Courbes projectives extrinsèques $X^1 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$: harmonie avec la cohomologie intrinsèque

Joël MERKER

Table des matières

1. Introduction .... **1.**
2. Géométrie initiale .... **5.**
3. Fibré de jets d'ordre $\kappa \geqslant 1$ en coordonnées .... **7.**
4. Construction de différentielles de jets holomorphes par élimination .... **17.**
5. Transmission de la symétrie des différentielles de jets holomorphes .... **26.**
6. Annulations sur la droite à l'infini $\mathbb{P}^1_\infty$ .... **33.**
7. Amplitude génératrice .... **46.**

1. Introduction

Sur une courbe algébrique complexe projective géométriquement lisse :

$$X^1 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C}),$$

pour un ordre de jets fini quelconque $\kappa \geqslant 1$, et pour un degré homogène $m \geqslant 1$ arbitraire, le fibré des jets de Green-Griffiths [1] :

$$\begin{array}{c} E_{\kappa,m}^{\mathrm{GG}} T_{X^1}^* \\ \big\downarrow \\ X^1, \end{array}$$

— construit fibre à fibre comme polynomialisation m-homogène du fibré des jets :

$$J^\kappa\big(\mathbb{D},\ X^1\big)$$

d'applications holomorphes locales du disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ à valeurs dans X^1 —, est un fibré vectoriel holomorphe de rang égal à :

$$\mathsf{Card}\Big\{\big(m_1, m_2, \dots, m_\kappa\big) \in \mathbb{N}^\kappa\colon\ m_1 + 2\,m_2 + \cdots + \kappa\, m_\kappa = m\Big\}$$

qui admet de plus une certaine filtration naturelle dont le fibré gradué associé :

$$\mathsf{Gr}^\bullet E_{\kappa,m}^{\mathrm{GG}} T_{X^1}^* \ \cong \bigoplus_{\substack{m_1+\cdots+\kappa m_\kappa = m \\ m_1 \geqslant 0,\, \dots,\, m_\kappa \geqslant 0}} \Big(\mathsf{Sym}^{m_1} T_X^* \otimes \cdots \otimes \mathsf{Sym}^{m_\kappa} T_X^*\Big)$$

1. *Voir* [4] pour une présentation détaillée.

est isomorphe à une somme directe combinatoire de fibrés en droites de m_λ-différentielles symétriques :

$$\begin{aligned}\mathsf{Sym}^{m_\lambda} T_X^* \;&\cong\; \big(T_X^*\big)^{\otimes m_\lambda}\\ &\cong\; \mathscr{O}_X\big(m_\lambda(d-3)\big)\end{aligned}$$

eux-mêmes isomorphes à des fibrés en droites canoniques ambiants :

$$\mathscr{O}_X(t) = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(t)\big|_X,$$

grâce à la formule dite *d'adjonction* :

$$T_X^* \cong \mathscr{O}_X(d-3)$$

dont la connaissance est anciennement établie.

Donc :

$$\mathsf{Gr}^\bullet E_{\kappa,m}^{\mathrm{GG}} T_{X^1}^* \;\cong\; \bigoplus_{\substack{m_1+\cdots+\kappa m_\kappa = m\\ m_1\geqslant 0,\,\dots,\,m_\kappa\geqslant 0}} \mathscr{O}_X\Big(\big(m_1+\cdots+m_\kappa\big)\,(d-3)\Big).$$

Sachant que pour $t \geqslant d$ entier :

$$\dim H^0\big(X, \mathscr{O}_X(t)\big) \;=\; \binom{t+2}{2} - \binom{t-d+2}{2},$$

il vient en bornant la cohomologie H^1, pourvu que $d \geqslant 4$ et que $m \gg 1$ soit assez grand :

$$\dim H^0\big(X,\, E_{\kappa,m}^{\mathrm{GG}} T_X^*\big) \;=\; \sum_{m_1+\cdots+\kappa m_\kappa = m} \bigg\{\binom{(m_1+\cdots+m_\kappa)(d-3)+2}{2} - \binom{(m_1+\cdots+m_\kappa)(d-3)-d+2}{2}\bigg\},$$

et un calcul simple montre que lorsque $d \gg 1$ est grand et lorsque $m \to \infty$, il existe une minoration asymptotique sympathique :

$$\dim H^0\big(X,\, E_{\kappa,m}^{\mathrm{GG}} T_X^*\big) \;\geqslant\; \frac{m^\kappa}{\kappa!\,\kappa!}\Big[d^2 \log\kappa + d^2\,\mathrm{O}(1) + \mathrm{O}(d)\Big] + \mathrm{O}\big(m^{\kappa-1}\big).$$

Toutefois, en décidant de passer au fibré gradué associé, cette approche standard occulte le caractère *non-linéaire* essentiel des sections holomorphes globales, elle nie aussi complètement l'exigence mathématique ontologique incontournable de devoir embrasser les objets géométriques modaux dans leur dépendance fondamentale aux êtres définitionnels initiaux, et de plus, elle passe entièrement sous silence le fait que toute la théorie des surfaces de Riemann compactes gagne fort — en ampleur, en cohérence, en compréhension synthétique — à développer une complémentarité systématique harmonieuse entre les aspects *extrinsèques* et les aspects *intrinsèques*, comme l'ont démontré les leçons [3] de Phillip Griffiths, dont le résultat suivant s'inspire.

Théorème 1.1. *Étant donné un ordre de jets arbitraire :*

$$\kappa \geqslant 1,$$

sur une courbe algébrique projective géométriquement lisse quelconque :

$$X^1 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

de degré :

$$d \geqslant \kappa + 3,$$

représentée — dans un système de coordonnées affines :

$$(x, y) \in \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$$

associées à des coordonnées homogènes :

$$\begin{aligned} &[T\colon X\colon Y] \in \mathbb{P}^2 \\ &x = \frac{X}{T}, \quad y = \frac{Y}{T}, \quad \big\{T \neq 0\big\} \cong \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2, \end{aligned}$$

géométriquement adaptées pour que :

$\infty_x := [0\colon 1\colon 0] \notin X^1,$

$\infty_y := [0\colon 0\colon 1] \notin X^1,$

$\mathbb{P}^1_\infty := \big\{[0\colon X\colon Y]\big\}$ *intersecte* X^1 *transversalement en* d *points distincts*,

— comme lieu des zéros

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{C}^2\colon\ R(x, y) = 0\Big\}$$

d'un certain polynôme $R = R(x, y)$ *de degré* $d \geqslant \kappa + 3$ *satisfaisant par lissité de* $X^1 \cap \mathbb{C}^2$ *:*

$$\emptyset = \big\{R = 0\big\} \cap \big\{R_x \neq 0\big\} \cap \big\{R_y \neq 0\big\},$$

alors pour tout ordre de jets intermédiaire :

$$1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa,$$

il existe des expressions parfaitement symétriques à travers l'échange $x \longleftrightarrow y$ *:*

$$\mathsf{J}^\lambda_R := \begin{cases} \dfrac{y^{(\lambda)}}{R_x} + \displaystyle\sum_{\mu_1+\cdots+(\lambda-1)\mu_{\lambda-1}=\lambda} \frac{\big(y'\big)^{\mu_1} \cdots \big(y^{(\lambda-1)}\big)^{\mu_{\lambda-1}}}{R_x}\, \mathscr{J}^\lambda_{\mu_1,\dots,\mu_{\lambda-1}} \left(\frac{R_y}{R_x}, \left(\frac{R_{x^iy^j}}{R_x}\right)_{\substack{2\leqslant i+j\leqslant \\ \leqslant -1+\mu_1+\cdots+\mu_{\lambda-1}}}\right), \\ -\dfrac{x^{(\lambda)}}{R_y} - \displaystyle\sum_{\mu_1+\cdots+(\lambda-1)\mu_{\lambda-1}=\lambda} \frac{\big(x'\big)^{\mu_1} \cdots \big(x^{(\lambda-1)}\big)^{\mu_{\lambda-1}}}{R_y}\, \mathscr{J}^\lambda_{\mu_1,\dots,\mu_{\lambda-1}} \left(\frac{R_x}{R_y}, \left(\frac{R_{y^ix^j}}{R_y}\right)_{\substack{2\leqslant i+j\leqslant \\ \leqslant -1+\mu_1+\cdots+\mu_{\lambda-1}}}\right), \\ 0 \qquad \text{sur } X^1 \cap \mathbb{P}^1_\infty, \end{cases}$$

qui définissent des différentielles génératrices J_R^λ *de* λ*-jets* holomorphes *sur* X^1 *tout entier, notamment sur les deux sous-ouverts de* $X^1 \cap \mathbb{C}^2$ *:*

$$\begin{aligned} &\big\{R_x \neq 0\big\} \ \text{où le fibré } J^\kappa(\mathbb{D}, X^1) \text{ est muni de coordonnées intrinsèques :} \\ &\qquad\qquad \big(y; y', y'', \dots, y^{(\kappa)}\big), \\ &\big\{R_y \neq 0\big\} \ \text{où le fibré } J^\kappa(\mathbb{D}, X^1) \text{ est muni de coordonnées intrinsèques :} \\ &\qquad\qquad \big(x; x', x'', \dots, x^{(\kappa)}\big), \end{aligned}$$

différentielles génératrices J_R^λ *qui s'annulent toutes identiquement sur le diviseur ample* $X^1 \cap \mathbb{P}^1_\infty$*, et qui sont définies en termes de certains polynômes :*

$$\mathscr{J}^{\lambda}_{\mu_1,\dots,\mu_{\lambda-1}} = \mathscr{J}^{\lambda}_{\mu_1,\dots,\mu_{\lambda-1}}\bigg(\mathsf{R}_{0,1},\ \Big(\mathsf{R}_{i,j}\Big)_{2\leqslant i+j \leqslant -1+\mu_1+\cdots+\mu_{\lambda-1}}\bigg)$$

à coefficients dans $\mathbb{Z}$ *explicitables — par exemple pour* $\lambda = 1, 2, 3$ *et sur* $\{R_x \neq 0\}$ *:*

$$\begin{aligned} J_R^1 &= \frac{y'}{R_x}, \\ J_R^2 &= \frac{y''}{R_x} + \frac{(y')^2}{R_x}\bigg[-\frac{R_{xy}}{R_x} + \frac{R_y}{R_x}\frac{R_{xx}}{R_x}\bigg], \\ J_R^3 &= \frac{y'''}{R_x} + \frac{y''y'}{R_x}\bigg[-3\,\frac{R_{xy}}{R_x} + 3\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)\frac{R_{xx}}{R_x}\bigg] + \\ &\qquad + \frac{(y')^3}{R_x}\bigg[-6\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)\frac{R_{xy}}{R_x}\frac{R_{xx}}{R_x} + 3\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)^2\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xx}}{R_x} + 3\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)\frac{R_{xxy}}{R_x} - \bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)^2\frac{R_{xxx}}{R_x}\bigg] —, \end{aligned}$$

et au moyen de ces différentielles de jets génératrices, des sections holomorphes globales linéairement indépendantes du fibré des jets de Green-Griffiths $E^{\mathrm{GG}}_{\kappa,m}T^*_X$ *sont généralement représentées comme :*

$$\boxed{\sum_{m_1+2m_2+\cdots+\kappa m_\kappa = m} \big(\mathsf{J}_R^1\big)^{m_1}\big(\mathsf{J}_R^2\big)^{m_2}\ \cdots\ \big(\mathsf{J}_R^\kappa\big)^{m_\kappa}\cdot \mathsf{G}_{m_1,m_2,\dots,m_\kappa}(x,y),}$$

avec des polynômes :

$$\mathsf{G}_{m_1,m_2,\dots,m_\kappa} = \mathsf{G}_{m_1,m_2,\dots,m_\kappa}(x,y)$$

de degré :

$$\deg \mathsf{G}_{m_1,m_2,\dots,m_\kappa} \leqslant \underbrace{m_1(d-3) + m_2(d-4) + \cdots + m_\kappa\big(d-\kappa-2\big)}_{=:\,\delta},$$

qui appartiennent aux espaces vectoriels quotients :

$$\mathbb{C}_\delta[x,y]\Big/R\cdot\mathbb{C}_{\delta-d}[x,y],$$

le nombre total de ces sections holomorphes linéairement indépendantes explicites de $E_{\kappa,m}^{\mathrm{GG}}T_X^*$ étant égal à :

$$\sum_{m_1+\cdots+\kappa m_\kappa=m}\left\{\binom{m_1(d-3)+\cdots+m_\kappa(d-\kappa-2)+2}{2}-\binom{m_1(d-3)+\cdots+m_\kappa(d-\kappa-2)-d+2}{2}\right\},$$

à savoir aysmptotiquement égal à :

$$\frac{m^\kappa}{\kappa!\,\kappa!}\left[d^2\log\kappa+d^2\,\mathrm{O}(1)+\mathrm{O}(d)\right]+\mathrm{O}\big(m^{\kappa-1}\big),$$

en harmonie et en cohérence avec la théorie intrinsèque inexplicite. □

2. Géométrie initiale

Soit $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ l'espace projectif complexe muni des coordonnées homogènes :

$$\big[T\colon X\colon Y\big].$$

Sur les trois ouverts affines canoniques :

$$\begin{aligned}\mathsf{U}_0&:=\big\{T\neq 0\big\},\\ \mathsf{U}_1&:=\big\{X\neq 0\big\},\\ \mathsf{U}_2&:=\big\{Y\neq 0\big\},\end{aligned}$$

trois systèmes de coordonnées affines canoniques :

$$\begin{aligned}(x_0,y_0)&:=\big(\tfrac{X}{T},\,\tfrac{Y}{T}\big),\\ (x_1,y_1)&:=\big(\tfrac{T}{X},\,\tfrac{Y}{X}\big),\\ (x_2,y_2)&:=\big(\tfrac{X}{Y},\,\tfrac{T}{Y}\big),\end{aligned}$$

sont reliés entre eux par :

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{1}{x_0}, & y_1&=\frac{y_0}{x_0},\\ x_2&=\frac{x_0}{y_0}, & y_2&=\frac{1}{y_0},\\ x_2&=\frac{1}{y_1}, & y_2&=\frac{x_1}{y_1}.\end{aligned}$$

Soit aussi une courbe algébrique :

$$X^1\subset\mathbb{P}^2$$

définie comme lieu des zéros d'un certain polynôme homogène :

$$\mathrm{R}=\mathrm{R}\big(T\colon X\colon Y\big)$$

non identiquement nul d'un certain degré $d\geqslant 1$.

À ce polynôme, sont associés les trois polynômes affines (en général non homogènes) tous de degré $\leqslant d$:

$$\begin{aligned} R_0(x_0, y_0) &:= \mathrm{R}\big(1\colon x_0\colon y_0\big), \\ R_1(x_1, y_1) &:= \mathrm{R}\big(x_1\colon 1\colon y_1\big), \\ R_2(x_2, y_2) &:= \mathrm{R}\big(y_2\colon x_2\colon 1\big). \end{aligned}$$

Hypothèse géométrique. La courbe $X^1 \subset \mathbb{P}^2$ sera toujours géométriquement lisse, à savoir :

$$\emptyset = \big\{\mathrm{R} = 0\big\} \cap \big\{\mathrm{R}_T = 0\big\} \cap \big\{\mathrm{R}_X = 0\big\} \cap \big\{\mathrm{R}_Y = 0\big\}.$$

Ceci implique l'irréductibilité du polynôme homogène R.

Principalement, tout se produira dans l'une des trois cartes affines, par exemple celle associée à l'ouvert U_0, c'est-à-dire en termes des coordonnées :

$$(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2.$$

Il est alors avisé d'admettre l'équivalence notationnelle :

$$\boxed{(x, y) \equiv (x_0, y_0).}$$

Aussi, $R = R(x, y)$ remplacera le polynôme $R_0(x_0, y_0)$ définissant l'équation affine de la courbe dans l'ouvert U_0.

Deux points :

$$\infty_x \qquad \text{et} \qquad \infty_y$$

à l'infini dans la direction de l'axe des x et à l'infini dans la direction de l'axe des y existent dans $\mathbb{P}^2$:

$$\infty_x = [0\colon 1\colon 0] \qquad \text{et} \qquad \infty_y = [0\colon 0\colon 1].$$

L'action éventuelle d'un automorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^2$ assure (exercice) que :

$$\infty_x \notin X^1 \qquad \text{et} \qquad \infty_y \notin X^1,$$

et même que, après dilatation des axes de coordonnées x et y que :

$$R(x, y) = x^d + a_1\, x^{d-1} y + \cdots + a_{d-1}\, x y^{d-1} + y^d + R_{d-1}(x, y) + \cdots + R_1(x, y) + R_0,$$

où chaque polynôme $R_j(x, y)$ est homogène de degré j en (x, y). *A posteriori* (exercice), la présence des deux monômes x^d et y^d dans R assure que $\infty_x \notin X^1$ et que $\infty_y \notin X^1$.

Comme Phillip Griffiths ([3]) l'effectue régulièrement, après action éventuelle d'un automorphisme supplémentaire de $\mathbb{P}^2$:

$$\mathbb{P}^1_\infty \cap X^1 = d \text{ points distincts de multiplicité } 1.$$

3. **Fibré de jets d'ordre $\kappa \geqslant 1$ en coordonnées**

Le fibré cotangent à la courbe algébrique lisse $X^1 \subset \mathbb{P}^2$:

$$\begin{tikzcd} T_X^* \arrow[d, "\pi"] \\ X, \end{tikzcd}$$

doit *impérativement* être saisi dans des trivialisations naturelles qui sont adaptées à la disposition extrinsèque de la courbe.

