

Enveloppe d'holomorphie locale des variétés CR

et élimination des singularités

pour les fonctions CR intégrables

Projet de note, par Joël MERKER* et Egmont PORTEN**.

(*) LATP, CMI, 39 rue Joliot Curie, F-13453 Marseille Cedex 13
Courriel : merker@gyptis.univ-mrs.fr

(**) Max-Planck-Gesellschaft, Humboldt-Universität zu Berlin
Jägerstrasse, 10-11, D-10117 Berlin, Germany
Courriel : egmont@mathematik.hu-berlin.de

Résumé. Soient M une variété CR localement plongeable et $\Phi \subset M$ un fermé. On donne des conditions suffisantes pour que les fonctions L_{loc}^1 qui sont CR sur $M \setminus \Phi$ le soient aussi sur M tout entier.

**Local envelope of holomorphy of CR manifolds
and removable singularities for integrable CR functions.**

Abstract. Let M be a locally embeddable CR manifold and $\Phi \subset M$ be a closed set. We give sufficient conditions in order that L_{loc}^1 functions on M which are CR on $M \setminus \Phi$ are CR on M .

Abridged English Version. Let M be a locally embeddable CR manifold, $\dim_{CR} M = m$, $\text{codim } M = n$, $\dim M = d = 2m + n$ and $\Phi \subset M$ a closed set. We give various conditions in order that Φ is L^1 -removable, *i.e.*

$$L_{loc}^1(M) \cap L_{loc,CR}^1(M \setminus \Phi) = L_{loc,CR}^1(M) \quad (1)$$

Let H^κ denote κ -dimensional Hausdorff measure.

THEOREM 1. – *If M is \mathcal{C}^3 , a function $f \in L_{loc}^1(M)$ is CR if and only if $f|_{\mathcal{O}}$ belongs to $L_{loc,CR}^1(\mathcal{O})$ for almost every CR orbit \mathcal{O} .*

COROLLARY 1. – *If $\Phi = \cup_{a \in A} \mathcal{O}_a$ is of zero d -dimensional measure, then (1) is satisfied.*

Theorem 1 reduces the problem to the case where M is a single CR orbit, *i.e.* M is globally minimal [5].

THEOREM 2. – *Let M be $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, $0 \leq \alpha < 1$, $\dim_{CR} M = m \geq 1$. Every closed subset E of M such that M and $M \setminus E$ are globally minimal and such that $H_{loc}^{d-3}(E) < \infty$ is L^1 -removable.*

The notion of wedge (\mathcal{W} -)removability is defined here in higher codimension.

THEOREM 3. – *Let M be \mathcal{C}^ω , $\dim_{CR} M = m \geq 1$. Every closed set $E \subset M$ such that M and $M \setminus E$ are globally minimal and such that $H^{d-2}(E) = 0$ is \mathcal{W} - and L^1 -removable.*

THEOREM 4. – Let M be $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, $m \geq 1$, and let N be a \mathcal{C}^2 connected submanifold of M such that M and $M \setminus N$ are globally minimal.

- (i) If $\text{codim}_M N \geq 3$, then N is \mathcal{W} - and L^1 -removable;
- (ii) Every closed set $\Phi \subset N$ is \mathcal{W} - and L^1 -removable if $\Phi \neq N$, $\text{codim}_M N = 2$ and $m \geq 1$;
- (iii) N is \mathcal{W} - and L^1 -removable if N is generic at one point, $\text{codim}_M N = 2$ and $m \geq 2$.

A set $S \subset M$ is called a \mathcal{C}^λ peak set, $0 < \lambda < 1$, if there exists a nonconstant function $\varpi \in \mathcal{C}_{CR}^\lambda(M)$ such that $S = \{\varpi = 1\}$ and $|\varpi| \leq 1$.

THEOREM 5. – Let M be $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ globally minimal. Then every \mathcal{C}^λ peak set S satisfies $H^d(S) = 0$ and is L^1 -removable.

COROLLARY 2. – Let M be \mathcal{C}^3 . Then a \mathcal{C}^λ peak set S is L^1 -removable if $H^d(\cup_{\mathcal{O} \subset S} \mathcal{O}) = 0$.

