

# Différentielles de jets de type Siu-Yeung sur des surfaces $X^2$ intersections complètes dans $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$

Joël MERKER

## Table des matières

1. Introduction .....	1.
2. Paire de courbes algébriques complexes dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .....	3.
3. Théorème d'injectivité .....	5.
4. Géométrie des sections holomorphes de $\text{Sym}^m T_X^*$ .....	10.
5. Contraintes et degrés de liberté .....	27.

*The dominant theme is the interplay between the extrinsic projective geometry of algebraic subvarieties of  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  and their intrinsic geometric features.*

Phillip GRIFFITHS.

## 1. Introduction

Dans sa thèse, Brotbek ([2, 3]) est parvenu à démontrer la conjecture de Debarre ([6]) en dimension  $n = 2$ , et ce aussi, en *toute* codimension  $c \geq 2$ , pour des surfaces *génériques*  $X^2 \subset \mathbb{P}^{2+c}(\mathbb{C})$  intersections complètes dont les degrés  $d_1, \dots, d_c$  sont tous  $\geq \frac{8c+18}{c-1}$ .

En généralisant aux intersections complètes quelconques une théorie intrinsèque développée auparavant pour les hypersurfaces, Brotbek a en outre établi que si les degrés  $d_1, \dots, d_c$  d'un système de  $c$  équations algébriques d'une intersection complète arbitraire  $X^n \subset \mathbb{P}^{n+c}(\mathbb{C})$  sont tous supérieurs ou égaux à :

$$\left[ 2^{n-1} (2n-2) \frac{n^2}{n+c+1} \binom{2n-1}{n} + 1 \right] \binom{n}{\text{Ent}(\frac{n}{2})} \frac{(2n+c)!}{(n+c)!} \frac{(c-n)!}{c!},$$

alors  $\text{Sym}^m T_X^*$  possède des sections holomorphes globales non identiquement nulles, sans plus, toutefois, d'information effective. Pour ce qui concerne ladite théorie intrinsèque, *confer* aussi Bérczi ([1]), Darondeau ([5]), Demailly ([7, 8]), Diverio ([9, 10]), Merker ([13]), Mourougane ([14]), Paun ([15]), Rousseau ([10, 16]).

En s'inspirant de l'approche extrinsèque première de Siu-Yeung 1996 ([21], *confer* aussi [17, 19, 18, 20]), notre objectif ici est de construire des sections holomorphes de  $\text{Sym}^m T_X^*$  plus explicites en coordonnées. La plupart des techniques mises en œuvre se généralisent sans grande difficulté à la dimension quelconque  $n \geq 2$ , pour les intersections complètes de codimension aussi quelconque  $c \geq 2$ , mais il est préférable, en vue d'explorations ultérieures d'exemples amples, de se cantonner d'abord à la dimension

2 et à la codimension 2, sans céder à la tentation — certes attrayante ! — de la généralisation indicielle.

Soit donc  $X^2 \subset \mathbb{P}^4(\mathbb{C})$  une surface intersection complète de degrés :

$$1 \leq d \leq e.$$

Une application du Théorème 4 de Brückmann dans [4] exprime explicitement la caractéristique d'Euler du fibré des  $m$ -formes différentielles symétriques  $\text{Sym}^m T_X^*$  :

$$\begin{aligned} \chi_{\text{Euler}}(X^2, \text{Sym}^m T_X^*) = \frac{1}{1!2!3!4!} \{ & m^3 [24d^2e^2 - 120(d^2e + de^2) + 360ed] + \\ & + m^2 [-72d^2e^2 - 72(d^3e + de^3) + 360(d^2e + de^2) - 720de] + \\ & + m [-60d^2e^2 - 48(d^3e + de^3) + 300(d^2e + de^2) - 660de] + \\ & + 36d^2e^2 + 24(d^3e + de^3) - 180(d^2e + de^2) + 420de \}. \end{aligned}$$

Idéalement, la positivité de cette caractéristique devrait gouverner l'existence de sections holomorphes globales de  $\text{Sym}^m T_X^*$ , y compris au moyen de certains calculs explicites en coordonnées qui sont encore très peu explorés à ce jour, calculs qui fourniraient les informations cruciales demeurant actuellement inaccessibles avec les outils développées par la théorie intrinsèque depuis plus d'une cinquantaine d'années en géométrie algébrique contemporaine, limitation principielle qu'ont particulièrement bien mise en lumière les travaux cités de Yum-Tong Siu.

Loin d'un tel horizon, nous nous contenterons de détailler très soigneusement la démonstration d'un résultat dans cet esprit.

**Théorème.** *Sur une surface  $X^2 \subset \mathbb{P}^4$  d'équations affines :*

$$z^d = R(x, y),$$

$$t^e = S(x, y),$$

où  $R \in \mathbb{C}[x, y]$  et  $S \in \mathbb{C}[x, y]$  sont deux polynômes de degrés respectifs :

$$752 \leq d \leq e \leq \frac{1}{648} d^2$$

qui satisfont un nombre fini de dispositions géométriques génériques, pour tous polynômes :

$$A_{j,k,p,q}(x, y) = \sum_{h+i \leq a} A_{j,k,p,q}^{h,i} x^h y^i \in \mathbb{C}[x, y]$$

de degrés :

$$\deg A_{j,k,p,q} \leq a \leq d - 4m,$$

la différentielle de jets méromorphe extrinsèque :

$$\frac{J(x, y, x', y')}{y^d z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}}$$

où :

$$J(x, y, x', y') = \sum_{j+k+p+q=m} A_{j,k,p,q}(x, y) (x')^j (y')^k \left( x' R_x(x, y) + y' R_y(x, y) \right)^p \left( x' S_x(x, y) + y' S_y(x, y) \right)^q (R(x, y))^{m-p} (S(x, y))^{m-q}$$

possède une restriction à la surface  $X^2$  :

$$\frac{J(x, y, x', y')}{y^d z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} \Big|_{X^2}$$

qui est une section holomorphe du fibré des différentielles symétriques intrinsèques :

$$\text{Sym}^m T_X^*,$$

pourvu seulement que le numérateur-polynôme :

$$J(x, y, x', y') \equiv y^d \tilde{J}(x, y, x', y')$$

soit divisible par  $y^d$ , ce qui impose aux coefficients  $A_{j,k,p,q}^{h,i} \in \mathbb{C}$  en nombre :

$$\frac{(a+1)(a+2)}{2} \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

de satisfaire un certain système d'équations linéaires dépendant de  $R$  et de  $S$  dont l'espace des solutions est de dimension :

$$\dim H^0(X, \text{Sym}^m T_X^*) \geq \frac{1}{93312} d^3 - \frac{61}{7776} d^2 - \frac{17}{108} d - \frac{28}{27},$$

lorsqu'on choisit :

$$m := \text{Ent} \frac{d}{12}.$$

**Remerciements.** Une partie de ces constructions, notamment en dimension quelconque, a été présentée au *Hayama Symposium XV*, organisé par Katsutoshi Yamanoi, Kengo Hirachi et Hajime Tsuji du 21 au 24 Juillet 2012. Les premiers éléments de ce texte liminaire ont pris forme lors du *Memorial Symposium : "Geometry and Analysis on Manifolds"*, en souvenir du Professeur Shoshichi Kobayashi<sup>†</sup>, organisé par Takushiro Ochiai, Keizo Hasegawa, Toshiki Mabuchi, Yoshiaki Maeda, Junjiro Noguchi, Yoshihiko Suyama, Takashi Tsuboi, du 22 au 25 Mai 2013 dans la *Graduate School of Mathematical Sciences* de l'Université de Tokyo. À cette occasion, nous avons bénéficié d'échanges particulièrement intéressants avec Junjiro Noguchi concernant des perspectives d'exemples amples.

## 2. Paire de courbes algébriques complexes génériques dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

**Géométrie initiale.** Sur  $\mathbb{P}^4$ , soient les coordonnées homogènes :

$$[U : X : Y : Z : T],$$

et, dans la carte affine initiale  $\{U \neq 0\}$ , soient les coordonnées affines

$$x := \frac{X}{U}, \quad y := \frac{Y}{U}, \quad z := \frac{Z}{U}, \quad t := \frac{T}{U}.$$

Spécifiant comme « horizontal » le

$$\mathbb{C}_{xy}^2 \subset \mathbb{C}_{xyzt}^4,$$

on se donne deux courbes algébriques complexes d'équations polynomiales

$$0 = R(x, y) \quad \text{et} \quad 0 = S(x, y),$$

dont les degrés respectifs

$$\mathbf{d} := \deg R \quad \text{et} \quad \mathbf{e} := \deg S,$$

satisfont, sans perte de généralité

$$e \geq d \geq 1.$$

Après l'action éventuelle d'un automorphisme affine de ce  $\mathbb{C}_{x,y}^2$  horizontal, on peut supposer que

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \alpha x^d + \beta y^d + R_d^* + R_{d-1} + \cdots + R_0, \\ S(x, y) &= \gamma x^e + \delta y^e + S_e^* + S_{e-1} + \cdots + S_0, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha &\neq 0, & \beta &\neq 0, \\ \gamma &\neq 0, & \delta &\neq 0, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} R_d^*, R_{d-1}, \dots, R_0, \\ S_e^*, S_{e-1}, \dots, S_0, \end{aligned}$$

homogènes en  $(x, y)$  de degrés correspondants,  $R_d^*$  et  $S_e^*$  n'ayant pas de terme pur.