Manifestement, les deux sous-ouverts naturels de l'ouvert affine U_0 sont :

$$\big\{R_x \neq 0\big\} \subset \mathsf{U}_0,$$
$$\big\{R_y \neq 0\big\} \subset \mathsf{U}_0.$$

Puisque la courbe projective $\{\mathrm{R} = 0\}$ est lisse, quitte à effectuer encore un automorphisme de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, le théorème de Bézout se joue entièrement dans U_0 pour les deux intersections suivantes :

$$d(d-1) = \mathsf{Card}\,\big\{R = R_x = 0\big\},$$
$$d(d-1) = \mathsf{Card}\,\big\{R = R_y = 0\big\},$$

les points étant comptés avec multiplicité, aucune intersection, donc, ne se faisant sur la droite projective :

$$\mathbb{P}^1_\infty := \big\{[0\colon X : Y]\big\}$$

à l'infini.

Dans un voisinage ouvert approprié d'un point quelconque (x_p, y_p) de l'ouvert semi-global $\{R_y \neq 0\}$, le théorème analytique des fonctions implicites représente la courbe sous la forme d'un graphe local :

$$\begin{aligned} y &= \mathsf{Y}(x) \\ &= \mathsf{Y}_{x_p,y_p}(x), \end{aligned}$$

au moyen d'une fonction graphante analytique $\mathsf{Y} = \mathsf{Y}_{x_p,y_p}(x)$ qui dépend du point central (x_p, y_p) et qui est définie pour $|x - x_p|$ assez petit.

De même, sur l'ouvert $\{R_x \neq 0\}$, localement au voisinage de tout point (x_p, y_p), la courbe se graphe comme :

$$\begin{aligned} x &= \mathsf{X}(y) \\ &= \mathsf{X}_{x_p,y_p}(y). \end{aligned}$$

Maintenant, si :

$$\mathbb{D} := \big\{z \in \mathbb{C}\colon\; |z| < 1\big\}$$

désigne le disque unité ouvert de rayon 1 centré à l'origine dans $\mathbb{C}$, étant donné une application holomorphe locale :

$$f\colon\quad \begin{array}{rcl} \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ \zeta & \longmapsto & \big(x(\zeta), y(\zeta)\big) \end{array}$$

alors spontanément, automatiquement — et compulsivement —, l'application f vient accompagnée de ses différentiations formelles :

$$\begin{aligned} f'(\zeta) &= \big(x'(\zeta), y'(\zeta)\big), \\ f''(\zeta) &= \big(x''(\zeta), y''(\zeta)\big), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^{(\kappa)}(\zeta) &= \big(x^{(\kappa)}(\zeta), y^{(\kappa)}(\zeta)\big), \end{aligned}$$

jusqu'à des ordres finis arbitraires $\kappa \geqslant 1$.

Dans l'ouvert affine $\mathsf{U}_0 \cong \mathbb{C}^2$, les coordonnées de jets associées jusqu'à l'ordre fixé quelconque $\kappa \geqslant 1$ sont donc les coordonnées indépendantes qui hébergent toutes ces dérivées possibles :

$$\Big(x', y', \, x'', y'', \, \ldots\ldots, \, x^{(\kappa)}, y^{(\kappa)}\Big).$$

Ces coordonnées, intrinsèques à $\mathbb{P}^2$, sont extrinsèques à la courbe $X^1 \subset \mathbb{P}^2$.

Mais intrinsèquement à la courbe, par exemple sur l'ouvert $\{R_y \neq 0\}$, puisque la coordonnée holomorphe (semi-globale) naturelle est x, la coordonnées cotangente associée est dx — coordonnée qu'il convient de noter plutôt x' —, et généralement parlant, les coordonnées de jets associées *intrinsèques* jusqu'à l'ordre κ quelconque sont :

$$\big(x', \, x'', \, \ldots, \, x^{(\kappa)}\big).$$

De même, sur l'ouvert $\{R_x \neq 0\}$, les coordonnées de jets associées *intrinsèques* jusqu'à l'ordre κ quelconque sont :

$$\big(y', \, y'', \, \ldots, \, y^{(\kappa)}\big).$$

Sur l'intersection :

$$\big\{R_y \neq 0\big\} \cap \big\{R_x \neq 0\big\}$$

de ces deux ouverts, il existe, d'après la théorie générale des fibrés holomorphes, une application de changement de trivialisation entre ces coordonnées de jets. Comment exprimer explicitement cette application de changement de trivialisation ?

Si donc une application holomorphe locale :

$$f\colon\quad \zeta \longmapsto \big(x(\zeta), y(\zeta)\big)$$

aboutit entièrement dans la courbe :

$$0 \equiv R\big(x(\zeta), y(\zeta)\big),$$

cette identité valant pour tout $\zeta \in \mathbb{D}$, une première différentiation donne alors instantanément :

$$0 \;\equiv\; x'(\zeta)\, R_x\big(x(\zeta), y(\zeta)\big) + y'(\zeta)\, R_y\big(x(\zeta), y(\zeta)\big).$$

Nécessairement, l'équation ainsi obtenue doit être interprétée en termes des coordonnées de jets indépendantes qui hébergent les dérivées de f, à savoir, comme :

$$0 = x'\, R_x(x,y) + y'\, R_y(x,y),$$

ou, de manière équivalente, comme :

$$y' = -\, x'\, \frac{R_x}{R_y}.$$

Lemme 3.1. *L'application de changement de trivialisation du fibré des jets d'ordre* 1 *d'applications holomorphes locales* $\mathbb{D} \longrightarrow X^1$ *du disque unité à valeurs dans la courbe algébrique projective* $X^1 \subset \mathbb{P}^2$ *d'équation affine* $R(x,y) = 0$ *de l'ouvert* $\{R_y \neq 0\} \times \mathbb{C}_{x'}$ *vers l'ouvert* $\{R_x \neq 0\} \times \mathbb{C}_{y'}$ *est donnée explicitement par :*

$$\begin{aligned}\big((x,y),\; x'\big) \;\longmapsto\; &\big((x,y),\; y'\big)\\ &= \left((x,y),\; -\, x'\, \frac{R_x(x,y)}{R_y(x,y)}\right),\end{aligned}$$

les points-bases $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ *ici étant supposés appartenir à la courbe,* i.e. *supposés satisfaire* $R(x,y) = 0$. □

En résumé, et pour reprendre le raisonnement, la différentiation formelle de $0 = R(x,y)$:

$$0 = x'\, R_x + y'\, R_y,$$

s'effectue comme si x et y étaient fonction d'une variable $\zeta \in \Delta$, et deux résolutions équivalentes :

$$\begin{aligned}y' &= -\, x'\, \frac{R_x}{R_y},\\ x' &= -\, y'\, \frac{R_y}{R_x},\end{aligned}$$

expriment les changements de trivialisations, dans un sens, et dans l'autre sens.

Pour connaître les changements de trivialisation entre les deux systèmes de coordonnées de jets à l'ordre suivant $\kappa = 2$:

$$\begin{aligned}&\big(x;\, x', x''\big),\\ &\big(y;\, y', y''\big),\end{aligned}$$

une différentiation supplémentaire :

$$\begin{aligned}0 &= x'\, R_x + y'\, R_y,\\ 0 &= x''\, R_x + y''\, R_y + (x')^2\, R_{xx} + 2\, x'y'\, R_{xy} + (y')^2\, R_{yy},\end{aligned}$$

commande alors de remplacer :

$$y' = -\, x'\, \frac{R_x}{R_y}$$

dans la deuxième équation :

$$0 = x''\, R_x + y''\, R_y + (x')^2 \left[R_{xx} - 2\, R_{xy}\, \frac{R_x}{R_y} + R_{yy} \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\right],$$

et ensuite, il faut résoudre par rapport à y''.

Lemme 3.2. *L'application de changement de trivialisation du fibré des jets d'ordre 2 d'applications holomorphes locales $\mathbb{D} \longrightarrow X^1$ du disque unité à valeurs dans la courbe algébrique projective $X^1 \subset \mathbb{P}^2$ d'équation affine $R(x,y) = 0$ de l'ouvert $\{R_y \neq 0\} \times \mathbb{C}^2_{x',x''}$ vers l'ouvert $\{R_x \neq 0\} \times \mathbb{C}^2_{y',y''}$:*

$$\big((x,y),\ x',\ x''\big) \longmapsto \big((x,y),\ y',\ y''\big)$$

les points-bases $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ ici étant supposés appartenir à la courbe, est donnée explicitement par :

$$\boxed{\begin{aligned}y' &= -\, x'\, \frac{R_x}{R_y},\\ y'' &= -\, x''\, \frac{R_x}{R_y} - (x')^2 \left[\frac{R_{xx}}{R_x} - 2 \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^1 \frac{R_{xy}}{R_y} + \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2 \frac{R_{yy}}{R_y}\right]. \quad \square\end{aligned}}$$

Ensuite, pour les jets d'ordre 3, une troisième différentiation est nécessaire :

$$\begin{aligned}0 = x'''\, R_x &+ y'''\, R_y +\\ &+ 3\, x'x''\, R_{xx} + 3\, x''y'\, R_{xy} + 3\, x'y''\, R_{xy} + 3\, y''y'\, R_{yy} +\\ &+ (x')^3\, R_{xxx} + 3\, (x')^2 y'\, R_{xxy} + 3\, x'(y')^2\, R_{xyy} + (y')^3\, R_{yyy}.\end{aligned}$$

La résolution par rapport à y''' force à diviser par R_y :

$$
\begin{aligned}
y''' = & - x''' \, \frac{R_x}{R_y} - \\
& - \, 3\, x'' x' \, \frac{R_{xx}}{R_y} - 3\, x'' y' \, \frac{R_{xy}}{R_y} - 3\, x' y'' \, \frac{R_{xy}}{R_y} - 3\, y'' y' \, \frac{R_{yy}}{R_y} - \\
& - \, (x')^3 \, \frac{R_{xxx}}{R_y} - 3\, (x')^2 y' \, \frac{R_{xxy}}{R_y} - 3\, x' (y')^2 \, \frac{R_{xyy}}{R_y} - (y')^3 \, \frac{R_{yyy}}{R_y}.
\end{aligned}
$$

Mais il faut aussi remplacer les valeurs de y' et de y'' obtenues à l'instant :

$$
\begin{aligned}
y''' = & - x''' \, \frac{R_x}{R_y} - \\
& - \, 3\, x'' x' \, \frac{R_{xx}}{R_y} + 3\, x'' x' \left(\frac{R_x}{R_y}\right) \frac{R_{xy}}{R_y} + \\
& + 3\, x' \left(x'' \, \frac{R_x}{R_y} + (x')^2 \left[\frac{R_{xx}}{R_y} - 2 \left(\frac{R_x}{R_y}\right) \frac{R_{xy}}{R_y} + \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2 \frac{R_{yy}}{R_y} \right] \right) \frac{R_{xy}}{R_y} - \\
& - \, 3\, x' \, \frac{R_x}{R_y} \left(x'' \, \frac{R_x}{R_y} + (x')^2 \left[\frac{R_{xx}}{R_y} - 2 \left(\frac{R_x}{R_y}\right) \frac{R_{xy}}{R_y} + \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2 \frac{R_{yy}}{R_y} \right] \right) \frac{R_{yy}}{R_y} - \\
& - \, (x')^3 \, \frac{R_{xxx}}{R_y} + 3\, (x')^3 \, \frac{R_x}{R_y} \, \frac{R_{xxy}}{R_y} - 3\, (x')^3 \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2 \frac{R_{xyy}}{R_y} + (x')^3 \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^3 \frac{R_{yyy}}{R_y}.
\end{aligned}
$$

Simplifications et réorganisations fournissent la formule de transition au niveau des jets d'ordre 3 :

$$
\boxed{
\begin{aligned}
y''' = & - x''' \, \frac{R_x}{R_y} - \\
& - \, x'' x' \left[3\, \frac{R_{xx}}{R_y} - 6 \left(\frac{R_x}{R_y}\right) \frac{R_{xy}}{R_y} + 3 \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2 \frac{R_{yy}}{R_y} \right] - \\
& - \, (x')^3 \bigg[- \, 3\, \frac{R_{xx}}{R_y} \, \frac{R_{xy}}{R_y} + 3 \left(\frac{R_x}{R_y}\right) \frac{R_{xx}}{R_y} \, \frac{R_{yy}}{R_y} + \\
& \qquad + 6 \left(\frac{R_x}{R_y}\right) \frac{R_{xy}}{R_y} \, \frac{R_{xy}}{R_y} - 9 \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2 \frac{R_{xy}}{R_y} \, \frac{R_{yy}}{R_y} + 3 \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^3 \frac{R_{yy}}{R_y} \, \frac{R_{yy}}{R_y} + \\
& \qquad + \frac{R_{xxx}}{R_y} - 3 \left(\frac{R_x}{R_y}\right) \frac{R_{xxy}}{R_y} + 3 \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2 \frac{R_{xyy}}{R_y} - \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^3 \frac{R_{yyy}}{R_y} \bigg].
\end{aligned}
}
$$

Une vision inductive autre de ces calculs les rend plus directs.

En effet, partant de la formule de 1-transition :

$$y' = -\,x'\,\frac{R_x}{R_y},$$

une différentiation donne :

$$y'' = -\,x''\,\frac{R_x}{R_y} - x'\,\frac{x'\,R_{xx} + \boxed{y'}\,R_{xy}}{R_y} + \frac{x'\,R_x\big(x'\,R_{xy} + \boxed{y'}\,R_{yy}\big)}{R_y\,R_y},$$

et il faut remplacer les y' qui apparaissent :

$$y'' = -\,x''\,\frac{R_x}{R_y} - (x')^2\,\frac{R_{xx}}{R_y} + (x')^2\,\frac{R_x}{R_y}\,\frac{R_{xy}}{R_y} + (x')^2\,\frac{R_x}{R_y}\,\frac{R_{xy}}{R_y} - (x')^2\,\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)^2\,\frac{R_{yy}}{R_y},$$

ce qui aboutit bien à la même formule (exercice visuel).

L'intérêt de cette approche équivalente, c'est qu'un seul remplacement doit être effectué à chaque étape.

En effet, en partant de la formule de 2-transition obtenue à l'instant, et réorganisée comme il se doit :

$$y'' = -\,x''\,\frac{R_x}{R_y} - (x')^2\,\bigg[\frac{R_{xx}}{R_y} - 2\,\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{xy}}{R_y} + \bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)^2\frac{R_{yy}}{R_y}\bigg],$$

une différentiation ne fait apparaître que y', mais aucun y'' :

$$
\begin{aligned}
y''' = &- x''' \frac{R_x}{R_y} - \\
&- \frac{x''\big(x'\,R_{xx} + \boxed{y'}\,R_{xy}\big)}{R_y} + \frac{x''\,R_x\,\big(x'\,R_{xy} + \boxed{y'}\,R_{yy}\big)}{R_y\,R_y} - \\
&- 2\,x''x' \left[\frac{R_{xx}}{R_y} - 2\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{xy}}{R_y} + \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{yy}}{R_y}\right] - \\
&- (x')^2 \bigg[\frac{x'\,R_{xxx} + \boxed{y'}\,R_{xxy}}{R_y} - \frac{R_{xx}\big(x'\,R_{xy} + \boxed{y'}\,R_{yy}\big)}{R_y\,R_y} - \\
&\qquad - 2\,\frac{x'\,R_{xx} + \boxed{y'}\,R_{xy}}{R_y}\,\frac{R_{xy}}{R_y} + 2\,\frac{R_x\big(x'\,R_{xy} + \boxed{y'}\,R_{yy}\big)}{R_y\,R_y}\,\frac{R_{xy}}{R_y} - \\
&\qquad - 2\,\frac{R_x}{R_y}\,\frac{\big(x'\,R_{xxy} + \boxed{y'}\,R_{xyy}\big)}{R_y} + 2\,\frac{R_x}{R_y}\frac{\big(x'\,R_{xy} + \boxed{y'}\,R_{yy}\big)}{R_y}\,\frac{R_{xy}}{R_y} + \\
&\qquad + 2\,\frac{R_x}{R_y}\,\frac{\big(x'\,R_{xx} + \boxed{y'}\,R_{xy}\big)}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y} - 2\,\frac{R_x}{R_y}\,\frac{R_x}{R_y}\,\frac{\big(x'\,R_{xy} + \boxed{y'}\,R_{yy}\big)}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y} + \\
&\qquad + \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{\big(x'\,R_{xyy} + \boxed{y'}\,R_{yyy}\big)}{R_y} - \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{yy}}{R_y}\big(x'\,R_{xy} + \boxed{y'}\,R_{yy}\big)\bigg].
\end{aligned}
$$

Après remplacement (visuel) des y' encadrés, et après simplification-réorganisation, c'est bien la même formule de 3-transition qui est reçue après un effort moindre :

$$
\begin{aligned}
y''' = &- x''' \frac{R_x}{R_y} - \\
&- x''x' \left[3\,\frac{R_{xx}}{R_y} - 6\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{xy}}{R_y} + 3\left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{yy}}{R_y}\right] - \\
&- (x')^3 \bigg[- 3\,\frac{R_{xx}}{R_y}\,\frac{R_{xy}}{R_y} + 3\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{xx}}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y} + \\
&\qquad + 6\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{xy}}{R_y}\,\frac{R_{xy}}{R_y} - 9\left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{xy}}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y} + 3\left(\frac{R_x}{R_y}\right)^3\frac{R_{yy}}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y} + \\
&\qquad + \frac{R_{xxx}}{R_y} - 3\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{xxy}}{R_y} + 3\left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{xyy}}{R_y} - \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^3\frac{R_{yyy}}{R_y}\bigg].
\end{aligned}
$$

