La jonction mathématique entre les systèmes ontologique et logique d'Alain Badiou

Ivan Marin, Université d'Amiens (UPJV)

Séminaire Philosophie et Mathématiques
ENS de Paris
25 novembre 2024

Chronologie

1988	*L'être et l'événement*
2006	*Logique des mondes*, *L'être et l'événement 2*
2019	*L'Immanence des vérités*, *L'être et l'événement 3*

Chronologie

1988	*L'être et l'événement*
2006	*Logique des mondes*, *L'être et l'événement 2*
2019	*L'Immanence des vérités*, *L'être et l'événement 3*

ainsi que

Chronologie

1988	*L'être et l'événement*
2006	*Logique des mondes, L'être et l'événement 2*
2019	*L'Immanence des vérités, L'être et l'événement 3*

ainsi que

1969	*Le concept de modèle* (préface de 2007)
1989	*Manifeste pour la philosophie*
1998	*Court traité d'ontologie transitoire*
2009	*Second manifeste pour la philosophie*
2014	*Mathematics of the Transcendental*
2024	*Topos*

L'ontologie – aperçu historique à la hache

L’ontologie – aperçu historique à la hache

il y a longtemps Aristote : l’être en tant qu’être

L'ontologie – aperçu historique à la hache

il y a longtemps	Aristote : l'être en tant qu'être
dix-septième siècle	Plein de gens

L'ontologie – aperçu historique à la hache

il y a longtemps	Aristote : l'être en tant qu'être
dix-septième siècle	Plein de gens
1781-1787	Kant, *Critique de la raison pure*

L'ontologie – aperçu historique à la hache

il y a longtemps	Aristote : l'être en tant qu'être
dix-septième siècle	Plein de gens
1781-1787	Kant, *Critique de la raison pure*
1812-1815	Hegel, *Science de la logique*, « Grande logique ».

LAMFA

L’ontologie – aperçu historique à la hache

il y a longtemps	Aristote : l’être en tant qu’être
dix-septième siècle	Plein de gens
1781-1787	Kant, *Critique de la raison pure*
1812-1815	Hegel, *Science de la logique*, « Grande logique ».
1901	Husserl, *Recherches logiques*

L'ontologie – aperçu historique à la hache

il y a longtemps	Aristote : l'être en tant qu'être
dix-septième siècle	Plein de gens
1781-1787	Kant, *Critique de la raison pure*
1812-1815	Hegel, *Science de la logique*, « Grande logique ».
1901	Husserl, *Recherches logiques*
1927	Heidegger, *Etre et temps*

L’ontologie – aperçu historique à la hache

il y a longtemps	Aristote : l’être en tant qu’être
dix-septième siècle	Plein de gens
1781-1787	Kant, *Critique de la raison pure*
1812-1815	Hegel, *Science de la logique*, ≪ Grande logique ≫.
1901	Husserl, *Recherches logiques*
1927	Heidegger, *Etre et temps*

≪ L’ontologie philosophique contemporaine est entièrement dominée par le nom de Heidegger. ≫

Badiou, EE1, Introduction.

L'ontologie – aperçu historique à la hache

1927 Heidegger, *Etre et temps*

≪ [La question ontologique] a tenu en haleine la recherche de Platon et d'Aristote, avant de s'éteindre bien entendu après eux, du moins en tant que *question thématique de recherche effective*. Ce que les deux penseurs avaient conquis s'est maintenu, au prix de diverses déviations et ≪ surcharges ≫, jusque dans la Logique de Hegel.[...] Mais ce n'est pas tout. Car sur la base des premiers essais grecs en vue de l'interprétation de l'être un dogme s'est élaboré, qui non seulement déclare superflue la question du sens de l'être, mais encore légitime expressément l'omission de la question. On dit : l'≪ être ≫ est le concept le plus universel et le plus vide. [...] Et lorsque finalement Hegel détermine l'≪ être ≫ comme l'≪ immédiat indéterminé ≫ et qu'il place cette détermination à la base de toutes les explications catégoriales ultérieures de sa *Logique*, il se maintient dans la même perspective que l'ontologie antique, à ceci près qu'il abandonne le problème, déjà posé par Aristote, de l'unité de l'être. ≫ (traduction Martineau)

L'ontologie – la voie heideggerienne

Heidegger va alors développer une nouvelle élaboration de la question de l'être, marquée par :

L'ontologie – la voie heideggerienne

Heidegger va alors développer une nouvelle élaboration de la question de l'être, marquée par :

- la « différence ontologique » entre l'être et les étants

L’ontologie – la voie heideggerienne

Heidegger va alors développer une nouvelle élaboration de la question de l’être, marquée par :

- la « différence ontologique » entre l’être et les étants
- la question du *voilement* $\rightarrow$ nécessité d’un travail d’approche.

L'ontologie – la voie heideggerienne

Heidegger va alors développer une nouvelle élaboration de la question de l'être, marquée par :

- la « différence ontologique » entre l'être et les étants
- la question du *voilement* → nécessité d'un travail d'approche.

D'où une importance des *poètes* dans la tradition heideggérienne.

L'ontologie – la voie heideggerienne

Heidegger va alors développer une nouvelle élaboration de la question de l'être, marquée par :

- la « différence ontologique » entre l'être et les étants
- la question du *voilement* $\rightarrow$ nécessité d'un travail d'approche.

D'où une importance des *poètes* dans la tradition heideggérienne.

Badiou présente son propre système comme autorisant une alternative à la voie heideggérienne :

Or, à la séduction de la proximité poétique [...] j'opposerai la dimension radicalement soustractive de l'être [...]. Je dirai que l'être, en tant qu'être, ne se laisse d'aucune façon approcher, mais seulement suturer dans son vide à l'âpreté d'une consistance déductive sans aura. [...] A l'ontologie poétique qui [...] est dans l'impasse d'un excès de présence où l'être se dérobe, il faut substituer l'ontologie mathématique, où s'accomplissent par l'écriture la dé-qualification et l'imprésentation.

Badiou, EE1, Introduction

L’ontologie – aperçu historique à la serpe

il y a encore plus longtemps	*Parménide* de Platon : l'un et le multiple.
il y a longtemps	Aristote : l'être en tant qu'être.

L’ontologie – aperçu historique à la serpe

il y a encore plus longtemps	*Parménide* de Platon : l’un et le multiple.
il y a longtemps	Aristote : l’être en tant qu’être. Plurivocité.

L’ontologie – aperçu historique à la serpe

il y a encore plus longtemps	*Parménide* de Platon : l’un et le multiple.
il y a longtemps	Aristote : l’être en tant qu’être. Plurivocité.
dix-septième siècle	Plein de gens, dont Leibniz : l’unité de l’être.

L'ontologie – aperçu historique à la serpe

il y a encore plus longtemps	*Parménide* de Platon : l'un et le multiple.
il y a longtemps	Aristote : l'être en tant qu'être. Plurivocité.
dix-septième siècle	Plein de gens, dont Leibniz : l'unité de l'être.
1781-1787	Kant, *Critique de la raison pure*
1812-1815	Hegel, *Science de la logique*, « Grande logique ».
1901	Husserl, fondation de la phénoménologie.
1927	Heidegger, *Etre et temps*

L'ontologie – aperçu historique à la serpe

il y a encore plus longtemps	*Parménide* de Platon : l'un et le multiple.
il y a longtemps	Aristote : l'être en tant qu'être. Plurivocité.
dix-septième siècle	Plein de gens, dont Leibniz : l'unité de l'être.
1781-1787	Kant, *Critique de la raison pure*
1812-1815	Hegel, *Science de la logique*, « Grande logique ».
1901	Husserl, fondation de la phénoménologie.
1927	Heidegger, *Etre et temps*
1929	Husserl, *Logique formelle et logique transcendantale*

L'ontologie – aperçu historique à la serpe

il y a encore plus longtemps	*Parménide* de Platon : l'un et le multiple.
il y a longtemps	Aristote : l'être en tant qu'être. Plurivocité.
dix-septième siècle	Plein de gens, dont Leibniz : l'unité de l'être.
1781-1787	Kant, *Critique de la raison pure*
1812-1815	Hegel, *Science de la logique*, « Grande logique ».
1901	Husserl, fondation de la phénoménologie.
1927	Heidegger, *Etre et temps*
1929	Husserl, *Logique formelle et logique transcendantale*

Badiou part de *positions*, défendues au regard de l'histoire de la philosophie.