1. Énoncés

Soient M une variété CR localement plongeable, de dimension CR $\dim_{CR} M = m$, de codimension $\text{codim } M = n$, de dimension $\dim M = d = 2m + n$ et soit $\Phi \subset M$ un fermé de M . Dans ce travail, on cherche des conditions, portant sur M et Φ , pour que l'on ait

$$L_{loc}^1(M) \cap L_{loc,CR}^1(M \setminus \Phi) = L_{loc}^1(M). \quad (1)$$

Si (1) est vérifiée, on dira que Φ est L^1 -éliminable. D'après Trépreau [10], toute variété CR M est réunion disjointe (en général transfinie) de sous-variétés CR immergées connexes $M = \cup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{O}_i$, $\mathcal{O}_i \subset M$, appelées orbites CR de M , qui sont caractéristiques, i.e. $\dim_{CR} \mathcal{O}_i = \dim_{CR} M$ et minimales pour l'inclusion et cette propriété. Un premier résultat concerne ces variétés. Il a été démontré par B. Jöricke dans la classe $\mathcal{C}^0(M)$ [2] et dans $L_{loc}^1(M)$ si M est une hypersurface de classe \mathcal{C}^2 [3]. Enfin, le second auteur l'a étendu à $L_{loc}^1(M)$ en codimension quelconque dans sa thèse [9].

THÉORÈME 1. – Si M est de classe \mathcal{C}^3 , une fonction $f \in L_{loc}^1(M)$ est CR si et seulement si $f|_{\mathcal{O}_i}$ appartient à $L_{loc,CR}^1(\mathcal{O}_i)$ pour presque toute orbite CR \mathcal{O}_i , au sens de la mesure sur M .

La restriction $f|_{\mathcal{O}_i}$ est bien définie et appartient à $L_{loc}^1(\mathcal{O}_i)$ pour presque toute orbite \mathcal{O}_i . Nous renvoyons le lecteur à [9] ou [7] pour une preuve complète.

COROLLAIRE 1. – Si $\Phi = \cup_{a \in A} \mathcal{O}_a$ est de mesure d -dimensionnelle nulle, alors (1) est vérifiée.

Le théorème 1 réduit l'étude de (1) au cas où $M = \mathcal{O}_i$ est une seule orbite. L'aspect central de notre travail consiste justement à replacer l'étude de (1) dans le contexte de la théorie des orbites CR et de l'extension des fonctions CR, bénéficiant en cela des travaux de Trépreau, Tumanov et Jöricke. Lorsque M est une hypersurface, le problème (1) est traité par Jöricke et Chirka-Stout [1].

Bien entendu, les orbites sont aussi localement plongeables. Soit M générique dans \mathbb{C}^{m+n} . Dans ce cas, un ouvert connexe \mathcal{W}_0 sera appelé *wedge attaché* à $M \setminus \Phi$ s'il existe une section continue $\eta : M \setminus \Phi \rightarrow T_M \mathbb{C}^{m+n} \setminus \{0\}$ du fibré normal à M telle que \mathcal{W}_0 contient un wedge \mathcal{W}_p d'edge M en $(p, \eta(p))$ (cf. [11], p.3), pour tout point $p \in M \setminus \Phi$. Cette notion a un sens local lorsque M est localement plongeable. Le problème (1) fait intervenir la géométrie des wedges attachés.

DÉFINITION 1. Φ est dit \mathcal{W} -éliminable si, pour tout wedge \mathcal{W}_0 attaché à $M \setminus \Phi$, il existe un wedge \mathcal{W} attaché à M tel que les fonctions holomorphes dans \mathcal{W}_0 se prolongent holomorphiquement à \mathcal{W} .

On note $H^\kappa(E)$ la mesure de Hausdorff κ -dimensionnelle de E , pour une métrique fixée sur M . H^d s'identifie à la mesure de Lebesgue. Enfin, on dira qu'une variété CR est *globalement minimale* si elle consiste en une seule orbite CR. Le fermé Φ sera noté E, N ou S , suivant le contexte.

