

Sur le développement du calcul différentiel par les Cartan puis, entre autres, René Thom

Marc Chaperon
Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche
Université Paris Cité

Séminaire Philosophie et Mathématiques
École normale supérieure, 28 avril 2025

Rien ne me désigne pour parler d'un sujet aussi grave
sinon que, tel Obélix, je suis tombé dedans quand j'étais petit.
Cela ne m'a pas rendu aussi fort que lui, hélas !
J'espère donc que Jean-Jacques Szczeciniarz ne regrettera pas
trop son invitation, dont je le remercie.

Au début d'un exposé à l'IHÉS dans les années 70, Dennis Sullivan présentait sa lecture d'un texte d'Élie Cartan un peu comme un exploit, voire une descente aux enfers.

L'auditoire frissonnait.

En ce temps-là, le triomphe de la normalisation bourbachique rendait en effet ce qui l'avait précédée difficile à lire.

Encore Élie Cartan n'était-il pas, et de loin, le plus mal loti, lui qui avait porté Bourbaki sur les fonds baptismaux.

Jean Dieudonné, par exemple, lui rendait un hommage très substantiel dans le tome IV de ses [Éléments d'Analyse](#) (plût au Ciel que Bourbaki eût aussi bien traité Poincaré).

Élie Cartan était en fait réputé pour la clarté de ses cours. En témoignent par exemple ses [Leçons sur les invariants intégraux](#), publiées il y a un peu plus d'un siècle et qui n'ont pas une ride.

Ce qui est difficile à lire chez lui, ce sont les articles où il résout un grand problème avec les (considérables) moyens du bord, sans que les concepts idoines existent encore.

À la source de la théorie géométrique « à la (Élie) Cartan » des équations aux dérivées partielles se trouve une idée simple, familière à son maître Sophus Lie : écrire par exemple une équation différentielle implicite

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad (1)$$

où f est une fonction réelle sur $\mathbf{R}^3$, sous la forme de deux équations :

$$f(x, y, z) = 0 \quad (2)$$

$$dy = z dx. \quad (3)$$

L'équation (3) définit le **système de Pfaff canonique**, ou **structure de contact canonique**, ou **connexion de Cartan**, de l'espace $J^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^3$ des jets d'ordre 1 de fonctions réelles d'une variable réelle.

Terminologie que je vais maintenant expliquer.

« La » connexion de Cartan

- L'équation $dy = z dx$ est un **système de Pfaff (régulier)**, c'est-à-dire qu'elle définit en chaque point $P = (x, y, z)$ le sous-espace vectoriel (plan)

$$\mathcal{K}_P = \ker(dy - z dx) = \{(\delta x, \delta y, \delta z) : \delta y = z \delta x\}$$

de l'espace tangent $T_P \mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^3$, et que $\mathcal{K}_P$ dépend régulièrement de P .

Chaque $\mathcal{K}_P$ est vertical pour la projection $(x, y, z) \xrightarrow{\pi_1^0} (x, y)$.

- Si l'on tourne la tête et que l'on considère la projection $\pi_1^* : (x, y, z) \mapsto (x, z)$, chaque plan $\mathcal{K}_P$ devient au contraire **horizontal** pour π_1^* , c'est-à-dire transversal à la nouvelle verticale $\mathcal{V}_P = \{(\delta x, \delta y, \delta z) : \delta x = \delta z = 0\}$ (la direction y). Cela s'exprime en disant que le système de Pfaff $P \mapsto \mathcal{K}_P$ est une **connexion** pour la projection π_1^* .
- « Connexion de Cartan » est presque un pléonasme mais c'est le nom souvent donné à celle-ci dans les espaces de jets.

« La » connexion de Cartan

- Pour chaque $P = (x, y, z)$, le plan de contact $\mathcal{K}_P$ est le noyau de la forme linéaire $\alpha_P = dy - z dx : (\delta x, \delta y, \delta z) \mapsto \delta y - z \delta x$ sur $\mathbf{R}^3$. Un tel « champ de covecteurs » $\alpha : P \mapsto \alpha_P$ s'appelle une **forme de Pfaff** ou **1-forme différentielle**.

« Notre » forme de Pfaff α , notée $dy - z dx$, est la **forme de contact canonique** de $\mathbf{R}^3 = J^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

C'est bien une **forme de contact** : sa différentielle extérieure (encore à définir) $d\alpha = dx \wedge dz$ induit une forme bilinéaire alternée *non dégénérée* sur chaque $\mathcal{K}_P \times \mathcal{K}_P$.

