

Variations sur le Groupe de Galois cosmique

Alain Connes

ENS

Février 2025



Ma notion de "groupe de Galois cosmique" est née de mes réflexions sur la physique mathématique. J'ai été particulièrement inspiré par les travaux de [CK], qui ont redéfini le processus de renormalisation, une technique d'élimination des infinis dans les intégrales divergentes liées aux diagrammes de Feynman.

Ils ont introduit une nouvelle structure de groupe pour décrire les relations complexes de ces calculs.

Parallèlement, mes recherches mathématiques se sont concentrées sur les séries et les intégrales impliquant des nombres spéciaux, comme les puissances de π et les valeurs de la fonction zêta de Riemann. Ces relations sont régies par un groupe de symétrie qui ressemble au groupe de Galois motivique de Grothendieck.

J'ai commencé à voir une analogie frappante entre ce groupe et le groupe de Connes-Kreimer, suggérant qu'il pourrait s'agir de deux variantes d'un même groupe, influençant à la fois les aspects mathématiques et physiques du problème.

Le groupe de Galois motivique traite des automorphismes de certains nombres transcendants, qui sont similaires aux constantes apparaissant dans les calculs des diagrammes de Feynman.

Cette observation m'a conduit à interpréter le groupe de [CK] comme un groupe de symétrie régissant les constantes fondamentales de la physique. Dans le modèle standard, ces constantes sont souvent ajustées empiriquement, sans grande explication mathématique.

Je pense que ce groupe pourrait exprimer de nouvelles symétries parmi ces constantes, ce qui pourrait avoir des implications significatives pour la cosmologie. Mon rêve ultime est d'unir les idées de [CK] avec le groupe de Galois motivique, même si, pour l'instant, il s'agit d'un programme de recherche en cours.

1) Groupe de Galois cosmique

Renormalisation et ambiguïté galoisienne.

2) Corps de constantes en physique

Anneaux de Fontaine à la place
archimédienne.

Théorie des champs perturbative

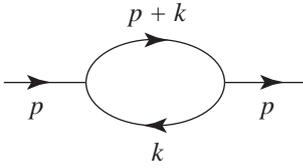
L'Amplitude de probabilité d'une configuration classique A est donnée par la formule de Dirac et Feynman

$$e^{i \frac{S(A)}{\hbar}}, \quad S(A) = \int \mathcal{L}(A) d^4x$$

On passe en Euclidien

$$Z(J_E) = \mathcal{N} \int \exp\left(-\frac{S(\phi_E) - \langle J_E, \phi_E \rangle}{\hbar}\right) \mathcal{D}[\phi_E]$$

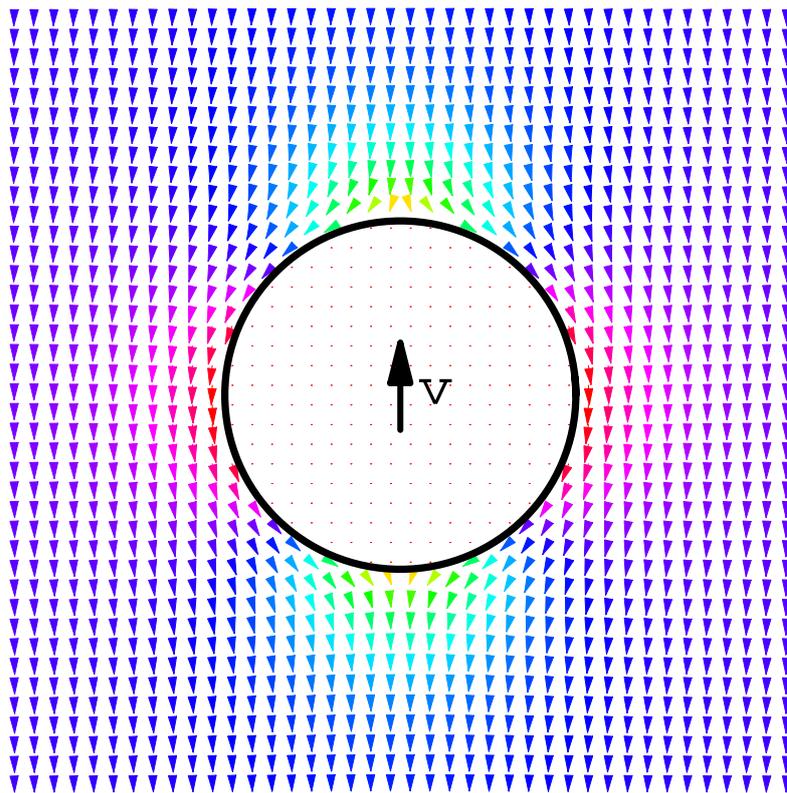
Développement perturbatif donne des **intégrales divergentes** indexées par des graphes de Feynman Γ



The diagram shows a bubble loop with two external lines. The left external line has momentum p pointing right. The right external line has momentum p pointing right. The top arc of the bubble has momentum $p+k$ pointing right. The bottom arc has momentum k pointing left. To the right of the diagram is an equals sign.

$$\int \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{((p+k)^2 + m^2)} d^D k$$

Renormalisation



Green 1830

$$F = m a$$

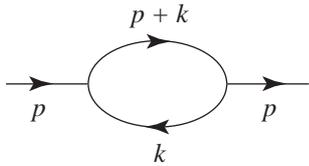
$$m \rightarrow m + \frac{1}{2}M$$

Dim-Reg

La formule de base

$$\int e^{-\lambda q^2} d^D q = \pi^{D/2} \lambda^{-D/2}$$

Exemple :



$$\rightarrow \int \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{((p+k)^2 + m^2)} d^D k.$$

$$\frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{(p+k)^2 + m^2} =$$

$$\int_{s>0, t>0} e^{-s(k^2+m^2)-t((p+k)^2+m^2)} ds dt.$$

Dim-Reg, exemple

On diagonalise la forme quadratique $-Q(k)$ en exposant, avec $s = (1 - x)\lambda$, $t = x\lambda$,

$$-Q(k) = -\lambda ((k + xp)^2 + ((x - x^2)p^2 + m^2)),$$

On obtient en posant $q = k + xp$,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^\infty e^{-(\lambda(x-x^2)p^2 + \lambda m^2)} \int e^{-\lambda q^2} d^D q \lambda d\lambda dx \\ &= \pi^{D/2} \int_0^1 \int_0^\infty e^{-(\lambda(x-x^2)p^2 + \lambda m^2)} \lambda^{-D/2} \lambda d\lambda dx \\ &= \pi^{D/2} \Gamma(2-D/2) \int_0^1 ((x-x^2)p^2 + m^2)^{D/2-2} dx. \end{aligned}$$