THÉORÈME 2. – Soit M de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $\dim_{CR} M = m \geq 1$. Tout fermé E de M tel que M et $M \setminus E$ sont globalement minimales et tel que $H_{loc}^{d-3}(E) < \infty$ est L^1 -éliminable.

Par exemple, sous ces hypothèses, toute sous-variété N de codimension au moins trois, est L^1 -éliminable. Le résultat suivant ([8]) s'applique à l'extension des fonctions CR méromorphes.

THÉORÈME 3. – Soit M de classe \mathcal{C}^ω , $\dim_{CR} M = m \geq 1$. Tout fermé $E \subset M$ tel que M et $M \setminus E$ sont globalement minimales et tel que $H^{d-2}(E) = 0$ est \mathcal{W} - et L^1 -éliminable.

Le cas de singularités plus massives est traité dans [7]:

THÉORÈME 4. – Soient M $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, $m \geq 1$. Soit N une sous-variété connexe de M , de classe \mathcal{C}^2 telle que M et $M \setminus N$ sont globalement minimales. Alors

- (i) N est \mathcal{W} - et L^1 -éliminable si $\text{codim}_M N \geq 3$;
- (ii) Tout fermé Φ de N est \mathcal{W} - et L^1 -éliminable, si $\Phi \neq N$, $\text{codim}_M N = 2$ et $m \geq 1$;
- (iii) N est \mathcal{W} - et L^1 -éliminable si N est générique en au moins un point, $\text{codim}_M N = 2$ et $m \geq 2$.

Remarque. L'élimination L^1 de compacts $K \subset\subset N$ de variétés $N \subset M$ génériques de codimension un apparaît dans les travaux de B. Jöricke [3] pour $n = 1$ et dans [9] pour $n \geq 2$.

Une version plus faible du théorème 4 est contenue dans [6] dans le cas de l'élimination \mathcal{W} . L'hypothèse d'orbite sur M et $M \setminus N$ est essentiellement nécessaire : si elle n'est pas satisfaite, il existe des exemples simples de M , N et de distributions CR de support une sous-variété caractéristique fermée S de $M \setminus N$ qui ne se prolongent pas holomorphiquement à un wedge au-dessus de N . Enfin, les hypothèses géométriques sur N et Φ sont calquées sur celles qui rendent les théorèmes 2,3 et 4 connus lorsque M est un ouvert de \mathbb{C}^m , i.e. $n = 0$.

Maintenant, un sous-ensemble S de M est dit *ensemble pic höldérien* s'il a la forme $\{\varpi = 1\}$, avec $\varpi \in \mathcal{C}_{CR}^\gamma(M)$ non constante pour un γ , $0 < \gamma < 1$ et $|\varpi| \leq 1$. Grâce au théorème 1 et aux techniques de déformation de disques, on généralise les résultats de [4].

THÉORÈME 5. – Soient M $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ globalement minimale. Tout ensemble pic höldérien S de M vérifie $H^d(S) = 0$ et est L^1 -éliminable.

COROLLAIRE 2. – Soit M \mathcal{C}^3 . Un ensemble pic höldérien S est L^1 -éliminable si $H^d(\bigcup_{\mathcal{O}_i \subset S} \mathcal{O}_i) = 0$.

Enfin, puisque L_{loc}^p se plonge dans L_{loc}^1 pour $p \geq 1$, tous ces résultats sont valables dans L_{loc}^p .

2. Preuves.

Nous allons donner ici un résumé des preuves des théorèmes 2,3,4 et 5. Les preuves rigoureuses sont contenues dans [7], [8], [9]. Le théorème 1 pour $f \in \mathcal{C}_{CR}^0(M)$ est démontré dans [2] et dans [9] pour $f \in L_{loc,CR}^p$.

C'est B. Jöricke qui a eu l'idée d'utiliser l'inégalité de Carleson sur des familles régulières de disques analytiques attachés à M pour déduire l'élimination L^1 de l'élimination \mathcal{W} , dans le cas hypersurface. Dans ce travail et dans [7], [8], nous raffinons les résultats de [6] pour la \mathcal{W} -élimination et les étendons à L^1 comme dans [3]. Mentionnons enfin que la technique dite de balayage par des wedges utilisée dans [3], [1], [9] ne s'appliquerait qu'en dimension CR $m \geq 2$; c'est pourquoi nous utilisons ici les déformations de disques analytiques et le principe de continuité.

