“C’est difficile d’y croire, mais c’est encore plus difficile de ne pas y croire”

Épistémologie structuraliste génétique pragmatique face au tournant conjectural en arithmétique

Olivier Fouquet

25 janvier 2023

Introduction Dans son article Conjectures à *Synthese* de 1997, Barry Mazur note qu’un tournant dans l’histoire et l’épistémologie des mathématiques a eu lieu quelque part entre 1890 et 1940. Plus qu’un tournant peut-être : un renversement. Aux démonstrations, preuves, exemples et méthodes qui avaient constitué l’édifice des mathématiques depuis les ouvrages classiques de l’époque hellénistique est venue s’ajouter dans cet intervalle temporel une famille de nouveaux arrivants : les conjectures. Ce changement est notable. Gauss n’a pas rendu public ce qu’il avait pu percevoir de la théorie algébrique des nombres. Riemann n’a jamais formulé explicitement l’hypothèse qui porte aujourd’hui son nom. Bien que l’on sache depuis la découverte de ses papiers personnels qu’il a exploré expérimentalement la question des zéros de la fonction ζ, dans son article, il se borne à noter qu’il semble *sehr warscheinlich* très probable que tous les zéros non-triviaux sont sur la droite $\Re s = 1/2$. Dedekind n’a jamais formulé, ni de près ni de loin, la conjecture qui porte son nom sur l’holomorphie des quotients de fonctions zêtas. Même en 1916, les deux énoncés qui vont devenir les conjectures de Ramanujan sont introduits sous la plume de leur auteur par le commentaire “it appears highly probable that [these identities] hold”. Un demi-siècle plus tard : conjecture d’Artin, conjecture de Hasse, conjectures de Ramanujan, conjectures de Weil, conjectures de Hodge, conjectures de Tate, conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, conjectures standard...

Qu’est-ce qu’une conjecture ? Pour les besoins de cet exposé, je souhaite clarifier le sens précis que je donne ici au terme conjecture, quand bien même il est entendu que ce terme est parfaitement familier à tout mathématicien professionnel.

Comme le note Yves André dans ses *Dix regards sur la mathématique contemporaine*, une conjecture doit au minimum être un énoncé avec une certaine portée. Pour le besoin de cet exposé, je demanderai nettement plus. Une *conjecture* est un énoncé ou un ensemble d'énoncés dont la vérité présumée par les acteurs d'un champ de recherche vient structurer les recherches conduites au sein de ce champ. Une conjecture n'est donc pas ou pas seulement une croyance, aussi bien fondée celle-ci puisse être, ni une question, même très intéressante, ni en lui-même un énoncé plausible mais dont la démonstration fait pour le moment défaut. Elle est une vérité présumée qui oriente ou polarise les recherches d'un champ. Cette orientation, elle-même un problème épistémologique d'intérêt, a une dimension extrinsèque et une dimension intrinsèque : une dimension de nature fondamentalement et essentiellement externe aux mathématiques, une dimension apparemment propre aux mathématiques elles-mêmes.

Voici deux exemples pour illustrer ces deux dimensions. Le consensus général des mathématiciens est qu'il n'existe probablement pas d'autres nombres premiers de Fermat que les 5 connus, et donc pas d'autres polygones réguliers constructibles à la règle et au compas que ceux déjà connus de Gauss. Cet énoncé n'est toutefois pas une conjecture au sens que je veux donner à ce terme dans cet exposé, en ce qu'une telle question n'oriente pas que je sache les recherches d'une communauté de mathématiciens. Quand bien même ce serait le cas, si par exemple pour une raison historique contingente cette question était devenue célèbre ou si un milliardaire se mettait dans l'idée d'offrir à quiconque travaillerait sur cette question bourses, postes et salaires en nombres suffisant pour créer *ex nihilo* une communauté (ce qu'un richissime texan avait fait, à une époque, pour le théorème de Fermat), quand bien même ce serait le cas, il est difficile d'imaginer que les recherches dans un domaine quelconque serait orientée par cette question, dans l'état actuel de nos connaissances. Tout au plus espérerait-on la solution de ce problème comme conséquence incidente d'autres résultats. De même, en contradiction avec un usage moins restrictif du terme, je ne dirai pas dans cet exposé que l'énoncé "$\sqrt{2}$ est un nombre normal" est une conjecture : c'est l'énoncé "les irrationnels algébriques sont normaux en toute base" qui en est une.

Une telle distinction entre problème ouvert, même célèbre et difficile, mais ne structurant pas un champ de recherche et conjecture est déjà me semble-t-il perceptible dans la lettre de Gauss à Olbers où il discute de la conjecture de Fermat. Gauss écrit que cet énoncé ne présente que peu d'intérêt à ses yeux, car il lui serait facile d'énoncer une multitude d'énoncés similaires "que personne ne pourrait ni prouver ni se débarrasser". Toutefois, et cette continuation de la lettre est moins connues, il explique ensuite que le seul intérêt qu'il voit à la conjecture de Fermat est qu'elle l'a encouragé à "reprendre quelques vielles idées qui pourraient mener à une considérable extension de l'arithmétique supérieure, dont les résultats potentiels renverrait la conjecture de Fermat à un simple corollaire", façon de dire semble-t-il, que ce qui compte pour lui est bien la formulation pour le moment *conjecturale* au sens de cet exposé de l'arithmétique supérieure, et non les conséquences de cette organisation.