L'ontologie – aperçu historique à la serpe

il y a encore plus longtemps	*Parménide* de Platon : l'un et le multiple.
il y a longtemps	Aristote : l'être en tant qu'être. Plurivocité.
dix-septième siècle	Plein de gens, dont Leibniz : l'unité de l'être.
1781-1787	Kant, *Critique de la raison pure*
1812-1815	Hegel, *Science de la logique*, « Grande logique ».
1901	Husserl, fondation de la phénoménologie.
1927	Heidegger, *Etre et temps*
1929	Husserl, *Logique formelle et logique transcendantale*

Badiou part de *positions*, défendues au regard de l'histoire de la philosophie.

- l'univocité de l'être (platonisme).

L'ontologie – aperçu historique à la serpe

il y a encore plus longtemps	*Parménide* de Platon : l'un et le multiple.
il y a longtemps	Aristote : l'être en tant qu'être. Plurivocité.
dix-septième siècle	Plein de gens, dont Leibniz : l'unité de l'être.
1781-1787	Kant, *Critique de la raison pure*
1812-1815	Hegel, *Science de la logique*, « Grande logique ».
1901	Husserl, fondation de la phénoménologie.
1927	Heidegger, *Etre et temps*
1929	Husserl, *Logique formelle et logique transcendantale*

Badiou part de *positions*, défendues au regard de l'histoire de la philosophie.

- l'univocité de l'être (platonisme).
- il n'y a que du multiple (qui peut être mis-en-un).

Les 3 grandes étapes du système

Dans les grandes lignes :

Les 3 grandes étapes du système

Dans les grandes lignes :

- Dans EE1, Badiou démontre que le discours sur l'être-en-tant-qu'être est celui qui se déploie dans l'axiomatique ZFC de la théorie des ensembles et ses extensions, portant sur des « multiples ».

Les 3 grandes étapes du système

Dans les grandes lignes :

- Dans EE1, Badiou démontre que le discours sur l'être-en-tant-qu'être est celui qui se déploie dans l'axiomatique ZFC de la théorie des ensembles et ses extensions, portant sur des « multiples ».
- Dans EE2, il développe une théorie de l'apparition, de l'existence des multiples dans un « monde », admettant une structure de topos, ce qui lui permet de développer une notion d'objet basé sur la théorie des catégories.

Les 3 grandes étapes du système

Dans les grandes lignes :

- Dans EE1, Badiou démontre que le discours sur l'être-en-tant-qu'être est celui qui se déploie dans l'axiomatique ZFC de la théorie des ensembles et ses extensions, portant sur des « multiples ».
- Dans EE2, il développe une théorie de l'apparition, de l'existence des multiples dans un « monde », admettant une structure de topos, ce qui lui permet de développer une notion d'objet basé sur la théorie des catégories.
- Dans EE3, il propose une interprétation de la théorie des grands cardinaux comme adéquate à sa pensée des vérités, permettant notamment d'établir la consistance de pensée d'infinis « véritablement infinis », échappant notamment à ce qu'il va appeler des procédures de finitisation.

Badiou et Zermelo

La coincidence entre

- la formulation d'un discours ontologique une fois acceptée les positions/décisions de Badiou à ce sujet
- le système formel de Zermelo

Badiou et Zermelo

La coincidence entre

- la formulation d'un discours ontologique une fois acceptée les positions/décisions de Badiou à ce sujet
- le système formel de Zermelo

tient :

1. à la position « platonicienne » de Badiou, qu'il traduit en « tout ce qui est consistant existe », et au fait que « être, pensée et consistance sont en mathématiques une seule et même chose ».

Badiou et Zermelo

La coincidence entre

- la formulation d'un discours ontologique une fois acceptée les positions/décisions de Badiou à ce sujet
- le système formel de Zermelo

tient :

1. à la position « platonicienne » de Badiou, qu'il traduit en « tout ce qui est consistant existe », et au fait que « être, pensée et consistance sont en mathématiques une seule et même chose ».
2. au fait que le but de Zermelo en 1908 est de développer une axiomatique minimale pour que les mathématiques cantoriennes fonctionnent : sa non-contradiction est démontrée en acte par les mathématiques elles-mêmes.

Badiou et Zermelo

La coincidence entre

- la formulation d'un discours ontologique une fois acceptée les positions/décisions de Badiou à ce sujet
- le système formel de Zermelo

tient :

1. à la position « platonicienne » de Badiou, qu'il traduit en « tout ce qui est consistant existe », et au fait que « être, pensée et consistance sont en mathématiques une seule et même chose ».
2. au fait que le but de Zermelo en 1908 est de développer une axiomatique minimale pour que les mathématiques cantoriennes fonctionnent : sa non-contradiction est démontrée en acte par les mathématiques elles-mêmes.

Badiou	$\leftrightarrow$	Zermelo
une chose qui est = « multiple »		ensemble dans un modèle de ZFC

Le système ZFC

(1) Les axiomes élémentaires

1. $x = y$ ssi $\forall z\ z \in x \Leftrightarrow z \in y$
2. Si x, y sont des ensembles, $\{x, y\}$ est un ensemble : il existe un ensemble z tel que $t \in z \Leftrightarrow t = x$ ou $t = y$.
3. Si x est un ensemble, il existe un (unique) ensemble $\mathcal{P}(x)$ tel que $y \subset x \Leftrightarrow y \in \mathcal{P}(x)$, où $y \subset x$ est une abréviation pour $\forall z\ z \in y \Rightarrow z \in x$.
4. Si x est un ensemble, il existe un (unique) ensemble $\mathrm{U}(x)$ tel que $y \in \mathrm{U}(x) \Leftrightarrow \exists z\ y \in z$ et $z \in x$.
5. Il existe un ensemble $\emptyset$, caractérisé par $\forall x\ x \notin \emptyset$.
6. Il existe un ensemble infini, analogue aux entiers naturels.

Le système ZFC

(2) Les axiomes plus délicats

1. L'axiome de séparation, ou de compréhension. Si P est une formule, et x un ensemble, $\{y \in x \mid P(y)\}$ est un ensemble.
2. L'axiome du choix : pour tout x, il existe une application $f : \mathcal{P}(x) \to \text{U}x$ tel que $\forall y \in x\ y \neq \emptyset \Rightarrow f(y) \in y$.
3. L'axiome de remplacement. Si f est une 'application' de source x, alors $\{f(y), y \in x\}$ est un ensemble.

Le système ZFC

(2) Les axiomes plus délicats

1. L'axiome de séparation, ou de compréhension. Si P est une formule, et x un ensemble, $\{y \in x \mid P(y)\}$ est un ensemble.
2. L'axiome du choix : pour tout x, il existe une application $f : \mathcal{P}(x) \to \mathrm{U}x$ tel que $\forall y \in x \; y \neq \emptyset \Rightarrow f(y) \in y$.
3. L'axiome de remplacement. Si f est une 'application' de source x, alors $\{f(y), y \in x\}$ est un ensemble.

A partir de ces axiomes, on construit des ordinaux, puis un concept de cardinal comme plus petit ordinal non équipotent à un ordinal qui le précède, et on note $\aleph_\alpha$ le α-ième cardinal.

Le système ZFC

(2) Les axiomes plus délicats

1. L'axiome de séparation, ou de compréhension. Si P est une formule, et x un ensemble, $\{y \in x \mid P(y)\}$ est un ensemble.
2. L'axiome du choix : pour tout x, il existe une application $f : \mathcal{P}(x) \to \mathrm{U}x$ tel que $\forall y \in x\ y \neq \emptyset \Rightarrow f(y) \in y$.
3. L'axiome de remplacement. Si f est une 'application' de source x, alors $\{f(y), y \in x\}$ est un ensemble.

A partir de ces axiomes, on construit des ordinaux, puis un concept de cardinal comme plus petit ordinal non équipotent à un ordinal qui le précède, et on note $\aleph_\alpha$ le α-ième cardinal.

On a un ordre sur les cardinaux, et le théorème de Cantor : $\alpha < 2^\alpha$, où 2^α est le cardinal de $\mathcal{P}(X)$ pour X ensemble de cardinal α.