On traite le cas L^1 , le cas \mathcal{W} sera démontré en cours. La technique consiste en un grand nombre de déformations de M dans des ouverts obtenus en attachant des disques analytiques à M et à ses déformations. En particulier, nous décrivons une partie de l'enveloppe d'holomorphie d'ouverts de type wedge attachés à $M \setminus \Phi$, assez étendue pour procéder ensuite à l'élimination L^1 .

Étape 1. Grâce au théorème d'extension de Trépreau-Tumanov généralisé ([5], [6]) et au théorème de l'ijedge of the wedge \mathbb{C}^n , on peut prolonger holomorphiquement $f \in L_{loc,CR}^1(M \setminus \Phi)$ à un wedge \mathcal{W}_0 attaché à $M \setminus \Phi$. Pour le contrôle en norme L^1 de l'extension, on utilise de bonnes familles de disques analytiques attachés à M . Soit Δ le disque unité dans \mathbb{C} , $b\Delta$ son bord.

DÉFINITION 2. – On appelle *famille régulière en p de disques analytiques attachés à M* une application $\mathcal{C}^{2,\beta}$, $\beta < \alpha$, $A : \mathcal{S} \times \mathcal{V} \times \overline{\Delta} \rightarrow \mathbb{C}^{m+n}$, $(s, v, \zeta) \mapsto A_{s,v}(\zeta)$, holomorphe en ζ , où $(0 \in) \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{2m+n-1}$, $(0 \in) \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ sont des ouverts, telle que $A_{0,v}(1) = p$ et que

- 1) L'application $\mathcal{S} \times b\Delta \rightarrow M$, $(s, \zeta) \mapsto A_{s,v}(\zeta)$ est un plongement, $\forall v \in \mathcal{V}$;
- 2) Le vecteur $\eta := -\partial A_{0,0}/\partial \zeta(1) \notin T_p M$ et $\text{rang}(v \mapsto \text{pr}_{T_p \mathbb{C}^{m+n}/(T_p M \oplus \mathbb{R}\eta)}(-\partial A_{0,v}/\partial \zeta(1))) = n - 1$.

Toute famille régulière définit un wedge $\mathcal{W}_{A,p}$ en (p, η) par $\mathcal{W}_{A,p} := \{A_{s,v}(\zeta) \in \mathbb{C}^{m+n} : (s, v, \zeta) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{V}_1 \times \overset{\circ}{\Delta}_1\}$, où $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$, $\Delta_1 = \overline{\Delta} \cap \Delta(1, \rho_1)$, $\rho_1 > 0$. Soit $\mathcal{W} = \mathcal{W}(U, C) = \{z + \eta : z \in U, \eta \in C\}$ un wedge de base $U \subset M$ et de cône $C \subset \mathbb{C}^{m+n}$, e.g. $\mathcal{W} \approx \mathcal{W}_{A,p}$.

DÉFINITION 3. – Une fonction $f \in L_{loc,CR}^1(M)$ est dite *prolongeable dans $H_a^1(\mathcal{W})$* s'il existe $F \in \mathcal{H}(\mathcal{W})$ telle que $F|_{U_\eta} \rightarrow f$ au sens L^1 , où $U_\eta = U + \eta$, $\eta \in C$, uniformément lorsque $\eta \rightarrow 0$.