Théorème 3.1. *La différentiation d'une fonction-polynôme :*

$$\begin{aligned} R &= R(x,y) \\ &\equiv R(\mathsf{x}_1,\mathsf{x}_2) \end{aligned}$$

jusqu'à un ordre quelconque $\kappa \geqslant 1$ *s'exprime explicitement comme :*

$$\begin{aligned} R^{(\kappa)} = \sum_{e=1}^{\kappa} \sum_{1\leqslant\lambda_1<\cdots<\lambda_e\leqslant\kappa} \sum_{\mu_1\geqslant 1,\,\dots,\,\mu_e\geqslant 1} \sum_{\mu_1\lambda_1+\cdots+\mu_e\lambda_e=\kappa} \frac{\kappa!}{(\lambda_1!)^{\mu_1}\,\mu_1!\,\cdots\,(\lambda_e!)^{\mu_e}\,\mu_e!} \\ \sum_{j_1^1,\dots,j_{\mu_1}^1=1}^{2} \cdots \sum_{j_1^e,\dots,j_{\mu_e}^e=1}^{2} R_{\mathsf{x}_{j_1^1}\cdots\mathsf{x}_{j_{\mu_1}^1}\cdots\cdots\mathsf{x}_{j_1^e}\cdots\mathsf{x}_{j_{\mu_e}^e}} \\ \mathsf{x}_{j_1^1}^{(\lambda_1)}\cdots\mathsf{x}_{j_{\mu_1}^1}^{(\lambda_1)}\cdots\cdots\mathsf{x}_{j_1^e}^{(\lambda_e)}\cdots\mathsf{x}_{j_{\mu_e}^e}^{(\lambda_e)}, \end{aligned}$$

en admettant l'équivalence notationnelle :

$$(x,y) \equiv (\mathsf{x}_1,\mathsf{x}_2). \quad \square$$

Pour une fonction-polynôme d'une seule variable :

$$R = R(\mathsf{x}),$$

c'est la formule classique connue dite de Faà di Bruno :

$$\begin{aligned} R^{(\kappa)} = \sum_{e=1}^{\kappa} \sum_{1\leqslant\lambda_1<\cdots<\lambda_e\leqslant\kappa} \sum_{\mu_1\geqslant 1,\dots,\mu_e\geqslant 1} \sum_{\mu_1\lambda_1+\cdots+\mu_e\lambda_e=\kappa} \frac{\kappa!}{(\lambda_1!)^{\mu_1}\,\mu_1!\,\cdots\,(\lambda_e!)^{\mu_e}\,\mu_e!} \\ R_{\mathsf{x}^{\mu_1+\cdots+\mu_e}}\,\big(\mathsf{x}^{(\lambda_1)}\big)^{\mu_1}\,\cdots\,\big(\mathsf{x}^{(\lambda_e)}\big)^{\mu_e}, \end{aligned}$$

dont les premiers termes sont :

$$\begin{aligned} R' &= \mathsf{x}'\,R_{\mathsf{x}}, \\ R'' &= \mathsf{x}''\,R_{\mathsf{x}} + (\mathsf{x}')^2\,R_{\mathsf{xx}}, \\ R''' &= \mathsf{x}'''\,R_{\mathsf{x}} + 3\,\mathsf{x}''\mathsf{x}'\,R_{\mathsf{xx}} + (\mathsf{x}')^3\,R_{\mathsf{xxx}}, \\ R'''' &= \mathsf{x}''''\,R_{\mathsf{x}} + 4\,\mathsf{x}'''\mathsf{x}'\,R_{\mathsf{xx}} + 3\,(\mathsf{x}'')^2\,R_{\mathsf{xx}} + 6\,\mathsf{x}''(\mathsf{x}')^2\,R_{\mathsf{xxx}} + (\mathsf{x}')^4\,R_{\mathsf{xxxx}}, \\ R''''' &= \mathsf{x}'''''\,R_{\mathsf{x}} + 5\,\mathsf{x}''''\mathsf{x}'\,R_{\mathsf{xx}} + 10\,\mathsf{x}'''\mathsf{x}''\,R_{\mathsf{xx}} + 10\,(\mathsf{x}'')^2\mathsf{x}'\,R_{\mathsf{xxx}} + \\ &\qquad + 15\,\mathsf{x}''(\mathsf{x}')^2\,R_{\mathsf{xxx}} + 10\,\mathsf{x}''(\mathsf{x}')^3\,R_{\mathsf{xxxx}} + (\mathsf{x}')^5\,R_{\mathsf{xxxxx}}. \end{aligned}$$

4. **Formules générales de changement de trivialisation**

Maintenant, si par récurrence sur un certain entier $\kappa \geqslant 1$, la formule de transition au niveau κ s'écrit sous la forme :

$$
\begin{aligned}
y^{(\kappa)} = &- x^{(\kappa)} \, \frac{R_x}{R_y} - \\
&- \sum_{\mu_1+\cdots+(\kappa-1)\mu_{\kappa-1}=\kappa} (x')^{\mu_1} \cdots \big(x^{(\kappa-1)}\big)^{\mu_{\kappa-1}} \, P^{\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}} \left(\left(\frac{R_{x^\alpha y^\beta}}{R_y} \right)_{\substack{1 \leqslant \alpha+\beta \leqslant \kappa \\ (\alpha,\beta)\neq(0,1)}} \right),
\end{aligned}
$$

au moyen de certains polynômes :

$$
P^{\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}} = P^{\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}} \Big(\big(\mathsf{R}_{\alpha,\beta} \big)_{\substack{1 \leqslant \alpha+\beta \leqslant \kappa \\ (\alpha,\beta)\neq(0,1)}} \Big)
$$

à coefficients dans $\mathbb{Z}$ qui, par décision-renoncement, ne sont pas explicités plus avant, alors une différentiation supplémentaire donne :

$$
\begin{aligned}
y^{(\kappa+1)} = &- x^{(\kappa+1)} \, \frac{R_x}{R_y} - \\
&- x^{(\kappa)} \, \frac{\big(x' \, R_{xx} + \boxed{y'} \, R_{xy}\big)}{R_y} + x^{(\kappa)} \, \frac{R_x}{R_y} \, \frac{\big(x' \, R_{xy} + \boxed{y'} \, R_{yy}\big)}{R_y} - \\
&- \sum_{\mu_1+\cdots+(\kappa-1)\mu_{\kappa-1}=\kappa} \ \sum_{\lambda=1}^{\kappa-1} (x')^{\mu_1} \cdots \mu_\lambda \, \big(x^{(\lambda)}\big)^{\mu_\lambda - 1} x^{(\lambda+1)} \cdots \big(x^{(\kappa-1)}\big)^{\mu_{\kappa-1}} \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot P^{\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}} \left(\left(\frac{R_{x^\alpha y^\beta}}{R_y} \right)_{\substack{1 \leqslant \alpha+\beta \leqslant \kappa \\ (\alpha,\beta)\neq(0,1)}} \right) - \\
&- \sum_{\mu_1+\cdots+(\kappa-1)\mu_{\kappa-1}=\kappa} (x')^{\mu_1} \cdots \big(x^{\kappa-1}\big)^{\mu_{\kappa-1}} \sum_{\substack{1 \leqslant \alpha+\beta \leqslant \kappa \\ (\alpha,\beta)\neq(0,1)}} \\
&\left[\frac{x' \, R_{x^{\alpha+1} y^\beta} + \boxed{y'} \, R_{x^\alpha y^{\beta+1}}}{R_y} - \frac{R_{x^\alpha y^\beta}}{R_y} \, \frac{\big(x' \, R_{xy} + \boxed{y'} \, R_{yy}\big)}{R_y} \right] \frac{\partial P^{\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}}}{\partial \mathsf{R}_{\alpha,\beta}} \left(\left(\frac{R_{x^{\alpha_1} y^{\beta_1}}}{R_y} \right)_{\substack{1 \leqslant \alpha_1+\beta_1 \leqslant \kappa \\ (\alpha_1,\beta_1)\neq(0,1)}} \right),
\end{aligned}
$$

et après remplacement de $y' = -\, x' \, \frac{R_x}{R_y}$:

$$
\begin{aligned}
y^{(\kappa+1)} = & -\, x^{(\kappa+1)} \, \frac{R_x}{R_y} - \\
& -\, x^{(\kappa)} \, x' \left[\frac{R_{xx}}{R_y} - 2 \left(\frac{R_x}{R_y} \right) \frac{R_{xy}}{R_y} + \left(\frac{R_x}{R_y} \right)^2 \frac{R_{yy}}{R_y} \right] - \\
& - \sum_{\mu_1 + \cdots + (\kappa-1)\mu_{\kappa-1} = \kappa} \ \sum_{\lambda=1}^{\kappa-1} \big(x' \big)^{\mu_1} \cdots \mu_\lambda \, \big(x^{(\lambda)} \big)^{\mu_\lambda - 1} x^{(\lambda+1)} \cdots \big(x^{(\kappa-1)} \big)^{\mu_{\kappa-1}} \cdot \\
& \qquad \cdot P^\kappa_{\mu_1, \dots, \mu_{\kappa-1}} \left(\left(\frac{R_{x^\alpha y^\beta}}{R_y} \right)_{\substack{1 \leqslant \alpha+\beta \leqslant \kappa \\ (\alpha,\beta) \neq (0,1)}} \right) - \\
& - \sum_{\mu_1 + \cdots + (\kappa-1)\mu_{\kappa-1} = \kappa} \big(x' \big)^{\mu_1} \cdots \big(x^{(\kappa-1)} \big)^{\mu_{\kappa-1}} \, x' \sum_{\substack{1 \leqslant \alpha+\beta \leqslant \kappa \\ (\alpha,\beta) \neq (0,1)}} \\
& \left[\frac{R_{x^{\alpha+1} y^\beta}}{R_y} - \frac{R_x}{R_y} \, \frac{R_{x^\alpha y^{\beta+1}}}{R_y} - \frac{R_{x^\alpha y^\beta}}{R_y} \, \frac{R_{xy}}{R_y} + \frac{R_{x^\alpha y^\beta}}{R_y} \, \frac{R_x}{R_y} \, \frac{R_{yy}}{R_y} \right] \cdot \\
& \cdot \frac{\partial P^\kappa_{\mu_1, \dots, \mu_{\kappa-1}}}{\partial \mathsf{R}_{\alpha,\beta}} \left(\left(\frac{R_{x^{\alpha_1} y^{\beta_1}}}{R_y} \right)_{\substack{1 \leqslant \alpha_1+\beta_1 \leqslant \kappa \\ (\alpha_1,\beta_1) \neq (0,1)}} \right),
\end{aligned}
$$

c'est bien une expression du même type qui se réalise :

$$
\begin{aligned}
y^{(\kappa+1)} =: & -\, x^{(\kappa+1)} \, \frac{R_x}{R_y} - \\
& - \sum_{\mu_1 + \cdots + \kappa \mu_\kappa = \kappa+1} \big(x' \big)^{\mu_1} \cdots \big(x^{(\kappa)} \big)^{\mu_\kappa} \, P^{\kappa+1}_{\mu_1, \dots, \mu_\kappa} \left(\left(\frac{R_{x^\alpha y^\beta}}{R_y} \right)_{\substack{1 \leqslant \alpha+\beta \leqslant \kappa+1 \\ (\alpha,\beta) \neq (0,1)}} \right).
\end{aligned}
$$

Théorème 4.1. *Pour tout ordre de jets $\kappa \geqslant 1$, les formules de changement de trivialisation :*

$$
\big\{ R_y \neq 0 \big\} \times \mathbb{C}^\kappa_{x', \dots, x^\kappa} \longrightarrow \big\{ R_x \neq 0 \big\} \times \mathbb{C}^\kappa_{y', \dots, y^\kappa},
$$

à savoir les composantes de l'application :

$$
\big(x', \dots, x^{(\lambda)}, \dots, x^{(\kappa)} \big) \longrightarrow \big(y', \dots, y^{(\lambda)}, \dots, y^{(\kappa)} \big)
$$

sont données pour tout ordre intermédiaire $1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa$ par des formules du type :

$$
\boxed{
\begin{aligned}
y^{(\lambda)} = & -\, x^{(\lambda)} \, \frac{R_x}{R_y} - \\
& - \sum_{\substack{\mu_1 + \cdots + (\lambda-1)\mu_{\lambda-1} = \lambda \\ \mu_1 \geqslant 0, \dots, \mu_{\lambda-1} \geqslant 0}} \big(x' \big)^{\mu_1} \cdots \big(x^{(\lambda-1)} \big)^{\mu_{\lambda-1}} \, P^\lambda_{\mu_1, \dots, \mu_{\lambda-1}} \left(\left(\frac{R_{x^\alpha y^\beta}}{R_y} \right)_{\substack{1 \leqslant \alpha+\beta \leqslant \lambda \\ (\alpha,\beta) \neq (0,1)}} \right),
\end{aligned}
}
$$

au moyen de certains polynômes :

$$P^{\lambda}_{\mu_1,\dots,\mu_{\lambda-1}} = P^{\lambda}_{\mu_1,\dots,\mu_{\lambda-1}}\Big(\big(\mathsf{R}_{\alpha,\beta}\big)_{\substack{1\leqslant\alpha+\beta\leqslant\lambda\\(\alpha,\beta)\neq(0,1)}}\Big),$$

à coefficients dans $\mathbb{Z}$. □

Question 4.1. Expliciter complètement ces polynômes.

5. Construction de différentielles de jets holomorphes par élimination

Soit à nouveau l'équation affine polynomiale d'une courbe algébrique projective $X^1 \subset \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$ géométriquement lisse :

$$0 = R(x,y).$$

Une première différentiation :

$$0 = x'\, R_x + y'\, R_y.$$

conduit à symétriser l'équation :

$$\frac{y'}{R_x} = -\,\frac{x'}{R_y}.$$

Lemme 5.1. *Dans l'ouvert $\big\{R_x \neq 0\big\}$, la courbe est un graphe :*

$$x = \mathsf{X}(y) \qquad\quad \textit{avec}\;\; 0 \equiv R\big(\mathsf{X}(y), y\big),$$

la coordonnée intrinsèque est y, la coordonnée de jet est y', et l'application :

$$y \longmapsto \frac{y'}{R_x\big(\mathsf{X}(y),y\big)}$$

constitue une section holomorphe du fibré des jets d'ordre 1 d'applications holomorphes de $\mathbb{D}$ à valeurs dans la courbe $X^1 \subset \mathbb{P}^2$.

Dans l'ouvert $\big\{R_y \neq 0\big\}$, la courbe est un graphe :

$$y = \mathsf{Y}(x) \qquad\quad \textit{avec}\;\; 0 \equiv R\big(x, \mathsf{Y}(x)\big),$$

la coordonnée intrinsèque est x, la coordonnée de jet est x', et l'application :

$$x \longmapsto -\,\frac{x'}{R_y\big(x,\mathsf{Y}(x)\big)}$$

constitue une section holomorphe du fibré des jets d'ordre 1 d'applications holomorphes de $\mathbb{D}$ à valeurs dans la courbe $X^1 \subset \mathbb{P}^2$.

Dans l'intersection des deux ouverts :

$$\big\{R_x \neq 0\big\} \cap \big\{R_y \neq 0\big\},$$

ces deux sections holomorphes coïncident :

$$\frac{y'}{R_x\big(\underbrace{\mathsf{X}(\mathsf{Y}(x))}_{\equiv x},\mathsf{Y}(x)\big)} \equiv -\frac{x'}{R_y\big(x,\mathsf{Y}(x)\big)},$$

via le changement naturel de trivialisation :

$$y' = -\,x'\,\frac{R_x}{R_y}. \quad \square$$

Par conséquent, puisque la partie affine de la courbe :

$$X^1\cap\mathbb{C}^2 \;=\; \big\{R_x\neq 0\big\}\cup\big\{R_y\neq 0\big\},$$

est lisse, l'une ou l'autre de ces deux expressions :

$$\begin{aligned} y &\longmapsto \frac{y'}{R_x\big(\mathsf{X}(y),y\big)}, \\ x &\longmapsto -\frac{x'}{R_y\big(x,\mathsf{Y}(x)\big)}, \end{aligned}$$

peut être prise pour définir une section holomorphe du fibré :

$$J^1\big(\mathbb{D},X^1\cap\mathbb{P}^2\big).$$

Le comportement à l'infini de cette section sera étudié ultérieurement.

Pour passer aux jets d'ordre 2, une seconde différentiation s'impose :

$$\begin{aligned} 0 &= x'\,R_x+y'\,R_y, \\ 0 &= x''\,R_x+y''\,R_y+(x')^2\,R_{xx}+2\,x'y'\,R_{xy}+(y')^2\,R_{yy}. \end{aligned}$$

Après une résolution en y' et en y'' :

$$\begin{aligned} y'\,R_y &= -\,x'\,R_x, \\ y''\,R_y &= -\,x''\,R_x-(x')^2\,R_{xx}-2x'y'\,R_{xy}-(y')^2\,R_{yy}, \end{aligned}$$

une division commune par $R_x\,R_y$ amène à :

$$\begin{aligned} \frac{y'}{R_x} &= -\,\frac{x'}{R_y}, \\ \frac{y''}{R_x} &= -\,\frac{x''}{R_y}-\frac{(x')^2}{R_y}\,\frac{R_{xx}}{\boxed{R_x}}-2\,\frac{x'y'}{R_y}\,\frac{R_{xy}}{\boxed{R_x}}-\frac{(y')^2}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{\boxed{R_x}}. \end{aligned}$$

La première ligne ayant fourni une section holomorphe non triviale, il est naturel de fixer de manière similaire un :

Objectif. *Dans la deuxième ligne, ne voir aucun R_x en place dénominatoriale à droite.*

Auparavant, bien sûr, des remplacements de y' sont nécessaires :

$$
\begin{aligned}
\frac{y'}{R_x} &= -\,\frac{x'}{R_y}, \\
\frac{y''}{R_x} &= -\,\frac{x''}{R_y} - \frac{(x')^2}{R_y}\left[\frac{R_{xx}}{\boxed{R_x}} - 2\,\frac{R_{xy}}{R_y} + \frac{R_x}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y}\right].
\end{aligned}
$$

Ici, deux $\frac{1}{R_x}$ disparaissent, mais il reste encore un $\frac{1}{R_x}$.