**Hypothèse géométrique générique.** *Les deux courbes sont lisses, et s'intersectent transversalement en exactement  $\mathbf{d} \mathbf{e}$  points distincts de  $\mathbb{P}_{xy}^2$  tous situés dans le  $\mathbb{C}_{xy}^2$  affine.*

**Proposition.** *Alors la surface  $X^2 \subset \mathbb{P}^4$  d'équations affines*

$$\begin{aligned} z^d &= R(x, y) \\ t^e &= S(x, y) \end{aligned}$$

*est lisse, intersection complète dans  $\mathbb{P}^4$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord, dans ce  $\mathbb{C}_{xyzt}^4$ , en un point où  $R \neq 0 \neq S$ , elle consiste en  $d$   $e$  graphes lisses. Puis, en un point où  $R = 0 \neq S$ , la différentielle de  $R$  est non nulle, donc  $\{z^d = R\}$  est lisse, et  $e$  graphes s'empilent. Enfin, là où  $R = 0 = S$ , les différentielles sont à dessein supposées indépendantes.

Pour terminer, le  $(1/x)$ - et le  $(1/y)$ -changements de carte capturent tous les points de  $X^2 \cap \mathbb{P}_{\infty,xyzt}^3$  et laissent inchangée la forme des équations.  $\square$

### 3. Théorème d'injectivité

Inspiré par [21], on introduit

$$J := \sum_{\substack{j+k+p+q=m \\ j,k,p,q \in \mathbb{N}}} A_{j,k,p,q}(x, y) (x')^j (y')^k (R')^p (S')^q (R)^{m-p} (S)^{m-q},$$

l'entier  $m \geq 1$  étant à choisir, les  $A_{j,k,p,q} \in \mathbb{C}[x, y]$  étant de degrés :

$$\deg(A_{j,k,p,q}) \leq a \leq d - 2,$$

l'entier  $a$  étant à choisir,  $(x', y')$  étant les coordonnées cotangentes associées, d'où

$$R' = x' R_x + y' R_y \quad \text{et} \quad S' = x' R_x + y' R_y.$$

**Hypothèse géométrique générique.** *Deux parmi six courbes*

$$\begin{array}{lll} \{R = 0\}, & \{R_x = 0\}, & \{R_y = 0\}, \\ \{S = 0\}, & \{S_x = 0\}, & \{S_y = 0\}, \end{array}$$

*s'intersectent transversalement dans  $\mathbb{P}_{xy}^2$  en un nombre égal au produit de leurs degrés respectifs de points distincts tous situés dans  $\mathbb{C}_{xy}^2$ , tandis qu'aucun triplet n'a de point en commun dans  $\mathbb{P}^2$ .*

On peut même supposer que chacune des ces six courbes intersecte aussi transversalement la droite à l'infini. D'autres hypothèses géométriques qui sont génériquement satisfaites devront être admises pour garantir le bon déroulement des raisonnements.

**Théorème d'injectivité.** *Alors  $J \equiv 0$  dans  $\mathbb{C}[x, y, x', y']$  si et seulement si tous les  $A_{j,k,p,q} \equiv 0$  dans  $\mathbb{C}[x, y]$ .*

Admettons temporairement l'énoncé-outil suivant.

**Lemme d'annulation identique par restriction.** *Si un polynôme  $A \in \mathbb{C}[x, y]$  de degré  $\leq d - 2$  s'annule en tous les points de l'une des neuf*

intersections de dimension nulle :

$$\begin{aligned} 0 &= A|_{R=S=0}, & 0 &= A|_{R_x=S=0}, & 0 &= A|_{R_y=S=0}, \\ 0 &= A|_{R=S_x=0}, & 0 &= A|_{R_x=S_x=0}, & 0 &= A|_{R_y=S_x=0}, \\ 0 &= A|_{R=S_y=0}, & 0 &= A|_{R_x=S_y=0}, & 0 &= A|_{R_y=S_y=0}, \end{aligned}$$

alors  $A \equiv 0$  dans  $\mathbb{C}[x, y]$ .

*Démonstration du théorème d'injectivité.* Le développement de  $0 \equiv J$  utilise naturellement la formule du binôme :

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \sum_{j+k+p+q=m} A_{j,k,p,q}(x, y) (x')^j (y')^k (x'R_x + y'R_y)^p (x'S_x + y'S_y)^q (R)^{m-p} (S)^{m-q} \\ &\equiv \sum_{j+k+p_1+p_2+q_1+q_2=m} A_{j,k,p_1+p_2,q_1+q_2} \frac{(p_1+p_2)!}{p_1!p_2!} \frac{(q_1+q_2)!}{q_1!q_2!} (x')^{j+p_1+q_1} (y')^{k+p_2+q_2} \\ &\quad (R_x)^{p_1} (R_y)^{p_2} (S_x)^{q_1} (S_y)^{q_2} \\ &\quad (R)^{m-p_1-p_2} (S)^{m-q_1-q_2}. \end{aligned}$$

Ensuite, il est nécessaire de réorganiser tout cela en monômes  $(x')^\alpha (y')^\beta$  avec  $\alpha + \beta = m$ , ce qui, en posant :

$$\alpha := j + p_1 + q_1 \quad \text{et} \quad \beta := k + p_2 + q_2,$$

donne l'annulation identique dans  $\mathbb{C}[x, y, x', y']$  :

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \sum_{\alpha+\beta=m} (x')^\alpha (y')^\beta \sum_{j+p_1+q_1=\alpha} \sum_{k+p_2+q_2=\beta} \frac{(p_1+p_2)!}{p_1!p_2!} \frac{(q_1+q_2)!}{q_1!q_2!} A_{j,k,p_1+p_2,q_1+q_2} \\ &\quad (R_x)^{p_1} (R_y)^{p_2} (S_x)^{q_1} (S_y)^{q_2} \\ &\quad (R)^{m-p_1-p_2} (S)^{m-q_1-q_2}. \end{aligned}$$

On en déduit donc, pour tous  $\alpha + \beta = m$ , les annulations identiques dans  $\mathbb{C}[x, y]$  :

$0 \equiv \sum_{j+p_1+q_1=\alpha} \sum_{k+p_2+q_2=\beta} \frac{(p_1+p_2)!}{p_1!p_2!} \frac{(q_1+q_2)!}{q_1!q_2!} A_{j,k,p_1+p_2,q_1+q_2} (R_x)^{p_1} (R_y)^{p_2} (S_x)^{q_1} (S_y)^{q_2}$
$(\forall \alpha + \beta = m) \quad (R)^{m-p_1-p_2} (S)^{m-q_1-q_2}.$

En particulier, pour  $\beta = 0$ , la deuxième somme disparaît :

$$0 \equiv \sum_{j+p_1+q_1=m} A_{j,0,p_1,q_1} (R_x)^{p_1} (S_x)^{q_1} (R)^{m-p_1} (S)^{m-q_1}.$$

Dans une proposition ci-dessous, on va montrer que ceci implique l'annulation de tous ces  $A_{j,0,p_1,q_1}$ .

Mais avant de synthétiser l'énoncé adéquat, supposons, par récurrence sur un certain entier  $k'$  avec  $1 \leq k' \leq m$ , que l'on sache :

$$\begin{aligned} 0 \equiv A_{j,0,p,q}, & \quad 0 \equiv A_{j,1,p,q}, \quad \dots \dots \dots \quad 0 \equiv A_{j,k'-1,p,q}, \\ (\forall j+p+q=m) & \quad (\forall j+p+q=m-1) \quad \dots \dots \dots \quad (\forall j+p+q=m-(k'-1)). \end{aligned}$$

Une certaine *triangularité sérendipitaire* va alors seconder agréablement la récurrence.

En effet, si nous faisons  $\beta = k'$  dans l'égalité encadrée :

$$0 \equiv \sum_{j+p_1+q_1=m-k'} \sum_{k+p_2+q_2=k'} \text{(mêmes termes)}$$

nous pouvons décomposer la deuxième somme en :

$$= \sum_{\substack{k+p_2+q_2=k' \\ k=k'}} \text{(un unique terme)} + \sum_{\substack{k+p_2+q_2=k' \\ k \leq k'-1}} \text{(mêmes termes)},$$

mais alors l'écriture complète des sommes et des termes :

$$\begin{aligned} 0 \equiv & \sum_{j+p_1+q_1=m-k'} A_{j,k',p_1,q_1} (R_x)^{p_1} (S_x)^{q_1} (R)^{m-p_1} (S)^{m-q_1} + \\ & + \sum_{j+p_1+q_1=m-k'} \sum_{\substack{k+p_2+q_2=k' \\ k \leq k'-1}} \frac{(p_1+p_2)!}{p_1! p_2!} \frac{(q_1+q_2)!}{q_1! q_2!} \underbrace{A_{j,k,p_1+p_2,q_1+q_2}}_{\text{tous } \equiv 0, \text{ par récurrence}} \\ & (R_x)^{p_1} (R_y)^{p_2} (S_x)^{q_1} (S_y)^{q_2} (R)^{m-p_1-p_2} (S)^{m-q_1-q_2} \end{aligned}$$

fait voir que l'hypothèse de récurrence annule de manière sérendipitaire le reste triangulaire, d'où découle que l'équation identique se simplifie alors en une équation qui possède la *même* forme :

$$0 \equiv \sum_{j+p_1+q_1=m-k'} A_{j,k',p_1,q_1} (R_x)^{p_1} (S_x)^{q_1} (R)^{m-p_1} (S)^{m-q_1}$$

que celle correspondant au choix initial  $\beta = m$ .