De quels outils dispose-ton pour pour la vérification du critère fondamental, soit encore, comment reconnaître une conjecture ? Si l'on privilégie la dimension extrinsèque, cette question est en dernière appréciation du ressort de la communauté des acteurs de ce champ. Du point de vue intrinsèque, voici toutefois un critère de démarcation qui me paraît significatif. Du point de vue de la logique formelle, savoir que $A \implies B$ et que B est vrai ne donne aucune indication sur A, et la distinction ente un sylllogisme bien formé et la conjonction de $A \implies B$ et B est une étape obligée non seulement de l'enseignement de la logique depuis Aristote mais aussi de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire. Lorsque toutefois, un travail de recherche note que $A \implies B$, démontre B et *s'inscrit explicitement* dans le programme de recherche portant sur A, alors je considérerai que la véracité de A est une *conjecture*. Pour prendre un exemple concret, la *conjecture de Serre* est un énoncé caractérisant les représentations galoisiennes qui proviennent d'une forme modulaire. B. Edixhoven a publié en 1992 un article sur le poids des représentations galoisiennes associées aux formes modulaires, un travail qui est par nécessité logiquement indépendant de la conjecture et en particulier impuissant à la démontrer : la conjecture dit quelles représentations proviennent d'une forme modulaire, l'article spécifie des propriétés des représentations qui proviennent d'une forme modulaire et seulement de ces dernières. Pourtant, Edixhoven intitule son article *The weight in Serre's conjectures on modular forms*, établissant ainsi que dans son esprit et celui de la communauté (à commencer par les éditeurs de la revue *Inventiones*), la preuve d'une conséquence de la conjecture (que personne n'aurait peut-être ni notée ni explorée sans la conjecture) se comprend participant de la réflexion organisé par cette conjecture.

J'ajoute encore une condition nécessaire pour qu'un énoncé conjectural au sens usuel soit une conjecture au sens de cet exposé : il faut que cet énoncé vienne traduire de manière mathématiquement précise une vision cartésienne, au sens que Ian Hacking donne à ce terme. Ian Hacking qualifie de cartésienne toute application des mathématiques pures aux mathématiques pures, par exemple l'application que Descartes de l'algèbre à la géométrie (et réciproquement). Un énoncé est donc *cartésien* au sens de Hacking s'il formule de manière précise ce que des idées, des théorèmes, des exemples... d'une branche des mathématiques peuvent apporter à une autre. Du point de vue de ce dernier critère, l'hypothèse de Riemann méritait d'être une conjecture dès sa formulation car elle relie la distribution des nombres premiers à un problème d'analyse complexe. Elle est devenue doublement une conjecture si l'on croit après Polya, Landau et Hilbert au lien entre la fonction ζ et les spectres de certains opérateurs hermitiens aléatoires, triplement une conjecture après la preuve des conjectures de Weil et quadruplement une conjecture après la preuve de la conjecture principale de la théorie d'Iwasawa.

Résumons les critères que j'exige d'une conjecture dans cet énoncé :

1. Elle doit orienter les recherches d'une communauté de chercheurs.

2. Elle doit instituer un lien rigide entre deux objets mathématiques distincts

qu'elle réunit ainsi en un unique objet de la pensée.

Afin d'illustrer et de d'introduire les problèmes épistémologiques que les conjectures me semblent soulever pour certaines conception des mathématiques, j'aimerais vous présenter un bref examen de deux conjectures au sens de cet exposé, et tenter de mettre en évidence des thèmes récurrents et des divergences qui me paraissent d'intérêt.

Une conjecture exophorique : les conjectures de Weil Le premier cas est très connu, en particulier de nombreux membres de cette audience, et historiquement exceptionnellement bien documenté : il s'agit des conjectures de Weil sur les fonctions zêtas des variétés algébriques sur les corps finis.

Dans une longue lettre à sa soeur, André Weil s'est expliqué sur la genèse de ses conjectures. Elles ont leur origine dans une autre conjecture, celle d'Artin, qui prédit que les fonctions L des représentations galoisiennes dites d'Artin qui sont irréductibles sont des fonctions holomorphes. Sur la base de nombreux cas particuliers discutés entre autre Hasse au début des années 1930 et de sa puissante compréhension de l'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions de caractéristique positive, André Weil émet l'hypothèse 1) d'une part que le cas des corps de fonctions sera plus aisé à traiter que celui des corps des nombres 2) que dans ce cas les fonctions L seront des fractions rationnelles et enfin 3) que la preuve pourrait découler de l'importation en arithmétique des outils de la géométrie riemannienne, et plus précisément de l'existence d'une théorie cohomologique pour ces variétés vérifiant les mêmes propriétés que la cohomologie des variétés complexes, y compris la formule de Lefschetz. Tout, depuis la motivation jusqu'à la preuve espérée, est une projection en dehors de l'objet apparent de la conjecture "mon travail consiste un peu à déchiffrer un texte trilingue" écrit Weil et il note que "l'intuition y fait beaucoup ; je veux dire la faculté de voir un rapport entre choses en apparence tout à fait dissemblables". Cela est si vrai que deux des acteurs majeurs - André Weil et Alexander Grothendieck - ont manifesté disons une certaine perplexité (confinant peut-être à la déception) face à la preuve de Pierre Deligne. L'un comme l'autre espérait que la preuve découlerait d'une manière fondamentale de l'analogie ayant inspiré la conjecture, ce qui n'était pas nécessairement le cas à leurs yeux. Inversement, la deuxième preuve de Deligne venant terminer la preuve puis le nouveau point de vue sur celle-ci a joué un grand rôle dans l'inception du programme de Langlands géométrique. Si la preuve des conjectures de Weil n'a pas (pour le moment) apporté la compréhension de l'espace géométrique que Weil et Grothendieck espéraient (la propriété de positivité pour l'un, les conjectures standards pour l'autre), elle a joué un grand rôle dans une révolution dans notre compréhension de l'espace géométrique muni d'une action d'un groupe (les conjectures de Langlands).