Pour démontrer l'extension de f dans la classe de Hardy $H_a^1(\mathcal{W}_{A,p})$, on utilise des familles régulières attachées à des déformations de M :

PROPOSITION 1 ([9]). – *Soit M globalement minimale, $\mathcal{C}^{2,\alpha}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une déformation $\mathcal{C}^{2,\beta}$ (d, M^d) de M à support compact avec $M^d \equiv M$ près de p et $\|M^d - M\|_{\mathcal{C}^{2,\beta}} < \varepsilon$, telle que*

- 1) *Il existe une famille régulière de disques $A_{s,v}$ attachés à M^d ;*
- 2) *Il existe un opérateur linéaire borné de prolongement $L_{loc,CR}^1(M) \rightarrow L_{loc,CR}^1(M^d)$, $f \mapsto f^d$, tel que $f^d \equiv f$ sur l'ensemble où M^d coïncide avec M ;*
- 3) *Pour $f \in L_{loc,CR}^1(M)$ fixée, il existe une déformation d telle que $\|f^d - f\|_{L^1} < \varepsilon$.*

Cette construction demande l'emploi en détail des techniques de déformation de disques de Bishop élaborées par Tumanov ([11]) et l'existence de M^d satisfaisant 1) et 2) équivaut à la globalité minimale ([9], [7]).

PROPOSITION 2. – $L_{loc,CR}^1(M)$ est prolongeable dans $H_a^1(\mathcal{W}_{A,p})$.

En effet, sur chaque disque remplissant $\mathcal{W}_{A,p}$, on se ramène à l'estimée de Carleson sur Δ : si $r(\theta) \in \mathcal{C}^1([-\pi, \pi], [0, 1])$ telle que $r \equiv r_1$ sur $(-\theta_1, \theta_1)$, $0 < r_1 < 1$ et $\text{supp}(1 - r) \subset (-\theta_0, \theta_0)$, $0 < \theta_1 < \theta_0 < \pi$, alors il existe $C > 0$ telle que $\forall u \in H_a^1(\Delta)$, $\int_{-\theta_0}^{\theta_0} |u(re^{i\theta})| d\theta \leq C \|u\|_{L^1(b\Delta)}$. \square

Étape 2. On note $\mathcal{H}(U)$ l'anneau des fonctions holomorphes dans U et $\mathcal{V}(E)$ un voisinage ouvert arbitrairement petit d'un ensemble E dans \mathbb{C}^{m+n} . La déformation suivante réduit la démarche au cas où $L_{loc,CR}^1(M \setminus \Phi) \cap L_{loc}^1(M)$ a été remplacé par $\mathcal{H}(\mathcal{V}(M^d \setminus \Phi)) \cap L_{loc}^1(M^d)$.

PROPOSITION 3. – *Soient M $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, générique dans \mathbb{C}^{m+n} , $f \in L_{loc,CR}^1(M)$ et U un ouvert de $M \setminus \Phi$ tel que \overline{U} est compact, avec $M \setminus \Phi$ globalement minimale. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une déformation M^d $\mathcal{C}^{2,\beta}$, $\beta < \alpha$, avec $\text{supp } d = \overline{U}$, $M^d \supset \Phi$, $\|M^d - M\|_{\mathcal{C}^{2,\beta}} < \varepsilon$, telle qu'il existe une fonction $f^d \in L_{loc}^1(M^d) \cap L_{loc,CR}^1(M^d \setminus \Phi) \cap \mathcal{H}(\mathcal{V}(U^d))$ coïncidant avec f sur $M \setminus U$ et telle que $\|f^d - f\|_{L^1} < \varepsilon$.*

La preuve utilise la Proposition 1 et l'inégalité de Carleson sur des déformations successives de M à support la base $U_j \subset M$ de petits wedges \mathcal{W}_{A_j, p_j} tels que $\bigcup_{j \in J} U_j = M$. Il suffira alors de démontrer que $L_{loc}^1(M^d) \cap \mathcal{H}(\mathcal{V}(M^d \setminus \Phi)) = L_{loc,CR}^1(M^d)$. En effet, par $|\int_M (f^d - f) \bar{\partial} \varphi| \leq C_\varphi \varepsilon$ (les mesures sur M et sur M^d étant voisines, puisque $\|M^d - M\|_{\mathcal{C}^{2,\beta}} < \varepsilon$, une telle écriture à un sens),

pour toute $(m+n, m-1)$ -forme à support compact, l'égalité $\int_{M^d} f \bar{\partial} \varphi = 0$ impliquera $\int_M f \bar{\partial} \varphi = 0$, puisque ε est arbitraire. \square