Le système ZFC

(3) L'axiome de fondation et la hiérarchie cumulative

L'axiome de fondation interdit $x \in x$, et a comme conséquence que tout ensemble appartient à la hiérarchie cumulative de Von Neumann, i.e. $\forall x \exists \alpha \; x \in V_\alpha$, où V_α est construit ainsi :

(3) L'axiome de fondation et la hiérarchie cumulative

L'axiome de fondation interdit $x \in x$, et a comme conséquence que tout ensemble appartient à la hiérarchie cumulative de Von Neumann, i.e. $\forall x \exists \alpha \; x \in V_\alpha$, où V_α est construit ainsi :

$$\begin{array}{lclcl}
V_0 & = & \emptyset & & \\
V_1 & = & \{\emptyset\} & & \\
V_2 & = & \mathcal{P}(V_1) & = & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
V_3 & = & \mathcal{P}(V_2) & = & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
 & \dots & & & \\
V_{i+1} & = & \mathcal{P}(V_i) & & \\
 & \dots & & &
\end{array}$$

(3) L'axiome de fondation et la hiérarchie cumulative

L'axiome de fondation interdit $x \in x$, et a comme conséquence que tout ensemble appartient à la hiérarchie cumulative de Von Neumann, i.e. $\forall x \exists \alpha \; x \in V_\alpha$, où V_α est construit ainsi :

$$
\begin{array}{lcccl}
V_0 & = & \emptyset & & \\
V_1 & = & \{\emptyset\} & & \\
V_2 & = & \mathcal{P}(V_1) & = & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
V_3 & = & \mathcal{P}(V_2) & = & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
 & \ldots & & & \\
V_{i+1} & = & \mathcal{P}(V_i) & & \\
 & \ldots & & &
\end{array}
$$

puis $V_\omega = \bigcup_i V_i$, $V_{\omega+1} = \mathcal{P}(V_\omega)$ $V_{\omega+2} = \mathcal{P}(V_{\omega+1})$,

$$V_{\omega+\omega} = V_\omega \cup \mathcal{P}(V_\omega) \cup V_{\omega+2} \cup \cdots = \bigcup_{i \in \omega} V_{\omega+i}$$

etc.

L'événement

Dans le système de Badiou, le discours ontologique doit être compatible avec ZFC.

L'événement

Dans le système de Badiou, le discours ontologique doit être compatible avec ZFC.

Néanmoins, il change au gré d'événements : le monde d'après doit toujours être compatible avec ZFC, mais il peut comporter des « vérités » supplémentaires, non déductibles de la théorie d'avant l'événement, mais ne la contradisant pas.

Le *forcing* est la garantie d'existence d'un tel mécanisme logique.

Etre-là, transcendantal et existence

Etre-là, transcendantal et existence

≪ Qu'est-ce d'abord que l'être-là ? C'est l'être déterminé par son couplage avec ce qui n'est pas lui. Exactement comme pour nous l'étant-multiple se sépare de son pur être dès qu'il est assigné à un monde, pour Hegel l'être-là n'est pas simple être, mais être-là ≫

Badiou, *Logique des mondes*

→ Badiou va complètement découpler l'être des étants de leur existence, qui sera liée à un monde d'apparition, porteur des déterminations hégéliennes de l'être-là, et notamment l'identité, la différence, etc.

Hegel, *Science de la logique*

t. 1, *Logique objective*

Livre I — L'Etre

Section 1 : Déterminité
- Ch. 1 Etre
- Ch. 2 Etre-là « L'être-là est l'être *déterminé* »
- Ch. 3 Etre pour soi

Section 2 : Grandeur

...

Section 3 : Mesure

...

Hegel, *Science de la logique*

t. 1, *Logique objective*

Livre II	L'Essence	« l'essence est la *vérité* de l'être »
	Section 1 :	L'essence comme réflexion dans elle-même
		Ch. 1 L'apparence
		Ch. 2 Les déterminations-de-réflexions
		dont : l'identité, la différence, la contradiction.
		Ch. 3 Le fondement
	Section 2 :	Grandeur
		Ch. 1 L'existence
		Ch. 2 Le phénomène
		Ch. 3 Le rapport essentiel
	Section 3 :	L'effectivité
	…	

Transcendantaux

Un transcendantal T est une « échelle des degrés », qui sont des « degrés d'identité (et donc de différences) aux autres étants du même monde. ».

Transcendantaux

Un transcendantal T est une « échelle des degrés », qui sont des « degrés d'identité (et donc de différences) aux autres étants du même monde. ».

T est donc (partiellement) ordonné, admettant des propriétés caractéristiques des « valeurs de vérité » de la logique intuitionniste.

Transcendantaux

Un transcendantal T est une « échelle des degrés », qui sont des « degrés d'identité (et donc de différences) aux autres étants du même monde. ».

T est donc (partiellement) ordonné, admettant des propriétés caractéristiques des « valeurs de vérité » de la logique intuitionniste.

- un minimum μ
- un maximum M
- pour tous $a, b \in T$ un $\min(a, b) = a \cap b$ représentant la conjonction
- pour tous $a, b \in T$ un $\max(a, b) = a \cup b$ représentant la disjonction
- une négation $\urcorner a$ satisfaisant $a \cap \urcorner a = \mu$ mais $a \cup \urcorner a$ non nécessairement égal à M.
- Si $\forall i \in I\ a_i \in T$, alors on a une « disjonction infinie », $\bigcup_i a_i$, caractérisée par $(\forall i\ a_i \leq b) \Leftrightarrow \bigcup_i a_i \leq b$, telle que

$$\bigcup_i (b \cap a_i) = b \cap \bigcup_i a_i$$

Transcendantaux

T est ce que l'on appelle une algèbre de Heyting complète.

Transcendantaux

T est ce que l'on appelle une algèbre de Heyting complète.

Les valeurs de vérité d'une logique intuitionniste ont une interprétation topologique comme *lieu* sur lequel une proposition P est vraie.

Transcendantaux

T est ce que l'on appelle une algèbre de Heyting complète.

Les valeurs de vérité d'une logique intuitionniste ont une interprétation topologique comme *lieu* sur lequel une proposition P est vraie.

- il n'y a pas de lieu sur lequel P et $\neg P$ sont toutes les deux vraies.
- il peut y avoir des lieux sur lesquels ni P ni $\neg P$ ne sont vraies.

Transcendantaux

T est ce que l'on appelle une algèbre de Heyting complète.

Les valeurs de vérité d'une logique intuitionniste ont une interprétation topologique comme *lieu* sur lequel une proposition P est vraie.

- il n'y a pas de lieu sur lequel P et $\urcorner P$ sont toutes les deux vraies.
- il peut y avoir des lieux sur lesquels ni P ni $\urcorner P$ ne sont vraies.

Si X est un espace topologique, la collection $Ouv(X)$ des ouverts de X forme un transcendantal.

Exemple

$X = \{*\}$ *avec pour ouverts* $\emptyset \subset \{*\}$ *donne* $T = \{\mu, M\}$, *soit la logique classique.*

Mondes

Un transcendantal T étant fixé, un monde est donné par une fonction ≪ identité ≫,

$$\mathrm{Id} : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to T$$

satisfaisant

$$\mathrm{Id}(x, y) = \mathrm{Id}(y, x), \mathrm{Id}(x, y) \cap \mathrm{Id}(y, z) \leq \mathrm{Id}(x, z)$$

Mondes

Un transcendantal T étant fixé, un monde est donné par une fonction « identité »,

$$\mathrm{Id} : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to T$$

satisfaisant

$$\mathrm{Id}(x,y) = \mathrm{Id}(y,x), \mathrm{Id}(x,y) \cap \mathrm{Id}(y,z) \leq \mathrm{Id}(x,z)$$

elle-même déterminant un « degré d'existence » $E(x) = \mathrm{Id}(x,x)$.

Exemple

$\mathfrak{M}$ égal à l'ensemble des propositions logiques, $T = \{\mu, M\}$, $\mathrm{Id}(P,Q) = M$ si $P \Leftrightarrow Q$, $\mathrm{Id}(P,Q) = \mu$ sinon.

Exemple

$T = Ouv(X)$, X espace discret, $\mathfrak{M}$ les fonctions $X \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Id}(f,g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$.