Retenons les points essentiels suivants :

1. La motivation initiale de Weil était analogique : étudier les fonctions L d'Ar-

tin non-abéliennes, dans le cadre des corps de fonctions.

2. Ses travaux, et la réinterprétation progressive qu'il a faite de ses conjectures, puis après lui Serre et Grothendieck, sont également de nature analogique : cette fois-ci entre les propriétés topologiques et cohomologiques des variétés complexes et sur les corps finis.

3. La résultante proximale de ce double travail d'analogie a été la naissance de la géométrie algébrique moderne, en particulier de la cohomologie étale et de ces propriétés, dont les conjectures de Weil apparaissent comme une conséquence (et non comme aboutissement). Cinq décennies après la publication de la première preuve, celle-ci apparaît aussi comme la première étape d'une nouvelle histoire conjecturale (le programme de Langlands géométrique).

Je résume ces traits saillants en reprenant à mon compte la métaphore de la lettre d'André à Simone et en disant que les conjectures de Weil sont des conjectures *exophoriques*, en référence à l'adjectif que l'on donne en linguistique pragmatique et en analyse textuelle à un texte dont la pleine intelligibilité requiert des informations extralinguistiques (typiquement, un texte trilingue). La pleine intelligibilité des conjectures de Weil de son origine à ses conséquences en passant par sa preuve et les travaux qu'elles ont inspiré requière des informations externes à la conjecture.

Une conjecture endophorique : la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer S'il existe des conjectures exophoriques, il se pourrait qu'il existe des conjectures endophoriques, où j'emprunte à nouveau un terme à la linguistique. Une expression linguistique est endophorique si elle établit une lien cohésif typiquement rigide et de nature syntaxique entre éléments d'une phrase ou d'un texte. C'est la cas typiquement des pronoms réflexifs. À titre d'exemple, dans la phrase

Beaumont appartenait à cette école de médiéviste qui s'est qualifiée de "matérialiste".

il ne peut y avoir aucun doute sur qui l'école de médiéviste qualifie de "matérialiste" : il s'agit de l'école de médiéviste. Ce lien entre l'objet direct du verbe qualifier et son sujet est endophorique. La compréhension du sens général de la phrase repose quant à elle sur plusieurs éléments exophoriques : en première approximation, il semble nécessaire de comprendre le sens de l'adjectif matérialiste. Les plus perspicaces parmi vous reconnaîtront peut-être au-delà de cette référence à l'histoire des idées que cette phrase est tirée de La Vie mode d'emploi est qu'elle, acquiert, dans ce contexte un sens tout à fait différent en ce qu'elle est une des nombreuses pièces du puzzle que forme ce roman. Un exemple du lien exophorique entre un roman et l'objet de cet exposé.

D'un point de vue psychologique, les conjectures endophoriques nous apparaissent fréquemment d'autant plus frappantes que paraît grande la distance entre les objets ainsi embrassés par la conjecture. L'exemple contemporain suprême de conjecture endophorique est sans aucun doute l'ensemble des conjectures de Langlands, mais par simplicité et compétence, je vais discuter du cas plus circonscrit de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer. Depuis Euclide et Diophante, on sait qu'une conique ayant un point rationnel admet, via sa paramétrisation rationnelle, une infinité de tels points. Depuis Fermat, on sait que cette propriété n'est pas vraie pour les courbes elliptiques. Après Abel, Weierstrass et Poincaré, on sait que l'ensemble des points rationnels d'une courbe elliptique forme un groupe et depuis Mordell, on sait qu'il est de type fini. Par ailleurs, Hasse a introduit la fonction L d'une courbe elliptique et conjecturé qu'elle devait admettre un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$. Au début des années 1960, B. Birch et P. Swinnerton-Dyer décident d'investiguer par des moyens numériques le comportement de cette fonction une fonction L en 1, qui est un point en dehors de son demi-plan de convergence absolue, donc en un point où on ne sait pas, à l'époque, si elle est bien définie. Pour ce faire, ils calculent une approximation numérique de son expression comme produit eulérien, bien que ce produit n'ait aucune raison de converger en ce point, et s'il converge de coïncider avec la valeur du prolongement de la fonction L (de fait, on sait aujourd'hui que la fonction L et le produit eulérien convergent tous les deux simplement en 1 mais qu'ils n'ont pas la même la limite). Pour résumer : pour comprendre une fonction en un point alors qu'ils ne savent pas si elle est définie en ce point, ils évaluent les premiers termes d'un produit dont ils ne savent pas s'il converge en ce point, ni s'il coïncide avec la fonction qui les intéresse au cas où il convergerait. Alors qu'ils ont fait toutes les erreurs contres lesquels nous mettons en garde les étudiants de L dans la conception de leur expérience, ils tombent sur des résultats qui leur permettent de formuler une conjecture extraordinairement profonde : l'ordre d'annulation de la fonction L de la courbe est égal au rang du groupe des points rationnels de E.