Après une division par le polynôme non identiquement nul en facteur commun  $(R)^{k'} (S)^{k'}$ , et après la substitution notationale  $m - k' \mapsto m$ , le théorème d'injectivité se ramène donc bien à un énoncé n'incorporant que  $R_x$  et  $S_x$ , sans aucune apparition de  $R_y$  et  $S_y$ .  $\square$

**Proposition.** Si des polynômes  $A_{p,q} \in \mathbb{C}[x, y]$  de degrés :

$$\deg A_{p,q} \leq \mathbf{d} - 1 \leq \mathbf{e} - 1$$

satisfont :

$$0 \equiv \sum_{p+q \leq m} A_{p,q} (R_x)^p (S_x)^q (R)^{m-p} (S)^{m-q},$$

ils doivent être tous identiquement nuls.

Il importe de mentionner ici qu'une équation similaire dans laquelle interviendraient aussi des puissances de  $R_y$  et/ou de  $S_y$  n'impliquerait pas l'annulation des coefficients correspondants.

*Démonstration.* Écrivons l'hypothèse en spécifiant une extrémité de la sommation triangulaire :

$$0 \equiv A_{m,0} (R_x)^m (S)^m + \sum_{\substack{p+q \leq m \\ p \leq m-1}} A_{p,q} (R_x)^p (S_x)^q (R)^{m-p} (S)^{m-q}.$$

Observant que le reste est multiple de  $R$ , restreignons l'équation à la courbe  $\{R = 0\}$  :

$$0 \equiv A_{m,0} (R_x)^m (S)^m \Big|_{\{R=0\}}.$$

Or sur la courbe lisse connexe  $\{R = 0\}$ , les deux polynômes  $R_x$  et  $S$  ne sont pas identiquement nuls, donc on peut diviser :

$$0 \equiv A_{m,0} \Big|_{\{R=0\}}.$$

Comme  $R$  est irréductible, et comme  $\mathbb{C}[x, y]$  est un anneau factoriel,  $A_{m,0}$  doit être multiple de  $R$ , mais alors l'hypothèse sur le degré des  $A_{p,q}$  a été faite pour qu'on puisse en déduire :

$$0 \equiv A_{m,0}.$$

Supposons, par induction sur un entier  $p' \leq m - 1$ , que nous ayons déjà établi les annulations identiques :

$$0 \equiv A_{p,q} \quad (\forall p \geq p' + 1, \forall q = 0 \dots m - p).$$

Dans la somme identiquement nulle par hypothèse, il ne reste alors plus que des termes avec  $p \leq p'$ , somme que l'on décompose alors en :

$$\sum_{\substack{p+q \leq m \\ p \leq p'}} = \sum_{q=0}^{m-p'} \Big|_{p=p'} + \sum_{\substack{p+q \leq m \\ p \leq p'-1}}.$$

En extrayant la puissance de  $R$  qui s'avère être en facteur commun, ces deux s'écrivent très en détail :

$$0 \equiv \underbrace{(R)^{m-p'}}_{\circ} \left( \sum_{q=0}^{m-p'} A_{p',q} (R_x)^{p'} (S_x)^q (S)^{m-q} + \sum_{\substack{p+q \leq m \\ p \leq p'-1}} \underbrace{A_{p,q} (R_x)^p (S_x)^q (R)^{p'-p} (S)^{m-q}}_{\text{multiple de } R = O(R)} \right).$$

Bien entendu, puisque  $R \neq 0$ , on peut diviser, et ensuite, par restriction à  $\{R = 0\}$ , on obtient :

$$0 \equiv \underbrace{(R_x)^{p'}}_{\circ} \sum_{q=0}^{m-p'} A_{p',q} (S_x)^q (S)^{m-q} \Big|_{\{R=0\}}.$$



À nouveau, on peut diviser par  $R_x$  qui est non identiquement nul sur  $\{R = 0\}$ , ce qui donne en expansion :

$$0 \equiv \left[ A_{p',0} (S)^m + A_{p',1} (S_x)^1 (S)^{m-1} + A_{p',2} (S_x)^2 (S)^{m-2} + \cdots + A_{p',m-p'} (S_x)^{m-p'} (S)^{p'} \right] \Big|_{\{R=0\}}.$$

À présent, restreignons cette identité à l'ensemble des  $d(e-1)$  points distincts  $\{R = S_x = 0\}$  :

$$0 = A_{p',0} (S)^m \Big|_{\{R=S_x=0\}}.$$

Puisque la disposition géométrique générique assure que  $S$  ne s'annule en aucun de ces  $d(e-1)$  points, on déduit que  $A_{p',0}$  doit s'y annuler, et le lemme d'annulation identique par restriction délivre :

$$0 \equiv A_{p',0}.$$

Il ne reste alors plus que :

$$0 \equiv \underline{(S_x)^1} \left[ A_{p',1} (S)^{m-1} + A_{p',2} (S_x)^1 (S)^{m-2} + \cdots + A_{p',m-p'} (S_x)^{m-1-p'} (S)^{p'} \right] \Big|_{\{R=0\}}.$$

On peut alors diviser par le  $(S_x)^1$  en facteur commun, puis itérer le raisonnement (exercice mental) pour conclure :

$$0 \equiv A_{p',1} \equiv A_{p',2} \equiv \cdots \equiv A_{p',m-p'},$$

ce qui achève la démonstration par récurrence sur l'entier  $p'$ .  $\square$

*Démonstration du lemme d'annulation identique par restriction.* En fait, les neuf cas en question sont chacun conséquence directe d'un énoncé unique.  $\square$

**Lemme.** *Étant donné deux polynômes irréductibles  $Q$  et  $P$  de  $\mathbb{C}[x, y]$  de degrés respectifs  $q \geq p \geq 1$  dont les courbes projectives associées s'intersectent en exactement  $pq$  points de multiplicité 1 tous situés dans le  $\mathbb{C}_{xy}^2$  affine :*

$$\begin{aligned} pq &= \text{Card} \{P = 0\}_{\mathbb{C}^2} \cap \{Q = 0\}_{\mathbb{C}^2} \\ &= \text{Card} \{P = 0\}_{\mathbb{P}^2} \cap \{Q = 0\}_{\mathbb{P}^2}, \end{aligned}$$

*si un polynôme  $A \in \mathbb{C}[x, y]$  de degré  $a \leq p-1$  s'annule en tous ces  $pq$  points :*

$$0 = A \Big|_{\{P=Q=0\}_{\mathbb{C}^2}},$$

*alors  $A \equiv 0$  dans  $\mathbb{C}[x, y]$ .*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $A \not\equiv 0$ . Le polynôme  $Q$  étant irréductible, la décomposition de  $A$  en facteurs premiers ne peut incorporer

$Q$  pour des raisons de degré. Le théorème classique de Bézout ([11], p. 87), qui s'applique donc, assure alors, en tenant compte des multiplicités, que :

$$\begin{aligned} a q &= \text{Card} \{A = 0\}_{\mathbb{P}^2} \cap \{Q = 0\}_{\mathbb{P}^2} \\ &\geq \text{Card} \{A = 0\}_{\mathbb{C}^2} \cap \{Q = 0\}_{\mathbb{C}^2} \\ \text{[Hypothèse principale]} \quad &\geq \text{Card} \{P = 0\}_{\mathbb{C}^2} \cap \{Q = 0\}_{\mathbb{C}^2} \\ &= p q, \end{aligned}$$

ce qui, après division par  $q$ , apporte l'inégalité contradictoire  $a \geq p$ , et conclut la preuve.  $\square$

### Observations en vue de généralisations.

(1) On ne peut pas améliorer l'énoncé du lemme avec l'inégalité  $a \leq q - 1$  en échangeant les rôles de  $Q$  et de  $P$  dans ce raisonnement, car lorsque  $p \leq a \leq q - 1$ , il se pourrait que  $A \not\equiv 0$  soit divisible par  $P$ , et l'application du théorème de Bézout s'effondre.

(2) Dans le lemme, il suffit que  $Q$  soit irréductible.

(3) Il n'est pas nécessaire que tous les points d'intersection entre les courbes projectives soient situés dans le  $\mathbb{C}_{x,y}^2$  affine.

(4) Dans l'application de ce lemme à la proposition, on n'a en fait besoin que du fait que :

$$\{R = 0 = S_x\}$$

consiste en  $d(e - 1)$  points distincts qui soient situés dans  $\mathbb{C}_{x,y}^2$ .

### 4. Géométrie des sections holomorphes de $\text{Sym}^m T_X^*$

Rappelons qu'après développement des puissances de  $R' = x' R_x + y' R_y$  et de  $S' = x' S_x + y' S_y$ , le polynôme de jets  $J$  devient un certain polynôme homogène de degré  $m$  en  $(x', y')$  dont les coefficients sont des formes linéaires en les  $A_{j,k,p,q}$  :

$$J = \sum_{\alpha+\beta=m} (x')^\alpha (y')^\beta \Lambda_{\alpha,\beta}(A_\bullet; R_x, R_y, S_x, S_y, R, S),$$

où :

$$\Lambda_{\alpha,\beta} := \sum_{j+p_1+q_1=\alpha} \sum_{k+p_2+q_2=\beta} \frac{(p_1+p_2)! (q_1+q_2)!}{p_1! p_2! q_1! q_2!} A_{j,k,p_1+p_2,q_1+q_2} (R_x)^{p_1} (R_y)^{p_2} (S_x)^{q_1} (S_y)^{q_2} (R)^{m-p_1-p_2} (S)^{m-q_1-q_2},$$

coefficients que nous abrègerons parfois simplement en :

$$\Lambda_{\alpha,\beta}(x, y).$$

Étant donné un entier  $c \geq 1$  dont la valeur exacte :

$$\mathbf{c} \approx \mathbf{d}$$

pourrait varier en restant proche de  $d$ , on introduit le quotient suivant :

$$\frac{\mathbf{J}}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} = \frac{1}{z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} \sum_{\alpha+\beta=m} (x')^\alpha (y')^\beta \frac{\Lambda_{\alpha,\beta}(x, y)}{y^c},$$

qui est une différentielle de jets *méromorphe et extrinsèque* définie sur  $\mathbb{C}^4$  tout entier.