Mondes

Un transcendantal T étant fixé, un monde est donné par une fonction « identité »,

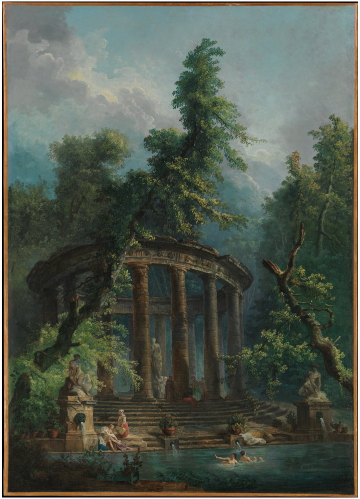
$$\mathrm{Id} : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to T$$

elle-même déterminant un « degré d'existence » $E(x) = \mathrm{Id}(x, x)$.

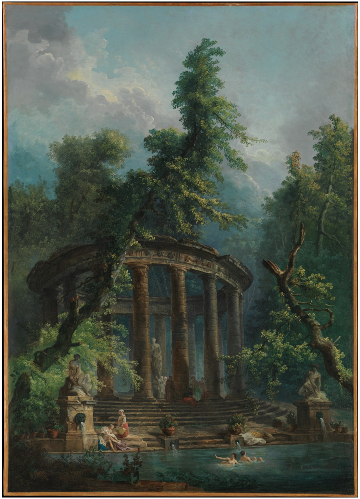
Définition

Le phénomène associé à $A \in \mathfrak{M}$ est la fonction $x \mapsto \mathrm{Id}(A, x)$.

LDM, p. 213. « nous appellerons 'phénomène' de cet étant le système complet d'évaluation transcendantale de son identité à tous les étants qui co-apparaissent dans ce monde ».



Mondes



LDM, p. 217. « La fonction d'identité opère conjointement sur les formes, sur les couleurs, sur les indices représentatifs, etc. On voit aisément, par exemple, que les colonnes du temple circulaire doivent être à la fois harmonieusement semblables et cependant distinctes. Ainsi, le bleuté des colonnes du fond est destiné à porter leur recul par rapport à celles du premier plan, mais aussi leur identité, eu égard à la variation des lumières (si le temple tournait, ce sont les deux colonnes mordorées du premier plan qui deviendraient floues et bleutées). »

LAMFA

Mondes

Un objet de $\mathfrak{M}$ est un $A \in \mathfrak{M}$ ayant une propriété particulière.

Mondes

Un objet de $\mathfrak{M}$ est un $A \in \mathfrak{M}$ ayant une propriété particulière.

Pour $A \in \mathfrak{M}$, les *atomes* de A sont des applications $\alpha : A \to T$ ayant les propriétés formelles suivantes :

$$\alpha(x) \cap \mathrm{Id}(x, y) \leq \alpha(y), \ \alpha(x) \cap \alpha(y) \leq \mathrm{Id}(x, y)$$

Définition (« postulat du matérialisme »)

A est un objet si tout atome de A est « réel », c'est-à-dire de la forme $x \mapsto \mathrm{Id}(a, x)$ pour un certain $a \in A$.

LAMFA

Mondes

Definition (« postulat du matérialisme »)

A est un *objet* si tout atome de A est « réel », c'est-à-dire de la forme $x \mapsto \mathrm{Id}(a, x)$ pour un certain $a \in A$.

LDM, p. 265-266. « Que tout atome d'apparaître soit réel veut certes dire qu'il est prescrit par un élément a de A, et donc par la composition ontologique de A. Il ne s'ensuit pas que deux éléments a et b ontologiquement différents prescrivent des atomes différents. 'Atome' est un concept de l'objectivité, donc de l'apparaître, et les lois de la différence n'y sont pas celles de la différence ontologique. »

Mondes

Definition (« postulat du matérialisme »)

A est un *objet* si tout atome de A est « réel », c'est-à-dire de la forme $x \mapsto \mathrm{Id}(a, x)$ pour un certain $a \in A$.

LDM, p. 265. « Si un atome quelconque, défini par une fonction $\alpha(x)$, est identique à un unique atome de type $a(x)$, autrement dit, s'il existe un unique $a \in A$ tel que, pour tout $x \in A$, on ait $\alpha(x) = a(x) = \mathrm{Id}(a, x)$, on dit que l'atome $\alpha(x)$ est réel »

Mondes

Si $T = Ouv(X)$, l'interprétation topologique fait des « objets » ce que l'on appelle des *faisceaux* sur X.

Mondes

Si $T = Ouv(X)$, l'interprétation topologique fait des « objets » ce que l'on appelle des *faisceaux* sur X.

Le faisceau associé à l'objet $A \in \mathfrak{M}$ est $F : T \to \mathfrak{M}$ défini par

$$F(u) = \{a \in A \mid E(a) = u\}$$

Mondes

Si $T = Ouv(X)$, l'interprétation topologique fait des « objets » ce que l'on appelle des *faisceaux* sur X.

Le faisceau associé à l'objet $A \in \mathfrak{M}$ est $F : T \to \mathfrak{M}$ défini par

$$F(u) = \{a \in A \mid E(a) = u\}$$

L'articulation « logique » entre les objets est effectuée par la « catégorie des faisceaux sur X », qui ne dépend que de T.

Mondes

Si $T = Ouv(X)$, l'interprétation topologique fait des « objets » ce que l'on appelle des *faisceaux* sur X.

Le faisceau associé à l'objet $A \in \mathfrak{M}$ est $F : T \to \mathfrak{M}$ défini par

$$F(u) = \{a \in A \mid E(a) = u\}$$

L'articulation « logique » entre les objets est effectuée par la « catégorie des faisceaux sur X », qui ne dépend que de T.

C'est le *topos associé à* T. Il est constitué de tous les objets associé à ce transcendantal et de toutes leurs relations.

Catégories et ensembles

Cela amène à devoir concilier ensembles et catégories, ce que les mathématiciens ne font pas (le plus souvent).

Catégories et ensembles

Cela amène à devoir concilier ensembles et catégories, ce que les mathématiciens ne font pas (le plus souvent).

Ce dispositif de pensée doit nécessairement :

Catégories et ensembles

Cela amène à devoir concilier ensembles et catégories, ce que les mathématiciens ne font pas (le plus souvent).

Ce dispositif de pensée doit nécessairement :

- porter sur des ensembles

Catégories et ensembles

Cela amène à devoir concilier ensembles et catégories, ce que les mathématiciens ne font pas (le plus souvent).

Ce dispositif de pensée doit nécessairement :

- porter sur des ensembles
- déployer une logique provenant des relations « catégoriques » entre faisceaux, c'est-à-dire relever de la « théorie des catégories » des catégories de faisceaux.

Catégories et ensembles

Cela amène à devoir concilier ensembles et catégories, ce que les mathématiciens ne font pas (le plus souvent).

Ce dispositif de pensée doit nécessairement :

- porter sur des ensembles
- déployer une logique provenant des relations « catégoriques » entre faisceaux, c'est-à-dire relever de la « théorie des catégories » des catégories de faisceaux.

Une première conséquence est que l'*on n'a pas le choix* concernant la *définition* d'une catégorie.

Catégories

Une catégorie $\mathcal{C}$ est

- une collection $Ob(\mathcal{C})$ d'ensembles
- la donnée pour tous $x, y \in Ob(\mathcal{C})$ d'un ensemble $\mathrm{Hom}(x, y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ de « flèches » de x vers y
- d'une loi de composition des flèches, et de flèches $\mathrm{Id}_x : x \to x$.

Catégories

Une catégorie $\mathcal{C}$ est

- une collection $Ob(\mathcal{C})$ d'ensembles
- la donnée pour tous $x, y \in Ob(\mathcal{C})$ d'un ensemble $\mathrm{Hom}(x, y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ de « flèches » de x vers y
- d'une loi de composition des flèches, et de flèches $\mathrm{Id}_x : x \to x$.

De plus, les catégories qui apparaissent dans le système de Badiou sont en réalité toujours telles que $Ob(\mathcal{C})$ est un ensemble (« petite catégorie »).

Catégories

Une catégorie $\mathcal{C}$ est

- une collection $Ob(\mathcal{C})$ d'ensembles
- la donnée pour tous $x, y \in Ob(\mathcal{C})$ d'un ensemble $\mathrm{Hom}(x, y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ de « flèches » de x vers y
- d'une loi de composition des flèches, et de flèches $\mathrm{Id}_x : x \to x$.

De plus, les catégories qui apparaissent dans le système de Badiou sont en réalité toujours telles que $Ob(\mathcal{C})$ est un ensemble (« petite catégorie »).