La conjecture est endophorique en ce qu'elle relie (identifie) un point rationnel d'ordre infini à un zéro de la fonction L et vice-versa. Spencer Bloch, auteur luimême avec Alexander Beilinson et Kazuya Kato d'une vaste généralisation de cette conjecture aux motifs, a déclaré récemment que cette conjecture était la plus belle du monde car elle reliait des objets qui n'avaient absolument rien à voir entre eux, et donc ne devrait pas exister.

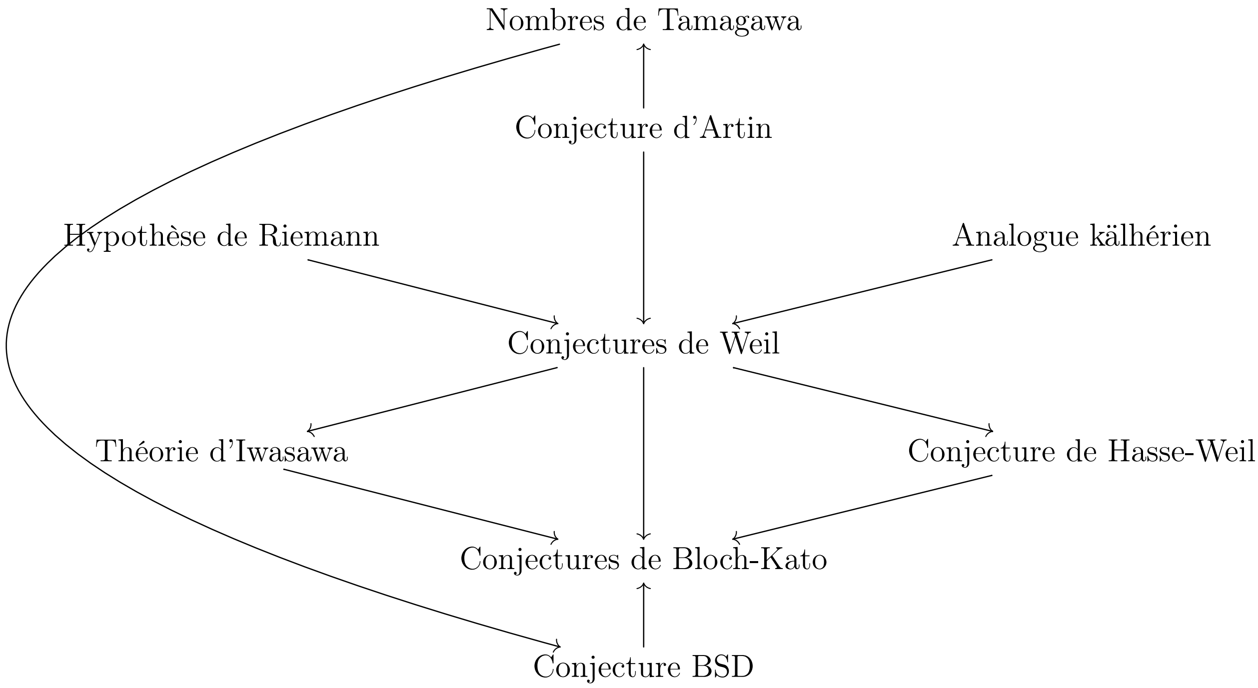
Dans la grande famille des conjectures endophoriques, on peut classer je crois les conjectures du type **les conditions nécessaires sont les conditions suffisantes** telles que la conjecture de géométrisation de Thurston, la conjecture de modularité des courbes elliptiques ou celle de Serre ou la conjecture de Fontaine-Mazur sur les représentation galoisiennes géométrique. Dans tous ces cas, les deux objets ou familles d'objets distincts que la conjecture endophorique identifie ne sont pas sans lien : c'est la nature du lien précis entre les deux qui constitue le saut endophore, la conjecture nous paraîtra d'autant plus audacieuse ou surprenante que ce lien impliquera une plus grande richesse de structures supplémentaires.

En mathématiques, tout ce qui est ouvert n'est pas nécessairement non-fermé, et de même, il se peut tout à fait qu'une conjecture soit à la fois exophorique et endophorique. Il semblerait même que cela soit l'évolution naturelle des grandes conjectures qui m'occupent.

Un passage de l'exophorique à l'endophorique : des conjectures de Weil aux conjectures de Bloch-Kato Si le statut de conjecture au sujet d'un énoncé se mesure à la réception de certains travaux par la communauté et possède donc sa propre objectivité, le statut exophorique ou endophorique d'une conjecture est plus subjectif. Pour André Weil, je l'ai mentionné, la genèse de ses conjectures sur les fonctions zêta des corps globaux de caractéristique positive est *purement* exophorique dans ses motivations comme dans ses méthodes : il s'agit de s'attaquer aux conjectures d'Artin sur l'arithmétique des fonctions L pour ces corps en utilisant en caractéristique positive les méthodes de la géométrie algébrique complexe. En 1959, Jean-Pierre Serre réalise une correspondance exophorique en retour : il montre que l'énoncé des propriétés arithmétiques des conjectures de Weil vaut pour les correspondances sur les variétés kälhériennes et se déduit effectivement des propriétés de positivité isolée par Weil et/ou de la compatibilité d'une correspondance avec la décomposition de Hodge. Selon son propre témoignage, c'est ce résultat qui a inspiré à Alexander Grothendieck une reformulation endophorique des conjectures de Weil, sous la forme des conjectures standards : dans cette version, et de son propre témoignage, Grothendieck entend faire de la notion d'espace un unique objet de la pensée, que cet espace soit arithmétique ou continue.