Étape 3: \mathcal{W} -élimination de la singularité. En utilisant l'hypothèse $\mathbb{H}M$ et $M \setminus \Phi$ globalement minimales, on élimine progressivement les points de $\Phi = N, E$ ou K qui se trouvent à l'extrémité d'une courbe intégrale par morceaux de $T^c M$ issue d'un point de $M \setminus \Phi$ et on déforme ensuite M dans le wedge obtenu au-dessus de chaque point qui a été éliminé. À chaque pas, sur une déformation de M encore notée M , la situation se réduit à l'élimination d'un seul point p de Φ disposé comme suit. Il existe un voisinage U de p dans M et M_1 une hypersurface \mathcal{C}^2 dans U qui partage U en deux composantes fermées M_1^- et M_1^+ , $U = M_1^- \cup M_1^+$, $M_1^- \cap M_1^+ = M_1$, telle que $\Phi \cap U \subset M_1^-$, et il existe un disque $A \in \mathcal{C}^{2,\beta}$ attaché à M_1^+ avec $A(1) = p$, $dA/d\theta(1) \in T_p M_1$. Soient ω un voisinage de $U \setminus \Phi$ dans \mathbb{C}^{m+n} et $f \in \mathcal{H}(\omega)$. Les déformations normales de Tumanov nous permettent de développer A en une famille régulière en p de disques analytiques $A_{s,v}$, $A_{0,0} = A$, qui engendre un wedge $\mathcal{W}_{A,p}$:

LEMME 1 ([11].) – *Il existe une famille régulière $A_{s,v}$ attachée à $(M \cap U) \cup \omega$.* \square

Cependant, le bord de ces disques peut toucher la singularité Φ (en fait, $A_{s,v}(b\Delta) \cap \Phi \subset A_{s,v}(b\Delta \cap \Delta_1)$) et le théorème d'approximation de Baouendi-Treves n'est plus valable. Heureusement, le principe de continuité et une propriété d'isotopie des disques à un point nous permet de prolonger f à $\mathcal{W} := \mathcal{W}_{A,p}$ moins un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathcal{W}$, i.e. $F \in \mathcal{H}(\omega \cup (\mathcal{W} \setminus \mathcal{E}))$, comme suit:

DÉFINITION 4. Un disque plongé $A : \bar{\Delta} \rightarrow \mathbb{C}^{m+n}$ est dit *b-isotope à un point dans ω* s'il existe une application $\mathcal{C}^1 [0, 1] \times \bar{\Delta} \ni (t, \zeta) \mapsto A_t(\zeta) \in \mathbb{C}^{m+n}$ telle que $A_t(b\Delta) \subset \omega$, $A_0 = A$, chaque A_t est un disque analytique plongé pour $0 \leq t < 1$ et A_1 est une application constante $\bar{\Delta} \rightarrow \{pt\} \in \omega$.

LEMME 2. – *Sous les conditions des théorèmes 2, 3 et 4, tout disque $A_{s,v}$ tel que $A_{s,v}(b\Delta \cap \Delta_1) \cap \Phi = \emptyset$ est b-isotope à un point dans ω .* \square

LEMME 3. – *Soit $A : b\Delta \rightarrow \omega$, $\bar{\Delta} \rightarrow \mathbb{C}^{m+n}$ b-isotope à un point dans ω . Alors, pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{H}(\omega)$, il existe $F \in \mathcal{H}(\omega \cup \mathcal{V}(A(\bar{\Delta})))$ telle que $F \equiv f$ dans $\mathcal{V}(A(b\Delta))$.* \square