Exemple

La catégorie formée de toutes les parties d'un ensemble donné, avec $\mathrm{Hom}(E, F)$ l'ensemble des applications de E vers F.

Exemple

La catégorie $\mathsf{Sh}^{\mathfrak{M}}(T)$ formée des faisceaux sur T à valeurs dans $\mathfrak{M}$.

Catégories

Comme pour toute structure mathématique ensembliste, on a une relation de morphismes entre catégories, appelés foncteurs :

Catégories

Comme pour toute structure mathématique ensembliste, on a une relation de morphismes entre catégories, appelés foncteurs :

Definition

Un *foncteur* $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ est composé d'une application sur les objets $Ob(\mathcal{C}_1) \to Ob(\mathcal{C}_2)$ et d'une autre sur les flèches $\mathrm{Hom}(x, y) \to \mathrm{Hom}(F(x), F(y))$ compatible avec la composition.

Catégories

Comme pour toute structure mathématique ensembliste, on a une relation de morphismes entre catégories, appelés foncteurs :

Definition

Un *foncteur* $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ est composé d'une application sur les objets $Ob(\mathcal{C}_1) \to Ob(\mathcal{C}_2)$ et d'une autre sur les flèches $\mathrm{Hom}(x, y) \to \mathrm{Hom}(F(x), F(y))$ compatible avec la composition.

et une notion d'isomorphisme disant que deux catégories sont les mêmes à renommage près ('remplacement') de leurs objets.

Definition

Un *isomorphisme* $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ est un foncteur tel qu'existe un foncteur $G : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ tel que $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_2}$, $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_1}$.

LAMFA

Catégories

Comme pour toute structure mathématique ensembliste, on a une relation de morphismes entre catégories, appelés foncteurs :

Definition

Un *foncteur* $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ est composé d'une application sur les objets $Ob(\mathcal{C}_1) \to Ob(\mathcal{C}_2)$ et d'une autre sur les flèches $\mathrm{Hom}(x, y) \to \mathrm{Hom}(F(x), F(y))$ compatible avec la composition.

et une notion d'isomorphisme disant que deux catégories sont les mêmes à renommage près ('remplacement') de leurs objets.

Definition

Un *isomorphisme* $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ est un foncteur tel qu'existe un foncteur $G : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ tel que $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_2}$, $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_1}$.

Il s'agit la notion adéquate au niveau ontologique.

Faisceaux et T-ensembles

Faisceaux et T-ensembles

Dans la littérature mathématique (spécialisée), un « objet » $(A, \mathrm{Id}_A(\bullet, \bullet))$ est une structure de « T-ensemble », structure utile pour décrire les faisceaux sur T par « générateurs et relations ».

Faisceaux et T-ensembles

Dans la littérature mathématique (spécialisée), un « objet » $(A, \mathrm{Id}_A(\bullet,\bullet))$ est une structure de « T-ensemble », structure utile pour décrire les faisceaux sur T par « générateurs et relations ».

Ces structures, pour $A \in \mathfrak{M}$, forment une catégorie $\mathrm{Ens}^{\mathfrak{M}}(T)$, et les T-ensembles classiquement appelés *complets* sont ceux qui satisfont le « postulat du matérialisme » de Badiou.

Faisceaux et T-ensembles

Dans la littérature mathématique (spécialisée), un « objet » $(A, \mathrm{Id}_A(\bullet, \bullet))$ est une structure de « T-ensemble », structure utile pour décrire les faisceaux sur T par « générateurs et relations ».

Ces structures, pour $A \in \mathfrak{M}$, forment une catégorie $\mathrm{Ens}^{\mathfrak{M}}(T)$, et les T-ensembles classiquement appelés *complets* sont ceux qui satisfont le « postulat du matérialisme » de Badiou.Ils forment une sous-catégorie pleine $\mathrm{Ens}_c^{\mathfrak{M}}(T)$.

Faisceaux et T-ensembles

Dans la littérature mathématique (spécialisée), un « objet » $(A, \mathrm{Id}_A(\bullet, \bullet))$ est une structure de « T-ensemble », structure utile pour décrire les faisceaux sur T par « générateurs et relations ».

Ces structures, pour $A \in \mathfrak{M}$, forment une catégorie $\mathsf{Ens}^{\mathfrak{M}}(T)$, et les T-ensembles classiquement appelés *complets* sont ceux qui satisfont le « postulat du matérialisme » de Badiou.Ils forment une sous-catégorie pleine $\mathsf{Ens}_c^{\mathfrak{M}}(T)$.

On a un foncteur naturel $\mathsf{Ens}_c^{\mathfrak{M}}(T) \to \mathsf{Sh}^{\mathfrak{M}}(T)$.

Faisceaux et T-ensembles

(Pour les lecteurs avertis : dans le lexique catégoriel, on voit que le foncteur FA est un faisceau*. La catégorie de ces faisceaux, quand A varie, est, en substance, un topos de Grothendieck)*

Topos, p. 218.

Dans LDM, le chapitre « Scolie aussi impressionnant que subtil. Le foncteur transcendantal » associe à un objet (A, Id_A) le faisceau F_A. Il se conclut ainsi.

... il existe, du transcendantal vers les multiplicités pures dont il règle l'être-là, cette corrélation intelligible qu'est un faisceau. Et donc il y a, si l'on considère le monde en son entier, la catégorie de tous les faisceaux qui vont du transcendantal T vers tous les objets de type (A, Id) qui sont là dans ce monde. [...] Cette structure se nomme « topos de Grothendieck ». Un monde, comme site de l'être-là, est un topos de Grothendieck.

Logique des mondes, p. 312.

Faisceaux et T-ensembles

Dans la littérature mathématique (spécialisée), un « objet » $(A, \mathrm{Id}_A(\bullet, \bullet))$ est une structure de « T-ensemble », structure utile pour décrire les faisceaux sur T par « générateurs et relations ».

Ces structures, pour $A \in \mathfrak{M}$, forment une catégorie $\mathsf{Ens}^{\mathfrak{M}}(T)$, et les T-ensembles classiquement appelés *complets* sont ceux qui satisfont le « postulat du matérialisme » de Badiou. Ils forment une sous-catégorie pleine $\mathsf{Ens}_c(T)$.

On a un foncteur naturel $\mathsf{Ens}_c^{\mathfrak{M}}(T) \to \mathsf{Sh}^{\mathfrak{M}}(T)$, qui envoie $\mathsf{Ens}_c^{\mathfrak{M}}(T)$ vers une sous-catégorie pleine $\mathsf{Sh}_c^{\mathfrak{M}}(T)$ satisfaisant :

LAMFA

Faisceaux et T-ensembles

Dans la littérature mathématique (spécialisée), un « objet » $(A, \mathrm{Id}_A(\bullet, \bullet))$ est une structure de « T-ensemble », structure utile pour décrire les faisceaux sur T par « générateurs et relations ».

Ces structures, pour $A \in \mathfrak{M}$, forment une catégorie $\mathrm{Ens}^{\mathfrak{M}}(T)$, et les T-ensembles classiquement appelés *complets* sont ceux qui satisfont le « postulat du matérialisme » de Badiou. Ils forment une sous-catégorie pleine $\mathrm{Ens}_c(T)$.

On a un foncteur naturel $\mathrm{Ens}_c^{\mathfrak{M}}(T) \to \mathrm{Sh}^{\mathfrak{M}}(T)$, qui envoie $\mathrm{Ens}_c^{\mathfrak{M}}(T)$ vers une sous-catégorie pleine $\mathrm{Sh}_c^{\mathfrak{M}}(T)$ satisfaisant :

$$\forall u, v \in T \;\; (u \neq v) \Rightarrow F(u) \cap F(v) = \emptyset$$

Faisceaux et T-ensembles

Dans la littérature mathématique (spécialisée), un « objet » $(A, \mathrm{Id}_A(\bullet, \bullet))$ est une structure de « T-ensemble », structure utile pour décrire les faisceaux sur T par « générateurs et relations ».

Ces structures, pour $A \in \mathfrak{M}$, forment une catégorie $\mathrm{Ens}^{\mathfrak{M}}(T)$, et les T-ensembles classiquement appelés *complets* sont ceux qui satisfont le « postulat du matérialisme » de Badiou. Ils forment une sous-catégorie pleine $\mathrm{Ens}_c(T)$.