Soustraction–Minimale (MS)

Préparation

On prépare d'abord un graphe Γ , en remplaçant la valeur non-renormalisée $U(\Gamma)$ par

$$\bar{R}(\Gamma) = U(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma)U(\Gamma/\gamma)$$

Contre-termes

$$C(\Gamma) = -T(\bar{R}(\Gamma)) = \\ -T \left(U(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma)U(\Gamma/\gamma) \right)$$

Valeur renormalisée

$$R(\Gamma) = \bar{R}(\Gamma) + C(\Gamma) = \\ U(\Gamma) + C(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma)U(\Gamma/\gamma)$$

Algèbre de Hopf des graphes

(Dirk Kreimer \rightarrow arbres, ac + dk \rightarrow graphes)

Comme algèbre, \mathcal{H} est l'algèbre commutative libre engendrée par les graphes **1PI**.

Le **coproduit**

$$\Delta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$$

est spécifié sur les graphes **1PI** par

$$\Delta \Gamma = \Gamma \otimes 1 + 1 \otimes \Gamma + \sum_{\gamma \subset \Gamma} \gamma(i) \otimes \Gamma / \gamma(i)$$

Ici γ est un sous-ensemble non-trivial $\gamma \subset \tilde{\Gamma}$.

Coproduct

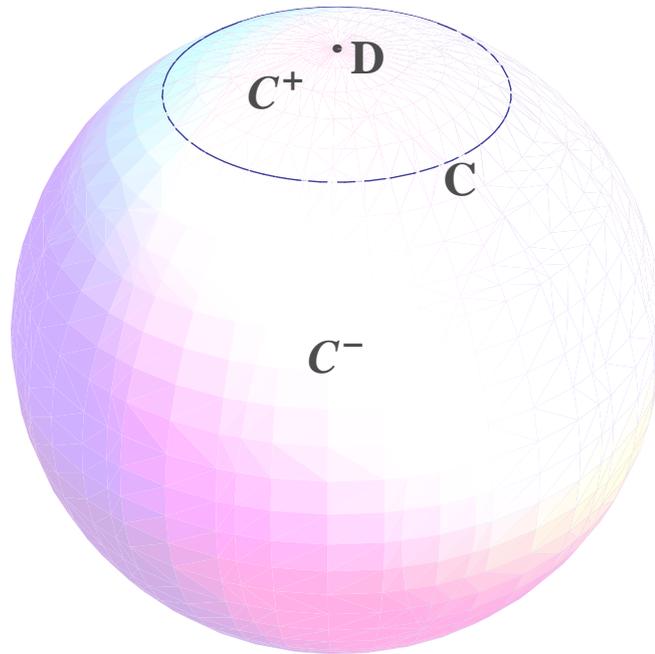
$$\Delta(-\bigcirc-) = -\bigcirc- \otimes 1 + 1 \otimes -\bigcirc-$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(-\bigoplus-) = -\bigoplus- \otimes 1 + 1 \otimes -\bigoplus- + \\ 2 \text{---}\triangleleft \otimes -\bigcirc- \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(-\diamond-) = -\diamond- \otimes 1 + 1 \otimes -\diamond- \\ + 2 \text{---}\triangleleft \otimes -\bigcirc- + 2 \text{---}\triangleleft \otimes -\bigoplus- \\ + \text{---}\triangleleft \text{---}\triangleleft \otimes -\bigcirc- \end{array} \right.$$

Fibrés sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

$$\gamma(z) = \gamma_-(z)^{-1} \gamma_+(z) \quad z \in \mathbb{C}$$



Décomposition de Birkhoff

Théorème (ac+dk)

Soit $\phi : \mathcal{H} \rightarrow K = \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$ un homomorphisme d'algèbre. La décomposition de Birkhoff du lacet correspondant est donnée par récurrence par

$$\phi_{-}(X) = -T \left(\phi(X) + \sum \phi_{-}(X')\phi(X'') \right)$$

et

$$\phi_{+}(X) = \phi(X) + \phi_{-}(X) + \sum \phi_{-}(X')\phi(X'').$$

Cela coïncide avec le procédé récursif de MS !

$$\phi = U, \phi_{-} = C, \text{ et } \phi_{+} = R$$

⇒ compréhension conceptuelle du procédé récursif des physiciens

1. Il existe une unique application méromorphe $\gamma(z) \in G = \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$, pour $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, de coordonnées $U(\Gamma)_{d=D-z}$.
2. La valeur renormalisée d'une observable est obtenue (pour Dim-Reg + MS) en remplaçant $\gamma(0)$ par $\gamma_+(0)$, où

$$\gamma(z) = \gamma_-(z)^{-1} \gamma_+(z)$$

est la décomposition de Birkhoff du lacet $\gamma(z)$ autour d'un cercle infinitésimal centré en $z = 0$.

