou plus précisément :

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} \sim \log\left(\sum_{m \leqslant n} \frac{1}{m}\right) \sim \log\log n.$$

Comme par ailleurs :

$$\sum_{m \leqslant n} \frac{1}{m \log m} \sim \log\log n,$$

cette dernière formule pourrait indiquer que p_m est asymptotiquement égal à $m \log m$, ce qu'on voulait obtenir.

Métaphysique des raisonnements heuristiques. Ici, pétition de principe : sachant que la série de Bertrand $\sum_{m \leqslant n} \frac{1}{m \log m}$ diverge comme $\log\log n$, on annonce que le comportement asymptotique *inconnu* de $\frac{1}{p_m}$ doit être le même que $\frac{1}{m \log m}$. Mais il se pourrait très bien qu'une infinité d'autres séries différentes $\sum_m \frac{1}{q_m}$ de termes généraux $\frac{1}{q_m}$ essentiellement distincts de $\frac{1}{m \log m}$ diverge aussi comme $\log\log n$. Dans l'absolu, ce raisonnement très périlleux devrait donc être considéré comme irrecevable, à cause de la diversité *a priori* du possible : les grandes catégories métaphysiques restent omniprésentes en mathématiques.

Mais à l'époque où écrit Hardy, la loi attendue $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$ (ou, de manière équivalente, $p_m \sim m \log m$) avait été anticipée sur le plan expérimental depuis plus d'un siècle par Legendre, Gauss et d'autres — sans compter que les démonstrations rigoureuses de Hadamard et de la Vallée Poussin circulaient depuis plus d'une vingtaine d'années. On assiste donc ici à un phénomène intéressant de *cristallisation de la cohérence*. La spéculation mathématique est une machine à voyager dans le temps irréversible du démonstratif. Elle scrute librement l'embryogénèse du déductif.

Conclusion ouverte

Épilogue critique. Le philosophe analytique wittgensteinien n'a peut-être pas encore pris conscience du fait que la distinction capitale entre conjectures et démonstrations n'est guère qu'une pièce initiale dans un puzzle mathématique indéfini. Se crisper sur cette distinction expose aux circularités spéculatives, aux répétitions désorganisées. En mathématiques, parce que tout se ramifie au-delà des racine, on structure la pensée (c'est une règle d'or), on élimine l'extrinsèque, on désigne l'inconnu, et on travaille au front. Le mathématicien en acte joue en permanence avec les grands concepts de la métaphysique classique : *a priori*/*a posteriori* ; jugement analytique/jugement synthétique ; irréversible-synthétique ; dialectique ; heuristique. Et ses pensées jouent avec souplesse du technique comme du médidatif.

Penser le calcul. Depuis une décennie, les logiciels de calcul formel tels que Maple, Mathematica, Singular, Macaulay, Pari, *etc.* sont régulièrement enseignés dans les cursus de la Licence. Beaucoup de démonstrations sont maintenant assistées par ordinateur. La recherche s'hybride. En géométrie, la pensée du continu ramifie ses discrétisations conceptuelles. Tous ces éléments ne sont pas encore pensée par la philosophie comme ils devraient l'être.

Directions ouvertes de philosophie des mathématiques.

- Édifier une *pensée de l'ouverture mathématique technique*.
- Spéculer sur la nature des questions mathématiques.
- Ramifier la question kantienne : « comment les jugements synthétiques *a priori* sont-ils possibes ».
- Penser l'irréversible-synthétique.
- Actifier, reproduire, propager, mécaniser, automatiser et désacraliser le questionnement mathématique.
- Formuler expressément les ouvertures rémanentes.
- Constituer des catégories de pensée pour systématiser la nature de ce qui demeure dans le domaine du non-exploré.
- Désigner l'indécision.
- Typiser et hiérarchiser les questions spécifiques.
- Démasquer les ignorances paradoxales qui se présentent comme connaissances entrevues.
- Réhabiliter le philosophique des mathématiques.

RÉFÉRENCES

[1] BOUVERESSE, J. : *Le pays des possibles. Wittgenstein, les mathématiques et le monde réel*, Éditions de Minuit, Paris, 1988.