À vrai dire, les conjectures de Weil effectueront un autre voyage de l'exophorique à l'endophorique. En effet, A. Weil a de son côté et dès 1942 exploré la possibilité effective de revenir au cas des corps de nombres - de justifier en un mot son excursion exophorique. Dans une lettre à Artin il note que dans le cas des corps des nombres, la première étape de sa démonstration de l'hypothèse de Riemann est bloquée pour des raisons triviales : il n'existe pas d'extension non-triviale partout non-ramifiée de $\mathbb{Q}$. Il suggère alors de considérer l'extension abélienne maximale de $\mathbb{Q}$ qui soit ramifiée en un nombre minimal de place et propose que dans ce cadre, les idées fondamentales de sa preuve devraient inspirer une conjecture exophorique. Ce travail sera mené à bien par Iwasawa dans le cadre imaginé par Weil, puis par Kato dans une grande généralité. Reformulée de ce point de vue, les conjectures de Weil deviennent une conjecture endophorique établissant un lien indissociable entre fonction L et complexe de cohomologie par le truchement d'un *élément zêta*. Inversement, la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, que Tate avait déjà rendu exophorique en la reliant à ses conjectures sur les cycles algébriques des variétés en caractéristiques positives, réapparaissent sous un jour exophorique : elles énoncent, exactement comme dans le cas des conjectures de Weil, un lien indissociable entre fonction L et complexe de cohomologie par le truchement d'un *élément zêta*.

Voici résumé sous forme visuelle le treillis des liens unissant quelques unes des grandes conjectures de la géométrie arithmétique du dernier siècle. Ceci n'est bien sûr qu'une infime partie du continent, ou de la toile d'araignée, des ces conjectures. L'ombre immense du programme de Langlands plane sur lui, et les conjectures de modularité prolifèrent au point de contact entre ce graphe et celui de ces conjectures, tandis que dans une autre direction, on peut sans aucune solution de continuité partir d'un point quelconque de ce graphe et aborder les grandes conjectures la géométrie algébrique (indépendance de ℓ, conjecture de monodromie-poids, conjectures standard...), de l'arithmétique diophantienne (conjecture de Lang...) et des immenses généralisations de l'hypothèse de Riemann complexe.



On sait bien par ailleurs, que les liens matérialisés ici, qui sont des liens historiques d'influence et d'inspiration sont loin d'être les seuls. Au coeur des démonstration des cas très particuliers que nous connaissons de ces résultats se trouvent la philosophie des autres, parfois de manière surprenante et paradoxale. Pour y avoir contribué, je mentionne que certaines propriétés de la théorie d'Iwasawa - donc sur la périphérie gauche de ce diagramme - conjecturées notamment par Ralph Greenberg se sont avérées en dernière analyse découler de la conjecture monodromie-poids, très loin du côté de la géométrie algébrique, et inversement les meilleurs résultats connus sur la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (une conjecture rappellons-le qui relie des points rationnels à une fonction holomorphe) découlent tous de méthodes automorphes et p-adiques.

Les risques de la subjectivité À ce stade de mon exposé, j'avoue un peu de timidité, car je crains d'être victime de la subjectivité la plus vulgaire, celle qui vous fait prendre votre propre objet de recherche pour un problème central dont l'intérêt devrait s'imposer à tous. Pourtant, j'ose le dire : je considère que ces conjectures entrelacées posent un problème vif et inédit à la philosophie des sciences et à l'épistémologie, un problème dont la philosophie ne s'est peut-être pas emparé à la mesure de l'importance que je lui donne.

On ne connaît bien l'impact des mathématiques sur la philosophie, mais pour Platon, Aristote, Descartes, Pascal, Kant, Husserl, Wittgenstein ou Quine (pour m'en tenir aux philosophes) l'intérêt problématique des mathématiques, et j'emploi à dessin l'adjectif problématique pour sa polysémie en espérant jouer sur les deux sens, l'intérêt problématique est son rapport à ce qui est vrai : la possibilité qu'offre les mathématiques d'accéder à une forme de vérité qui semble différente des autres, ou à des vérités usuelles mais par des méthodes qui sont différentes. Le problème, en un mot, du rapport entre vérité et savoir. Ici, nous sommes confrontés à un problème qui me semble distinct et nouveau : le problème épistémologique de l'articulation entre vérité et ignorance.