Action sur les constantes de couplage

$$G \xrightarrow{\rho} \text{Diff}_{\mathbb{C}}$$

$$\left(g + \sum_{\text{---}\circ} g^{2\ell+1} \frac{\Gamma}{S(\Gamma)} \right) \left(1 - \sum_{\text{---}\circ} g^{2\ell} \frac{\Gamma}{S(\Gamma)} \right)^{-3/2}$$

Corollaire

Considérons la constante de couplage effective nonrenormalisée $g_{\text{eff}}(\varepsilon)$ comme une série formelle en g et soit

$$g_{\text{eff}}(\varepsilon) = g_{\text{eff}_+}(\varepsilon) (g_{\text{eff}_-}(\varepsilon))^{-1}$$

sa décomposition de Birkhoff (opposée) dans le groupe des difféomorphismes formels. Alors le lacet $g_{\text{eff}_-}(\varepsilon)$ est la constante de couplage nue et $g_{\text{eff}_+}(0)$ la constante de couplage renormalisée.

Groupe de renormalisation

L'analyse dimensionnelle introduit un paramètre de masse,

$$d^{D-z}k \mapsto \mu^z d^{D-z}k$$

La graduation par le nombre de boucles donne les automorphismes θ_t ,

$$\gamma_{e^t\mu}(z) = \theta_{tz}(\gamma_\mu(z)) \quad \forall t \in \mathbb{R}, z = D - d$$

Le γ_{μ^-} de la décomposition de Birkhoff

$$\gamma_\mu(z) = \gamma_{\mu^-}(z)^{-1} \gamma_{\mu^+}(z)$$

est **indépendant** de μ , $\frac{\partial}{\partial \mu} \gamma_{\mu^-}(z) = 0$. La limite

$$F_t = \lim_{z \rightarrow 0} \gamma_-(z) \theta_{tz}(\gamma_-(z)^{-1})$$

définit un sous-groupe à un paramètre de $G(\mathbb{C})$.

$$\gamma_{e^t\mu^+}(0) = F_t \gamma_{\mu^+}(0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\gamma_-(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t\left(\frac{\beta}{z} + Z_0\right)} e^{tZ_0}$$

Connexions plates équisingulières

(ac + M. Marcolli)

Une connexion plate ω définie sur $B^* = B \setminus V$, $B = \Delta \times \mathbb{G}_m$, $V = \{0\} \times \mathbb{G}_m$, est *équisingulière* si elle est invariante par \mathbb{G}_m et si la classe d'équivalence de sa restriction à une section $\sigma : \Delta \rightarrow B$ ne dépend que de $\sigma(0)$.

Théorème

La catégorie des fibrés plats équisinguliers est équivalente à la catégorie des représentations de dimension finie d'un groupe algébrique affine U^* . Ce groupe est le produit semi-direct par \mathbb{G}_m (agissant par la graduation) du groupe pro-unipotent U dont l'algèbre de Lie

$$\text{Lie}(U) = \mathcal{F}(1, 2, 3, \dots).$$

est librement engendrée par un générateur e_{-n} de degré n pour tout entier $n \geq 1$.

**Groupe de Galois
Cosmique**



Groupe $\text{Hom}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$



**Difféomorphismes des
Constantes de couplage**

Motifs de Tate mixtes

- Motifs purs, catégorie Tannakienne \mathcal{M}_K (K corps de nombres). Sous-catégorie engendrée par les $\mathbb{Q}(m) = \mathbb{Q}(1)^m$, $m \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}(1) = \mathbb{L}^{-1}$, a pour groupe de Galois \mathbb{G}_m .
- Motifs mixtes, catégorie triangulée \mathcal{DM}_K , sous-catégorie $\mathcal{DM}\mathcal{T}_K$ engendrée par les $\mathbb{Q}(m)$ permet de définir une catégorie abélienne Tannakienne \mathcal{MT}_K des motifs de Tate mixtes.
- Le groupe de Galois de cette catégorie Tannakienne est de la forme $U \rtimes \mathbb{G}_m$ où le \mathbb{G}_m vient des motifs purs et le groupe unipotent U reflète les extensions non-triviales.

RENORMALISATION

```
graph LR; A[RENORMALISATION] --> B[Périodes et motifs]; A --> C[Systèmes dynamiques];
```

Périodes et motifs

Systèmes dynamiques

Grothendieck, dessins d'enfants

- C peut être définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$
- C est la compactification d'un revêtement fini non-ramifié de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dont on a enlevé les trois points $\{0, 1, \infty\}$.
- C est isomorphe à la compactification du quotient du demi-plan de Poincaré par un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$.
- En tant que variété conforme C est obtenue en recollant entre eux un nombre fini de triangles équilatères (dotés de la structure conforme Euclidienne).

Schéma $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

$$1 \rightarrow \pi_1^{\text{etale}}(X_{\bar{\mathbb{Q}}}) \rightarrow \pi_1^{\text{etale}}(X_{\mathbb{Q}}) \rightarrow \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow 1$$

Théorème (Francis Brown)

Soit $G_{\mathcal{MT}}$ le groupe de Galois motivique de la catégorie $\mathcal{MT}(\mathbb{Z})$ des motifs de Tate mixtes non ramifiés sur \mathbb{Z} . Soit $\mathcal{MT}'(\mathbb{Z})$ la sous-catégorie pleine engendrée par le groupe fondamental motivique de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. L'application

$$G_{\mathcal{MT}} \rightarrow G_{\mathcal{MT}'}$$

est un isomorphisme.

Les périodes de $\mathcal{MT}(\mathbb{Z})$ sont les valeurs zêta multiples.

“Constantes” en physique

Les calculs des physiciens regorgent d'exemples de “constantes” telles les constantes de couplage g des interactions (électromagnétiques, faibles et fortes) qui n'ont de “constantes” que le nom. Elles dépendent, en réalité, du niveau d'énergie μ auquel les expériences sont réalisées et sont des fonctions $g(\mu)$, de sorte que les physiciens des hautes énergies étendent implicitement le “corps des constantes” avec lequel ils travaillent, passant du corps \mathbb{C} des scalaires à des fonctions $g(\mu)$. Le groupe d'automorphismes engendré par $\mu\partial/\partial\mu$ est le groupe d'ambiguïté de la théorie physique.