Question. *Existe-t-il un moyen d'éliminer ce* $\frac{1}{R_x}$ *rémanent à droite, sans introduire de* $\frac{1}{R_y}$ *intempestif à gauche ?*

Oui. En effet, la première ligne, multipliée par un facteur approprié :

$$
\frac{y'}{R_x}\,x'\,\frac{R_{xx}}{R_x} = -\,\frac{x'}{R_y}\,x'\,\frac{R_{xx}}{R_x}
$$

permet de visualiser — une fois les deux équations mises en parallèle — que le terme intempestif (souligné ici) :

$$
\begin{aligned}
\frac{y'x'}{R_x}\,\frac{R_{xx}}{R_x} &= -\,\underline{\frac{(x')^2}{R_y}\,\frac{R_{xx}}{\boxed{R_x}}} \\
\frac{y''}{R_x} &= -\,\frac{x''}{R_y} - \underline{\frac{(x')^2}{R_y}\left[\frac{R_{xx}}{\boxed{R_x}}\right.} - 2\,\frac{R_{xy}}{R_y} + \left.\frac{R_x}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y}\right],
\end{aligned}
$$

peut être annihilé par simple soustraction :

$$
\frac{y''}{R_x} - \frac{y'x'}{R_x}\,\frac{R_{xx}}{R_x} = -\,\frac{x''}{R_y} - \frac{(x')^2}{R_y}\left[-\,2\,\frac{R_{xy}}{R_y} + \frac{R_x}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y}\right].
$$

À présent, il est donc très satisfaisant de constater qu'à gauche, seules des divisions par R_x apparaissent, tandis qu'à droite, seules des divisions par R_y apparaissent.

Toutefois, un défaut demeure, puisque dans le membre de gauche :

$$
\frac{y''}{R_x} - \frac{y'\,\boxed{x'}}{R_x}\,\frac{R_{xx}}{R_x} = -\,\frac{x''}{R_y} - \frac{(x')^2}{R_y}\left[-\,2\,\frac{R_{xy}}{R_y} + \frac{R_x}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y}\right],
$$

une coordonnée x' apparaît, alors qu'au-dessus de l'ouvert $\{R_x \neq 0\}$, seules les coordonnées de jets intrinsèques (y, y') devraient être utilisées.

Heureusement, ce problème peut être rapidement résolu en remplaçant :

$$
x' = -\,y'\,\frac{R_y}{R_x},
$$

ce qui donne :

$$\frac{y''}{R_x}+\frac{(y')^2}{R_x}\,\frac{R_y}{R_x}\,\frac{R_{xx}}{R_x}=-\,\frac{x''}{R_y}-\frac{(x')^2}{R_y}\bigg[-\,2\,\frac{R_{xy}}{R_y}+\frac{R_x}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y}\bigg],$$

sans introduire de $\frac{1}{R_y}$ intempestif à gauche !

Donc l'énonciation du lemme précédent se généralise, à savoir dans l'ouvert $\{R_x\neq 0\}$ sur lequel le fibré des jets d'ordre 2 :

$$J^2\big(\mathbb{D},X^1\cap\mathbb{P}^2\big),$$

est muni des coordonnées-fibres :

$$\big(y',y''\big),$$

l'application :

$$y\longmapsto\;\frac{y''}{R_x\big(\mathsf{X}(y),y\big)}+\frac{(y')^2}{R_x\big(\mathsf{X}(y),y\big)}\,\frac{R_y\big(\mathsf{X}(y),y\big)}{R_x\big(\mathsf{X}(y),y\big)}\,\frac{R_xx\big(\mathsf{X}(y),y\big)}{R_x\big(\mathsf{X}(y),y\big)}$$

constitue une section holomorphe, tandis que simultanément, dans l'ouvert $\{R_y\neq 0\}$, l'application :

$$x\longmapsto\;-\,\frac{x''}{R_y\big(x,\mathsf{Y}(x)\big)}-\frac{(x')^2}{R_y\big(x,\mathsf{Y}(x)\big)}\,\bigg[-\,2\,\frac{R_{xy}\big(x,\mathsf{Y}(x)\big)}{R_y\big(x,\mathsf{Y}(x)\big)}+\frac{R_x\big(x,\mathsf{Y}(x)\big)}{R_y\big(x,\mathsf{Y}(x)\big)}\,\frac{R_{yy}\big(x,\mathsf{Y}(x)\big)}{R_y\big(x,\mathsf{Y}(x)\big)}\bigg],$$

constitue une section holomorphe, *ces deux sections holomorphes coïncidant point par point dans l'intersection $\{R_x\neq 0\}\cap\{R_y\neq 0\}$ précisément grâce à l'équation découverte à l'instant par élimination*.

À nouveau, le comportement à l'infini de cette section holomorphe définie en tout point de $X^1\cap\mathbb{C}^2$ sera étudié ultérieurement.

En fait, un défaut formel très léger demeure encore. À travers l'échange des variables :

$$x\longleftrightarrow y,$$

la première formule :

$$\frac{y'}{R_x}=-\,\frac{x'}{R_y}$$

était, à un signe « $-$ » global près, *parfaitement symétrique*, or tel n'est pas le cas de la formule obtenue à l'instant :

$$\frac{y''}{R_x}+\frac{(y')^2}{R_x}\,\frac{R_y}{R_x}\,\frac{R_{xx}}{R_x}=-\,\frac{x''}{R_y}-\frac{(x')^2}{R_y}\bigg[-\,\underline{2\,\frac{R_{xy}}{R_y}}+\frac{R_x}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y}\bigg].$$

Observation. *Le terme souligné :*

$$\frac{(x')^2}{R_y}\,\underline{2\,\frac{R_{xy}}{R_y}}$$

peut circuler *d'un côté à l'autre, simplement en utilisant la formule du premier ordre :*

$$\frac{y'}{R_x} = -\,\frac{x'}{R_y},$$

ce qui donne une équation parfaitement symétrique :

$$\frac{(y')^2}{R_x}\,2\,\frac{R_{xy}}{R_x} = \frac{(x')^2}{R_y}\,2\,\frac{R_{xy}}{R_y},$$

avec seulement $\frac{1}{R_x}$ à gauche, et seulement $\frac{1}{R_y}$ à droite.

Maintenant donc, il s'agit manifestement de diviser en deux parties égales le terme supplémentaire à droite :

$$\frac{y''}{R_x} + \frac{(y')^2}{R_x}\,\frac{R_y}{R_x}\,\frac{R_{xx}}{R_x} = -\,\frac{x''}{R_y} - \frac{(x')^2}{R_y}\bigg[-\,\underline{(\mathbf{1}+1)\,\frac{R_{xy}}{R_y}} + \frac{R_x}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y}\bigg],$$

et de faire passer, grâce au principe de circulation, le **1** à gauche.

Proposition 5.2. *Une différentielle de jets holomorphe explicite et d'ordre précisément égal à 2 existe sur la partie affine $X^1 \cap \mathbb{P}^2$ d'une courbe algébrique lisse quelconque de degré $d \geqslant 1$ grâce à la formule :*

$$\boxed{\frac{y''}{R_x} + \frac{(y')^2}{R_x}\bigg[-\,\frac{R_{xy}}{R_x} + \frac{R_y}{R_x}\,\frac{R_{xx}}{R_x}\bigg] = -\,\frac{x''}{R_y} - \frac{(x')^2}{R_y}\bigg[-\,\frac{R_{xy}}{R_y} + \frac{R_x}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y}\bigg],}$$

formule qui est parfaitement symétrique *à travers l'échange des deux variables extrinsèques ambiantes :*

$$x \longleftrightarrow y,$$

sachant qu'à gauche, seules des divisions $\frac{1}{R_x}$ apparaissent, et qu'à droite, seules des divisions $\frac{1}{R_y}$ apparaissent.

Ce procédé de production de différentielles de jets holomorphes par élimination et symétrisation se poursuit-il au-delà, d'abord par exemple pour les jets d'ordre $\kappa = 3$?

Oui, à condition de travailler plus.

Tout d'abord, la différentiation de $0 = R(x,y)$ à l'ordre 3 suivie d'une division par $R_x\, R_y$ et d'une résolution en y''' s'exprime comme :

$$\begin{aligned}
\frac{y'''}{R_x} = -\frac{x'''}{R_y} & - \\
& -3\,\frac{x''x'}{R_y}\,\frac{R_{xx}}{R_x} - 3\,\frac{x''\,\boxed{y'}}{R_y}\,\frac{R_{xy}}{R_x} - 3\,\frac{x'\,\boxed{y''}}{R_y}\,\frac{R_{xy}}{R_x} - 3\,\frac{\boxed{y''y'}}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y} - \\
& - \frac{(x')^3}{R_y}\,\frac{R_{xxx}}{R_x} - 3\,\frac{(x')^2\,\boxed{y'}}{R_y}\,\frac{R_{xxy}}{R_y} - 3\,\frac{x'\,\boxed{(y')^2}}{R_y}\,\frac{R_{xyy}}{R_x} - \frac{\boxed{(y')^3}}{R_y}\,\frac{R_{yyy}}{R_x}.
\end{aligned}$$

Or, seuls x', x'', x''' devraient apparaître à droite. Il faut donc remplacer les y' et y'' présents en utilisant les formules déjà vues de changement de trivialisation :

$$\begin{aligned}
y' &= -\,x'\,\frac{R_x}{R_y}, \\
y'' &= -\,x''\,\frac{R_x}{R_y} - (x')^2\left[\frac{R_{xx}}{R_y} - 2\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{xy}}{R_y} + \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{yy}}{R_y}\right],
\end{aligned}$$

ce qui donne, sous forme d'abord brute :

$$\begin{aligned}
\frac{y'''}{R_x} = -\frac{x'''}{R_y} & - \\
& -3\,\frac{x''x'}{R_y}\,\frac{R_{xx}}{\boxed{R_x}} + 3\,\frac{x''x'}{R_y}\,\frac{R_{xy}}{R_y} + \\
& + 3\,\frac{x'x''}{R_y}\,\frac{R_{xy}}{R_y} + 3\,\frac{(x')^3}{R_y}\left[\frac{R_{xy}}{R_y}\,\frac{R_{xx}}{\boxed{R_x}} - 2\,\frac{R_{xy}}{R_y}\,\frac{R_{xy}}{R_y} + \left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{yy}}{R_y}\,\frac{R_{xy}}{R_y}\right] - \\
& - 3\,\frac{x'x''}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y}\left(\frac{R_x}{R_y}\right) - 3\,\frac{(x')^3}{R_y}\left[\frac{R_{xx}}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y} - 2\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{xy}}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y} + \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{yy}}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y}\right] - \\
& - \frac{(x')^3}{R_y}\,\frac{R_{xxx}}{\boxed{R_x}} + 3\,\frac{(x')^3}{R_y}\,\frac{R_{xxy}}{R_y} - 3\,\frac{(x')^3}{R_y}\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{xyy}}{R_y} + \frac{(x')^3}{R_y}\left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{yyy}}{R_y},
\end{aligned}$$

les divisions intempestives rémanentes :

$$\frac{*}{\boxed{R_x}}$$

étant rendues visibles par encadrement.

Maintenant, pour éliminer le premier tel dénominateur intempestif, il suffit de multiplier l'équation à l'ordre 2 par le facteur approprié :

$$3\,x'\,\frac{R_{xx}}{R_x}\,\left(\frac{y''}{R_x} = -\frac{x''}{R_y} - \frac{(x')^2}{R_y}\left[\frac{R_{xx}}{R_x} - 2\,\frac{R_{xy}}{R_y} + \left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{yy}}{R_y}\right]\right),$$

et de soustraire :

$$
\begin{aligned}
\frac{y'''}{R_x} - 3\,\frac{y''x'}{R_x}\,\frac{R_{xx}}{R_x} = -\,\frac{x'''}{R_y} + \frac{x''x'}{R_y}\bigg[6\,\frac{R_{xy}}{R_y} - 3\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{yy}}{R_y}\bigg] + \\
+\,\frac{(x')^3}{R_y}\bigg[3\,\frac{R_{xx}}{\boxed{R_x}}\,\frac{R_{xx}}{\boxed{R_x}} - 6\,\frac{R_{xy}}{R_y}\,\frac{R_{xx}}{\boxed{R_x}} + 3\,\frac{R_{xx}}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y} + \\
+\,3\,\frac{R_{xy}}{R_y}\,\,- 6\,\frac{R_{xy}}{R_y}\,\frac{R_{xy}}{R_y} + 3\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{yy}}{R_y}\,\frac{R_{xy}}{R_y} - \\
-\,\,3\,\frac{R_{xx}}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y} + 6\,\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{xy}}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y} - \\
-\,\,3\,\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{yy}}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y}\bigg] - \\
-\,\,\frac{(x')^3}{R_y}\,\frac{R_{xxx}}{\boxed{R_x}} + 3\,\frac{(x')^3}{R_y}\,\frac{R_{xxy}}{R_y} - 3\,\frac{(x')^3}{R_y}\,\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{xyy}}{R_y} + \frac{(x')^3}{R_y}\,\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)^2\frac{R_{yyy}}{R_y},
\end{aligned}
$$

et enfin de collecter-réorganiser :

$$
\begin{aligned}
\frac{y'''}{R_x} - 3\,\frac{y''x'}{R_x}\,\frac{R_{xx}}{R_x} = -\,\frac{x'''}{R_y} + \frac{x''x'}{R_y}\bigg[6\,\frac{R_{xy}}{R_y} - 3\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{yy}}{R_y}\bigg] + \\
+\,\frac{(x')^3}{R_y}\bigg[3\,\frac{R_{xx}}{\boxed{R_x}}\,\frac{R_{xx}}{\boxed{R_x}} - 3\,\frac{R_{xx}}{R_y}\,\frac{R_{xy}}{\boxed{R_x}} - 6\,\frac{R_{xy}}{R_y}\,\frac{R_{xy}}{R_y} + \\
+\,9\,\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{xy}}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y} - 3\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)^2\frac{R_{yy}}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y} - \\
-\,\,\frac{R_{xxx}}{\boxed{R_x}} + 3\,\frac{R_{xxy}}{R_y} - 3\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{xyy}}{R_y} + \bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)^2\frac{R_{yyy}}{R_y}\bigg].
\end{aligned}
$$

Pour éliminer les trois nouveaux termes intempestifs comportant des dénominateurs $\frac{1}{R_x}$, il suffit de multiplier par trois facteurs appropriés la formule symétrique des jets d'ordre 1, éventuellement élevée au carré :

$$
\begin{aligned}
(x')^2\,\frac{R_{xxx}}{R_x}\,\bigg(\frac{y'}{R_x} = -\,\frac{x'}{R_y}\bigg), \\
3\,(x')^2\,\frac{R_{xx}}{R_x}\,\frac{R_{xx}}{R_x}\,\bigg(\frac{y'}{R_x} = -\,\frac{x'}{R_y}\bigg), \\
3\,x'\,\frac{R_{xx}}{R_x}\,\frac{R_{xy}}{1}\,\bigg(\frac{(y')^2}{R_x\,R_x} = \frac{(x')^2}{R_y\,R_y}\bigg),
\end{aligned}
$$

et de soustraire ou d'additionner, ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
&\frac{y'''}{R_x} - 3\,\frac{y''x'}{R_x}\,\frac{R_{xx}}{R_x} - \frac{y'(x')^2}{R_x}\,\frac{R_{xxx}}{R_x} + 3\,\frac{(x')^2y'}{R_x}\,\frac{R_{xx}}{R_x}\,\frac{R_{xx}}{R_x} + 3\,\frac{x'(y')^2}{R_x}\,\frac{R_{xx}}{R_x}\,\frac{R_{xy}}{R_x} = \\
&\quad = -\,\frac{x''}{R_y} + \frac{x''x'}{R_y}\left[6\,\frac{R_{xy}}{R_y} - 3\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{yy}}{R_y}\right] + \\
&\quad + \frac{(x')^3}{R_y}\bigg[-\,6\,\frac{R_{xy}}{R_y}\,\frac{R_{xy}}{R_y} + 9\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{xy}}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y} - 3\left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{yy}}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y} + \\
&\qquad\qquad + 3\,\frac{R_{xxy}}{R_y} - 3\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{xyy}}{R_y} + \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{yyy}}{R_y}\bigg].
\end{aligned}
$$

Ainsi, puisque seules des divisions $\frac{1}{R_x}$ apparaissent à gauche, et puisque seules des divisions $\frac{1}{R_y}$ apparaissent à droite, cette équation produit une différentielle de jets holomorphe en tout point de la partie affine $X^1 \cap \mathbb{C}^2$ de la courbe projective.