L'ensemble $\mathcal{E} := \{z_1 = A_{s,v}(\zeta_1) \in \mathbb{C}^{m+n} : \zeta_1 \in \overset{\circ}{\Delta}_1, A_{s,v}(b\Delta) \cap \Phi \neq \emptyset\}$ où l'on n'a pas prolongé est feuilleté par des courbes holomorphes. Grâce aux disques attachés à M , on se ramène donc à éliminer la singularité $\mathcal{E} \setminus \omega$ pour $F \in \mathcal{H}(\omega \cup (\mathcal{W} \setminus \mathcal{E})) = \mathcal{H}(\omega \cup (\mathcal{W} \setminus (\mathcal{E} \setminus \omega)))$. À moins que $\text{codim}_{\mathcal{W}} \mathcal{E} = \text{codim}_M \Phi$, le bord de presque tout disque $A_{s,v}$ ne touche en général Φ que sur un ensemble de mesure nulle de $b\Delta$. Le fait que de nombreux disques $A_{s,v}$ satisfont $A_{s,v}(b\Delta \cap \Delta_1) \not\subset \mathcal{E}$ près de $\zeta = 1$, i.e. que $\mathcal{E} \setminus \omega \neq \mathcal{E}$, est crucial pour la suite.

La structure de \mathcal{E} dépend des cas:

- Si $\mathcal{H}_{loc}^{d-3}(E) < \infty$, alors $\mathcal{H}_{loc}^{2m+2n-2}(\mathcal{E}) < \infty$. Soit $f \in L^1(U)$. Dans ce cas, $F \in L^1(\mathcal{W})$ et on démontre que $\mathcal{E} \setminus \omega$ est une singularité éliminable pour F grâce à un principe de méromorphie séparée dû à Shiffman. En effet, on a:

LEMME 4. – *Soit $P \subset \subset \mathcal{W}$ un polydisque. Alors pour presque tout disque de coordonnées $D \subset P$, $D \cap \mathcal{E}$ consiste en un nombre fini de points et $F|_D$ est méromorphe sur D à pôles d'ordre au plus un.*

Le lemme s'applique à $F \in L^1(\mathcal{W}) \cap \mathcal{H}(\omega \cup (\mathcal{W} \setminus \mathcal{E}))$, d'où F est méromorphe dans \mathcal{W} . Si l'ensemble polaire P_F de F est non vide, il ne peut pas contenir une courbe $A_{s,v}(\Delta)$ telle que $A_{s,v}(\overset{\circ}{\Delta}_1) \cap \omega \neq \emptyset$. Donc P_F est constitué des disques dont le bord est entièrement contenu, pour ζ près de 1, dans E . L'ensemble \mathcal{E}_1 correspondant dans \mathcal{W} satisfait maintenant $H^{2m+2n-3}(\mathcal{E}_1) = 0$, mais alors $\mathcal{H}(\mathcal{W} \setminus \mathcal{E}_1) = \mathcal{H}(\mathcal{W})$, donc $P_F = \emptyset$. \square

- Dans la situation du théorème 4, l'énoncé suivant s'applique à (i), (ii) et (iii) :

PROPOSITION 4. – Soit Λ une hypersurface d'un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^{m+n}$ et Φ un fermé de Λ qui ne contient pas d'orbite CR de Λ . Alors $\forall f \in \mathcal{H}(\mathcal{U} \setminus \Phi), \exists F \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ telle que $F|_{\mathcal{U} \setminus \Phi} = f$.

Lorsque $\text{codim}_M N = 2$ (Théorème 4), \mathcal{E} est une hypersurface de \mathcal{W} feuilletée par les $A_{s,v}(\overset{\circ}{\Delta}_1)$, mais tout bord de disque $A_{s,v}(b\Delta \cap \Delta_1)$ ne rencontre N qu'en au plus un point. Donc $\mathcal{E} \setminus \omega$ ne contient pas d'orbite CR de \mathcal{E} : la proposition 4 s'applique. \square

• Lorsque M est \mathcal{C}^ω et $H^{d-2}(\mathcal{E}) = 0$, \mathcal{E} satisfait $H^{2m+2n-1}(E) = 0$. Dans ce cas, le feuilletage de \mathcal{E} est analytique réel et on applique près d'un point de $b\omega \cap \mathcal{E}$ l'énoncé ([8]):