On a un foncteur naturel $\mathrm{Ens}_c^{\mathfrak{M}}(T) \to \mathrm{Sh}^{\mathfrak{M}}(T)$, qui envoie $\mathrm{Ens}_c^{\mathfrak{M}}(T)$ vers une sous-catégorie pleine $\mathrm{Sh}_c^{\mathfrak{M}}(T)$ satisfaisant :

$$\forall u, v \in T \;\; (u \neq v) \Rightarrow F(u) \cap F(v) = \emptyset$$

Proposition

$\mathrm{Ens}_c^{\mathfrak{M}}(T) \to \mathrm{Sh}_c^{\mathfrak{M}}(T)$ *est un isomorphisme de catégories.*

Catégories

Mais la théorie des catégories admet une autre notion, « d'équivalence de catégories », qui permet certaines pensées que ne permet pas le monde ensembliste « naïf ».

Catégories

Mais la théorie des catégories admet une autre notion, « d'équivalence de catégories », qui permet certaines pensées que ne permet pas le monde ensembliste « naïf ».

Definition

Un *foncteur* $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ est une « équivalence de catégories » s'il existe un foncteur $G : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ tel que $F \circ G \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_2}$, $G \circ F \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_1}$. Cela qui signifie que l'on a des $\varphi_x : F(G(x)) \to \mathrm{Id}(x) = x$ et $\psi_x : x \to F(G(x))$ inverses l'un de l'autre, tels que, pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(x, y)$, les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{tikzcd} F(G(x)) \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "F(G(f))"'] & x \arrow[d, "f"] \\ F(G(y)) \arrow[r, "\varphi_y"] & y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(G(x)) \arrow[d, "F(G(f))"'] & x \arrow[l, "\psi_x"'] \arrow[d, "f"] \\ F(G(y)) & y \arrow[l, "\psi_y"'] \end{tikzcd}$$

et symétriquement en échangeant F et G.

Topos

En particulier, Badiou va montrer que sa logique de l'être-là est formée des ≪ relations entre objets ≫, qui ne sont rien d'autre que des morphismes de faisceaux, et donc que ces propriétés ≪ logiques ≫ ne dépendent de la catégorie de faisceaux $\mathtt{Sh}^{\mathfrak{M}}(T)$ qu'à équivalence de catégorie près.

Topos

En particulier, Badiou va montrer que sa logique de l'être-là est formée des « relations entre objets », qui ne sont rien d'autre que des morphismes de faisceaux, et donc que ces propriétés « logiques » ne dépendent de la catégorie de faisceaux $\mathrm{Sh}^{\mathfrak{M}}(T)$ qu'à équivalence de catégorie près.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ens}^{\mathfrak{M}}(T) & \mathrm{Ens}^{\mathfrak{M}}_{c'}(T) \arrow[l, "\sim"'] & \mathrm{Ens}^{\mathfrak{M}}_{c}(T) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "\simeq"] \arrow[dr, "\sim"'] & \mathbf{Sh}^{\mathfrak{M}}_{\mathbf{c}}(\mathbf{T}) \arrow[d] \\
 & & & \mathrm{Sh}^{\mathfrak{M}}(T)
\end{tikzcd}$$

avec $\mathrm{Sh}^{\mathfrak{M}}_{c}(T) \subset \mathrm{Sh}^{\mathfrak{M}}_{c}(T)$ ayant pour ensemble d'objets

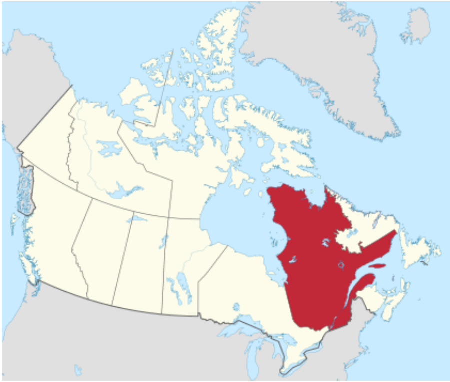
$$\forall u, v \in T \ \ (u \neq v) \Rightarrow F(u) \cap F(v) = \emptyset$$

Topos

En particulier, Badiou va montrer que sa logique de l'être-là est formée des « relations entre objets », qui ne sont rien d'autre que des morphismes de faisceaux, et donc que ces propriétés « logiques » ne dépendent de la catégorie de faisceaux $\mathtt{Sh}^{\mathfrak{M}}(T)$ qu'à équivalence de catégorie près.

La catégorie $\mathtt{Sh}(T)$, considérée à équivalence de catégorie près, est ce que l'on appelle un *topos localique*. Parmi ses propriétés fondamentales, on a l'existence de produits finis et de pull-backs finis, c'est-à-dire de limites finies. Badiou va montrer qu'il est souhaitable que les mondes aient ce type de propriété.

Québec - la « crise d'Oka »



LDM, p. 329. « Il faut par conséquent [...] penser la Relation entre le monde – qui est fait d'objets et de relations entre objets – et les relations. Grossièrement, il y aura complétude logique du monde s'il y a sens à dire que la Relation entre relations est elle-même dans le monde. Le Québec va nous fournir sur ce point une métaphore phénoménologique. Nous avons pris comme exemple de relation la révolte des Indiens mohawks contre l'administration québécoise. »

Québec - la « crise d'Oka »

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{citoyen progressiste} \arrow[dl, "\text{soutien}"'] \arrow[dr, "\text{vitupération}"] & \\
\text{Mohawks} \arrow[rr, "\text{incident d'Oka}"'] & & \text{administration}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{citoyen réactionnaire} \arrow[dl, "\text{vitupération}"'] \arrow[dr, "\text{soutien}"] & \\
\text{Mohawks} \arrow[rr, "\text{incident d'Oka}"'] & & \text{administration}
\end{tikzcd}
$$

LDM, p. 330. « Ainsi, tel Québécois établira avec l'objet « les Mohawks » une relation fraternelle de soutien et vitupérera l'intransigeance des autorités, en même temps qu'il prendra position sur les étapes successives de la révolte. Tel autre pleurera amèrement le policier tué dans les fusillades et surveillera jour après jour la fermeté gouvernementale sur le site. [...] Nous appellerons un tel triangle un diagramme du monde. »

Québec - la « crise d’Oka »

$$\begin{tikzcd}
\text{citoyen progressiste} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{vitupération}"] \arrow[d, "\text{soutien}"] & \text{citoyen réactionnaire} \arrow[d, "\text{soutien}"] \\
\text{Mohawks} \arrow[r, "\text{incident d'Oka}"'] & \text{administration}
\end{tikzcd}$$

LDM, p. 332. « Ce qui est intéressant, c’est que ce diagramme va aussitôt se compléter, par les lois les plus simples du monde. Car le citoyen progressiste va se mettre à vitupérer le réactionnaire, et inversement. Et cette vitupération réciproque sera certainement une relation, de ce que les intensités existentielles – la violence politique subjective – seront conservées, ainsi que toute la logique atomique des deux camps. »

Québec - la « crise d'Oka »

$$
\begin{tikzcd}
\text{citoyen progressiste} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{vitupération}"] \arrow[d, "\text{soutien}"] & \text{citoyen réactionnaire} \arrow[d, "\text{soutien}"] \\
\text{Mohawks} \arrow[r, "\text{incident d'Oka}"'] & \text{administration}
\end{tikzcd}
$$

LDM, p. 333. « Cette situation métaphorique va nous servir à construire le concept de la complétude logique d'un monde. *Etant donné une relation entre deux objets d'un monde, on dit que cette relation est « exposée* s'il existe un objet du monde tel qu'il compose avec les deux objets initiaux un diagramme triangulaire commutatif. Ce diagramme sera appelé une exposition de la situation [...] la relation est « *universellement exposée* »*si, étant donné deux expositions distinctes de la même relation, il existe entre les deux exposants une et une seule relation telle que le diagramme reste commutatif.* »

Monde et topos

A partir de ce type d'exemples, Badiou va démontrer que

Les relations entre objets d'un monde, soit la catégorie $\mathrm{Sh}_c^{\mathfrak{M}}(T)$, doit avoir une structure de topos (élémentaire) :

Monde et topos

A partir de ce type d'exemples, Badiou va démontrer que

Les relations entre objets d'un monde, soit la catégorie $\mathrm{Sh}_c^{\mathfrak{M}}(T)$, doit avoir une structure de topos (élémentaire) :

- existence des limites finies

Monde et topos

A partir de ce type d'exemples, Badiou va démontrer que

Les relations entre objets d'un monde, soit la catégorie $\mathrm{Sh}_c^{\mathfrak{M}}(T)$, doit avoir une structure de topos (élémentaire) :

- existence des limites finies
- existence de classificateurs de sous-objets, et d'opérateurs puissance (« Hom interne »).