Pour obtenir le bon cadre mathématique, il faut “transposer” les constructions des anneaux de Fontaine de la théorie de Hodge p -adique à la place archimédienne

Anneaux de périodes (Fontaine)

On part du corps \mathbb{C}_p complétion d'une clôture algébrique de \mathbb{Q}_p ,

- Perfection universelle $F(\mathbb{C}_p)$.
- Anneaux de Witt $\mathbb{W}(\mathcal{O}_F) \subset \mathbb{W}(F)$.
- Anneau B^+ de fonctions analytiques rigides, complétion de $\mathbb{W}(\mathcal{O}_F)[\frac{1}{p}]$.
- Courbe X quotient du spectre de $B = B^+[\frac{1}{[a]}]$ par l'action du Frobenius (Fontaine + Fargues).

Perfection

La construction suivante donne un corps $F = F(\mathbb{C}_p)$ de caractéristique p ,

$$F = \{x = (x^{(n)})_{n \geq 0} \mid x^{(n)} \in \mathbb{C}_p, (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}\}$$

avec les opérations ($x, y \in F$)

Addition

$$(x + y)^{(n)} = \lim_{m \rightarrow \infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}$$

Produit

$$(xy)^{(n)} = x^{(n)} y^{(n)}$$

Place archimédienne

Remplaçons \mathbb{C}_p par \mathbb{R} et soit $\kappa \in \mathbb{Q}_+$, impair ($|\kappa|_2 = 1$) avec $|\kappa|_\infty < 1$, considérons

$$F = \{x = (x^{(n)})_{n \geq 0} \mid x^{(n)} \in \mathbb{R}, (x^{(n+1)})^\kappa = x^{(n)}\}$$

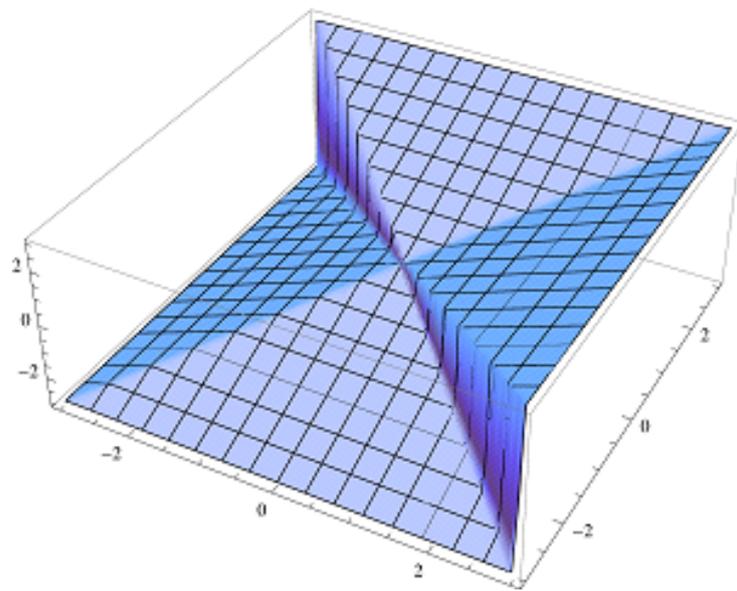
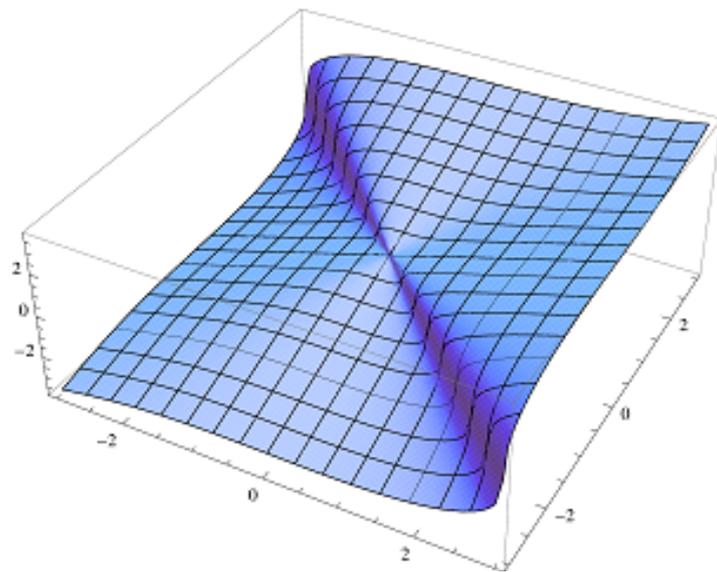
avec les opérations ($x, y \in F$)

Addition

$$(x + y)^{(n)} = \lim_{m \rightarrow \infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{\kappa^m}$$

Produit

$$(xy)^{(n)} = x^{(n)} y^{(n)}$$



Hypercorps \mathcal{TR} (Viro)

La limite des lois de corps définit un hypercorps au sens de Krasner.

(i) L'égalité $\theta_\lambda(x) = \text{sign}(x)|x|^\lambda$ définit un groupe d'automorphismes $\theta_\lambda \in \text{Aut}(\mathcal{TR})$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et $\theta_\lambda(x) = x^\lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$ impair.