Toutefois, à gauche, x' apparaît quatre fois ce qui n'est pas naturel, puisqu'au-dessus de l'ouvert $\{R_x = 0\}$ ne devraient apparaître que y', y'', y'''. Il suffit d'effectuer le remplacement :

$$
x' = -\,y'\,\frac{R_y}{R_x},
$$

ce qui fournit l'équation :

$$
\begin{aligned}
&\frac{y'''}{R_x} + \frac{y''y'}{R_x}\left[3\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{xx}}{R_x}\right] + \frac{(y')^3}{R_x}\left[-\,3\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xy}}{R_x} + 3\left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xx}}{R_x} - \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{xxx}}{R_x}\right] = \\
&\quad = -\,\frac{x''}{R_y} - \frac{x''x'}{R_y}\left[-\,6\,\frac{R_{xy}}{R_y} + 3\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{yy}}{R_y}\right] - \\
&\quad -\,\frac{(x')^3}{R_y}\bigg[6\,\frac{R_{xy}}{R_y}\,\frac{R_{xy}}{R_y} - 9\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{xy}}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y} + 3\left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{yy}}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y} - \\
&\qquad\qquad -\,3\,\frac{R_{xxy}}{R_y} + 3\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{xyy}}{R_y} - \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{yyy}}{R_y}\bigg].
\end{aligned}
$$

À ce stade, un léger défaut demeure encore : les deux termes à gauche et à droite du signe « $=$ » ne sont pas symétriques.

Manifestement, le premier travail pour symétriser cette équation doit consister à équidistribuer à droite et à gauche le terme :

$$
-\,6\,\frac{R_{xy}}{R_y}
$$

qui, pour l'instant, est entièrement situé à droite.

À cette fin, il convient de multiplier l'équation connue par deux expression égales :

$$\underbrace{\frac{y''}{R_x}}_{\substack{\text{multiplier par}\\ -3\,y'\,\frac{R_{xy}}{R_x}}} = \underbrace{-\frac{x''}{R_y} - \frac{(x')^2}{R_y}\,\frac{R_{xx}}{R_x} - 2\,\frac{x'y'}{R_y}\,\frac{R_{xy}}{\boxed{R_x}} - \frac{(y')^2}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_x}}_{\substack{\text{multiplier par}\\ 3\,x'\,\frac{R_{xy}}{R_y}}},$$

pour faire circuler la moitié du $6 = 3 + 3$ en question grâce à une simple addition :

$$\begin{aligned}
&\frac{y'''}{R_x} + \frac{y''y'}{R_x}\bigg[-\,3\,\frac{R_{xy}}{R_x} + 3\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)\frac{R_{xx}}{R_x}\bigg] + \\
&\qquad + \frac{(y')^3}{R_x}\bigg[-\,3\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xy}}{R_x} + 3\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)^2\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xx}}{R_x} - \bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)^2\frac{R_{xxx}}{R_x}\bigg] = \\
&= -\frac{x'''}{R_y} - \frac{x''x'}{R_y}\bigg[(-6+3)\,\frac{R_{xy}}{R_y} + 3\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{yy}}{R_y}\bigg] - \\
&\qquad - \frac{(x')^3}{R_y}\bigg[3\,\frac{R_{xx}}{\boxed{R_x}}\frac{R_{xy}}{R_y} - 6\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{xy}}{R_y}\frac{R_{yy}}{R_y} + 3\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)^2\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{yy}}{R_y} - \\
&\qquad\qquad - 3\,\frac{R_{xxy}}{R_y} + 3\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{xyy}}{R_y} - \bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)^2\frac{R_{yyy}}{R_y}\bigg],
\end{aligned}$$

mais ce calcul introduit un $\frac{1}{R_x}$ intempestif à droite.

Le lecteur a certainement deviné quels étaient les derniers gestes de calcul qu'il s'agit d'effectuer pour obtenir (exercice) l'expression parfaitement symétrique finale :

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{y'''}{R_x} + \frac{y''y'}{R_x}\bigg[-\,3\,\frac{R_{xy}}{R_x} + 3\,\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)\frac{R_{xx}}{R_x}\bigg] + \\
&\qquad + \frac{(y')^3}{R_x}\bigg[-\,6\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)\frac{R_{xy}}{R_x}\frac{R_{xx}}{R_x} + 3\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)^2\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xx}}{R_x} + \\
&\qquad\qquad + 3\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)\frac{R_{xxy}}{R_x} - \bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)^2\frac{R_{xxx}}{R_x}\bigg] = \\
&= -\frac{x'''}{R_y} - \frac{x''x'}{R_y}\bigg[-\,3\,\frac{R_{xy}}{R_y} + 3\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{yy}}{R_y}\bigg] - \\
&\qquad - \frac{(x')^3}{R_y}\bigg[-\,6\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{xy}}{R_y}\frac{R_{yy}}{R_y} + 3\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)^2\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{yy}}{R_y} + \\
&\qquad\qquad + 3\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{xyy}}{R_y} - \bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)^2\frac{R_{yyy}}{R_y}\bigg].
\end{aligned}}$$

6. Transmission de la symétrie des différentielles de jets holomorphes

Maintenant, pour les jets d'ordre supérieur $\kappa \geqslant 4$, il est clair que l'approche par éliminations successives devrait toujours aboutir, mais seulement au prix de calculs de plus en plus élaborés.

Heureusement, une autre approche plus directe fait converger sans effort vers des équations dont les membres de gauche et de droite sont automatiquement symétriques par rapport à l'involution :

$$x \longleftrightarrow y.$$

En effet par exemple, une différentiation formelle de la relation :

$$\frac{y'}{R_x} = -\,\frac{x'}{R_y}$$

donne :

$$\frac{y''}{R_x} - y'\,\frac{\big(\boxed{x'}\,R_{xx} + y'\,R_{xy}\big)}{R_x\,R_x} = -\,\frac{x''}{R_y} + x'\,\frac{\big(x'\,R_{xy} + \boxed{y'}\,R_{yy}\big)}{R_y\,R_y},$$

et deux remplacements *symétriques*, de x' à gauche et de y' à droite, transforment cette équation formellement en :

$$\frac{y''}{R_x} + \frac{(y')^2}{R_x}\bigg[-\,\frac{R_{xy}}{R_x} + \frac{R_y}{R_x}\,\frac{R_{xx}}{R_x}\bigg] = -\,\frac{x''}{R_y} - \frac{(x')^2}{R_y}\bigg[-\,\frac{R_{xy}}{R_y} + \frac{R_x}{R_y}\,\frac{R_{yy}}{R_y}\bigg],$$

ce qui est justement l'expression parfaitement symétrique obtenue auparavant au prix de calculs d'élimination.

Comment justifier la véracité de ce calcul ?

C'est très simple. Dans un voisinage d'un point :

$$(x_p, y_p)\,\in\,\big\{R_x \neq 0\big\} \cap \big\{R_y \neq 0\big\},$$

la courbe est représentable simultanément sous forme de deux graphes analytiques locaux :

$$y = \mathsf{Y}(x),$$
$$x = \mathsf{X}(y),$$

au moyen de deux fonctions holomorphes locales $\mathsf{Y} = \mathsf{Y}(x)$ définie près de x_p et $\mathsf{X} = \mathsf{X}(y)$ définie près de y_p, satisfaisant :

$$0 \equiv R\big(x, \mathsf{Y}(x)\big),$$
$$0 \equiv R\big(\mathsf{Y}(y), y\big).$$

Dans la coordonnée intrinsèque locale y, l'écriture abrégée :

$$\frac{y'}{R_x}$$

signifie en fait rigoureusement :

$$\frac{y'}{R_x\big(\mathsf{X}(y),y\big)},$$

et de même :

$$-\frac{x'}{R_y}$$

signifie rigoureusement :

$$-\frac{x'}{R_y\big(x,\mathsf{Y}(x)\big)}.$$

Comme cela a déjà été vu, l'égalité abrégée :

$$\frac{y'}{R_x}=-\frac{x'}{R_y}$$

en tenant compte de :

$$x=\mathsf{X}(y),$$

d'où :

$$x'=y'\,\mathsf{X}_y(y),$$

doit alors être lue rigoureusement comme :

$$\begin{aligned}\frac{y'}{R_x\big(\mathsf{X}(y),y\big)} &\equiv -\frac{x'}{R_y\big(x,\mathsf{Y}(x)\big)}\bigg|_{\substack{\text{après changement}\\ \text{de coordonnée}}}\\ &\equiv -\frac{y'\,\mathsf{X}_y(y)}{R_y\big(\mathsf{X}(y),\underbrace{\mathsf{Y}(\mathsf{X}(y))}_{\equiv y}\big)},\end{aligned}$$

ce qui est cohérent avec la différentiation de :

$$0\equiv R\big(\mathsf{X}(y),y\big),$$

laquelle fournit :

$$0=\mathsf{X}_y\,R_x+R_y.$$

Une autre manière — encore plus naturelle et directe — de voir pourquoi le procédé formel utilisé à l'instant est rigoureux, c'est de rappeler que l'intérêt se porte principalement sur des applications holomorphes locales :

$$f\colon\quad \begin{aligned}\mathbb{D}&\longrightarrow X^1\cap\mathbb{C}^2\\ \zeta&\longmapsto \big(x(\zeta),y(\zeta)\big),\end{aligned}$$

à savoir satisfaisant :

$$0\equiv R\big(x(\zeta),y(\zeta)\big),$$

d'où par différentiation :

$$0\;\equiv\;x'(\zeta)\,R_x\big(x(\zeta),y(\zeta)\big)+y'(\zeta)\,R_y\big(x(\zeta),y(\zeta)\big),$$

puis dans l'ouvert $\{R_y \neq 0\} \cap \{R_x \neq 0\}$:

$$\frac{y'(\zeta)}{R_x\big(x(\zeta), y(\zeta)\big)} \equiv -\frac{x'(\zeta)}{R_y\big(x(\zeta), y(\zeta)\big)}.$$

Une simple différentiation par rapport à ζ fournit alors exactement ce qui a été obtenu à l'instant, à savoir en écrivant tous les arguments :

$$\begin{aligned}\frac{y''(\zeta)}{R_x\big(x(\zeta), y(\zeta)\big)} - y'(\zeta)\,\frac{x'(\zeta)\,R_{xx}\big(x(\zeta), y(\zeta)\big) + y'(\zeta)\,R_{xy}\big(x(\zeta), y(\zeta)\big)}{R_x\big(x(\zeta), y(\zeta)\big)\,R_x\big(x(\zeta), y(\zeta)\big)} &= \\ = -\frac{x''(\zeta)}{R_y\big(x(\zeta), y(\zeta)\big)} + x'(\zeta)\,\frac{x'(\zeta)\,R_{xy}\big(x(\zeta), y(\zeta)\big) + y'(\zeta)\,R_{yy}\big(x(\zeta), y(\zeta)\big)}{R_y\big(x(\zeta), y(\zeta)\big)\,R_y\big(x(\zeta), y(\zeta)\big)}&.\end{aligned}$$

Théorème 6.1. *Pour tout ordre de jets $\kappa \geqslant 1$, il existe une différentielle de jets holomorphe dans la partie affine $X^1 \cap \mathbb{P}^2$ de la courbe qui est représentée par une équation parfaitement symétrique :*

$$\begin{aligned}\frac{y^{(\kappa)}}{R_x} + \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+(\kappa-1)\mu_{\kappa-1}=\kappa\\ \mu_1\geqslant 0,\dots,\mu_{\kappa-1}\geqslant 0}} \frac{\big(y'\big)^{\mu_1}\cdots\big(y^{(\kappa-1)}\big)^{\mu_{\kappa-1}}}{R_x}\,\mathscr{J}^{\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}}\left(\frac{R_y}{R_x},\ \left(\frac{R_{x^iy^j}}{R_x}\right)_{\substack{2\leqslant i+j\leqslant\\ \leqslant -1+\mu_1+\cdots+\mu_{\kappa-1}}}\right) &= \\ = -\frac{x^{(\kappa)}}{R_y} - \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+(\kappa-1)\mu_{\kappa-1}=\kappa\\ \mu_1\geqslant 0,\dots,\mu_{\kappa-1}\geqslant 0}} \frac{\big(x'\big)^{\mu_1}\cdots\big(x^{(\kappa-1)}\big)^{\mu_{\kappa-1}}}{R_y}\,\mathscr{J}^{\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}}\left(\frac{R_x}{R_y},\ \left(\frac{R_{y^ix^j}}{R_y}\right)_{\substack{2\leqslant i+j\leqslant\\ \leqslant -1+\mu_1+\cdots+\mu_{\kappa-1}}}\right)&,\end{aligned}$$

en termes de certains polynômes :

$$\mathscr{J}^{\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}} = \mathscr{J}^{\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}}\left(\mathsf{R}_{0,1},\ \big(\mathsf{R}_{i,j}\big)_{\substack{2\leqslant i+j\leqslant\\ \leqslant -1+\mu_1+\cdots+\mu_{\kappa-1}}}\right)$$

à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Démonstration. Évidemment, la récurrence n'est pas sorcière puisque nul exigence d'expliciteté n'est émise par cet énoncé.

Une différentiation d'ordre 1 du membre de gauche de cette formule symétrique admise par récurrence à l'ordre κ donne :

$$
\begin{aligned}
&\frac{y^{(\kappa+1)}}{R_x} - \frac{y^{(\kappa)}}{R_x}\,\frac{\big(\boxed{x'}\,R_{xx}+y'\,R_{xy}\big)}{R_x} + \\
&\quad + \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+(\kappa-1)\mu_{\kappa-1}=\kappa \\ \mu_1\geqslant 0,\dots,\mu_{\kappa-1}\geqslant 0}} \sum_{\lambda=1}^{\kappa-1} \frac{\big(y'\big)^{\mu_1}\cdots\mu_\lambda\,y^{(\lambda+1)}\,\big(y^{(\lambda)}\big)^{\mu_\lambda-1}\cdots\big(y^{(\kappa-1)}\big)^{\mu_{\kappa-1}}}{R_x}\cdot\mathscr{J}^{\,\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}} - \\
&\quad - \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+(\kappa-1)\mu_{\kappa-1}=\kappa \\ \mu_1\geqslant 0,\dots,\mu_{\kappa-1}\geqslant 0}} \frac{\big(y'\big)^{\mu_1}\cdots\big(y^{(\kappa-1)}\big)^{\mu_{\kappa-1}}}{R_x}\cdot\frac{\big(\boxed{x'}\,R_{xx}+y'\,R_{xy}\big)}{R_x}\cdot\mathscr{J}^{\,\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}} + \\
&\quad + \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+(\kappa-1)\mu_{\kappa-1}=\kappa \\ \mu_1\geqslant 0,\dots,\mu_{\kappa-1}\geqslant 0}} \frac{\big(y'\big)^{\mu_1}\cdots\big(y^{(\kappa-1)}\big)^{\mu_{\kappa-1}}}{R_x}\cdot\frac{\partial\mathscr{J}^{\,\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}}}{\partial\mathsf{R}_{0,1}}\cdot\left[\frac{\boxed{x'}\,R_{xy}+y'\,R_{yy}}{R_x}-\frac{R_y}{R_x}\,\frac{\big(\boxed{x'}\,R_{xx}+y'\,R_{xy}\big)}{R_x}\right] + \\
&\quad + \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+(\kappa-1)\mu_{\kappa-1}=\kappa \\ \mu_1\geqslant 0,\dots,\mu_{\kappa-1}\geqslant 0}} \frac{\big(y'\big)^{\mu_1}\cdots\big(y^{(\kappa-1)}\big)^{\mu_{\kappa-1}}}{R_x}\cdot\sum_{2\leqslant i+j\leqslant -1+\mu_1+\cdots+\mu_{\kappa-1}}\frac{\partial\mathscr{J}^{\,\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}}}{\partial\mathsf{R}_{i,j}}\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot\left[\frac{\boxed{x'}\,R_{x^{i+1}y^j}+y'\,R_{x^iy^{j+1}}}{R_x}-\frac{R_{x^iy^j}}{R_x}\,\frac{\big(\boxed{x'}\,R_{xx}+y'\,R_{xy}\big)}{R_x}\right],
\end{aligned}
$$

et la différentiation du membre de droite donne une expression entièrement symétrique.

Il faut alors remplacer tous les x' encadrés :

$$
\begin{aligned}
&= \frac{y^{(\kappa+1)}}{R_x} + \frac{y^{(\kappa)}y'}{R_x}\left[\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{xx}}{R_x} - \frac{R_{xy}}{R_x}\right] + \\
&+ \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+(\kappa-1)\mu_{\kappa-1}=\kappa \\ \mu_1\geqslant 0,\dots,\mu_{\kappa-1}\geqslant 0}} \sum_{\lambda=1}^{\kappa-1} \mu_\lambda \, \frac{\big(y'\big)^{\mu_1}\cdots\big(y^{(\lambda)}\big)^{\mu_\lambda-1}\big(y^{(\lambda+1)}\big)^{\mu_{\lambda+1}+1}\cdots\big(y^{(\kappa-1)}\big)^{\mu_{\kappa-1}}}{R_x}\cdot \mathscr{J}^{\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}} - \\
&- \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+(\kappa-1)\mu_{\kappa-1}=\kappa \\ \mu_1\geqslant 0,\dots,\mu_{\kappa-1}\geqslant 0}} \frac{y'\,\big(y'\big)^{\mu_1}\cdots\big(y^{(\kappa-1)}\big)^{\mu_{\kappa-1}}}{R_x}\cdot\left[-\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{xx}}{R_x} + \frac{R_{xy}}{R_x}\right]\cdot \mathscr{J}^{\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}} + \\
&+ \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+(\kappa-1)\mu_{\kappa-1}=\kappa \\ \mu_1\geqslant 0,\dots,\mu_{\kappa-1}\geqslant 0}} \frac{y'\,\big(y'\big)^{\mu_1}\cdots\big(y^{(\kappa-1)}\big)^{\mu_{\kappa-1}}}{R_x}\cdot\frac{\partial \mathscr{J}^{\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}}}{\partial \mathsf{R}_{0,1}}\cdot\left[-2\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{xy}}{R_x} + \frac{R_{yy}}{R_x} + \left(\frac{R_y}{R_x}\right)^2\frac{R_{xx}}{R_x}\right] + \\
&+ \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+(\kappa-1)\mu_{\kappa-1}=\kappa \\ \mu_1\geqslant 0,\dots,\mu_{\kappa-1}\geqslant 0}} \frac{y'\,\big(y'\big)^{\mu_1}\cdots\big(y^{(\kappa-1)}\big)^{\mu_{\kappa-1}}}{R_x} \sum_{2\leqslant i+j\leqslant -1+\mu_1+\cdots+\mu_{\kappa-1}} \frac{\partial \mathscr{J}^{\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}}}{\partial \mathsf{R}_{i,j}}\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot\left[-\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{x^{i+1}y^j}}{R_x} + \frac{R_{x^iy^{j+1}}}{R_x} + \left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{x^iy^j}}{R_x} - \frac{R_{xy}}{R_x}\frac{R_{x^iy^j}}{R_x}\right],
\end{aligned}
$$

et effectuer aussi les remplacements symétriques de tous les y' qui apparaissent dans la différentiation d'ordre 1 du membre de droite. Le résultat obtenu est bien de la forme générale annoncée, et ce, au niveau $\kappa+1$ (exercice visuel et mental). □

Maintenant, pour éclaircir encore plus avant ce procédé et s'assurer de sa cohérence symbolique avec ce qui précède, il est avisé d'examiner le résultat explicite, par exemple à l'ordre $\kappa = 3$.