La Section 5 ci-dessous sera consacrée à établir, par de simples arguments de comptage, que pour toute paire de polynômes  $R$  et  $S$  en position général de degrés respectifs :

$$\mathbf{d} \leq \mathbf{e} \leq \text{constante} \cdot \mathbf{d}^2,$$

il existe  $\mathbf{m}$  assez grand pour que le système *linéaire de divisibilité* (contraintes) :

$$\text{tous les } \Lambda_{\alpha,\beta}(x, y) \equiv y^c \tilde{\Lambda}_{\alpha,\beta}(x, y)$$

d'inconnues les *coefficients* des polynômes (degrés de liberté) :

$$A_{j,k,p,q}(x, y) = \sum_{h+i \leq \mathbf{a}} \underbrace{A_{j,k,p,q}^{i,h}}_{\in \mathbb{C}} x^h y^i$$

possède de nombreuses solutions.

Dans ces conditions, lorsque les  $A_\bullet$  appartiennent à cet espace de solutions, la différentielle de jets méromorphe extrinsèque :

$$\frac{\mathbf{J}}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} = \frac{1}{z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} \sum_{\alpha+\beta=m} (x')^\alpha (y')^\beta \tilde{\Lambda}_{\alpha,\beta}(x, y),$$

s'avère être *holomorphe* dans :

$$\mathbb{C}^4 \cap \{z \neq 0\} \cap \{t \neq 0\},$$

donc holomorphe en restriction à la surface dans ce même ouvert :

$\frac{\mathbf{J}}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} \Big _{X^2 \cap \mathbb{C}^4 \cap \{z \neq 0\} \cap \{t \neq 0\}}$	holomorphe.
--	-------------

À la fin de la présente Section 4, on verra aussi qu'un choix approprié de  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{e}$  assure que cette différentielle de jets extrinsèque s'annule identiquement sur l'hyperplan à l'infini  $\mathbb{P}_\infty^3$ , donc est holomorphe en restriction à  $X^2 \cap \mathbb{P}_\infty^3$ .

**Première proposition principale.** *Lorsque les  $A_{j,k,p,q}(x,y)$  sont soumis aux contraintes de divisibilité de tous les  $\Lambda_{\alpha,\beta}(x,y)$  par  $y^c$ , la différentielle symétrique de jets méromorphe extrinsèque définie sur  $\mathbb{C}^4$  :*

$$\frac{J}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}}$$

*s'avère posséder une restriction à la surface affine  $X^2 \cap \mathbb{C}^4$  d'équations :*

$$\begin{aligned} z^d &= R(x, y), \\ t^e &= S(x, y), \end{aligned}$$

*qui devient holomorphe comme différentielle symétrique de 1-jets intrinsèque à  $X^2 \cap \mathbb{C}^4$ .*

*Démonstration.* On vient de voir qu'en dehors des deux hyperplans  $\{z = 0\}$  et  $\{t = 0\}$ , sa restriction à  $X^2 \cap \mathbb{C}^4$  est holomorphe. Il reste à étudier l'holomorphie en un point quelconque :

$$(x_0, y_0, z_0, t_0)$$

appartenant à l'un des trois ouverts d'espace linéaire :

**Cas 1 :**  $\{z = 0\} \cap \{t \neq 0\}$ , qui intersecte  $X^2 \cap \mathbb{P}^4$  en une courbe ;

**Cas 2 :**  $\{z \neq 0\} \cap \{t = 0\}$ , qui intersecte  $X^2 \cap \mathbb{P}^4$  aussi en une courbe ;

**Cas 3 :**  $\{z = 0\} \cap \{t = 0\}$ , qui intersecte  $X^2 \cap \mathbb{P}^4$  en  $de$  points distincts.

Localisons donc pour commencer l'étude de l'holomorphie au voisinage d'un point appartenant au premier ensemble :

$$(x_0, y_0, 0, t_0) \quad (t_0 \neq 0).$$

Clairement, l'intersection  $X^2 \cap \mathbb{C}_{xyt}^3 \cap \{t \neq 0\}$  est la courbe lisse d'équations :

$$\begin{aligned} 0 &= R(x, y), \\ t^d &= S(x, y), \end{aligned}$$

et puisque  $J$  est divisée par  $z^{m(d-1)}$ , le quotient semble singulier le long de cette courbe. Or il n'en est rien !

En effet, si on différentie une fois la première équation de  $X^2$  :

$$z' dz^{d-1} = R',$$

et si l'on remplace les occurrences de la lettre  $R$  dans  $J$  — ce qui correspond à effectuer un changement de carte dans le fibré des jets intrinsèques à  $X^2$  —,

on constate que la singularité en  $z$  disparaît :

$$\begin{aligned} \frac{J}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} &= \frac{1}{y^c} \frac{1}{t^{m(e-1)}} \sum_{j+k+p+q=m} A_{j,k,p,q} (x')^j (y')^k \frac{(z' d z^{d-1})^p (z^d)^{m-p}}{z^{m(d-1)}} (S')^q (S)^{m-q} \\ &= \frac{1}{y^c} \underbrace{\frac{1}{t^{m(e-1)}}}_{\substack{\text{holomorphe} \\ \text{puisque } t_0 \neq 0}} \sum_{j+k+p+q=m} d^p A_{j,k,p,q} (x')^j (y')^k (z')^p \underbrace{z^{m-p}}_{\substack{\text{disparition} \\ \text{de la singularité}}} (S')^q (S)^{m-q}. \end{aligned}$$

Mais puisque  $J$  est aussi divisée par  $y^c$ , deux sous-cas sont à considérer séparément :

**Sous-cas 1<sub>1</sub>** :  $y_0 \neq 0$  ;

**Sous-cas 1<sub>2</sub>** :  $y_0 = 0$ .

Dans le premier sous-cas,  $\frac{1}{y^c}$  est holomorphe au voisinage de  $y_0$ , donc l'expression complète est manifestement holomorphe. Toutefois, l'écriture de cette expression n'est pas encore finalisée *intrinsèquement*, puisqu'elle incorpore les quatre coordonnées extrinsèques  $(x, y, z, t)$ , alors que  $X^2$  est 2-dimensionnelle. Il est avisé, alors, d'achever l'expression explicite de la restriction à  $X^2$ .

Au voisinage d'un tel point :

$$(x_0, y_0, 0, t_0) \in X^2 \cap \mathbb{C}^4 \quad (y_0 \neq 0, t_0 \neq 0),$$

la surface doit être représentée comme graphe d'une application holomorphe locale  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ . La matrice jacobienne de ses deux équations polynomiales :

$$\begin{pmatrix} -R_x & -R_y & dz^{d-1} & 0 \\ -S_x & -S_y & 0 & et^{e-1} \end{pmatrix}$$

a pour valeur en un tel point où  $z_0 = 0$  :

$$\begin{pmatrix} -R_x^0 & -R_y^0 & 0 & 0 \\ -S_x^0 & -S_y^0 & 0 & et_0^{e-1} \end{pmatrix},$$

et donc deux éventualités sont à considérer :

$$R_x(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{ou} \quad R_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

(Géométriquement parlant, puisque  $(z_0)^d = 0$ , le point  $(x_0, y_0)$  appartient à la courbe lisse  $\{R = 0\}$  vue dans le  $\mathbb{C}_{xy}^2$  qui est contenu dans le  $\mathbb{C}_{xyt}^3$  d'intersection  $\mathbb{C}^4 \cap \{z = 0\}$  dont on est parti pour étudier le Cas 1.)

Pour fixer les idées, supposons que  $R_y^0 \neq 0$ , l'autre éventualité étant symétrique. Le théorème des fonctions implicites fournit alors deux applications holomorphes locales :

$$Y: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{et} \quad T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

définies dans un certain voisinage de  $(x_0, 0)$  dans  $\mathbb{C}_{xz}^2$  satisfaisant :

$$Y(x_0, z_0) = y_0 \quad (\neq 0) \quad \text{et} \quad T(x_0, z_0) = t_0 \quad (\neq 0)$$

qui représentent  $X^2$  comme le graphe :

$$\begin{aligned} y &= Y(x, z), \\ t &= T(x, z). \end{aligned}$$

Autrement dit, les deux équations :

$$\begin{aligned} z^d &\equiv R(x, Y(x, z)), \\ (T(x, z))^e &\equiv S(x, Y(x, z)), \end{aligned}$$

sont satisfaites identiquement pour tout  $(x, z)$  dans le voisinage de  $(x_0, z_0)$  en question.