La situation me paraît tout à différente avec les grands ignorances des autres sciences exactes. Les premières tentatives de concilier théorie de la relativité et mécanique quantique, et les observations de Zwicky indiquant l'existence d'une matière obscure dans la galaxie d'Andromède sont à peu près contemporaines de la conjecture d'Artin, et on ne sait toujours pas ce qu'est la matière noire ni n'a-t-on de théorie fonctionnelle consensuelle de la gravitation quantique. Les principes fondamentaux de la vie terrestre basée sur la réplication du brin d'ADN par l'ARN messager et de la synthèse médiée des protéines sont contemporains de la théorie des schémas et de l'article de Grothendieck à Tohoku, et on n'a toujours pas de modèle crédible pour l'émergence inorganique de ce processus. Mais là s'arrêtent la comparaison. En physique fondamentale, en astrophysique ou en biologie fondamentale, on ne sait tout simplement pas. En mathématiques, face à ce paysage conjectural, ce n'est pas que nous ne savons pas assez, c'est que nous en savons trop. On connaît un océan de savoirs, parfaitement corroborés expérimentalement, dont le sens général est très clair, et dont l'harmonie mutuelle soutient l'ensemble de l'édifice, mais on ne sait pas si ce que l'on sait est vrai. Le groupe de Tate-Shafarevich des arithméticiens est *quantitativement* tout aussi mystérieux que la matière noire ou la courbe de rotation plate des astrophysiciens, mais *qualitativement* ces deux mystères sont opposés : chaque prévision expérimentale sur la nature de la matière noire est falsifiée par l'expérience, et ce n'est pas une exagération d'affirmer que nous n'avons aucune idée de sa nature ; chaque prévision expérimentale sur le groupe de Tate-Shafarevich est impeccablement vérifiée et nous savons parfaitement ce que c'est (un des avatars arithmétiques/cohomologique de la fonction L). Les fins connaisseurs de ces deux sujets auront remarqué que j'ai choisi cette paire de sujet non seulement parce que la finitude du groupe Tate-Shafarevich des courbes elliptiques et la nature de la matière noire sont des problèmes ouverts majeurs de leurs sciences respectives, mais également parce que l'astronome ayant fait le plus pour populariser le problème de la matière noire - Vera Rubin - est la mère de Karl Rubin, le premier mathématicien a voir démontré qu'une courbe elliptique avait un groupe de Tate-Shafarevich fini. De même, les grandes énigmes mathématiques du passé me paraissent qualitativement très distincte. Le postulat des parallèles d'Euclide découlent-ils des autres axiomes, sa négation entraînent-elles des contradictions, est-ce une propriété de l'espace physique ? Nous ne le savions pas. Désormais, nous en savons trop.

Il me semble que cette situation est épistémologiquement unique. Je ne vois pas d'autres moments de l'histoire de la pensée humaine, où nous ayons sous les yeux, pour ainsi dire à notre disposition, une immensité troublante de savoirs *up to grab* comme disent les anglophones. Un savoir que nous pouvons mobiliser avec une précision absolue, et qui résiste pour autant pied à pied aux efforts des mathématiciens, parmi lesquels certains des esprits les plus remarquables du siècle dernier et de celui-ci. Nous ne connaissons toujours pas de courbe elliptique de rang supérieur ou égal à 2 dont nous sachions que le groupe de Tate-Shafarevich est fini. Je ne crois pas me tromper en disant qu'il n'y aucune fonction de la classe de Selberg pour laquelle on connaisse l'hypothèse de Riemann.

Épistémologie pragmatique et cognitive Après cette longue introduction problématique, je voudrais prendre position et tenter d'élucider le mystère de ce savoir du point de vue d'une épistémologie structuraliste génétique pragmatique des mathématiques. Quelques commentaires sur ces trois adjectifs.

1. Ma discussion sera structuraliste, non seulement car je crois que l'entendement humain est biologiquement structurée et qu'il n'y a de ce point de vue aucune connaissance qui ne soit connaissance d'une structure, mais également parce qu'il ne peut échapper à personne que le tournant conjectural en mathématique est parallèle à la réorganisation structuraliste des mathématiques. La plupart des conjectures du treillis précédent sont nées ou ont été reformulées avec un puissant point de vue catégorique à l'esprit.

2. Mon point de vue sera génétique, car je pense que les structures du point précédent ne sont ni des objets externes de la cognition, ni des données de l'entendement, mais la résultante d'opérations mentales, de manipulations du sujet pensant.

Si depuis le Ménon, on peut considérer la duplication du carré (soit encore le théorème de Pythagore dans le cas isocèle) comme la démonstration emblématique de l'épistémologie platonicienne, il me semble que s'il fallait choisir une démonstration emblématique de l'épistémologie structuraliste génétique, il faudrait choisir le théorème de Lagrange, et j'invite chacun d'entre vous à reconstruire les étapes de la démonstration de ce théorème pour ressentir l'aller-retour entre opérations mentales (en l'occurrence l'abstraction du concept même d'*opération* en ce qu'il présuppose, je crois pour des raisons fondamentales des schèmes de la cognition humaine, d'associativité et de réversibilité) entre opérations mentales et structures mathématiques. La *Ur*-démonstration platonicienne de la duplication du carré porte en elle les problèmes de l'épistémologie platonicienne : elle implique immédiatement que $\sqrt{2}$ est irrationnel et suggère donc la question complexe pour cette épistémologie de l'introduction de nouveaux objets mathématiques et de la légitimité de cette introduction. La *Ur*-démonstration de l'épistémologie structuraliste génétique porte je crois aussi en elle les germes du problème philosophique qui nous occupe aujourd'hui. Elle a en effet comme corollaire immédiat que tout groupe d'ordre premier p est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, ce qui nous fait découvrir que le coeur de la notion mentale fondamentale d'action est intimement lié par la notion de nombre premier au coeur insécable d'autres opérations mentales qui nous paraissent tout à fait différentes, à savoir la suite numérique et la notion de partage ou de divisibilité dans celle-ci. C'est exactement ce problème, mais à une échelle autrement plus conséquente, que me semble poser le tournant conjectural.