Accessibilité

Soit α un cardinal infini. En particulier c'est un ordinal limite.

Accessibilité

Soit α un cardinal infini. En particulier c'est un ordinal limite.

Definition

La *cofinalité* d'un ordinal limite α est

$$\mathsf{cof}(\alpha) = \min\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid \exists f : \beta \to \alpha \text{ non majoree}\}$$

Accessibilité

Soit α un cardinal infini. En particulier c'est un ordinal limite.

Definition

La *cofinalité* d'un ordinal limite α est

$$\mathrm{cof}(\alpha) = \min\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid \exists f : \beta \to \alpha \text{ non majoree}\}$$

α est *régulier* si *cof*$(\alpha) = \alpha$.

Accessibilité

Soit α un cardinal infini. En particulier c'est un ordinal limite.

Definition

La *cofinalité* d'un ordinal limite α est

$$\mathrm{cof}(\alpha) = \min\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid \exists f : \beta \to \alpha \text{ non majoree}\}$$

α est *régulier* si $\mathit{cof}(\alpha) = \alpha$.

Exemple : $\mathrm{cof}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}$.

Accessibilité

Soit α un cardinal infini. En particulier c'est un ordinal limite.

Definition

La *cofinalité* d'un ordinal limite α est

$$\mathrm{cof}(\alpha) = \min\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid \exists f : \beta \to \alpha \text{ non majoree}\}$$

α est *régulier* si *cof*$(\alpha) = \alpha$.

Exemple : $\mathrm{cof}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}$.
Tout $\mathrm{cof}(\alpha)$ est un cardinal, et est régulier : $\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(\alpha)) = \mathrm{cof}(\alpha)$.

LAMFA

Accessibilité

Soit α un cardinal infini. En particulier c'est un ordinal limite.

Definition

La *cofinalité* d'un ordinal limite α est

$$\mathrm{cof}(\alpha) = \min\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid \exists f : \beta \to \alpha \text{ non majoree}\}$$

α est *régulier* si *cof*$(\alpha) = \alpha$.

Exemple : $\mathrm{cof}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}$.
Tout $\mathrm{cof}(\alpha)$ est un cardinal, et est régulier : $\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(\alpha)) = \mathrm{cof}(\alpha)$.

Definition

Un cardinal est *limite* s'il est de la forme $\aleph_\alpha$ avec α un ordinal limite.

Accessibilité

Soit α un cardinal infini. En particulier c'est un ordinal limite.

Definition

La *cofinalité* d'un ordinal limite α est

$$\mathrm{cof}(\alpha) = \min\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid \exists f : \beta \to \alpha \text{ non majoree}\}$$

α est *régulier* si *cof*$(\alpha) = \alpha$.

Exemple : $\mathrm{cof}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}$.
Tout $\mathrm{cof}(\alpha)$ est un cardinal, et est régulier : $\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(\alpha)) = \mathrm{cof}(\alpha)$.

Definition

Un cardinal est *limite* s'il est de la forme $\aleph_\alpha$ avec α un ordinal limite.

Pour un cardinal limite $\aleph_\alpha$, on a $\mathrm{cof}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cof}(\alpha)$.

Accessibilité

Definition

La *cofinalité* d'un ordinal limite α est

$$\mathrm{cof}(\alpha) = \min\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid \exists f : \beta \to \alpha \text{ non majoree}\}$$

α est *régulier* si $cof(\alpha) = \alpha$.

Definition

Un cardinal est *limite* s'il est de la forme $\aleph_\alpha$ avec α un ordinal limite.

Accessibilité

Definition

La *cofinalité* d'un ordinal limite α est

$$\mathrm{cof}(\alpha) = \min\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid \exists f : \beta \to \alpha \text{ non majoree}\}$$

α est *régulier* si $\mathit{cof}(\alpha) = \alpha$.

Definition

Un cardinal est *limite* s'il est de la forme $\aleph_\alpha$ avec α un ordinal limite.

faiblement inaccessible $\Leftrightarrow$ régulier+limite

Definition

La *cofinalité* d'un ordinal limite α est

$$\mathit{cof}(\alpha) = \min\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid \exists f : \beta \to \alpha \text{ non majoree}\}$$

α est *régulier* si $\mathit{cof}(\alpha) = \alpha$.

Definition

Un cardinal est *limite* s'il est de la forme $\aleph_\alpha$ avec α un ordinal limite.

faiblement inaccessible	$\Leftrightarrow$	régulier+limite
fortement inaccessible	$\Leftrightarrow$	régulier+$(*)$

pour

$$(*) \qquad \beta < \alpha \Rightarrow 2^\beta < \alpha$$

Accessibilité

Definition

La *cofinalité* d'un ordinal limite α est

$$\mathsf{cof}(\alpha) = \min\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid \exists f : \beta \to \alpha \text{ non majoree}\}$$

α est *régulier* si $\mathit{cof}(\alpha) = \alpha$.

Definition

Un cardinal est *limite* s'il est de la forme $\aleph_\alpha$ avec α un ordinal limite.

$$\begin{array}{lcl} \text{faiblement inaccessible} & \Leftrightarrow & \text{régulier+limite} \\ \text{fortement inaccessible} & \Leftrightarrow & \text{régulier+}(*) \end{array}$$

pour

$$(*) \qquad \beta < \alpha \Rightarrow 2^\beta < \alpha$$

Si $\aleph_\alpha$ est faiblement inaccessible, on a donc $\aleph_\alpha = \mathsf{cof}(\aleph_\alpha) = \alpha$.

Accessibilité

Definition

La *cofinalité* d'un ordinal limite α est

$$\mathrm{cof}(\alpha) = \min\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid \exists f : \beta \to \alpha \text{ non majoree}\}$$

α est *régulier* si $cof(\alpha) = \alpha$.

Definition

Un cardinal est *limite* s'il est de la forme $\aleph_\alpha$ avec α un ordinal limite.

faiblement inaccessible	$\Leftrightarrow$	régulier+limite
fortement inaccessible	$\Leftrightarrow$	régulier+$(*)$

pour

$$(*) \qquad \beta < \alpha \Rightarrow 2^\beta < \alpha$$

Si $\aleph_\alpha$ est faiblement inaccessible, on a donc $\aleph_\alpha = \mathrm{cof}(\aleph_\alpha) = \alpha$.
Le cardinal de $V_{\omega+\omega}$ satisfait $(*)$ sans être régulier.

ZFC et cardinaux inaccessibles

L'existence d'un cardinal (fortement) inaccessible n'est pas démontrable dans ZFC, car sinon on pourrait construire un modèle interne à ZFC, ce qui prouverait sa non-contradiction, et contredirait le théorème de Gödel.

ZFC et cardinaux inaccessibles

L'existence d'un cardinal (fortement) inaccessible n'est pas démontrable dans ZFC, car sinon on pourrait construire un modèle interne à ZFC, ce qui prouverait sa non-contradiction, et contredirait le théorème de Gödel.

C'est le premier étage de la théorie des « grands cardinaux », série de nouveaux axiomes d'infini.

ZFC et cardinaux inaccessibles

L'existence d'un cardinal (fortement) inaccessible n'est pas démontrable dans ZFC, car sinon on pourrait construire un modèle interne à ZFC, ce qui prouverait sa non-contradiction, et contredirait le théorème de Gödel.

C'est le premier étage de la théorie des « grands cardinaux », série de nouveaux axiomes d'infini.

Un univers de Grothendieck est bati sur la même idée : former les catégories sur un ensemble d'objets dans lequel on peut faire tout ce que permet ZFC.

ZFC et cardinaux inaccessibles

L'existence d'un cardinal (fortement) inaccessible n'est pas démontrable dans ZFC, car sinon on pourrait construire un modèle interne à ZFC, ce qui prouverait sa non-contradiction, et contredirait le théorème de Gödel.