Ensuite, la différentiation directe de ces deux équations graphées donne :

$$\begin{aligned} y' &= x' Y_x + z' Y_z, \\ t' &= x' T_x + z' T_z. \end{aligned}$$

Maintenant, en revenant à la différentielle symétrique méromorphe extrinsèque, son *expression induite achevée* est naturellement celle que l'on obtient en effectuant tous les remplacements nécessaires pour obtenir une expression n'incorporant que  $(x, z, x', z')$  :

$$\begin{aligned} \frac{J}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} &= \underbrace{\frac{1}{Y(x, z)^c}}_{\substack{\text{localement holomorphe} \\ \text{puisque } Y(x_0, z_0) \neq 0}} \underbrace{\frac{1}{T(x, z)^{m(e-1)}}}_{\substack{\text{localement holomorphe} \\ \text{puisque } T(x_0, z_0) \neq 0}} \sum_{j+k+p+q=m} d^p A_{j,k,p,q}(x, Y(x, z)) \\ &\quad (x')^j (x' Y_x(x, z) + z' Y_z(x, z))^k (z')^p \underbrace{z^{m-p}}_{\substack{\text{singularité} \\ \text{éliminée}}} \\ &\quad \left( x' S_x(x, Y(x, z)) + (x' Y_x(x, z) + z' Y_z(x, z)) S_y(x, Y(x, z)) \right)^q \\ &\quad \left( S(x, Y(x, z)) \right)^{m-q}. \end{aligned}$$

On voit bien alors que cette expression est effectivement holomorphe dans un voisinage du 2-plan-fibre :

$$\{x_0\} \times \{y_0\} \times \mathbb{C}_{x'} \times \mathbb{C}_{z'} \subset \mathbb{C}_{xx'z'z'}^4.$$

Bien entendu, cette expression pourrait encore être développée pour la réorganiser en polynôme homogène de degré  $m$  en les deux variables de jets  $(x', z')$ .

Ensuite, pour ce qui est du deuxième Sous-cas 1<sub>2</sub>, soit donc un point quelconque :

$$(x_0, 0, 0, t_0) \in X^2 \cap \mathbb{C}^4 \quad (t_0 \neq 0).$$

En un tel point, la matrice Jacobienne des deux équations affines de  $X^2$  a la même expression :

$$\begin{pmatrix} -R_x^0 & -R_y^0 & 0 & 0 \\ -S_x^0 & -S_y^0 & 0 & e t_0^{e-1} \end{pmatrix}.$$

**Disposition géométrique générique.** *La droite  $\{y = 0\}$  dans le plan affine  $\mathbb{C}_{xy}^2 \subset \mathbb{P}_{xy}^2$  intersecte les deux courbes  $\{R = 0\}$  et  $\{S = 0\}$  en, respectivement,  $d$  et  $e$  points de multiplicité 1 où les deux dérivées partielles  $R_x, R_y$  et  $S_x, S_y$  ne s'annulent pas.*

On peut donc à nouveau appliquer le théorème des fonctions implicites et représenter de la même façon  $X^2$ , au moyen de fonctions graphantes  $Y$  et  $T$  qui sont *a priori* distinctes des précédentes sans toutefois introduire de nouvelle notation différente, localement au voisinage d'un tel point  $(x_0, 0, 0, t_0)$  comme :

$$\begin{aligned} y &= Y(x, z), \\ t &= T(x, z). \end{aligned}$$

Bien entendu,  $Y(x_0, 0) = 0$  et  $T(x_0, 0) = t_0 \neq 0$ .

Ensuite, nous affirmons que l'intersection locale entre les deux courbes  $\{z = 0\}$  et  $\{Y(x, z) = 0\}$  se réduit au point  $(x_0, 0)$ , et qu'en fait :

$$Y_x(x_0, 0) \neq 0,$$

ce qui assure alors un contrôle de la multiplicité, égale à 1, cette intersection.

En effet, les deux fonctions graphantes  $Y$  et  $T$  satisfont bien entendu les deux identités :

$$\begin{aligned} z^d &\equiv R(x, Y(x, z)), \\ (T(x, z))^e &\equiv S(x, Y(x, z)). \end{aligned}$$

Si l'on différencie la première par rapport à  $x$ , on obtient classiquement l'expression de la dérivée partielle :

$$Y_x(x, z) = -\frac{R_x(x, Y(x, z))}{R_y(x, Y(x, z))},$$

ce qui, au point  $(x_0, 0)$ , donne :

$$Y_x(x_0, 0) = -\frac{R_x(x_0, 0)}{R_y(x_0, 0)} \neq 0,$$

quantité non nulle grâce à la disposition géométrique générique qui a été effectuée à l'avance.

**Assertion.** *Au voisinage de  $(x_0, 0, 0, t_0)$ , avec  $t_0 \neq 0$ , la restriction à  $X^2$  de la différentielle symétrique méromorphe définie sur  $\mathbb{C}^4$  :*

$$\frac{J(x, y, x', y')}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} = \frac{J(x, y, x', y')}{Y(x, z)^c z^{m(d-1)} T(x, z)^{m(e-1)}}$$

*envisagée dans les coordonnées intrinsèques locales  $(x, z, x', z')$  sur  $X^2$  et qui est manifestement holomorphe en dehors de la réunion des lieux polaires :*

$$\{(x, z, x', z') : (x, z) \text{ près de } (x_0, 0), x' \in \mathbb{C}, z' \in \mathbb{C}\} \setminus \left( \{Y(x, z) = 0\} \cup \{z = 0\} \right)$$

*se prolonge en fait holomorphiquement à travers chacune des deux courbes époutées de  $\mathbb{C}_{xz}^2$  :*

$$\left( \{Y(x, z) = 0\} \setminus \{z = 0\} \right) \cup \left( \{z = 0\} \setminus \{Y(x, z) = 0\} \right).$$

*De plus, l'intersection au voisinage de  $(x_0, 0)$  entre ces deux courbes se réduit à :*

$$\{Y(x, z) = 0\} \cap \{z = 0\} = \{(x_0, 0)\},$$

*qui est un seul point de multiplicité 1, et le théorème de Riemann-Hurwitz-Hartogs d'élimination des singularités pour les fonctions holomorphes locales définies en dehors d'une sous-variété complexe de codimension  $\geq 2$  assure qu'au voisinage d'un tel point :*

$$(x_0, 0, 0, y_0) \quad (t_0 \neq 0),$$

*la restriction à  $X^2$  de ladite différentielle symétrique méromorphe sur  $\mathbb{C}^4$  est holomorphe, dans les coordonnées intrinsèques locales  $(x, z, x', z')$ , sur tout un voisinage de ce point-base 'croix' la fibre :*

$$\{(x_0, 0)\} \times \mathbb{C}_{x'z'}^2.$$

*Démonstration.* Rappelons que les coefficients  $A_{j,k,p,q}(x, y)$  vont être choisis dans la Section suivante pour qu'une propriété de divisibilité par  $y^c$  de  $J(x, y, x', y')$  soit satisfaite :

$$J(x, y, x', y') \equiv y^c \tilde{J}(x, y, x', y'),$$

une telle identité valant entre polynômes de  $\mathbb{C}[x, y, x', y']$ . Maintenant, effectuons la restriction intrinsèque nécessaire, en observant que le  $y^c$  singulier au dénominateur est alors effacé par le  $y^c$  au numérateur :

$$\begin{aligned} \frac{J(x, y, x', y')}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} \Big|_{X^2 \text{ près de } (x_0, 0, 0, t_0)} &= \frac{y^c \tilde{J}(x, y, x', y')}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} \Big|_{X^2 \text{ près de } (x_0, 0, 0, t_0)} \\ &= \frac{\tilde{J}(x, Y(x, z), x', x' Y_x(x, z) + z' Y_z(x, z))}{z^{m(d-1)} T(x, z)^{m(e-1)}} \Big|_{(x, z) \text{ près de } (x_0, 0)} \end{aligned}$$



Puisque  $T(x_0, 0) = t_0 \neq 0$ , et puisqu'on divise par  $z^{m(d-1)}$  cette expression est holomorphe au voisinage de tout point de  $X^2$  de coordonnées intrinsèques  $(x_1, z_1)$  avec  $z_1 \neq 0$ . En particulier, elle est holomorphe en tout point :

$$(x_1, z_1) \in \{Y(x, z) = 0\} \setminus \{z = 0\}.$$

Ensuite, le même calcul de restriction intrinsèque que celui que nous avons effectué il y a quelques instants au voisinage d'un point  $(x_0, y_0, 0, t_0)$ , donne — avec d'autres fonctions graphantes  $Y$  et  $T$  — :

$$\begin{aligned} \frac{J(x, z, x', z')}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} \Big|_{X^2 \text{ près de } (x_0, 0, 0, t_0)} &= \frac{1}{Y(x, z)^c} \underbrace{\frac{1}{T(x, z)^{m(e-1)}}}_{\substack{\text{localement holomorphe} \\ \text{puisque } T(x_0, 0) = t_0 \neq 0}} \sum_{j+k+p+q=m} d^p A_{j,k,p,q}(x, Y(x, z)) \\ &\quad (x')^j (x' Y_x(x, z) + z' Y_z(x, z))^k (z')^p \underbrace{z^{m-p}}_{\substack{\text{singularité} \\ \text{éliminée}}} \\ &\quad \left( x' S_x(x, Y(x, z)) + (x' Y_x(x, z) + z' Y_z(x, z)) S_y(x, Y(x, z)) \right)^q \\ &\quad \left( S(x, Y(x, z)) \right)^{m-q}. \end{aligned}$$

Visiblement, le lieu singulier (rémanent) du membre de droite est précisément la courbe de  $\mathbb{C}_{xz}^2$  d'équation :

$$\{Y(x, z) = 0\},$$

qui passe par le point  $(x_0, 0)$ . En particulier, cette deuxième expression est holomorphe en tout point :

$$(x_1, z_1) \in \{z = 0\} \setminus \{Y(x, z) = 0\}$$

proche de  $(x_0, 0)$ .