- Nous verrons que cette forme bilinéaire non dégénérée s'identifie à la courbure au point P de la connexion de Cartan, laquelle est donc « complètement non intégrable » : il n'existe aucune surface régulière S dans $\mathbf{R}^3$ telle que $T_P S = \mathcal{K}_P$ pour tout $P \in S$ (« surface intégrale de $\mathcal{K}$ »). En effet, en notant $i : S \hookrightarrow \mathbf{R}^3$ l'inclusion, on aurait $i^* \alpha = 0$ donc $i^* d\alpha = d(i^* \alpha) = 0$, d'où $d\alpha|_{T_P S} = 0$ pour tout $P \in S$.

En contrepartie $\mathcal{K}$ a beaucoup de **courbes intégrales**, courbes régulières L dans $\mathbf{R}^3$ telles que $T_P L \subset \mathcal{K}_P$ pour tout $P \in L$, **legendriennes** selon V.I. Arnold. Si $P = (x_0, y_0, z_0) \in L$:

- ▶ Ou bien la tangente $T_P L$ n'est pas verticale. La relation $dy = z dx$ impose que L soit, près de P , le graphe de la courbe paramétrée $x \mapsto (\varphi(x), \varphi'(x))$ pour une fonction réelle φ d'une variable réelle de classe C^2 , localement unique près de x_0 ; localement, L est donc le (l'image du) **jet d'ordre 1**

$$j^1\varphi : x \mapsto (x, \varphi(x), \varphi'(x))$$

de φ . Ce jet est une **section** locale de la projection « source » $s : (x, y, z) \mapsto x$, c'est-à-dire que $s \circ j^1\varphi(x) = x$.

- ▶ Ou bien $T_P L$ est la verticale ; on peut alors paramétrer L par z près de P : localement, de manière localement unique, $L = \{(x(z), y(z), z)\}$ avec $x(z_0) = x_0$ et $y(z_0) = y_0$. En posant $\varphi(z) = zx(z) - y(z)$, la relation $dy = z dx$ donne

$$x(z) = \varphi'(z) \quad \text{donc} \quad y(z) = z\varphi'(z) - \varphi(z).$$

on dit que φ est la **fonction génératrice** de L près de P .

Localement, L est l'image de $j^1\varphi$ par l'**involution de Legendre** $\Lambda : (x, y, z) \mapsto (z, zx - y, x)$, qui préserve $\mathcal{K}$ (**transformation de contact**) car $d(zx - y) - x dz = -(dy - z dx)$.

Λ envoie donc courbes legendriennes sur courbes legendriennes.

- Revenons à l'équation (1) $f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$, dont une fonction réelle φ , définie sur un intervalle, est solution si et seulement si $f \circ j^1\varphi = 0$, c'est-à-dire que la section locale $j^1\varphi$ de s , vue comme courbe (legendrienne), est incluse dans $S = f^{-1}(0)$.

On peut donc étendre la notion de solution en oubliant la projection source s et appeler **solutions géométriques** de (1) les courbes legendriennes (connexes) L incluses dans S .

- Selon Élie Cartan, le système formé de (2) $f(x, y, z) = 0$ et (3) $dy = z dx$ s'appelle **aussi** un système de Pfaff, dont ces solutions géométriques sont les courbes intégrales.

Cela pose problème même dans ce cas simple car S peut *a priori* comporter quatre sortes de points $P = (x_0, y_0, z_0)$:

1. Des points **singuliers**, où la différentielle $df(P) = f'_x(P) dx + f'_y(P) dy + f'_z(P) dz$ est nulle. Ils forment un fermé mais on ne peut pas en dire grand chose de plus si l'on suppose seulement f de classe C^k , $2 \leq k \leq \infty$.
 - Des points **réguliers**, où $df(P)$ n'est pas nulle, ce qui fait de $S = f^{-1}(0)$ une surface aussi différentiable que f près de P . Ils peuvent être de trois types :
2. Si le plan tangent $T_P S = \ker df(P)$ n'est pas vertical, c'est-à-dire que $f'_z(P) \neq 0$, alors S est près de P le graphe $z = g(x, y)$ d'une fonction implicite g ; l'équation (1) est donc localement (dans $\mathbf{R}^3$) l'équation différentielle « ordinaire » $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$, dont les solutions φ sont déterminées par leur valeur en x_0 et ont des graphes deux à deux disjoints. Près de P , les solutions géométriques $j^1\varphi$ de l'équation forment donc un feuilletage de la surface S .