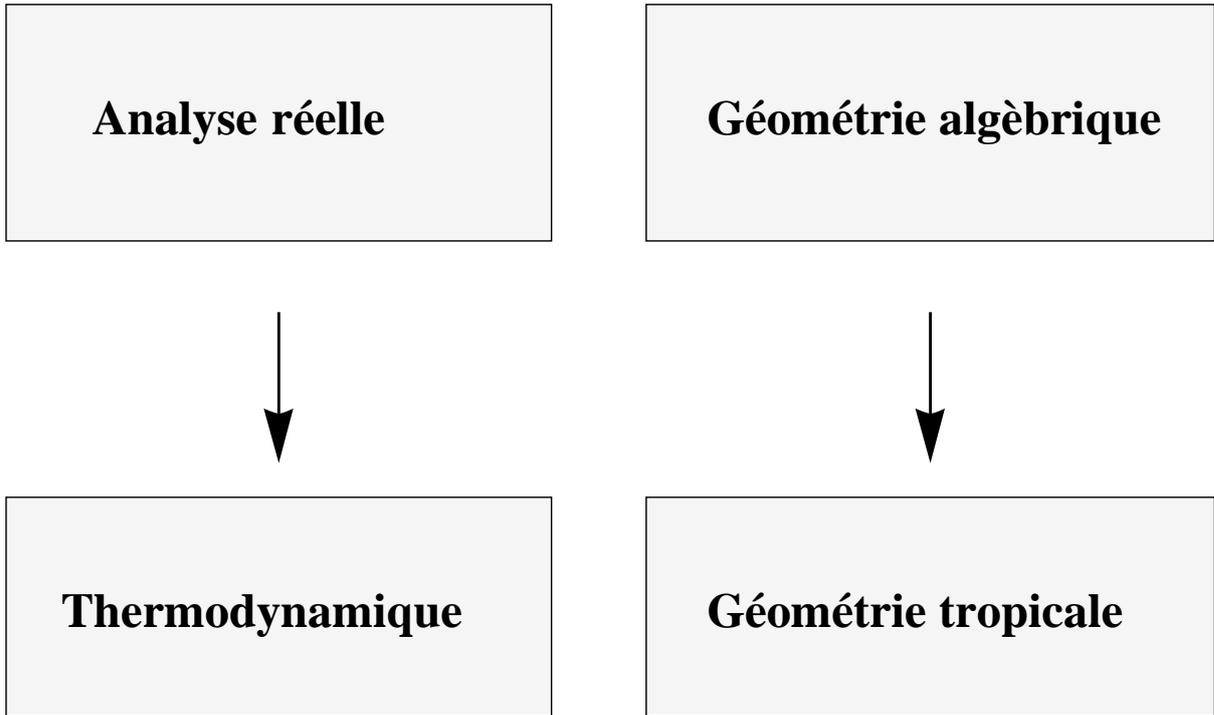
(ii) La partie positive \mathcal{TR}^+ de \mathcal{TR} est le semi-corps \mathbb{R}_+^{\max} (de la géométrie tropicale).

(iii) Le compact $[-1, 1] \subset \mathcal{TR}$ est le sous-anneau compact maximal $\mathcal{O}_{\mathcal{TR}}$ de \mathcal{TR} .

Cela me rappelle que reprendre aujourd'hui l'héritage de Galois, c'est sûrement aussi accepter le risque de la solitude qui a été sienne en son temps. Peut-être les temps changent-ils moins que nous ne le pensons, souvent ! Ce "risque" pourtant ne prend pas pour moi figure de menace. S'il m'arrive d'être peiné et frustré par l'affectation d'indifférence ou de dédain de ceux que j'ai aimés, jamais par contre depuis de longues années la solitude, mathématique ou autre, ne m'a-t-elle pesé. S'il est une amie fidèle que sans cesse j'aspire à retrouver quand je viens à la quitter, c'est elle !

A. Grothendieck

Dequantization (Maslov, Litvinov)



La transformation de Fourier devient la transformation de Legendre, la convolution de deux fonctions est

$$f \star g(z) = \sup_{x+y=z} f(x)g(y)$$

Caractéristique 1

Un semi-anneau A est un monoïde pour l'addition et la multiplication, avec éléments unité 0 et 1, et la multiplication est distributive par rapport à l'addition. Il est de *caractéristique 1* quand

$$x + x = x, \quad \forall x \in A$$

Un semi-anneau A est *simplifiable* si la multiplication par tout $x \neq 0$ est injective. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, l'application $\vartheta_n(x) = x^n$ est alors un endomorphisme injectif de A . Nous dirons que A est *parfait* quand ϑ_n est surjectif pour tout n . On a alors $\vartheta_\alpha \in \text{Aut}(A)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}_+$.

Coefficients $w(\alpha)$

Pour obtenir l'analogie de la construction de l'anneau de Witt dans le cadre des semi-anneaux parfaits de caractéristique 1, on recherche les fonctions $w(\alpha) \in A$ définies pour $\alpha \in I = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ qui rendent associative et commutative l'opération

$$x +' y = \sum_{\alpha \in I} w(\alpha) x^\alpha y^{1-\alpha}$$

Outre la condition de symétrie $w(1-\alpha) = w(\alpha)$ on obtient l'équation fonctionnelle

$$w(\alpha)w(\beta)^\alpha = w(\alpha\beta)w(\gamma)^{(1-\alpha\beta)}, \quad \gamma = \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}.$$

Solution générale

$$I = \mathbb{Q} \cap [0, 1], \quad w : I \rightarrow G, \quad w(1 - \alpha) = w(\alpha),$$

$$w(\alpha)w(\beta)^\alpha = w(\alpha\beta)w(\gamma)^{(1-\alpha\beta)}, \quad \gamma = \frac{\alpha(1 - \beta)}{1 - \alpha\beta}.$$

La solution générale de cette équation à valeurs dans G groupe abélien uniquement divisible, est donnée par

$$w(\alpha) = \chi(\alpha)^\alpha \chi(1 - \alpha)^{1-\alpha}, \quad \forall \alpha \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$$

où $\chi : \mathbb{Q}_+^\times \rightarrow G$ est un homomorphisme de groupes.

(Relation au $1\frac{1}{2}$ -logarithme de Kontsevich).