Ainsi, lorsqu'on effectue la *synthèse entre ces deux expressions intrinsèques complémentaires de la même différentielle symétrique méromorphe extrinsèque*, on constate que ses singularités apparentes s'évanouissent à travers tout point qui n'est pas situé sur l'intersection entre les deux courbes de  $\mathbb{C}_{xz}^2$  :

$$\{Y(x, z) = 0\} \cap \{y = 0\},$$

et donc ses singularités rémanentes sont confinées à être contenues dans :

$$\{z = Y(x, z) = 0\} \times \mathbb{C}_{x'y'}^2,$$

et comme avons déjà fait observer à l'avance que l'intersection locale entre ces deux courbes  $\{z = 0\}$  et  $\{Y(x, z) = 0\}$  se réduit au point  $(x_0, 0)$ , la démonstration de l'Assertion se termine grâce à une application du théorème de Riemann-Hurwitz-Hartogs d'élimination des singularités de codimension  $\geq 2$ .  $\square$

**Résumé intermédiaire.** Ainsi dans le Cas 1, l'holomorphie de  $J/y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}$  est complètement établie au voisinage de tout point  $(x_0, y_0, 0, t_0)$  appartenant à  $\{z = 0\} \cap \{t \neq 0\}$ .

Le traitement du Cas 2 s'exécute d'une manière parfaitement symétrique, puisque les deux équations de  $X^2$  sont de la même forme, et on obtient que la différentielle de jets méromorphe  $J/y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}$  est aussi holomorphe au voisinage de tout point  $(x_0, y_0, z_0, 0)$  appartenant à  $\{z \neq 0\} \cap \{t = 0\}$ .

Il reste à étudier (Cas 3) l'holomorphie de  $J/y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}$  au voisinage d'un point appartenant à l'ensemble fini des  $d e$  points :

$$\{z = 0\} \cap \{t = 0\} \cap X^2,$$

qui s'identifient aux  $d e$  points d'intersection entre les deux courbes de  $\mathbb{C}_{xy}^2$  :

$$\{R(x, y) = 0\} \quad \text{et} \quad \{S(x, y) = 0\}.$$

Comme on s'y attend, cela va être garanti par une nouvelle application du théorème de Riemann-Hurwitz-Hartogs, puisque ces points sont encore de codimension 2 dans la surface.

**Disposition géométrique générique.** *L'intersection :*

$$X^2 \cap \{z = t = 0\},$$

qui s'identifie à l'intersection entre les deux courbes de  $\mathbb{C}_{x,y}^2$  :

$$\{R = 0\} \cap \{S = 0\},$$

ensemble fini de cardinal  $d \cdot e$ , ne contient aucun point de l'axe  $Ox$ .

Alors en un tel point :

$$(x_0, y_0, 0, 0) \in X^2 \cap \{z = t = 0\},$$

pour lequel  $y_0 \neq 0$  par disposition géométrique générique, la matrice jacobienne a ses deux dernières colonnes nulles :

$$\begin{pmatrix} -R_x^0 & -R_y^0 & 0 & 0 \\ -S_x^0 & -S_y^0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et comme les courbes sont à croisement normal en tout point où elles s'intersectent, le déterminant des deux premières colonnes est nécessairement non nul en ce point. Le théorème des fonctions implicites assure alors l'existence de deux fonctions holomorphes  $X$  et  $Y$  définies au voisinage de  $(0, 0) = (z_0, t_0)$  dans  $\mathbb{C}^2$  satisfaisant :

$$\begin{aligned} X(0, 0) &= x_0, \\ Y(0, 0) &= y_0 \neq 0 \end{aligned}$$

qui représentent  $X^2$  localement comme le graphe :

$$\begin{aligned} x &= X(z, t), \\ y &= Y(z, t). \end{aligned}$$

Maintenant, dans le quotient :

$$\frac{\mathbf{J}}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} = \frac{1}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} \sum_{j+k+p+q=m} A_{j,k,p,q} (x')^j (y')^k (R')^p (S')^q (R)^{m-p} (S)^{m-q},$$

remplaçons alternativement  $R, R'$  puis  $S, S'$  par les valeurs tirées de :

$$\left[ \begin{array}{l} z^d = R, \\ z' d z^{d-1} = R', \end{array} \right. \quad \left[ \begin{array}{l} t^e = S, \\ t' e t^{e-1} = S', \end{array} \right.$$

ce qui donne deux expressions du quotient, la première ayant fait disparaître la singularité en  $z$  :

$$\frac{\mathbf{J}}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} = \frac{1}{y^c t^{m(e-1)}} \sum_{j+k+p+q=m} d^p A_{j,k,p,q} z^{m-p} (z')^p (x')^j (y')^k (S')^q (S)^{m-q},$$

la seconde ayant fait disparaître la singularité en  $t$  :

$$\frac{\mathbf{J}}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} = \frac{1}{y^c z^{m(d-1)}} \sum_{j+k+p+q=m} e^q A_{j,k,p,q} t^{m-q} (t')^q (x')^j (y')^k (R')^p (R)^{m-p}.$$

L'écriture intrinsèque à  $X^2$  exige de remplacer toutes les occurrences de  $x, y, x', y'$  par leurs valeurs déduites des équations graphantes, et on obtient

comme première expression complète :

$$\begin{aligned}
& \frac{J}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} \Big|_{X^2 \text{ près de } (x_0, y_0, 0, 0)} = \\
& = \frac{1}{\underbrace{Y(z, t)^c}_{\substack{\text{holomorphe, car} \\ Y(0,0) = y_0 \neq 0}} t^{m(e-1)}} \sum_{j+k+p+q=m} d^p A_{j,k,p,q}(X(z, t), Y(z, t)) \\
& z^{m-p} (z')^p \\
& (z' X_z(z, t) + t' X_t(z, t))^j \\
& (z' Y_z(z, t) + t' Y_t(z, t))^k \\
& \left( (z' X_z(z, t) + t' X_t(z, t)) S_x(X(z, t), Y(z, t)) + (z' Y_z(z, t) + t' Y_t(z, t)) S_y(X(z, t), Y(z, t)) \right)^q \\
& \left( S(X(z, t), Y(z, t)) \right)^{m-q},
\end{aligned}$$

et comme deuxième expression complète :

$$\begin{aligned}
& \frac{J}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} \Big|_{X^2 \text{ près de } (x_0, y_0, 0, 0)} = \\
& = \frac{1}{\underbrace{Y(z, t)^c}_{\substack{\text{holomorphe, car} \\ Y(0,0) = y_0 \neq 0}} z^{m(d-1)}} \sum_{j+k+p+q=m} e^q A_{j,k,p,q}(X(z, t), Y(z, t)) \\
& t^{m-q} (t')^q \\
& (z' X_z(z, t) + t' X_t(z, t))^j \\
& (z' Y_z(z, t) + t' Y_t(z, t))^k \\
& \left( (z' X_z(z, t) + t' X_t(z, t)) R_x(X(z, t), Y(z, t)) + (z' Y_z(z, t) + t' Y_t(z, t)) R_y(X(z, t), Y(z, t)) \right)^p \\
& \left( R(X(z, t), Y(z, t)) \right)^{m-p}.
\end{aligned}$$

Analysons ces deux résultats. Dans les coordonnées intrinsèques  $(z, t)$  sur  $X^2$  près de  $(x_0, y_0, 0, 0)$ , la première expression est singulière précisément sur  $\{t = 0\}$ , et elle est holomorphe ailleurs. La seconde est singulière précisément sur  $\{z = 0\}$ , et elle est holomorphe ailleurs. Le théorème d'élimination des singularités de codimension 2 de Riemann-Hurwitz-Hartogs s'applique à nouveau dans cette circonstance, et montre que la différentielle de jets méromorphe  $J/y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}$  est aussi holomorphe en chacun des points d'intersection de  $X^2 \cap \mathbb{P}_{xy}^2$ .

La démonstration détaillée de la première proposition principale est donc achevée.  $\square$

**Résumé.** On vient d'établir que la restriction à la partie affine  $X^2 \cap \mathbb{C}^4$  de la différentielle de jets méromorphe extrinsèque  $J/y^e z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}$  est holomorphe, et donc, il ne reste plus qu'à étudier l'holomorphie au voisinage de tout point appartenant à  $X^2 \cap \mathbb{P}_\infty^3$ .

**Lemme.** *L'intersection de  $X^2$  avec la droite à l'infini  $\mathbb{P}_{\infty,zt}^1$  dans la direction des deux axes  $0z$  et  $0t$  est réduite à l'ensemble vide ; de plus, le  $(1/x)$ - et le  $(1/y)$ -changements de carte affine suffisent à capturer tous les points de la courbe à l'infini  $X^2 \cap \mathbb{P}_{\infty,xyzt}^3$ .*

*Démonstration.* En effet, rappelons qu'en termes des coordonnées homogènes  $[U : X : Y : Z : T]$  sur  $\mathbb{P}^4$ , les coordonnées affines initiales sont égales à :

$$\left[1 : \frac{X}{U}, \frac{Y}{U}, \frac{Z}{U}, \frac{T}{U}\right] \equiv (1 : x : y : z : t).$$

Elles couvrent l'ouvert  $\{U \neq 0\}$ . Le  $(1/x)$ -changement de carte :

$$(x, y, z, t) \longmapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{t}{x}\right) =: (x_1, y_1, z_1, t_1)$$

couvre l'ouvert  $\{X \neq 0\}$ , et le  $(1/y)$ -changement de carte :

$$(x, y, z, t) \longmapsto \left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}, \frac{z}{y}, \frac{t}{y}\right) =: (x_2, y_2, z_2, t_2)$$

couvre l'ouvert  $\{Y \neq 0\}$ . Seuls les points de la droite :

$$\{[0 : 0 : 0 : Z : T] : [Z : T] \in \mathbb{P}^1\}$$

contenue dans le plan  $\mathbb{P}_{\infty,xyzt}^3$  à l'infini ne sont pas couverts par ces trois cartes affines. Or nous affirmons qu'aucun de ces points ne peut appartenir à notre surface  $X^2 \subset \mathbb{P}^4$ .