Une différentiation de :

$$
\frac{y''}{R_x} - y'\,\frac{\big(x'\,R_{xx} + y'\,R_{xy}\big)}{R_x\,R_x}
$$

donne, tous remplacements et toutes simplifications étant faits :

$$
\begin{aligned}
&\frac{y'''}{R_x} + \frac{y''y'}{R_x}\left[-3\,\frac{R_{xy}}{R_x} + 3\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{xx}}{R_x}\right] + \\
&\quad + \frac{(y')^3}{R_x}\left[\underline{2\,\frac{R_{xy}}{R_x}\frac{R_{xy}}{R_x}} + \underline{\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{yy}}{R_x}} - 6\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xy}}{R_x} + 3\left(\frac{R_y}{R_x}\right)^2\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xx}}{R_x} - \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{R_{xyy}}{R_x} + 2\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{xxy}}{R_x} - \left(\frac{R_y}{R_x}\right)^2\frac{R_{xxx}}{R_x}\right].
\end{aligned}
$$

Ce n'est pas la même expression que celle obtenue auparavant par élimination ! En particulier, les termes soulignés diffèrent ! D'autes encore diffèrent !

Il y a une explication à cela : *ces termes soulignés peuvent circuler d'un côté et de l'autre du signe « = »*, sans compromettre le fait que seules des divisions par R_x sont autorisées à droite, et seules des divisions par R_y sont autorisées à gauche :

$$
\begin{aligned}
&\frac{y'''}{R_x}+\frac{y''y'}{R_x}\bigg[-\,3\,\frac{R_{xy}}{R_x}+3\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)\frac{R_{xx}}{R_x}\bigg]+\\
&\qquad+\frac{(y')^3}{R_x}\bigg[\underline{2\,\frac{R_{xy}}{R_x}\frac{R_{xy}}{R_x}}_{\circ}+\underline{\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{yy}}{R_x}}_{\circ\circ}-6\,\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xy}}{R_x}+3\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)^2\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xx}}{R_x}-\\
&\qquad\qquad\qquad-\,\frac{R_{xyy}}{R_x}+2\,\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)\frac{R_{xxy}}{R_x}-\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)^2\frac{R_{xxx}}{R_x}\bigg]=\\
&=-\frac{x'''}{R_y}-\frac{x''x'}{R_y}\bigg[-\,3\,\frac{R_{xy}}{R_y}+3\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{yy}}{R_y}\bigg]+\\
&\qquad+\frac{(x')^3}{R_y}\bigg[\underline{2\,\frac{R_{xy}}{R_y}\frac{R_{xy}}{R_y}}_{\circ}+\underline{\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{xx}}{R_y}}_{\circ\circ}-6\,\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{xy}}{R_y}+3\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)^2\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{yy}}{R_y}-\\
&\qquad\qquad\qquad-\,\frac{R_{xxy}}{R_y}+2\,\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{xyy}}{R_y}-\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)^2\frac{R_{yyy}}{R_y}\bigg],
\end{aligned}
$$

et qui plus est, les termes soulignés s'annihilent de part et d'autre, en tenant compte de la relation $\frac{y'}{R_x}=-\frac{x'}{R_y}$, convenablement multipliée. Après cette simplification :

$$
\begin{aligned}
&\frac{y'''}{R_x}+\frac{y''y'}{R_x}\bigg[-\,3\,\frac{R_{xy}}{R_x}+3\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)\frac{R_{xx}}{R_x}\bigg]+\\
&\qquad+\frac{(y')^3}{R_x}\bigg[-\,6\,\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xy}}{R_x}+3\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)^2\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xx}}{R_x}-\\
&\qquad\qquad\qquad-\,\frac{R_{xyy}}{R_x}+2\,\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)\frac{R_{xxy}}{R_x}-\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)^2\frac{R_{xxx}}{R_x}\bigg]=\\
&=-\frac{x'''}{R_y}-\frac{x''x'}{R_y}\bigg[-\,3\,\frac{R_{xy}}{R_y}+3\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{yy}}{R_y}\bigg]+\\
&\qquad+\frac{(x')^3}{R_y}\bigg[-\,6\,\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{xy}}{R_y}+3\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)^2\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{yy}}{R_y}-\\
&\qquad\qquad\qquad-\,\frac{R_{xxy}}{R_y}+2\,\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)\frac{R_{xyy}}{R_y}-\bigg(\frac{R_x}{R_y}\bigg)^2\frac{R_{yyy}}{R_y}\bigg],
\end{aligned}
$$

et il est plus avantageux de repartir de cette identité pour différentier une fois de plus et obtenir une différentielle de jets d'ordre $\kappa = 4$ qui est holomorphe sur $X^1 \cap \mathbb{C}^2$.

Tous remplacements effectués et toutes simplifications faites, la différentiation du membre de droite devient :

$$
\begin{aligned}
&\frac{y''''}{R_x} + \frac{y'''y'}{R_x}\left[-\,4\,\frac{R_{xy}}{R_x} + 4\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{xx}}{R_x}\right] + \frac{y''y''}{R_x}\left[-\,3\,\frac{R_{xy}}{R_x} + 3\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{xx}}{R_x}\right] + \\
&+ \frac{y''(y')^2}{R_x}\left[3\,\frac{R_{xy}}{R_x}\frac{R_{xy}}{R_x} + 3\,\frac{R_{yy}}{R_x}\frac{R_{xx}}{R_x} - 30\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xy}}{R_x} + 15\left(\frac{R_y}{R_x}\right)^2\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xx}}{R_x} - \right. \\
&\qquad\left. -\,6\,\frac{R_{xyy}}{R_x} + 12\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{xxy}}{R_x} - 6\left(\frac{R_y}{R_x}\right)^2\frac{R_{xxx}}{R_x}\right] +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{(y')^4}{R_x}\left[-\,6\,\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xy}}{R_x}\frac{R_{yy}}{R_x} + 30\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xy}}{R_x}\frac{R_{xy}}{R_x} + 6\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{yy}}{R_x} - \right. \\
&\qquad -\,45\left(\frac{R_y}{R_x}\right)^2\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xy}}{R_x} + 15\left(\frac{R_y}{R_x}\right)^2\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xx}}{R_x} + \\
&\qquad + 2\,\frac{R_{xy}}{R_x}\frac{R_{xyy}}{R_x} + 2\,\frac{R_{yy}}{R_x}\frac{R_{xxy}}{R_x} - 8\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xyy}}{R_x} - 14\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{xy}}{R_x}\frac{R_{xxy}}{R_x} - 2\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{yy}}{R_x}\frac{R_{xxx}}{R_x} + \\
&\qquad + 18\left(\frac{R_y}{R_x}\right)^2\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xxy}}{R_x} + 12\left(\frac{R_y}{R_x}\right)^2\frac{R_{xy}}{R_x}\frac{R_{xxx}}{R_x} - 10\left(\frac{R_y}{R_x}\right)^3\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xxx}}{R_x} - \\
&\qquad \left. -\,\frac{R_{xyyy}}{R_x} + 3\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{xxyy}}{R_x} - 3\left(\frac{R_y}{R_x}\right)^2\frac{R_{xxxy}}{R_x} + \left(\frac{R_y}{R_x}\right)^3\frac{R_{xxxx}}{R_x}\right],
\end{aligned}
$$

et bien sûr, la différentiation du membre de droite s'obtient en échangeant $x \longleftrightarrow y$, avec un signe « $-$ » global :

$$
\begin{aligned}
&-\,\frac{x''''}{R_y} - \frac{x'''x'}{R_y}\left[-\,4\,\frac{R_{yx}}{R_y} + 4\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{yy}}{R_y}\right] - \frac{x''x''}{R_y}\left[-\,3\,\frac{R_{yx}}{R_y} + 3\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{yy}}{R_y}\right] - \\
&-\,\frac{x''(x')^2}{R_y}\left[3\,\frac{R_{yx}}{R_y}\frac{R_{yx}}{R_y} + 3\,\frac{R_{xx}}{R_y}\frac{R_{yy}}{R_y} - 30\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{yx}}{R_y} + 15\left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{yy}}{R_y} - \right. \\
&\qquad\left. -\,6\,\frac{R_{yxx}}{R_y} + 12\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{yyx}}{R_y} - 6\left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{yyy}}{R_y}\right] -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{(x')^4}{R_y}\bigg[&-6\,\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{yx}}{R_y}\frac{R_{xx}}{R_y}+30\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{yx}}{R_y}\frac{R_{yx}}{R_y}+6\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{xx}}{R_y}-\\
&-45\left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{yx}}{R_y}+15\left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{yy}}{R_y}+\\
&+2\,\frac{R_{yx}}{R_y}\frac{R_{yxx}}{R_y}+2\,\frac{R_{xx}}{R_y}\frac{R_{yyx}}{R_y}-8\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{yxx}}{R_y}-14\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{yx}}{R_y}\frac{R_{yyx}}{R_y}-2\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{xx}}{R_y}\frac{R_{yyy}}{R_y}+\\
&+18\left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{yyx}}{R_y}+12\left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{yx}}{R_y}\frac{R_{yyy}}{R_y}-10\left(\frac{R_x}{R_y}\right)^3\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{yyy}}{R_y}-\\
&-\frac{R_{yxxx}}{R_y}+3\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{yyxx}}{R_y}-3\left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{yyyx}}{R_y}+\left(\frac{R_x}{R_y}\right)^3\frac{R_{yyyy}}{R_y}\bigg].
\end{aligned}
$$

7. **Annulations sur la droite à l'infini** $\mathbb{P}^1_\infty$

Comment ces différentielles de jets, holomorphes sur la partie affine $X^1 \cap \mathbb{P}^2$ de la courbe, se comportent-elles aux points (isolés, en nombre fini) $X^1 \cap \mathbb{P}^1_\infty$ de la courbe qui sont situés à l'infini ? Ces différentielles de jets y ont-elles des pôles ?

Dans la carte affine initiale $\{T \neq 0\}$, *l'équation affine initiale* de $X^1 \cap \mathsf{U}_0$:

$$0 = R_0(x_0, y_0),$$

s'obtient en extrayant T^d par homogénéité :

$$0 = T^d \underbrace{\mathrm{R}\left(1 : \frac{X}{T} : \frac{Y}{T}\right)}_{=:\, R_0(x_0,y_0)}.$$

De manière analogue, des divisions de l'équation homogène par X puis par Y :

$$0 = X^d \underbrace{\mathrm{R}\left(\frac{T}{X} : 1 : \frac{Y}{X}\right)}_{=:\, R_1(x_1,y_1)} \qquad \text{et} \qquad 0 = Y^d \underbrace{\mathrm{R}\left(\frac{T}{Y} : \frac{X}{Y} : 1\right)}_{=:\, R_2(x_2,y_2)},$$

fournissent les deux autres équations affines.

Sachant que les deux autres systèmes de coordonnées affines sur $\mathbb{P}^2$:

$$(x_1, y_1) \qquad \text{et} \qquad (x_2, y_2)$$

sont liés aux coordonnées initiales (x_0, y_0) comme suit :

$$
\begin{aligned}
(x_1, y_1) &= \left(\frac{1}{x_0}, \frac{y_0}{x_0}\right) \iff \left(\frac{1}{x_1}, \frac{y_1}{x_1}\right) = (x_0, y_0), \\
(x_2, y_2) &= \left(\frac{x_0}{y_0}, \frac{1}{y_0}\right) \iff \left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) = (x_0, y_0),
\end{aligned}
$$

l'homogénéité du polynôme $\mathrm{R} = \mathrm{R}(T : X : Y)$ montre par le calcul que :

$$
\begin{aligned}
R_1\big(x_1, y_1\big) &= \mathrm{R}\left(\frac{T}{X} : 1 : \frac{Y}{X}\right) = \frac{T^d}{X^d}\,\mathrm{R}\left(1 : \frac{X}{T} : \frac{Y}{T}\right) = \frac{1}{(x_0)^d}\,R\big(x_0, y_0\big), \\
R_2\big(x_2, y_2\big) &= \mathrm{R}\left(\frac{T}{Y} : \frac{X}{Y} : 1\right) = \frac{T^d}{Y^d}\,\mathrm{R}\left(1 : \frac{X}{T} : \frac{Y}{T}\right) = \frac{1}{(y_0)^d}\,R_0\big(x_0, y_0\big).
\end{aligned}
$$

Après normalisations géométriques élémentaires, dans les coordonnées affines initiales abrégées :

$$
(x, y) \equiv (x_0, y_0),
$$

le polynôme définissant initial $R \equiv R_0$ s'écrit :

$$
R = x^d + y^d + R_d^* + R_{d-1} + \cdots + R_1 + R_0,
$$

avec :

$$
R_d^* = \sum_{1 \leqslant i \leqslant d-1} \underbrace{r_{i,d-i}}_{\in \mathbb{C}}\, x^i\, y^{d-i},
$$

et, pour $1 \leqslant \ell \leqslant d-1$, avec :

$$
R_\ell = \sum_{0 \leqslant i \leqslant \ell} \underbrace{r_{i,\ell-i}}_{\in \mathbb{C}}\, x^i\, y^{\ell-i},
$$

le dernier terme étant constant :

$$
R_0 \in \mathbb{C}.
$$

La présence de $x^d + y^d$ — toujours arrangeable — assure que :

$$
\infty_x \notin X^1 \cap \mathbb{P}^1_\infty \qquad \text{et} \qquad \infty_y \notin X^1 \cap \mathbb{P}^1_\infty.
$$

Par disposition géométrique déjà réalisée à l'avance, la courbe X^1 intersecte transversalement la droite à l'infini $\mathbb{P}^1_\infty$ en exactement d points.

Il convient maintenant de ré-écrire les coordonnées affines initiales avec l'indice qui notifie leur appartenance à l'ouvert U_0 :

$$
(x_0, y_0).
$$

Question de transfert. *Que devient alors, par exemple, la différentielle de jets :*

$$
\left.\frac{y_0'}{R_{0,x_0}(x_0, y_0)}\right|_{X^1}
$$

à travers le changement de carte affine :

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right)?$$

Dans l'ouvert U_2, la nouvelle équation affine de la courbe :

$$0 = R_2(x_2, y_2)$$

est donnée en termes du nouveau polynôme :

$$\begin{aligned}
R_2(x_2, y_2) &:= (y_2)^d \, R_0\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) \\
&= \big(y_2\big)^d \left[\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^d + \left(\frac{1}{y_2}\right)^d + \sum_{1\leqslant i\leqslant d-1} r_{i,d-i} \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^i \left(\frac{1}{y_2}\right)^{d-i} + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + R_{d-1}\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) + \cdots + R_1\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) + R_0\right].
\end{aligned}$$

Or, chaque R_ℓ est homogène de degré ℓ :

$$\big(y_2\big)^d \, R_\ell\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) \,=\, \mathrm{O}\Big(\big(y_2\big)^{d-\ell}\Big) \qquad\qquad {\scriptstyle (0\leqslant \ell\leqslant d-1)},$$

donc :

$$R_2(x_2, y_2) = (x_2)^d + 1 + \sum_{1\leqslant i\leqslant d-1} r_{i,d-i}\,(x_2)^i + \mathrm{O}(y_2).$$

Dans ces nouvelles coordonnées affines (x_2, y_2) :

$$\mathbb{P}^1_\infty \big\backslash \{\infty_x\} \,=\, \big\{y_2 = 0\big\},$$

et aussi le point :

$$\infty_y = \{x_2 = 0,\, y_2 = 0\}$$

est devenu l'origine sur cette droite. En restriction à cette droite affine $\{y_2 = 0\}$:

$$R_2(x_2, 0) = (x_2)^d + 1 + \sum_{1\leqslant i\leqslant d-1} r_{i,d-i}\,(x_2)^i,$$

ce qui montre bien que $\infty_y \notin X^1$.