Solution positive, Entropie

Soit G un groupe abélien ordonné uniquement divisible et tel que l'action $x \mapsto x^\alpha$ de \mathbb{Q}^\times sur G par divisibilité se prolonge en une action de \mathbb{R}^\times . Soit $w : I \rightarrow G$ une solution telle que

$$w(\alpha) \geq 1, \quad \forall \alpha \in I$$

Il existe alors $\rho \in G, \rho \geq 1$ tel que

$$w(\alpha) = \rho^{-\alpha \log \alpha - (1-\alpha) \log(1-\alpha)}, \quad \forall \alpha \in I$$

$$S(\alpha) = -\alpha \log \alpha - (1 - \alpha) \log(1 - \alpha)$$

Witt archimédien

La multiplication ne change pas

$$(fg)(T) = f(T)g(T)$$

L'addition est donnée par

$$(f_1 +_w f_2)(T) = \sum_I w(\alpha, T) f_1(T)^\alpha f_2(T)^{1-\alpha}$$

L'égalité

$$\log(e^a + e^b) = \sup_{\alpha \in [0,1]} S(\alpha) + \alpha a + (1 - \alpha)b$$

montre que

$$(f_1 +_w f_2)(T) = (f_1(T)^{1/T} + f_2(T)^{1/T})^T$$

L'exemple prototype de somme pour \dagger_w est donné par les intégrales fonctionnelles

$$Z(J_E) = \mathcal{N} \int \exp\left(-\frac{S(\phi_E) - \langle J_E, \phi_E \rangle}{\hbar}\right) \mathcal{D}[\phi_E]$$

où $S(\phi_E)$ est l'action Euclidienne, ϕ_E le champ classique, J_E la source qui est un élément du dual et \mathcal{N} est l'inverse de

$$\int \exp\left(-\frac{S(\phi_E)}{\hbar}\right) \mathcal{D}[\phi_E]$$

Witt archimédien

- La section de Teichmüller application multiplicative $[x](T) = x$.
- Les automorphismes de Frobenius F_λ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$,

$$F_\lambda(f)(T) = f(T/\lambda)^\lambda$$

- Les Verschiebung, applications additives V_λ , $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$,

$$V_\lambda(f)(T) = \lambda^T f(\lambda T)^{1/\lambda}$$

- Les fonctions $T \mapsto x^T$ sont les point fixes des automorphismes F_λ . L'évaluation $f \mapsto \theta(f) = f(1)$ est un homomorphisme vers \mathbb{R} .

Représentation par des fonctions

On pose $\chi(f)(T) = f(T)^{1/T}$ ce qui donne une représentation par des fonctions.

Soit $\phi(\xi)$ une application monotone continue de $(0, \infty)$ sur $(0, \nu)$ (avec $\nu \leq \infty$). Soit f telle que

$$\chi(f)(T) = \int_0^\infty e^{-\xi/T} d\phi(\xi)$$

On a alors

$$f = \int_0^\infty V_\lambda([x_\lambda]) d^*\lambda$$

où $d^*\lambda = d\lambda/\lambda$ et

$$x_\lambda = e^{-\lambda\xi(\lambda)} \in \mathbb{R}_+^{\max}, \quad \forall \lambda < \nu, \quad x_\lambda = 0, \quad \forall \lambda \geq \nu,$$

où $\xi(\lambda)$ est la fonction inverse de ϕ . La relation entre $\chi(f)(T)$ et $\phi(\xi)$ est la transformation de Borel

$$\sum a_n T^n \mapsto \sum \frac{a_n}{n!} \xi^n$$

Algèbre de Mikusinski

Quand on écrit le produit en termes des ϕ , on obtient la relation avec l'algèbre de fonctions ϕ sur \mathbb{R}_+ à dérivée localement intégrable, avec le produit de Duhamel

$$\phi_1 \star \phi_2(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \phi_1(u) \phi_2(t-u) du$$

Un résultat de Titchmarsh montre qu'il n'y a pas de diviseur de zéro. Le corps quotient est très utile en calcul opérationnel.