C'est le premier étage de la théorie des « grands cardinaux », série de nouveaux axiomes d'infini.

Un univers de Grothendieck est bati sur la même idée : former les catégories sur un ensemble d'objets dans lequel on peut faire tout ce que permet ZFC.

Donc : ($\exists$ univers de Grothendieck) $\Leftrightarrow$ ($\exists$ cardinal inaccessible)

ZFC et cardinaux inaccessibles

L'existence d'un cardinal (fortement) inaccessible n'est pas démontrable dans ZFC, car sinon on pourrait construire un modèle interne à ZFC, ce qui prouverait sa non-contradiction, et contredirait le théorème de Gödel.

C'est le premier étage de la théorie des « grands cardinaux », série de nouveaux axiomes d'infini.

Un univers de Grothendieck est bati sur la même idée : former les catégories sur un ensemble d'objets dans lequel on peut faire tout ce que permet ZFC.

Donc : ($\exists$ univers de Grothendieck) $\Leftrightarrow$ ($\exists$ cardinal inaccessible)
Argumentaire de Badiou :

1. des mondes existent
2. ils doivent former des univers de Grothendieck
3. il est justifié philosophiquement d'ajouter des axiomes de grands cardinaux.

ZFC et cardinaux inaccessibles

L'existence d'un cardinal (fortement) inaccessible n'est pas démontrable dans ZFC, car sinon on pourrait construire un modèle interne à ZFC, ce qui prouverait sa non-contradiction, et contredirait le théorème de Gödel.

C'est le premier étage de la théorie des « grands cardinaux », série de nouveaux axiomes d'infini.

Un univers de Grothendieck est bati sur la même idée : former les catégories sur un ensemble d'objets dans lequel on peut faire tout ce que permet ZFC.

Donc : ($\exists$ univers de Grothendieck) $\Leftrightarrow$ ($\exists$ cardinal inaccessible)
Argumentaire de Badiou :

1. des mondes existent
2. ils doivent former des univers de Grothendieck ?
3. il est justifié philosophiquement d'ajouter des axiomes de grands cardinaux.

Univers de Grothendieck et univers de Badiou

En réalité, Badiou justifie philosophiquement que ses ≪ mondes ≫ doivent vérifier les propriétés suivantes :

Univers de Grothendieck et univers de Badiou

En réalité, Badiou justifie philosophiquement que ses « mondes » doivent vérifier les propriétés suivantes :

Univers de Badiou

1. $\mathfrak{M}$ est transitif : $x \in y, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow x \in \mathfrak{M}$.
2. $x, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow \{x, y\} \in \mathfrak{M}$
3. $x \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in \mathfrak{M}$
4. $x \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mathrm{U}x \in \mathfrak{M}$

(Badiou n'indique pas (2), mais l'utilise.)

LAMFA

En réalité, Badiou justifie philosophiquement que ses « mondes » doivent vérifier les propriétés suivantes :

Univers de Badiou

1. $\mathfrak{M}$ est transitif : $x \in y, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow x \in \mathfrak{M}$.
2. $x, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow \{x, y\} \in \mathfrak{M}$
3. $x \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in \mathfrak{M}$
4. $x \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mathrm{U}x \in \mathfrak{M}$

(Badiou n'indique pas (2), mais l'utilise.)

Univers de Grothendieck

1. $\mathfrak{M}$ est transitif : $x \in y, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow x \in \mathfrak{M}$.
2. $x, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow \{x, y\} \in \mathfrak{M}$
3. $x \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in \mathfrak{M}$
4. Si $I \in \mathfrak{M}$ et $\forall i \in I\ x_i \in \mathfrak{M}$, alors $\bigcup_{i \in I} x_i \in \mathfrak{M}$.

Univers de Grothendieck

1. $\mathfrak{M}$ est transitif : $x \in y, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow x \in \mathfrak{M}$.
2. $x, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow \{x, y\} \in \mathfrak{M}$
3. $x \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in \mathfrak{M}$
4. Si $I \in \mathfrak{M}$ et $\forall i \in I\ x_i \in \mathfrak{M}$, alors $\bigcup_{i \in I} x_i \in \mathfrak{M}$.

$$\bigcup_{i \in I} x_i = \mathrm{U}\{x_i ; i \in I\}$$

Univers de Grothendieck

1. $\mathfrak{M}$ est transitif : $x \in y, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow x \in \mathfrak{M}$.
2. $x, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow \{x, y\} \in \mathfrak{M}$
3. $x \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in \mathfrak{M}$
4. Si $I \in \mathfrak{M}$ et $\forall i \in I\ x_i \in \mathfrak{M}$, alors $\bigcup_{i \in I} x_i \in \mathfrak{M}$.

$$\bigcup_{i \in I} x_i = \mathrm{U}\{x_i; i \in I\}$$

Or $\{x_i; i \in I\} \subset \mathfrak{M}$, mais on n'a pas en général $\{x_i; i \in I\} \in \mathfrak{M}$.

Univers de Grothendieck

1. $\mathfrak{M}$ est transitif : $x \in y, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow x \in \mathfrak{M}$.
2. $x, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow \{x, y\} \in \mathfrak{M}$
3. $x \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in \mathfrak{M}$
4. Si $I \in \mathfrak{M}$ et $\forall i \in I\ x_i \in \mathfrak{M}$, alors $\bigcup_{i \in I} x_i \in \mathfrak{M}$.

$$\bigcup_{i \in I} x_i = \mathrm{U}\{x_i; i \in I\}$$

Or $\{x_i; i \in I\} \subset \mathfrak{M}$, mais on n'a pas en général $\{x_i; i \in I\} \in \mathfrak{M}$.

Univers de Grothendieck et univers de Badiou

Un univers de Badiou qui n'est pas de Grothendieck est justement $V_{\omega+\omega}$.

$$V_{\omega+\omega} = V_\omega \cup \mathcal{P}(V_\omega) \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}(V_\omega)) \cup \cdots = \bigcup_{i \in \omega} V_{\omega+i}$$

Un univers de Badiou qui n'est pas de Grothendieck est justement $V_{\omega+\omega}$.

$$V_{\omega+\omega} = V_\omega \cup \mathcal{P}(V_\omega) \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}(V_\omega)) \cup \cdots = \bigcup_{i \in \omega} V_{\omega+i}$$

Lettre de Fraenkel à Zermelo, le 6 mai 1921 :

≪ Es sei Z_0 eine unendliche Menge ... und $\mathfrak{U}(Z_0) = Z_1$,$\mathfrak{U}(Z_1) = Z_2$, usw. Wie folgt dann aus Ihrer Theorie (Grundl. d. M. I), daß $\{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\}$ eine Menge ist, daß also die Vereinigungsmenge existiert ? Würde Ihrer Theorie zu einem solchen Beweis nicht genügen, so wäre offenbar z.B. die Existenz von Mengen von der Kardinalzahl $\aleph_\omega$ nicht beweisbar. ≫

Univers de Badiou et topos

Pour s'assurer que l'on n'a pas besoin de cardinaux inaccessibles pour les opérations onto-logiques de Badiou, il faut donc démontrer :

Proposition

$\mathrm{Sh}_c^{\mathfrak{M}}(T)$ *est un topos (élémentaire).*

Univers de Badiou et topos

Pour s'assurer que l'on n'a pas besoin de cardinaux inaccessibles pour les opérations onto-logiques de Badiou, il faut donc démontrer :

Proposition

$\mathrm{Sh}_c^{\mathfrak{M}}(T)$ *est un topos (élémentaire).*

Donc :

Univers de Badiou et topos

Pour s'assurer que l'on n'a pas besoin de cardinaux inaccessibles pour les opérations onto-logiques de Badiou, il faut donc démontrer :

Proposition

$\mathrm{Sh}_c^{\mathfrak{M}}(T)$ *est un topos (élémentaire).*

Donc :

+ la description onto-logique de Badiou peut se faire dans ZFC

Univers de Badiou et topos

Pour s'assurer que l'on n'a pas besoin de cardinaux inaccessibles pour les opérations onto-logiques de Badiou, il faut donc démontrer :

Proposition

$\mathrm{Sh}_c^{\mathfrak{M}}(T)$ *est un topos (élémentaire).*

Donc :

+ la description onto-logique de Badiou peut se faire dans ZFC
- elle ne justifie pas d'axiomes de grands infinis.