De plus, les d racines de $R_2(x_2, 0) = 0$:

$$\big(\underline{x}_2^1, 0\big),\ \ldots\ldots,\ \big(\underline{x}_2^d, 0\big),$$

ensemble des points $X^1 \cap \mathbb{P}^1_\infty$, sont mutuellement distinctes, toutes de multiplicité 1, ce qui implique (transversalité, non-tangentialité) :

$$0 \neq \frac{\partial R_{2,x_2}}{\partial x_2}\big(\underline{x}_2^1, 0\big),\ \ \ldots\ldots\ldots,\ \ 0 \neq \frac{\partial R_{2,x_2}}{\partial x_2}\big(\underline{x}_2^d, 0\big).$$

Ensuite, à travers le $(1/y)$-changement de carte, une différentiation de :

$$y_0 = \frac{1}{y_2},$$

donne :

$$\boxed{y_0' = -\frac{y_2'}{(y_2)^2},}$$

ce qui traite le transfert du numérateur de la différentielle de jets $\frac{y_0'}{R_{0,x_0}(x_0,y_0)}$, tandis qu'une différentiation de l'identité équivalente à celle définissant R_2 vue plus haut :

$$R_0(x_0,y_0) \;\equiv\; (y_0)^d\, R_2\bigg(\frac{x_0}{y_0},\,\frac{1}{y_0}\bigg)$$

par rapport à x_0 donne :

$$R_{0,x_0}(x_0,y_0) \;=\; \big(y_0\big)^{d-1}\, R_{2,x_2}\bigg(\frac{x_0}{y_0},\,\frac{1}{y_0}\bigg),$$

à savoir :

$$\boxed{R_{0,x_0}(x_0,y_0) \;=\; \frac{1}{(y_2)^{d-1}}\, R_{2,x_2}(x_2,y_2).}$$

Tout cela mis ensemble montre comment se transfère la différentielle de jets en question :

$$\begin{aligned}\frac{y_0'}{R_{0,x_0}(x_0,y_0)} &= \frac{-\,\frac{y_2'}{(y_2)^2}}{\frac{1}{(y_2)^{d-1}}\,R_{2,x_2}(x_2,y_2)}\\ &= -\,y_2'\,\frac{(y_2)^{d-3}}{R_{2,x_2}(x_2,y_2)}.\end{aligned}$$

Puisque la courbe X^1 intersecte transversalement la droite $\{y_2=0\}$ — en laquelle s'est transformé $\mathbb{P}^1_\infty\backslash\{\infty_x\}$ — exactement aux d points mutuellement distincts :

$$\big(\underline{x}_2^1,0\big),\;\ldots\ldots,\;\big(\underline{x}_2^d,0\big),$$

les valeurs en ces points du dénominateur :

$$\frac{1}{R_{2,x_2}(x_2,y_2)}$$

sont non nulles, donc localement holomorphes en tant que fonctions de (x_2,y_2), et alors, pourvu seulement que :

$$\boxed{d\;\geqslant\;3,}$$

le tout est vraiment holomorphe. Plus encore, et sous forme de résumé synthétique auto-contenu :

Théorème 7.1. (XIX$^{\text{ème}}$ siècle, *cf.* [3]) *Sur une courbe algébrique projective lisse quelconque :*

$$X^1 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

de degré :

$$d \geqslant 4,$$

il existe toujours un système de coordonnées affines :

$$(x,y) \in \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$$

dans lesquelles la disposition géométrique de la courbe :

$$X^1 = \underbrace{\big(X^1 \cap \mathbb{C}^2\big)}_{\text{partie affine}} \bigcup \underbrace{\big(X^1 \cap \mathbb{P}^1_\infty\big)}_{\text{points à l'infini}}$$

est telle que l'intersection :

$$X^1 \cap \mathbb{P}^1_\infty =: X^0_\infty$$

consiste en exactement d points distincts deux à deux et distincts des deux points ∞_x et ∞_y situés à l'infini sur l'axe des x et à l'infini sur l'axe des y, en lesquels la droite projective $\mathbb{P}^1_\infty$ est non tangente à la courbe X^1, et dans de telles circonstantes, si l'équation affine s'exprime comme lieu des zéros :

$$\Big\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : \; R(x,y) = 0\Big\}$$

d'un certain polynôme $R = R(x,y)$ de degré $d \geqslant 4$, l'expression :

$$\boxed{\mathsf{J}^1_R := \begin{cases} \qquad \dfrac{y'}{R_x(x,y)}\Big|_{X^1 \cap \mathbb{C}^2 \cap \{R_x \neq 0\}}, \\ -\,\dfrac{x'}{R_y(x,y)}\Big|_{X^1 \cap \mathbb{C}^2 \cap \{R_y \neq 0\}}, \\ \qquad 0 \qquad \text{sur } \; X^1 \cap \mathbb{P}^1_\infty, \end{cases}}$$

définit une <u>*différentielle génératrice*</u> *de 1-jets* holomorphe *sur X^1 tout entier qui s'annule identiquement sur le diviseur ample $X^1 \cap \mathbb{P}^1_\infty$.*

Démonstration. Il suffit d'observer d'abord que le transfert à l'infini de $\frac{y'}{R_x}$, à savoir :

$$-\,y_2' \,\frac{(y_2)^{d-3}}{R_{2,x_2}(x_2,y_2)} \;=\; y_2' \,\mathrm{O}(y_2)$$

s'annule identiquement sur $\{y_2 = 0\}$. Ensuite, il reste à mentionner que le fibré holomorphe des 1-jets de courbes holomorphes $\mathbb{D} \longrightarrow X^1$:

$$\begin{array}{c} J^1(\mathbb{D}, X^1) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ X^1, \end{array}$$

peut être saisi, au-dessus de $X^1 \cap \mathbb{C}^2$, dans deux collections de systèmes de cartes holomorphes locales contenues respectivement dans :

$$X^1 \cap \mathbb{C}^2 \cap \{R_x \neq 0\},$$

et dans :

$$X^1 \cap \mathbb{C}^2 \cap \{R_y \neq 0\},$$

par simples projections sur l'axe des y et sur l'axe des y, respectivement. $\square$

La manière dont une telle *différentielle génératrice* engendre toutes les sections holomorphes globales de ce fibré $J^1(\mathbb{D}, X^1)$ sera explicitée ultérieurement.

Mais auparavant, il s'agit d'explorer comment se transfèrent à l'infini les autres différentielles génératrices construites précédemment.

Mieux vaut étudier tout d'abord un exemple. Pour les jets d'ordre $\kappa = 3$, le membre de gauche de l'équation génératrice :

$$\begin{aligned} & \frac{y'''}{R_x} + \underline{\frac{y''y'}{R_x}\bigg[-\,3\,\frac{R_{xy}}{R_x}} + 3\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{xx}}{R_x}\bigg] + \\ & \quad + \frac{(y')^3}{R_x}\bigg[-\,6\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xy}}{R_x} + 3\left(\frac{R_y}{R_x}\right)^2\frac{R_{xx}}{R_x}\frac{R_{xx}}{R_x} - \\ & \qquad\qquad - \frac{R_{xyy}}{R_x} + 2\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{xxy}}{R_x} - \left(\frac{R_y}{R_x}\right)^2\frac{R_{xxx}}{R_x}\bigg] = \\ = & -\frac{x'''}{R_y} - \frac{x''x'}{R_y}\bigg[-\,3\,\frac{R_{xy}}{R_y} + 3\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{yy}}{R_y}\bigg] + \\ & \quad + \frac{(x')^3}{R_y}\bigg[-\,6\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{xy}}{R_y} + 3\left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{yy}}{R_y}\frac{R_{yy}}{R_y} - \\ & \qquad\qquad - \frac{R_{xxy}}{R_y} + 2\left(\frac{R_x}{R_y}\right)\frac{R_{xyy}}{R_y} - \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^2\frac{R_{yyy}}{R_y}\bigg], \end{aligned}$$

comporte par exemple le terme (souligné, en négligeant le coefficient -3) :

$$\frac{y''y'}{R_x}\,\frac{R_{xy}}{R_x}.$$

Question. *Comment ce terme* $\frac{y''y'}{R_x}\,\frac{R_{xy}}{R_x}$ *se transfère-t-il à l'infini ?*

En tout cas, ce qui vient d'être vu a montré que :

$$d-3=\text{Ordre-}\infty\bigg(\frac{y'}{R_x(x,y)}\bigg).$$

Qu'en est-il, alors, de :

$$\frac{y''\,y'}{R_x}\,\frac{R_{xy}}{R_x}=\frac{y_0''\,y_0'}{R_{0,x_0}(x_0,y_0)}\,\frac{R_{0,x_0y_0}}{R_{0,x_0}(x_0,y_0)}\,?$$

C'est assez simple. En revenant donc, comme il se doit, à la notation (x_0,y_0), une différentiation supplémentaire de :

$$y_0'=-\,\frac{y_2'}{(y_2)^2}$$

donne instantanément :

$$y_0''=-\,\frac{y_2''}{(y_2)^2}+2\,\frac{y_2'\,y_2'}{(y_2)^3}.$$

Ce qui vient d'être vu a aussi montré que :

$$\frac{1}{R_{0,x_0}(x_0,y_0)}\;=\;\frac{(y_2)^{d-1}}{R_{2,x_2}(x_2,y_2)}.$$

Par ailleurs :

$$R_{0,x_0y_0}\big(x_0,y_0\big)\;=\;R_{0,x_0y_0}\bigg(\frac{x_2}{y_2},\frac{1}{y_2}\bigg).$$

Donc :

$$\frac{y_0''\,y_0'}{R_{0,x_0}(x_0,y_0)}\,\frac{R_{0,x_0y_0}(x_0,y_0)}{R_{0,x_0}(x_0,y_0)}=\frac{\Big(-\,\frac{y_2''}{(y_2)^2}+2\,\frac{y_2'\,y_2'}{(y_2)^3}\Big)\,\Big(-\,\frac{y_2'}{(y_2)^2}\Big)}{\frac{1}{(y_2)^{d-1}}\,R_{2,x_2}(x_2,y_2)}\,\frac{R_{0,x_0y_0}\,\Big(\frac{x_2}{y_2},\frac{1}{y_2}\Big)}{\frac{1}{(y_2)^{d-1}}\,R_{2,x_2}(x_2,y_2)}.$$

Maintenant, puisque le polynôme R_0 est de degré exactement égal à d, sa dérivée d'ordre deux R_{0,x_0y_0} est de degré exactement égal à $d-2$.

Donc après réduction au même dénominateur :

$$\begin{aligned}R_{0,x_0y_0}\bigg(\frac{x_2}{y_2},\frac{1}{y_2}\bigg)\;&=\;\frac{1}{(y_2)^{d-2}}\,\text{polynôme}(x_2,y_2)\\&=:\,\frac{1}{(y_2)^{d-2}}\,S_{1,1}(x_2,y_2).\end{aligned}$$

Au total :

$$\frac{y_0''\,y_0'}{R_{0,x_0}(x_0,y_0)}\,\frac{R_{0,x_0y_0}(x_0,y_0)}{R_{0,x_0}(x_0,y_0)} = \frac{(y_2)^{d-1-2-3}\big(y_2''y_2'y_2-2\,(y_2')^3\big)}{R_{2,x_2}(x_2,y_2)}\cdot\frac{\boxed{(y_2)^1}\,S_{1,1}(x_2,y_2)}{R_{2,x_2}(x_2,y_2)}$$
$$= \frac{(y_2)^{d-5}\,\big(y_2''y_2'y_2-2\,(y_2')^3\big)\cdot S_{1,1}(x_2,y_2)}{R_{2,x_2}(x_2,y_2)}$$

Ici, le terme encadré :

$$\boxed{(y_2)^1} = \frac{\frac{1}{(y_2)^{d-2}}}{\frac{1}{(y_2)^{d-1}}}$$

fait apparaître un exposant *positif* qu'il convient de conceptualiser comme :

$$\infty\text{-Bonus}\bigg(\frac{R_{0,x_0y_0}}{R_{0,x_0}}\bigg) := \text{Ordre-}\infty\bigg(\frac{R_{0,x_0y_0}}{R_{0,x_0}}\bigg)$$
$$= 1,$$

ce qui conclut que :

$$\text{Ordre-}\infty\bigg(\frac{y''y'}{R_x}\,\frac{R_{xy}}{R_x}\bigg) = d-6+1 \quad = d-5.$$

Lemme 7.1. *Tous les termes dans la première ligne de l'équation génératrice ci-dessus au niveau des jets d'ordre* 3*, par exemple les cinq termes :*

$$\frac{y'''}{R_x},\qquad \underbrace{\frac{y''y'}{R_x}\,\frac{R_{xy}}{R_x}}_{\text{vient d'être vu}},\qquad \frac{y''y'}{R_x}\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)\frac{R_{xx}}{R_x},\qquad \frac{(y')^3}{R_x}\bigg(\frac{R_y}{R_x}\bigg)\frac{R_{xx}}{R_x}\,\frac{R_{xy}}{R_x},\qquad \frac{(y')^3}{R_x}\,\frac{R_{xyy}}{R_x},$$

ont un ordre à l'infini égal à :

$$d-5.$$

Démonstration. En effet, trois différentiations de $y_0=\frac{1}{y_2}$ donnent :

$$y_0' = -\,\frac{y_2'}{(y_2)^2},$$
$$y_0'' = -\,\frac{y_2''}{(y_2)^2}+2\,\frac{y_2'y_2'}{(y_2)^3},$$
$$y_0''' = -\,\frac{y_2'''}{(y_2)^2}+4\,\frac{y_2''y_2'}{(y_2)^3}-6\,\frac{(y_2')^3}{(y_2)^4},$$

d'où :

$$\text{Ordre-}\infty\big(y_0'\big) = -\,2,$$
$$\text{Ordre-}\infty\big(y_0''\big) = -\,3,$$
$$\text{Ordre-}\infty\big(y_0'''\big) = -\,4.$$

Par ailleurs, sachant que :

$$\text{Ordre-}\infty\left(\frac{1}{R_x}\right) = d-1,$$

il vient :

$$\begin{aligned}\text{Ordre-}\infty\left(\frac{y'''}{R_x}\right) &= -4+d-1\\ &= d-5.\end{aligned}$$

De même, sachant que :

$$\text{Ordre-}\infty\big(R_y\big) = \text{Ordre-}\infty\big(R_x\big) = d-1,$$

il vient :

$$\text{Ordre-}\infty\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = 0,$$

puis sachant que :

$$\text{Ordre-}\infty\left(\frac{R_{xx}}{R_x}\right) = \underbrace{-(d-2)+(d-1)}_{\infty\text{-Bonus}\,=\,1},$$

il vient :

$$\begin{aligned}\text{Ordre-}\infty\left(\frac{y''y'}{R_x}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\frac{R_{xx}}{R_x}\right) &= -3-2+(d-1)+0+1\\ &= d-5.\end{aligned}$$

Le quatrième monôme sélectionné par l'énoncé se traite de la même manière.

Quant au dernier monôme, il a le même :

$$\begin{aligned}\text{Ordre-}\infty\left(\frac{(y')^3}{R_x}\,\frac{R_{xyy}}{R_x}\right) &= -4+(d-1)+2\\ &= d-5,\end{aligned}$$

puisque (exercice) :

$$\begin{aligned}\infty\text{-Bonus}\left(\frac{R_{xyy}}{R_x}\right) &= \text{Ordre-}\infty\big(R_{xyy}\big) - \text{Ordre-}\infty\big(R_x\big)\\ &= -(d-3)+(d-1)\\ &= 2,\end{aligned}$$

ce qui conclut pour les cinq exemples de monômes, et tous les autres monômes s'avèrent posséder le *même* ordre $d-5$ à l'infini (exercice visuel). □

Lemme 7.2. *Étant donné un ordre de jets quelconque $\kappa \geqslant 1$, pour tout ordre intermédiaire $1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa$, la dérivée d'ordre λ de :*

$$y_0 = \frac{1}{y_2}$$

produit une formule du type :

$$\begin{aligned} y_0^{(\lambda)} &= -\frac{y_2^{(\lambda)}}{(y_2)^2} + \cdots + (-1)^\lambda \, \lambda! \, \frac{(y_2')^\lambda}{(y_2)^{\lambda+1}} \\ &= \frac{\mathsf{polyn\hat{o}me}_{\mathbb{Z}}^{\lambda}\big(y_2, y_2', \dots, y_2^{(\lambda)}\big)}{(y_2)^{\lambda+1}}, \end{aligned}$$

ce dernier polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ ayant la propriété que tous ses monômes :

$$\big(y_2\big)^{\nu_0} \big(y_2'\big)^{\nu_1} \cdots \big(y_2^{(\lambda)}\big)^{\nu_\lambda}$$

ont uniformément le même nombre total de 'primes' :

$$1 \cdot \nu_1 + \cdots + \lambda \cdot \nu_\lambda = \lambda.$$

Démonstration. Laissée au lecteur, il s'agit d'une récurrence peu exigeante dans laquelle il est décidé de ne pas expliciter ces polynômes. □

Ainsi généralement :

$$\boxed{\mathsf{Ordre}\text{-}\infty\big(y_0^{(\lambda)}\big) = -\,\lambda - 1.}$$

Plus encore, pour tous entiers-exposants :

$$\mu_1 \geqslant 0, \quad \mu_2 \geqslant 0, \quad \dots\dots, \quad \mu_{\kappa-1} \geqslant 0,$$

puisque :

$$\begin{aligned} &\big(y_0'\big)^{\mu_1} \big(y_0''\big)^{\mu_2} \cdots \big(y_0^{(\kappa-1)}\big)^{\mu_{\kappa-1}} = \\ &= \bigg(-\,\frac{y_2'}{(y_2)^2}\bigg)^{\mu_1} \bigg(-\,\frac{y_2''}{(y_2)^2} + 2\,\frac{y_2' y_2'}{(y_2)^3}\bigg)^{\mu_2} \cdots\cdots \bigg(-\,\frac{y_2^{(\kappa-1)}}{(y_2)^2} + \cdots + (-1)^{\kappa-1}(\kappa-1)!\,\frac{(y_2')^{\kappa-1}}{(y_2)^\kappa}\bigg)^{\mu_{\kappa-1}} \\ &= \frac{\mathsf{Polyn\hat{o}me}\big(y_2, y_2', \dots, y_2^{(\kappa-1)}\big)}{(y_2)^{2\mu_1 + 3\mu_2 + \cdots + \kappa\mu_{\kappa-1}}}, \end{aligned}$$

il vient :

$$\boxed{\mathsf{Ordre}\text{-}\infty\Big(\big(y_0'\big)^{\mu_1} \big(y_0''\big)^{\mu_2} \cdots\cdots \big(y_0^{(\kappa-1)}\big)^{\mu_{\kappa-1}}\Big) = -\,2\,\mu_1 - 3\,\mu_2 - \cdots - \kappa\,\mu_{\kappa-1}.}$$

Maintenant, dans l'équation génératrice d'une différentielle de jets d'ordre quelconque $\kappa \geqslant 1$ fixé :

$$\begin{aligned}\frac{y^{(\kappa)}}{R_x} + \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+(\kappa-1)\mu_{\kappa-1}=\kappa\\ \mu_1\geqslant 0,\dots,\mu_{\kappa-1}\geqslant 0}} \frac{\big(y'\big)^{\mu_1}\cdots\big(y^{(\kappa-1)}\big)^{\mu_{\kappa-1}}}{R_x}\, \mathscr{J}^{\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}}\left(\frac{R_y}{R_x},\ \left(\frac{R_{x^iy^j}}{R_x}\right)_{\substack{2\leqslant i+j\leqslant\\ \leqslant -1+\mu_1+\cdots+\mu_{\kappa-1}}}\right) = \\ = -\frac{x^{(\kappa)}}{R_y} - \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+(\kappa-1)\mu_{\kappa-1}=\kappa\\ \mu_1\geqslant 0,\dots,\mu_{\kappa-1}\geqslant 0}} \frac{\big(x'\big)^{\mu_1}\cdots\big(x^{(\kappa-1)}\big)^{\mu_{\kappa-1}}}{R_y}\, \mathscr{J}^{\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}}\left(\frac{R_x}{R_y},\ \left(\frac{R_{y^ix^j}}{R_y}\right)_{\substack{2\leqslant i+j\leqslant\\ \leqslant -1+\mu_1+\cdots+\mu_{\kappa-1}}}\right),\end{aligned}$$

une information supplémentaire est aisément vérifiable par récurrence.