Normes $|f|_\rho$

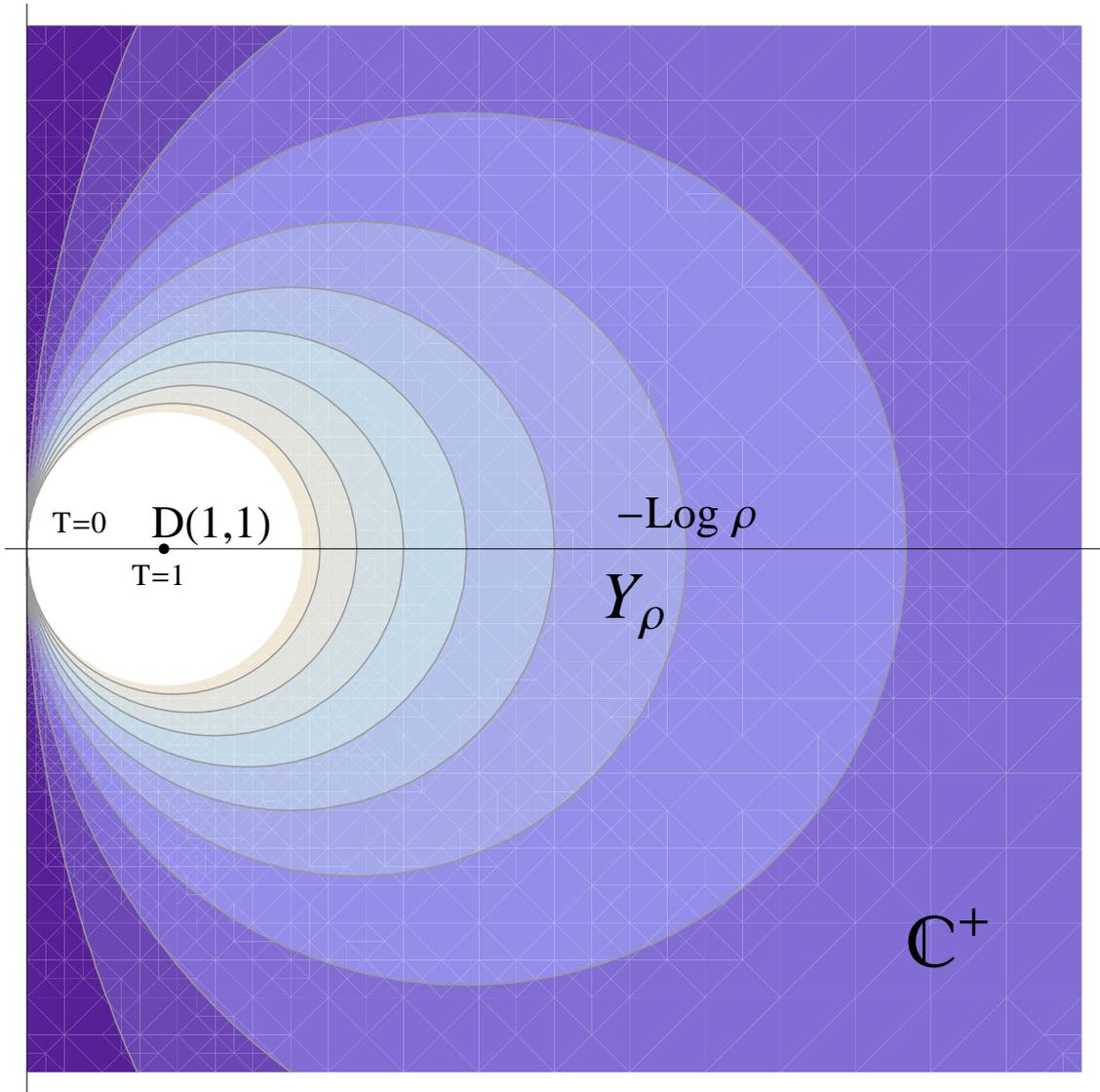
Soit $\rho \in [0, 1)$,

$$f, \chi(f)(T) = \int_0^\infty e^{-\xi/T} d\phi(\xi),$$

$$\|f\|_\rho = \int_0^\infty e^{\xi/\log \rho} |d\phi(\xi)|$$

Théorème

Soit B^+ l'algèbre de Fréchet complétée pour les normes $|f|_\rho$, $\rho \in (0, 1)$. Son spectre de Gelfand $\text{Spec } B_{\mathbb{C}}^+$ est la compactification $Y^+ = \mathbb{C}^+ \cup \{0\}$ du demi plan $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$. L'action du groupe à un paramètre F_λ est donnée par $z \rightarrow \lambda z$ sur \mathbb{C}^+ et fixe $0 \in Y^+$.



A. Connes, *The Witt construction in characteristic one and quantization*. Noncommutative geometry and global analysis, 83-113, Contemp. Math., 546, Amer. Math. Soc., Providence, RI,

A. Connes, C. Consani, *Universal thickening of the field of real numbers*. Advances in the theory of numbers, 11-74, Fields Inst. Commun., 77, Fields Inst. Res. Math. Sci., Toronto, ON, 2015.

Limite $q \rightarrow 1$ des corps de Galois

Fonction zêta de Soulé

$N(q)$ donnée,

$$Z(q, T) = \exp \left(\sum_{r \geq 1} N(q^r) T^r / r \right)$$

$$\zeta_N(s) = \lim_{q \rightarrow 1} (q - 1)^\chi Z(q, q^{-s}), \quad \chi = N(1)$$

Problème :

Existe-t'il $N(q)$ telle que $\zeta_N(s)$ soit la fonction zêta de Riemann (complète)

$$\zeta_N(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$$

Deux difficultés

1) D'après Soulé la valeur $N(1)$ est la caractéristique d'Euler de la "courbe" hypothétique $C = \overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$ sur \mathbb{F}_1 . Comme le genre de C est infini, on a $N(1) = -\infty$. En fait on montre

$$\frac{\partial_s \zeta_N(s)}{\zeta_N(s)} = - \int_1^\infty N(u) u^{-s} d^*u$$

2) $N(1) = -\infty$ crée une tension avec la positivité de $N(q)$ pour $q > 1$. En fait la distribution $N(q)$ déterminée par

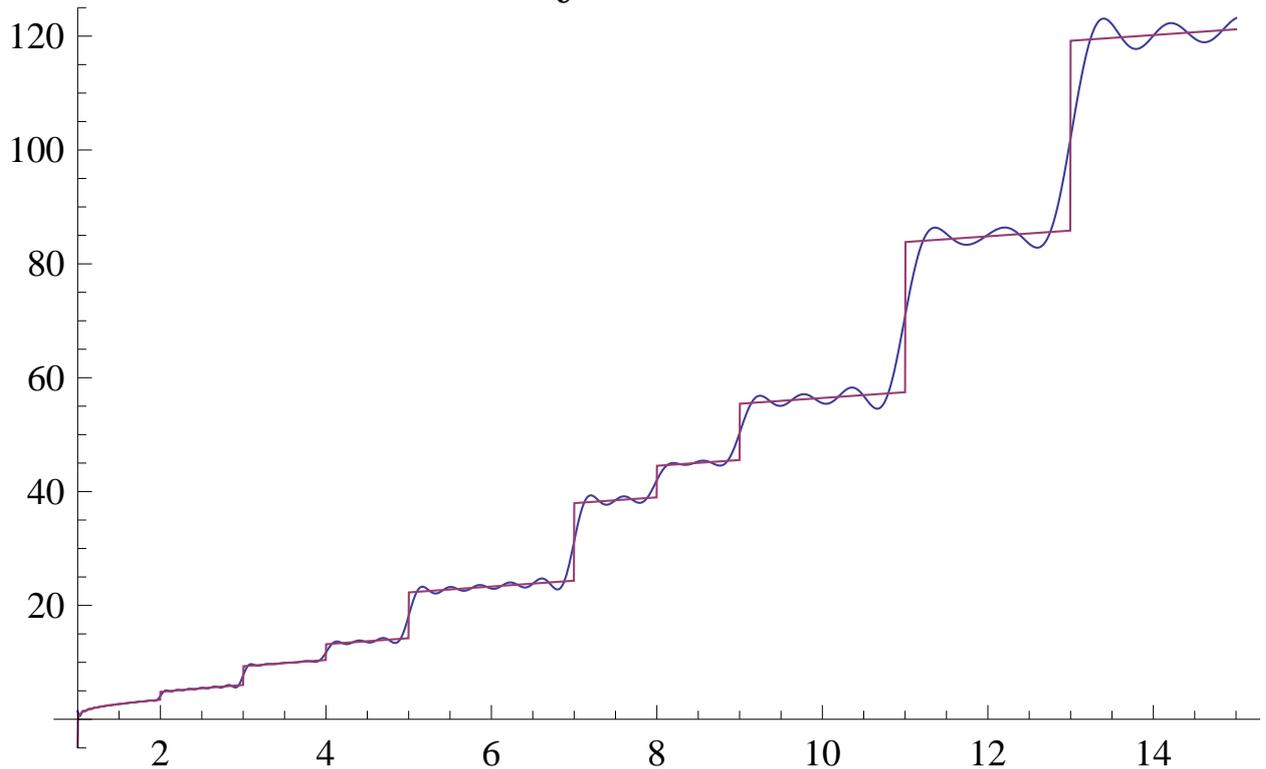
$$\frac{\partial_s \zeta_Q(s)}{\zeta_Q(s)} = - \int_1^\infty N(u) u^{-s} d^*u.$$