En effet, les deux équations homogènes de  $X^2$  s'obtiennent simplement en homogénéisant ses deux équations affines :

$$R(U : X : Y : Z : T) := Z^d - U^d R\left(\frac{X}{U}, \frac{X}{U}\right) \equiv Z^d - R^\sim(U : X : Y),$$

$$S(U : X : Y : Z : T) := T^e - U^d S\left(\frac{X}{U}, \frac{X}{U}\right) \equiv T^e - S^\sim(U : X : Y).$$

Les deux polynômes homogènes de trois variables  $R^\sim$  et  $S^\sim$  ainsi obtenus s'annulant automatiquement en  $[0 : 0 : 0]$ , on voit bien que  $[0 : 0 : 0 : Z : T] \in X^2$  implique  $Z^d = 0$  et  $T^e = 0$ , contredisant le fait que  $[Z : T] \in \mathbb{P}^1$  ne doit jamais avoir ses deux coordonnées homogènes nulles.  $\square$

Dans l'espace projectif :

$$\mathbb{P}^4(\mathbb{C}) = \{[U : X : Y : Z : T]\},$$

si l'on part des coordonnées affines *initiales* :

$$x := \frac{X}{U}, \quad y := \frac{Y}{U}, \quad z := \frac{Z}{U}, \quad t := \frac{T}{U},$$

les quatre autres systèmes de coordonnées affines s'en déduisent par :

- le  $(1/x)$ -changement de carte :

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) &\longmapsto \left( \frac{1}{x}, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{t}{x} \right) \\ &=: (x_1, y_1, z_1, t_1); \end{aligned}$$

- le  $(1/y)$ -changement de carte :

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) &\longmapsto \left( \frac{x}{y}, \frac{1}{y}, \frac{z}{y}, \frac{t}{y} \right) \\ &=: (x_2, y_2, z_2, t_2); \end{aligned}$$

- le  $(1/z)$ -changement de carte :

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) &\longmapsto \left( \frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \frac{1}{z}, \frac{t}{z} \right) \\ &=: (x_3, y_3, z_3, t_3); \end{aligned}$$

- le  $(1/t)$ -changement de carte :

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) &\longmapsto \left( \frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}, \frac{1}{t} \right) \\ &=: (x_4, y_4, z_4, t_4). \end{aligned}$$

En partant de la carte affine initiale  $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4$ , ce qu'on couvre avec le  $(1/x)$ -changement de carte et le  $(1/y)$ -changement de carte, c'est justement :

$$\mathbb{P}^4 \setminus \mathbb{P}_{\infty, zt}^1.$$

*Par conséquent, pour analyser le comportement à l'infini de la différentielle de jets extrinsèque méromorphe, il suffit d'examiner comment elle se transfère à travers ces deux seuls changements de carte affine.*

Par symétrie formelle entre les coordonnées  $(x, y)$ , il suffit même d'ailleurs d'examiner le  $(1/x)$ -changement de carte.

À travers, donc :

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) &\longmapsto \left( \frac{1}{x}, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{t}{x} \right) \\ &=: (x_1, y_1, z_1, t_1), \end{aligned}$$

tout d'abord les deux polynômes  $R$  et  $S$  sont naturellement transformés en deux nouveaux polynômes  $R_1$  et  $S_1$  définis par :

$$R_1(x_1, y_1) := (x_1)^d R\left(\frac{1}{x_1}, \frac{y_1}{x_1}\right),$$

$$S_1(x_1, y_1) := (x_1)^e S\left(\frac{1}{x_1}, \frac{y_1}{x_1}\right).$$

Pour calculer comment se transforme :

$$J(x, y, x', y') = \sum_{j+k+p+q=m} A_{j,k,p,q}(x, y) (x')^j (y')^k \left(x' R_x(x, y) + y' R_y(x, y)\right)^p (R(x, y))^{m-p} \\ \left(x' S_x(x, y) + y' S_y(x, y)\right)^q (S(x, y))^{m-q},$$

le transfert de nombreux autres termes doit être examiné séparément à l'avance.

Tout d'abord :

$$x' = \left(\frac{1}{x_1}\right)' = -\frac{x'_1}{x_1 x_1},$$

$$y' = \left(\frac{y_1}{x_1}\right)' = \frac{y'_1}{x_1} - \frac{x'_1 y_1}{x_1 x_1}.$$

Ensuite, si on différencie :

$$R(x, y) = (x)^d R_1\left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right),$$

premièrement par rapport à  $x$ , on obtient :

$$R_x(x, y) = d(x)^{d-1} R_1\left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right) - \frac{(x)^d}{xx} R_{1,x_1}\left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right) - \frac{(x)^d y}{xx} R_{1,y_1}\left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right),$$

et deuxièmement par rapport à  $y$ , on obtient :

$$R_y(x, y) = \frac{(x)^d}{x} R_{1,y_1}\left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right).$$

Tout cela mis ensemble donne, après simplifications et regroupements :

$$x' R_x(x, y) + y' R_y(x, y) = \frac{1}{(x_1)^{d+1}} \left[ -x'_1 d R_1(x_1, y_1) \right] + \frac{1}{(x_1)^d} \left[ x'_1 R_{1,x_1}(x_1, y_1) + y'_1 R_{1,y_1}(x_1, y_1) \right] \\ = -\frac{x'_1}{(x_1)^{d+1}} d R_1(x_1, y_1) + \frac{1}{(x_1)^d} R'_1,$$

équation que l'on peut d'ailleurs aussi trouver directement en différenciant (prendre le prime) formellement :

$$R = \frac{1}{(x_1)^d} R_1.$$

Partant de :

$$S = \frac{1}{(x_1)^e} S_1,$$

on trouve de manière entièrement similaire :

$$S' = -\frac{x'_1}{(x_1)^{e+1}} e S_1 + \frac{1}{(x_1)^e} S'_1.$$

Tous ces calculs préparatoires élémentaires nous permettent d'écrire maintenant le transfert brut de la différentielle de jets méromorphe extrinsèque à travers le  $(1/x)$ -changement de carte :

$$\begin{aligned} \frac{J(x, y, x', y')}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} &= \frac{(x_1)^{c+m(d-1)+m(e-1)}}{(y_1)^c (z_1)^{m(d-1)} (t_1)^{m(e-1)}} \sum_{j+k+p+q=m} \sum_{h+i \leq a} \overbrace{A_{j,k,p,q}^{h,i}}^{\text{coefficients} \in \mathbb{C}} \frac{1}{(x_1)^h} \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^i \\ &\quad \left(-\frac{x'_1}{x_1 x_1}\right)^j \left(\frac{x_1 y'_1 - y_1 x'_1}{x_1 x_1}\right)^k \\ &\quad \left(-\frac{x'_1 d}{(x_1)^{d+1}} R_1(x_1, y_1) + \frac{1}{(x_1)^d} \left[x'_1 R_{1,x_1}(x_1, y_1) + y'_1 R_{1,y_1}(x_1, y_1)\right]\right)^p \\ &\quad \left(-\frac{x'_1 e}{(x_1)^{e+1}} S_1(x_1, y_1) + \frac{1}{(x_1)^e} \left[x'_1 S_{1,x_1}(x_1, y_1) + y'_1 S_{1,y_1}(x_1, y_1)\right]\right)^q \\ &\quad \left(\frac{1}{(x_1)^d} R_1(x_1, y_1)\right)^{m-p} \left(\frac{1}{(x_1)^e} S_1(x_1, y_1)\right)^{m-q}. \end{aligned}$$

Extrayons alors la présence de  $x_1$  dans les nombreux dénominateurs comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{J(x, y, x', y')}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} &= \frac{(x_1)^{c+md-m+me-d}}{(y_1)^c (z_1)^{m(d-1)} (t_1)^{m(e-1)}} \sum_{j+k+p+q=m} \sum_{h+i \leq a} A_{j,k,p,q}^{h,i} (y_1)^i \\ &\quad \frac{1}{(x_1)^{h+i+2j+2k+(d+1)p+(e+1)q+d(m-p)+e(m-q)}} (-x'_1)^j (x_1 y'_1 - y_1 x'_1)^k \\ &\quad \left(-x'_1 d R_1(x_1, y_1) + x_1 \left[x'_1 R_{1,x_1}(x_1, y_1) + y'_1 R_{1,y_1}(x_1, y_1)\right]\right)^p \\ &\quad \left(-x'_1 e S_1(x_1, y_1) + x_1 \left[x'_1 S_{1,x_1}(x_1, y_1) + y'_1 S_{1,y_1}(x_1, y_1)\right]\right)^q \\ &\quad \left(R_1(x_1, y_1)\right)^{m-p} \left(S_1(x_1, y_1)\right)^{m-q}. \end{aligned}$$