Mais avant d'approfondir cette question, un mot sur le dernier adjectif.

3. Par pragmatique, je fais référence à la perspective épistémologique qui caractérise les mathématiques par leur capacité à être fidèlement transmis et avec un très haut degré de consensus, une épistémologie que l'on pourra rattacher aux noms de Rorty et Kitcher si on cherche à lui donner un généalogie philosophique déterminée. Du point de vue de cette épistémologie, sont mathématiques les énoncés que l'enquête raisonnée permet de reconstruire par soi-même sans appel à la mémoire ou à l'expérience sensible avec un très haut degré de consensus, et l'on sépare par ce critère les mathématiques des sciences naturelles, qui requièrent un appel à l'expérience sensible raisonnée, et de la spéculation philosophique ou esthétique. Cette épistémologie s'est trouvée dans les dernières décennies en forte complémentarité avec des approches inspirées des sciences cognitives, dont celles qui de l'approche structuraliste génétique mentionnée plus haut.

Si j'ai choisi cette perspective pour me pencher sur le problème épistémologique du continent architectural, c'est pour une triple raison. Tout d'abord, c'est une épistémologie qui me parait cohérente et à laquelle je peux moi-même souscrire sans me faire violence, que je m'efforce de faire de l'épistémologie ou que je m'efforce de faire des mathématiques. Ensuite, c'est une épistémologie qui me parait au premier abord être en tension maximale avec le continent conjectural. Du point de vue de l'épistémologie réaliste, il n'y a probablement pas de mystère à l'existence du continent conjectural, encore que le fait que nous ayons pu deviner son existence sans parvenir à l'aborder tout à fait et le fait que sa découverte est contemporaine du tournant structuraliste en mathématiques devrait interroger même le réaliste le plus convaincu. Pour qui pense que le progrès mathématiques est une édification de structure par application d'opérations mentales, l'existence de correspondences mystérieuses entre certaines de ces structures construites par des intuitions et des schèmes de la cognition tout à fait distincts et à des fins différentes pose un problème direct et frontal. En même temps et paradoxalement, il est indéniable que cette épistémologie a une affinité toute particulière avec le tournant conjectural. Tout d'abord, la reformulation structuraliste des mathématiques (initiée par Noether et dont le champion est Bourbaki) est parfaitement contemporaine du tournant conjectural, et bon nombre des acteurs majeurs sont les mêmes.

Du reste, la plupart des grandes conjectures du continent conjecture admettent une formulation, une reformulation ou une inspiration directement structuraliste, voir catégorique. Ceci est bien connu, et déjà noté par Mazur dans l'article à *Synthèse* que j'ai mentionné au début de cet exposé.

Les affinités du tournant conjectural avec la version génétique et pragmatique sont peut-être moins connues, et je voudrais mentionner trois exemples concrets qui me paraissent significatifs.

1. En 1955, au congrès de Tokyo-Nikko, Taniyama a fait circulé un document rassemblant des problèmes ouverts qui lui paraissaient intéressants. Parmi eux, celui de la modularité des courbes elliptiques, c'est-à-dire la possibilité d'associer une forme modulaire à une courbe elliptique. Serre a lu ce document et de son propre témoignage comme de celui de Shimura, dans les dix années qui suivirent, il n'accorda que peu d'intérêt à cette question. Début 1966, Weil montre que dans certain cas, cette association est étroite, parfaitement spécifiée et met en correspondance des invariants du côté modulaire comme du côté elliptique. Il conjecture que cette correspondance pourrait être générale. Au printemps 1966, il explique cela à Serre dans un café non loin d'ici et Serre se souvient être rentré chez lui et avoir joué avec le dictionnaire pendant tout l'après-midi. “Au bout de quelques heures” écrira-t-il trois décennies plus tard “j'étais sûr que la conjecture était vraie”, et il insistera plus tard que c'est l'article de Weil qui a transformé la question de Taniyama et Shimura en une *conjecture*. Tous les ingrédients de l'épistémologie structuraliste génétique pragmatique me paraissent intervenir dans l'attitude de Serre. Tout d'abord, un relatif désintérêt pour la question de savoir si l'on peut associer une courbe elliptique à une forme modulaire si cette association ne s'inscrit pas dans une forme de correspondance structurelle spécifiée. Ensuite, la dimension opératoire. Serre veut pouvoir manipuler les objets mentaux, et c'est cette capacité de manipulation qui établit l'intérêt de l'énoncé. Et non seulement l'énoncé, mais même l'énoncé. D'un point de vue strictement logique, la conjecture de Shimura est bien sûr strictement plus faible que celle de Weil. Pourtant, c'est précisément cette force supplémentaire et la capacité opératoire qu'elle offre qui convainc Serre en quelques heures qu'elle est vraie. Voilà qui rappelle fortement la célèbre citation de William James, selon laquelle la vérité est un processus, le processus de vérification, qui fait d'un énoncé une vérité.

2. Le deuxième exemple, je le tiens de Kato à qui j'ai demandé un jour s'il accepterait de me raconter l'histoire de sa reformulation des conjectures de Bloch-Kato. Il est peu de dire que j'ai été étonné de la réponse. Kato m'a expliqué qu'un séminaire d'arithmétique était organisé à l'Université de Tokyo dans lequel il était chargé de présenter la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer et auquel assisterait Iwasawa, venu pour l'occasion des États-Unis. Kato, par respect pour Iwasawa, a tenu et je le cite “j'ai voulu expliquer à Iwasawa que la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer était en fait sa

conjecture, mais présentée différemment". La motivation d'une conjecture majeure de l'arithmétique était... pédagogique.