est positive pour $q > 1$ et pour $q = 1$ est donnée par

$$N(1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(1 + \epsilon) - J(1)}{\epsilon}$$
$$\sim -\frac{1}{2} E \log E, \quad E = \frac{1}{\epsilon}$$

où $J(u)$ est une primitive de $N(u)$.

$$J(u) = \int N(u) du, J_m(u)$$



Primitive de $N(u)$ et approximation par

$$J_m(u) = \frac{u^2}{2} - \sum_{Z_m} \text{order}(\rho) \frac{u^{\rho+1}}{\rho+1} + u$$

$J(u)$ change de signe pour $u \sim 1.0050692$

Formules explicites pour $N(u)$

Théorème (CC) :

(1) La fonction $N(q)$ existe comme distribution et est donnée par

$$N(q) = q - \frac{d}{dq} \left(\sum_{\rho \in Z} \text{order}(\rho) \frac{q^{\rho+1}}{\rho+1} \right) + 1$$

où Z est l'ensemble des zéros non-triviaux de la fonction zêta de Riemann.

(2) La fonction $N(q)$ est positive (comme *distribution*) pour $q > 1$.

(3) La valeur $N(1)$ est égale à $-\infty$ et reflète la distribution des zéros de zêta en $E \log E$.

Courbe $C = \overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$?

La fonction $N(q)$ donne des renseignements précieux sur C . Dans le cas des variétés sur un corps fini, la fonction $N(q)$ est à valeurs entières. De plus $N(q^k) \leq N(q^\ell)$ quand k divise ℓ . Ceci n'est plus le cas pour $N(u)$ qui a une contribution de la forme

$$\kappa(u) = \frac{u^2}{u^2 - 1}$$

qui provient de

$$-\frac{\partial_s \zeta_{\mathbb{Q}}(s)}{\zeta_{\mathbb{Q}}(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} + \int_1^{\infty} \kappa(u) u^{-s} d^*u,$$

où $\Lambda(n)$ est la fonction de von-Mangoldt.

A. Connes, C. Consani, *Schemes over \mathbb{F}_1 and zeta functions*. Compos. Math. 146 (2010), no. 6, 1383-1415.

A. Connes, C. Consani, *From monoids to hyperstructures : in search of an absolute arithmetic*. Casimir force, Casimir operators and the Riemann hypothesis, 147-198, Walter de Gruyter, Berlin, 2010.

$$\text{Site } X_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^{\times} \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} / \widehat{\mathbb{Z}}^*$$

Sous-groupes de rang 1 de \mathbb{R} , orbites périodiques C_p de longueur $\log p$ pour p premier.

On obtient, en considérant l'action induite de \mathbb{R}_+^* , la distribution $N(u)$, pour $u \in [1, \infty)$, qui donne, en utilisant la formule de Hasse-Weil dans la limite $q \rightarrow 1$, d'obtenir la fonction zêta complète de Riemann.

Structure Géométrique de $X_{\mathbb{Q}}$

L'action de \mathbb{R}_+^* sur $X_{\mathbb{Q}}$ coïncide avec l'action des automorphismes de Frobenius Fr_{λ} sur les points du site arithmétique sur \mathbb{R}_+^{\max} .

Topos + caractéristique 1

- Site Arithmétique.
- Correspondances de Frobenius.
- Extension des scalaires à \mathbb{R}_+^{\max} .

Holomorphic functions of the variable p

(FARGUES SLIDES)

- ▶ Addition / multiplication given by universal generalized polynomials in

$$\mathbb{F}_p[X_i^{1/p^\infty}, Y_j^{1/p^\infty}]_{i,j \geq 0}$$

- ▶ Example :

$$[a] + [b] = [a + b] + [P(a, b)]p + p^2 \dots$$

where

$$P(X, Y) = \frac{(X^{1/p} + Y^{1/p})^p - X - Y}{p} \in \mathbb{Z}[X^{1/p}, Y^{1/p}]$$

Holomorphic functions of the variable p

- ▶ $A = \mathbb{F}_p$ -perfectoid algebra i.e. $A =$ perfect Banach ring
- ▶ $A^+ \subset A$ ring of bounded by 1 holomorphic functions
- ▶ $W(A^+)$ equipped with topology=mix of p -adic and Banach ring top of A^+ , $f \in W(A^+)$,

$$f = \sum_{n \geq 0} [a_n] p^n = \text{hol. fct. variable } p.$$

- ▶ $\varpi \in A^{\circ\circ} \cap A^\times$ pseudo-uniformizer, $S = \text{Spa}(R, R^+)$

$$Y_S = \text{Spa}(W(A^+), W(A^+)) \setminus V(p[\varpi])$$

adic space, “open punctured disk variable p ”