Lemme 7.3. *Les polynômes apparaissant :*

$$\mathscr{J}^{\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}} = \mathscr{J}^{\kappa}_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}}\Big(\mathsf{R}_{0,1},\ \big(\mathsf{R}_{i,j}\big)_{2\leqslant i+j\leqslant -1+\mu_1+\cdots+\mu_{\kappa-1}}\Big),$$

à coefficients dans $\mathbb{Z}$, ont tous leurs monômes de la forme :

$$\big(\mathsf{R}_{0,1}\big)^h\,\mathsf{R}_{i_1,j_1}\cdots\mathsf{R}_{i_\nu,j_\nu} \qquad {\scriptstyle (h\geqslant 0;\ 2\leqslant i_1+j_1,\dots,i_\nu+j_\nu\leqslant -1+\mu_1+\cdots+\mu_{\kappa-1})},$$

avec constamment :

$$\big(i_1+j_1-1\big)+\cdots+\big(i_\nu+j_\nu-1\big) = -1+\mu_1+\cdots+\mu_{\kappa-1},$$

de telle sorte que :

$$\infty\text{-}\mathsf{Bonus}\left(\left(\frac{R_y}{R_x}\right)^h\frac{R_{x^{i_1}y^{i_1}}}{R_x}\cdots\frac{R_{x^{i_\nu}y^{i_\nu}}}{R_x}\right) = -1+\mu_1+\cdots+\mu_{\kappa-1}.$$

Démonstration. Un examen des expressions complètes à l'ordre $\kappa = 2, 3, 4$ explicitées plus haut confirme cette constance combinatoire, dont la démonstration, aisée, est laissée au lecteur.

Ensuite, à travers le changement de carte affine :

$$(x_0, y_0) \longmapsto \left(\frac{x_0}{y_0}, \frac{1}{y_0}\right) = (x_2, y_2),$$

chaque tel monôme de fractions de dérivées partielles — en négligeant $\left(\frac{R_y}{R_x}\right)^h$ qui ne change rien — se transforme comme :

$$\begin{aligned}
\frac{R_{0,x_0^{i_1}y_0^{j_1}}(x_0,y_0)}{R_{0,x_0}(x_0,y_0)}\cdots\cdots\frac{R_{0,x_0^{i_\nu}y_0^{j_\nu}}(x_0,y_0)}{R_{0,x_0}(x_0,y_0)} &= \frac{R_{0,x_0^{i_1}y_0^{j_1}}\left(\frac{x_2}{y_2},\frac{1}{y_2}\right)}{\frac{1}{(y_2)^{d-1}}\,R_{2,x_2}(x_2,y_2)}\cdots\cdots\frac{R_{0,x_0^{i_\nu}y_0^{j_\nu}}\left(\frac{x_2}{y_2},\frac{1}{y_2}\right)}{\frac{1}{(y_2)^{d-1}}\,R_{2,x_2}(x_2,y_2)} \\
&= \frac{\frac{1}{(y_2)^{d-i_1-j_1}}\,S_{i_1,j_1}(x_2,y_2)}{\frac{1}{(y_2)^{d-1}}\,R_{2,x_2}(x_2,y_2)}\cdots\cdots\frac{\frac{1}{(y_2)^{d-i_\nu-j_\nu}}\,S_{i_\nu,j_\nu}(x_2,y_2)}{\frac{1}{(y_2)^{d-1}}\,R_{2,x_2}(x_2,y_2)} \\
&= \frac{(y_2)^{i_1+j_1-1}\,S_{i_1,j_1}(x_2,y_2)}{R_{2,x_2}(x_2,y_2)}\cdots\cdots\frac{(y_2)^{i_\nu+j_\nu-1}\,S_{i_\nu,j_\nu}(x_2,y_2)}{R_{2,x_2}(x_2,y_2)} \\
&= \frac{(y_2)^{i_1+j_1-1+\cdots+i_\nu+j_\nu-1}}{\left[R_{2,x_2}(x_2,y_2)\right]^\nu}\,\text{polynôme}(x_2,y_2),
\end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Proposition 7.4. *L'ordre à l'infini de chaque monôme de chacun des deux membres de l'équation génératrice d'une différentielle de jets d'ordre quelconque $\kappa \geqslant 1$ holomorphe sur la partie affine $\mathbb{C}^2 \cap X^1$ de la courbe :*

$$\begin{aligned}
&\frac{y^{(\kappa)}}{R_x} + \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+(\kappa-1)\mu_{\kappa-1}=\kappa \\ \mu_1\geqslant 0,\dots,\mu_{\kappa-1}\geqslant 0}} \frac{\left(y'\right)^{\mu_1}\cdots\left(y^{(\kappa-1)}\right)^{\mu_{\kappa-1}}}{R_x}\,\mathscr{J}^\kappa_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}}\left(\frac{R_y}{R_x},\ \left(\frac{R_{x^iy^j}}{R_x}\right)_{\substack{2\leqslant i+j\leqslant \\ \leqslant -1+\mu_1+\cdots+\mu_{\kappa-1}}}\right) = \\
&= -\frac{x^{(\kappa)}}{R_y} - \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+(\kappa-1)\mu_{\kappa-1}=\kappa \\ \mu_1\geqslant 0,\dots,\mu_{\kappa-1}\geqslant 0}} \frac{\left(x'\right)^{\mu_1}\cdots\left(x^{(\kappa-1)}\right)^{\mu_{\kappa-1}}}{R_y}\,\mathscr{J}^\kappa_{\mu_1,\dots,\mu_{\kappa-1}}\left(\frac{R_x}{R_y},\ \left(\frac{R_{y^ix^j}}{R_y}\right)_{\substack{2\leqslant i+j\leqslant \\ \leqslant -1+\mu_1+\cdots+\mu_{\kappa-1}}}\right),
\end{aligned}$$

vaut constamment :

$$\boxed{d-\kappa-2.}$$

Démonstration. En effet, chaque monôme du membre de gauche de cette équation parfaitement symétrique s'écrit :

$$\boxed{\frac{\left(y_0'\right)^{\mu_1}\left(y_0''\right)^{\mu_2}\cdots\cdots\left(y_0^{(\kappa-1)}\right)^{\mu_{\kappa-1}}}{R_x}\cdot\left(\frac{R_y}{R_x}\right)^h\frac{R_{x^{i_1}y^{i_1}}}{R_x}\cdots\frac{R_{x^{i_\nu}y^{i_\nu}}}{R_x},}$$

et il vient d'être constaté à l'instant que :

$$\text{Ordre-}\infty\left(\frac{\left(y_0'\right)^{\mu_1}\left(y_0''\right)^{\mu_2}\cdots\cdots\left(y_0^{(\kappa-1)}\right)^{\mu_{\kappa-1}}}{R_x}\right) = -2\mu_1-3\mu_2-\cdots-\kappa\mu_{\kappa-1}+(d-1)$$

et que :

$$\begin{aligned}
\text{Ordre-}\infty\left(\left(\frac{R_y}{R_x}\right)^h\frac{R_{x^{i_1}y^{j_1}}}{R_x}\cdots\frac{R_{x^{i_\nu}y^{j_\nu}}}{R_x}\right) &= i_1+j_1-1+\cdots+i_\nu+j_\nu-1 \\
&= -1+\mu_1+\cdots+\mu_{\kappa-1},
\end{aligned}$$

donc une simple addition donne la valeur :

$$-2\mu_1 - 3\mu_2 - \cdots - \kappa\mu_{\kappa-1} + (d-1) - 1 + \mu_1 + \cdots + \mu_{\kappa-1}$$

qui, en tenant compte de la contrainte de sommation :

$$\sum_{\substack{\mu_1+\cdots+(\kappa-1)\mu_{\kappa-1}=\kappa \\ \mu_1\geqslant 0,\dots,\mu_{\kappa-1}\geqslant 0}}$$

vaut bien $d-\kappa-2$. □

Théorème 7.2. *Étant donné un ordre de jets arbitraire :*

$$\kappa \geqslant 1,$$

sur une courbe algébrique projective lisse quelconque :

$$X^1 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

de degré :

$$d \geqslant \kappa+3,$$

saisie comme précédemment dans un système de coordonnées affines adaptées :

$$(x,y) \in \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$$

comme lieu des zéros :

$$\Big\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 :\ R(x,y)=0\Big\}$$

d'un certain polynôme $R=R(x,y)$ *de degré* $d\geqslant\kappa+3$*, pour tout ordre de jets intermédiaire :*

$$1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa,$$

l'expression :

$$\boxed{\mathsf{J}_R^\lambda := \begin{cases} \dfrac{y^{(\lambda)}}{R_x} + \displaystyle\sum_{\mu_1+\cdots+(\lambda-1)\mu_{\lambda-1}=\lambda} \dfrac{\big(y'\big)^{\mu_1}\cdots\big(y^{(\lambda-1)}\big)^{\mu_{\lambda-1}}}{R_x}\, \mathscr{J}^\lambda_{\mu_1,\dots,\mu_{\lambda-1}}\left(\dfrac{R_y}{R_x}, \left(\dfrac{R_{x^iy^j}}{R_x}\right)_{\substack{2\leqslant i+j\leqslant \\ \leqslant -1+\mu_1+\cdots+\mu_{\lambda-1}}}\right), \\ -\dfrac{x^{(\lambda)}}{R_y} - \displaystyle\sum_{\mu_1+\cdots+(\lambda-1)\mu_{\lambda-1}=\lambda} \dfrac{\big(x'\big)^{\mu_1}\cdots\big(x^{(\lambda-1)}\big)^{\mu_{\lambda-1}}}{R_y}\, \mathscr{J}^\lambda_{\mu_1,\dots,\mu_{\lambda-1}}\left(\dfrac{R_x}{R_y}, \left(\dfrac{R_{y^ix^j}}{R_y}\right)_{\substack{2\leqslant i+j\leqslant \\ \leqslant -1+\mu_1+\cdots+\mu_{\lambda-1}}}\right), \\ 0 \qquad \text{sur }\ X^1\cap\mathbb{P}^1_\infty, \end{cases}}$$

définit une *__différentielle génératrice__* *de* λ*-jets* holomorphe *sur* X^1 *tout entier qui s'annule identiquement sur le diviseur ample* $X^1\cap\mathbb{P}^1_\infty$. □

8. Amplitude génératrice

La fin de l'énoncé du théorème donne des éléments qui sont maintenant suffisants pour conclure, les vérifications étant laissées au lecteur. En particulier, les asymptotiques reposent sur des calculs élémentaires, déjà connus ([2, 4]), puisqu'en effet, il s'agit d'estimer :

$$\sum_{m_1+\cdots+\kappa m_\kappa=m}\left\{\binom{m_1(d-3)+\cdots+m_\kappa(d-\kappa-2)+2}{2}-\binom{m_1(d-3)+\cdots+m_\kappa(d-\kappa-2)-d+2}{2}\right\},$$

à savoir :

$$\begin{aligned}
&\equiv \frac{2\,d}{2}\sum_{m_1+\cdots+\kappa m_\kappa=m}\Big\{m_1(d-3)+\cdots+m_\kappa(d-\kappa-2)\Big\}+m^\kappa\,\mathrm{O}(d)+\mathrm{O}\big(m^{\kappa-1}\big)\\
&\equiv d\sum_{m_1+\cdots+\kappa m_\kappa=m}\big(m_1+\cdots+m_\kappa\big)\,d+m^\kappa\,\mathrm{O}(d)+\mathrm{O}\big(m^{\kappa-1}\big),
\end{aligned}$$

sachant que par approximation intégrale :

$$\begin{aligned}
\sum_{m_1+\cdots+\kappa m_\kappa=m} &\equiv \frac{m^\kappa}{\kappa!}\int_{\substack{y_2+\cdots+y_\kappa\geqslant 1\\ y_1\geqslant 0,\,\dots,\,y_\kappa\geqslant 0}}\left(1-\frac{y_2}{2}-\cdots-(\kappa-1)\,\frac{y_\kappa}{\kappa}\right)+\mathrm{O}\big(m^{\kappa-1}\big)\\
&=\frac{m^\kappa}{\kappa!}\left[\frac{1}{(\kappa-1)!}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\kappa!}-\cdots-\frac{\kappa-1}{\kappa}\,\frac{1}{\kappa!}\right]+\mathrm{O}\big(m^{\kappa-1}\big)\\
&=\frac{m^\kappa}{\kappa!\,\kappa!}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\kappa}\right]+\mathrm{O}\big(m^{\kappa-1}\big),
\end{aligned}$$

ce qui fournit bien le résultat asymptotique annoncé :

$$\frac{m^\kappa}{\kappa!\,\kappa!}\Big[d^2\log\kappa+d^2\,\mathrm{O}(1)+\mathrm{O}(d)\Big]+\mathrm{O}\big(m^{\kappa-1}\big).$$

En changeant de carte affine, la prescription d'annulation à l'infini tourne.

Voir directement que le fibré $E_{\kappa,m}^{\mathrm{GG}}T_X^*$ est engendré par ses sections holomorphes globales est alors aisé.

Enfin, tout se généralise directement au cas des courbes algébriques complexes géométriquement lisses :

$$X^1\subset\mathbb{P}^{1+c}(\mathbb{C})$$

de codimension $c\geqslant 1$ quelconque qui sont intersections complètes entre c hypersurfaces algébriques :

$$\begin{aligned}
0&=R^1\big(x_1,\dots,x_c,x_{c+1}\big),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0&=R^c\big(x_1,\dots,x_c,x_{c+1}\big),
\end{aligned}$$

puisqu'alors les quantités R_x et R_y sont naturellement remplacées par des mineurs généraux qui occupent des places dénominatoriales :

$$\frac{x_1'}{\begin{vmatrix} R^1_{x_2} & \cdots & R^1_{x_{c+1}} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ R^c_{x_2} & \cdots & R^c_{x_{c+1}} \end{vmatrix}} = \cdots\cdots = (-1)^c \frac{x'_{c+1}}{\begin{vmatrix} R^1_{x_1} & \cdots & R^1_{x_c} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ R^c_{x_1} & \cdots & R^c_{x_c} \end{vmatrix}},$$

les différentielles de jets génératrices d'ordre $\kappa \geqslant 1$ quelconque étant obtenues par différentiation directe de ces c égalités.

RÉFÉRENCES

[1] Euler, L. : *De inventione differentiarum finitarum*.

[2] Green, M. ; Griffiths, P. : *Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings*, The Chern Symposium 1979, Proc. Inter. Sympos. Berkeley, CA, 1979, Springer-Verlag, New York, 1980, pp. 41–74.

[3] Griffiths, Ph. A. : *Introduction to algebraic curves*. Translated from the Chinese by Kuniko Weltin. Translation of Mathematical Monograph, 76, AMS, Providence, 1989, x+221 pp.

[4] Merker, J. : *Complex projective hypersurfaces of general type : towards a conjecture of Green and Griffiths*, arxiv.org/abs/1005.0405/, 89 pages.

[5] Siu, Y.-T. : *Hyperbolicity of generic high-degree hypersurfaces in complex projective spaces*, arxiv.org/abs/1209.2723/, 93 pages.