3. Le dernier exemple est rapporté par Mark Kisin. Celui-ci raconte que lorsqu'il était étudiant post-doctoral à Sidney, il a commencé à s'intéresser à la conjecture de Fontaine-Mazur. Cette conjecture est trop technique pour pouvoir être énoncée précisément ici mais on peut en résumer facilement l'esprit. Il existe un objet général d'étude mathématiques - une structure, si l'on veut - qui est la catégorie des représentations galoisiennes p-adiques. Parmi les représentations galoisiennes p-adiques, il y en a un tout petit nombre qui ont des propriétés très particulières, celles qui viennent de la géométrie. Dans la liste des propriétés qu'une représentation galoisienne provenant de la géométrie doit satisfaire, une est tout à fait banale, une sophistiquée et trois absolument époustouflantes. Pour les experts dans la salle, je mentionne que la propriété banale est la non-ramification en dehors d'un ensemble fini, la propriété sophistiquée est d'être de Rham au sens de Fontaine en p et que les propriétés époustouflantes sont la pureté, l'automorphie et l'appartenance à un système compatible. L'esprit de la conjecture de Fontaine-Mazur est que la propriété banale et la propriété sophistiquée impliquent à elles-seules le fait d'être géométrique, et donc en particulier les trois propriétés époustouflantes. La propriété banale étant... banale, on peut résumer en disant que la propriété sophistiquée discrimine à elle-seule les représentations géométriques des autres. Mark Kisin témoigne qu'il a montré énormément de scepticisme fasse à cette conjecture, et ce pour deux raisons. La première était psychologique : il lui semblait complètement invraisemblable que la propriété sophistiquée, à elle seule, puisse pour ainsi dire tenir sur ses épaules les trois propriétés époustouflantes. Fontaine étant justement de passage à Sidney, Kisin lui avoue son scepticisme et lui demande de justifier sa conjecture. D'après les souvenirs de Kisin, Fontaine l'a alors regardé et lui a lancé un défi "Well, find a counter-example !". Or il se trouve que la psychologie n'était pas la seule à justifier le scepticisme de Kisin. Ce dernier est un spécialiste d'un objet appelé Courbe de Hecke et sur cette courbe existe des représentations galoisiennes non-géométriques qui sont entourées par des représentations qui lui sont extraordinairement semblables mais qui elles sont géométriques. Kisin était persuadé que la simple condition d'être de Rham en p (ou plutôt de ne pas l'être) ne pouvait être assez puissante pour démasquer l'unique représentation non-géométrique parmi la foule serrée des imposteurs, et ainsi l'unique représentation non-géométrique serait un contre-exemple à la conjecture de Fontaine-Mazur. Piqué par le défi de Fontaine, il se lance dans l'étude fine de la représentation non-géométrique et de son entourage d'imposteurs et.... découvre que la condition sophistiquée joue précisément le rôle prévu par la conjecture (conjecture dont je précise pourtant qu'elle est antérieure à l'introduction de la Courbe de Hecke, si bien que ce phénomène n'a en lui-même pas pu jouer de rôle direct dans l'élaboration de la conjecture). Au lieu de trouver un contre-exemple, Kisin a fini par démontrer les

premiers cas substantiels de la conjecture de Fontaine-Mazur.

Dans ces trois cas, ce que je trouve très significatif est que la conviction de l'acteur mathématicien n'est pas emportée par une foi mystique ou une esthétique transcendantale : elle est au contraire le fruit d'un processus banal d'exploration pragmatique, qui en définitive se résume à la citation que j'ai choisie comme titre à cet exposé. Après manipulation et exploration, on en vient à croire la conjecture parce que bien qu'il soit difficile d'y croire, il est devenu encore plus difficile de ne pas y croire (cette citation étant elle-même issue d'un courier de Jean-Marc Fontaine discutant de ce qui allait devenir la Courbe de Fargues-Fontaine, un objet récent des mathématiques mais dont il est déjà extrêmement clair qu'il joue un rôle central dans le continent conjectural).

Le problème épistémologique Voici enfin sous forme complète le problème épistémologique sur lequel j'ai voulu attirer l'attention dans cet exposé.

> **Comment se fait-il que les structures mathématiques construites par les opérations mentales abstraites qui sous-tendent notre faculté cognitive mathématique manifestent des propriétés de correspondances exophoriques et endophoriques si spectaculaires, propriétés que nous pouvons déceler (puisque nous les avons décelées) et dont nous pouvons nous convaincre de manière impeccablement pragmatique, mais qui résistent si opiniâtrement à nos capacités de démonstration ? Ou sous forme de slogan, comment pouvons-nous en savoir autant, alors que nous en savons si peu ?**

Une fois reformulée sous cette dernière forme de slogan, il apparaît que le problème que je veux soulever est plus ou moins le problème de l'épistémologie elle-même, tel que formulé déjà par Socrate dans ces pressantes questions à ces interlocuteurs. Simplement je le soulève ici pour un petit pan du sa voir humain qui vous l'avez compris, me paraît posé un problème unique et inédit.