PROPOSITION 5. – Soient $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^{m+n}$ un ouvert \mathcal{C}^ω -feuilleté par des courbes holomorphes $A_\vartheta, \vartheta \in D, \mathcal{U} = \cup_{\vartheta} A_\vartheta, 0 \in \mathcal{U}, D \subset \mathbb{R}^{2m+2n-2}$ un ouvert, $0 \in D, \mathcal{G} \subset D$ un fermé avec $\mathcal{H}^{2m+2n-3}(\mathcal{G}) = 0$ et M_1 une hypersurface \mathcal{C}^1 dans $\mathcal{U}, 0 \in M_1, T_0 M_1 + T_0 A_0 = T_0 \mathbb{C}^{m+n}$, et posons $\mathcal{E} := (\cup_{\vartheta \in \mathcal{G}} A_\vartheta) \cap M_1^-$. Alors $\mathcal{H}(\mathcal{U} \setminus \mathcal{E}) = \mathcal{H}(\mathcal{U})$.

Ici, l'argument utilise une complexification de courbes réelles du feuilletage pour avoir la b -isotopie. \square

Étape 4: valeurs au bord dans L^1 . Pour conclure, Il reste à estimer l'extension F dans le wedge \mathcal{W} en norme L^1 . On applique à $\Phi \subset M_1^-$ l'énoncé:

PROPOSITION 6. – Si $\mathcal{H}_{loc}^{d-2}(\Phi) < \infty$ et si $\mathcal{H}(\omega)$ se prolonge holomorphiquement à un wedge en $p \in M_1^-$, alors p est L^1 -éliminable, i.e. $\mathcal{H} \Phi$ \mathcal{W} -éliminable $_{\dot{z}\dot{z}}$ entraîne $\mathcal{H} \Phi$ L^1 -éliminable $_{\dot{z}\dot{z}}$.

Preuve: Les disques $A_{s,v}$ et l'inégalité de Carleson donnent un contrôle en norme L^1 pour les disques ne touchant pas Φ (i.e. presque tout disque, parce que $\mathcal{H}_{loc}^{d-2}(\Phi) < \infty$), donc de l'extension dans le wedge. L'extension appartient enfin à $H_a^1(\mathcal{W})$, ce qui achève la preuve. \square

Preuve du Théorème 5. Compte tenu de l'existence des familles régulières de disques analytiques et de la Proposition 2, en suivant la démonstration du Théorème 1 dans Kytmanov-Rea [4], on obtient le Théorème 5. \square

References

- [1] E. M. Chirka and E. L. Stout, *Removable singularities in the boundary*, Contributions to Complex Analysis and Analytic Geometry, Aspects of Mathematics **E 26**, Vieweg 1994, 43-104.
- [2] B. Jöricke, *Deformation of CR manifolds, minimal points and CR-manifolds with the microlocal analytic extension property*, J. of Geom. Analysis, **6** (1996), 555-611.
- [3] B. Jöricke, *Boundaries of singularity sets, removable singularities, and CR-invariant subsets of CR-manifolds*, Preprint 1996, à paraître J. Diff. Equ., 82pp.
- [4] A.M. Kytmanov and C. Rea, *Elimination of L^1 singularities on Hölder peak sets for CR functions*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Classe di Scienze, **22** (1995), 211-226.
- [5] J. Merker, *Global minimality of generic manifolds and holomorphic extendibility of CR functions*, Int. Math. Res. Not. **8** (1994), 329-342.
- [6] J. Merker, *On removable singularities for CR functions in higher codimension*, Int. Math. Res. Not. **1** (1997), 21-56.
- [7] J. Merker and E. Porten, *On removable singularities for integrable CR functions*, Preprint 1997, à paraître, 32pp., <http://www.dmi.ens.fr/EDITION/preprints>.
- [8] J. Merker and E. Porten, *On the local meromorphic extension of CR meromorphic functions*, Ann. Polon. Math. **70** (1998), 163-193.
- [9] E. Porten, *On removable singularities for L^p CR functions*, Preprint 1998, à paraître.
- [10] J.-M. Trépreau, *Sur la propagation des singularités dans les variétés CR*, Bull. Soc. Math. Fr. **118** (1990), 403-450.
- [11] A. E. Tumanov, *Connections and propagation of Analyticity for CR Functions*, Duke Math. J. **73** (1994), 1-24.