3. Si $T_P S$ est vertical mais ne coïncide pas avec le plan de contact $\mathcal{K}_P$, autrement dit, si les formes linéaires $df(P) = f'_x(P) dx + f'_y(P) dy$ et $\alpha_P = dy - z_0 dx$ sont indépendantes, ce qui s'écrit $f'_x(P) + z_0 f'_y(P) \neq 0$, on peut se ramener au cas 2.
- Il suffit pour cela de considérer l'image $\Lambda(S)$ de S par l'involution de Legendre $\Lambda : (x, y, z) \mapsto (z, zx - y, x)$: comme Λ envoie courbes legendriennes sur courbes legendriennes, elle envoie les solutions géométriques de (1) sur celles de l'équation $\Lambda_* f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$, où l'on a posé

$$\Lambda_* f = f \circ \Lambda^{-1} : (x, y, z) \mapsto f(z, zx - y, x).$$

Puisque $\Lambda(P) = (z_0, z_0 x_0 - y_0, x_0)$ et $\frac{\partial}{\partial z} \Lambda_* f(x, y, z) = \partial_1 f(z, xz - y, x) + x \partial_2 f(z, xz - y, x)$, on a $\frac{\partial}{\partial z} \Lambda_* f(\Lambda(P)) = \partial_1 f(P) + z_0 \partial_2 f(P) = f'_x(P) + z_0 f'_y(P) \neq 0$, donc l'équation $\Lambda_* f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ entre bien dans le cas 2. Près de P , les solutions géométriques de l'équation forment donc ici encore un feuilletage de la surface S .

4. Si $T_P S = \mathcal{K}_P$, ce qui s'écrit $f'_z(P) = f'_x(P) + z_0 f'_y(P) = 0$, le point P est **régulier singulier** et les solutions géométriques alentour peuvent avoir des configurations très diverses.

La seule chose certaine est que ces points réguliers singuliers forment un fermé.

En notant Σ le fermé de S fait des points réguliers singuliers et des points singuliers, 2. et 3. entraînent que *les solutions géométriques « maximales » de (1) forment un feuilletage de la surface régulière $S \setminus \Sigma$, le feuilletage caractéristique.*

- ▶ On voit déjà sur cet exemple toute la difficulté de la théorie géométrique des équations aux dérivées partielles développée par Élie Cartan, et plus généralement de sa « grande théorie des systèmes de Pfaff » (Dieudonné) :
- a) il faut se placer aux points « génériques » (à déterminer, ici ceux de $S \setminus \Sigma$), les autres étant en général indomptables sauf dans les cas analytiques, où leur étude peut malgré tout être très compliquée ;

- b) l'analyticité est requise sur un autre point : le théorème d'existence et d'unicité locale des solutions d'équations différentielles ordinaires n'a d'analogue général pour les équations aux dérivées partielles (théorème de Cauchy-Kowalewski) que dans le cadre analytique.

Hans Lewy a en effet donné des exemples de systèmes C^∞ « ordinaires » **sans solution** d'équations aux dérivées partielles.

- ▶ Dans l'exemple qui nous a occupés jusqu'à présent, il résulte du **lemme de transversalité de Thom** que, pour (Baire-)presque toute $f \in C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$,
 - Il n'y a aucun point singulier dans S : on dit que **0 est une valeur régulière de f** . Donc $S = f^{-1}(0)$ est une surface C^∞ .
 - Les $P \in S$ tels que $T_P S$ soit vertical, c'est-à-dire les $P \in \mathbf{R}^3$ où f et f'_z s'annulent, forment une courbe Σ_1 de classe C^∞ .
 - Dans Σ_1 , le fermé Σ_{11} où $f = f'_z = f''_{z^2} = 0$ est fait de points isolés, où l'on a $f'''_{z^3} \neq 0$ et qui sont donc des points-fronces de la projection $\pi = \pi_1^0|_S$.

- L'ouvert dense $\Sigma_1 \setminus \Sigma_{11}$ de Σ_1 , où l'on a $f = f'_z = 0$ mais $f''_{z^2} \neq 0$, est donc formé de points-plis de la projection π .
- Les points réguliers singuliers, ceux où $f = f'_z = f'_x + zf'_y = 0$, sont des points-plis isolés où le feuilletage caractéristique a une singularité hyperbolique, foyer, nœud ou col.
- ▶ Cela résulte de deux ajouts apportés par Thom à la « caisse à outils » du calcul différentiel :
 - Le **théorème de Sard** : *les valeurs critiques (non régulières) d'une application C^k , $k \geq 1$, de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ avec $k > n - p$ forment un ensemble négligeable.* C'est la clé du lemme de transversalité.
 - Le **théorème de préparation de Malgrange**, qui permet de mettre facilement S sous forme normale près d'un point-pli ou d'un point-fronce.