Pour simplifier encore la présence de  $x_1$ , servons-nous du  $x_1$  situé au numérateur que l'on décompose à cette effet sous la forme :

$$(x_1)^{c+md-m+em-m} = (x_1)^{c-a-4m} \underbrace{(x_1)^{a+dm+m+me+m}}_{\text{à placer après } \Sigma \Sigma},$$



ce qui conduit à :

$$\frac{(x_1)^{a+dm+m+me+m}}{(x_1)^{h+i+2j+2k+dp+p+eq+q+dm-dp+em-eq}} = (x_1)^{a-(h+i)+2m-(2j+2k+p+q)},$$

et cette dernière puissance de  $x_1$  est automatiquement  $\geq 0$ , puisque par hypothèse :

$$\begin{aligned} h + i &\leq a, \\ 2j + 2k + p + q &\leq 2j + 2k + 2p + 2q \\ &= 2m. \end{aligned}$$

En définitive, le transfert à l'infini devient :

$$\begin{aligned} \frac{J(x, y, x', y')}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} &= \frac{(x_1)^{c-a-4m}}{(y_1)^c (z_1)^{m(d-1)} (t_1)^{m(e-1)}} \sum_{j+k+p+q=m} \sum_{h+i \leq a} A_{j,k,p,q}^{h,i} (y_1)^i \\ &\quad (x_1)^{a-(h+i)+2m-(2j+2k+p+q)} (-x'_1)^j (x_1 y'_1 - y_1 x'_1)^k \\ &\quad \left( -x'_1 d R_1(x_1, y_1) + x_1 [x'_1 R_{1,x_1}(x_1, y_1) + y'_1 R_{1,y_1}(x_1, y_1)] \right)^p \\ &\quad \left( -x'_1 e S_1(x_1, y_1) + x_1 [x'_1 S_{1,x_1}(x_1, y_1) + y'_1 S_{1,y_1}(x_1, y_1)] \right)^q \\ &\quad \left( R_1(x_1, y_1) \right)^{m-p} \left( S_1(x_1, y_1) \right)^{m-q}. \end{aligned}$$

La partie affine  $\mathbb{C}_{\infty, x}^3$  à l'infini dans la direction de l'axe  $Ox$  est maintenant devenue :

$$\{x_1 = 0\}.$$

Étudier l'holomorphie à l'infini revient donc à étudier l'holomorphie sur ce 3-plan  $\{x_1 = 0\}$ . (L'étude de ce qui se passe à travers le  $(1/y)$ -changement de carte est entièrement similaire.)

Observons que tous les termes après la double  $\sum \sum$  sont maintenant devenus *polynomiaux* en  $(x_1, y_1, x'_1, y'_1)$ , donc holomorphes. Seule la fraction qui les précède :

$$\frac{(x_1)^{c-a-4m}}{(y_1)^c (z_1)^{m(d-1)} (t_1)^{m(e-1)}}$$

peut présenter des pôles.

Or maintenant, nous allons supposer expressément que :

$$c - a - 4m \geq 0,$$

ce qui revient à restreindre la borne  $a$  sur le degré des  $A_{j,k,p,q}$  à satisfaire :

$$\boxed{a \leq c - 4m.}$$

À un décalage d'une unité près, si on suppose même que :

$$a \leq c - 4m - 1,$$

la totalité de l'expression est multiple de  $x_1$ , et donc, elle s'annule sur  $\{x_1 = 0\}$  en dehors du lieu polaire.

**Diposition géométrique générique.** *On peut supposer à l'avance que :*

- *l'intersection :*

$$X^2 \cap \mathbb{P}_{\infty,xyz}^3$$

*est une courbe lisse, dont la partie  $X^2 \cap \mathbb{C}_{\infty,x}^3$  est devenue ici  $\{x_1 = 0\} \cap X^2$  ;*

- *dans ce 3-plan complexe, les trois intersections suivantes de  $X^2$  avec des 2-plans complexes :*

$$X^2 \cap \{0 = x_1 = y_1\},$$

$$X^2 \cap \{0 = x_1 = z_1\},$$

$$X^2 \cap \{0 = x_1 = t_1\},$$

*se réduisent chacune à un nombre fini de points distincts deux à deux.*

L'expression obtenue à l'instant s'avère alors être holomorphe en tout point  $(0, y_{10}, z_{10}, t_{10})$  appartenant à l'ensemble :

$$\begin{aligned} & X^2 \cap \{x_1 = 0\} \\ & \cap \{y_1 \neq 0\} \cap \{z_1 \neq 0\} \cap \{t_1 \neq 0\}. \end{aligned}$$

Puisque l'ensemble restant :

$$\left( X^2 \cap \{0 = x_1 = y_1\} \right) \cup \left( X^2 \cap \{0 = x_1 = z_1\} \right) \cup \left( X^2 \cap \{0 = x_1 = t_1\} \right)$$

est de codimension 2 dans  $X^2$ , le théorème d'élimination des singularités de Riemann-Hurwitz-Hartogs conclut la démonstration de l'énoncé suivant.

**Deuxième proposition principale.** *Sur une surface  $X^2 \subset \mathbb{P}^4$  d'équations affines :*

$$z^d = R(x, y),$$

$$t^e = S(x, y),$$

*où  $R \in \mathbb{C}[x, y]$  et  $S \in \mathbb{C}[x, y]$  sont de degrés respectifs  $d \leq e$  qui satisfont un nombre fini de dispositions géométriques génériques, pour tous polynômes :*

$$A_{j,k,p,q}(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$$

*de degrés :*

$$\deg A_{j,k,p,q} \leq a \leq c - 4m,$$

la différentielle de jets extrinsèque méromorphe :

$$\begin{aligned} \frac{J}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} &= \frac{J(x, y, x', y')}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} \\ &= \frac{1}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} \sum_{j+k+p+q=m} A_{j,k,p,q} (x')^j (y')^k \\ &\quad \left( x' R_x + y' R_y \right)^p \left( x' S_x + y' S_y \right)^q \\ &\quad (R)^{m-p} (S)^{m-q} \end{aligned}$$

possède une restriction à  $X^2$  :

$$\left. \frac{J}{y^c z^{m(d-1)} t^{m(e-1)}} \right|_{X^2}$$

qui est une section holomorphe du fibré des différentielles symétriques intrinsèques :

$$\text{Sym}^m T_X^*,$$

pourvu seulement que :

$$J(x, y, x', y') \equiv y^c \tilde{J}(x, y, x', y')$$

soit divisible par  $y^c$ .

C'est à l'analyse de cette contrainte de divisibilité qu'est consacrée la dernière Section 5 qui suit.

## 5. Contraintes et degrés de liberté

Pour fixer les idées, prenons maintenant :

$$c := d,$$

ainsi que :

$$a := d - 4m.$$

Chaque polynôme :

$$A_{j,k,p,q} = \sum_{h+i \leq a} A_{j,k,p,q}^{h,i} x^h y^i$$

de degré  $\leq a$  possède :

$$\frac{(a+1)(a+2)}{1 \cdot 2}$$

coefficients complexes libres  $A_{j,k,p,q}^{h,i}$ . Puisque :

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \text{Card} \left\{ (j, k, p, q) \in \mathbb{N}^4 : j + k + p + q = m \right\},$$

il y a au total :

$$\frac{(a+1)(a+2)}{1 \cdot 2} \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

degrés de liberté dans les  $A_\bullet$ , et nous retiendrons la minoration :

$$\boxed{\text{degrés de liberté dans les } A_\bullet \geq \frac{(d-4m)^2}{2} \frac{m^3}{6}.}$$

Lorsqu'on développe et réorganise le numérateur  $J$ , on obtient comme cela a déjà été vu p. 10 :

$$J = \sum_{\alpha+\beta=m} (x')^\alpha (y')^\beta \Lambda_{\alpha,\beta}(A_\bullet; R_x, R_y, S_x, S_y, R, S),$$

où chaque coefficient :

$$\Lambda_{\alpha,\beta} = \sum_{j+p_1+q_1=\alpha} \sum_{k+p_2+q_2=\beta} \frac{(p_1+p_2)!}{p_1! p_2!} \frac{(q_1+q_2)!}{q_1! q_2!} A_{j,k;p_1+p_2,q_1+q_2} \\ (R_x)^{p_1} (R_y)^{p_2} (S_x)^{q_1} (S_y)^{q_2} \\ (R)^{m-p_1-p_2} (S)^{m-q_1-q_2},$$

visiblement linéaire par rapport aux  $A_\bullet$ , est un polynôme en  $(x, y)$  de degré (exercice mental) :

$$\begin{aligned} \deg \Lambda_{\alpha,\beta} &\leq a + (d-1)p + d(m-p) + (e-1)q + e(m-q) \\ &= a + dm - p + em - q \\ &\leq d-1 + dm + em. \end{aligned}$$

La divisibilité par  $y^d$  d'un polynôme  $\Lambda_{\alpha,\beta}$  demande au plus l'annulation des coefficients des monômes :

$$\begin{aligned} &x^0 y^{d-1}, x^1 y^{d-1}, \dots, x^{dm+em} y^{d-1} \\ &\dots \\ &x^0 y^0, x^1 y^0, \dots, x^{dm+em} y^0, \dots, x^{d-1+dm+em} y^0, \end{aligned}$$

donc le nombre d'équations linéaires (contraintes) auxquelles sont soumis les  $A_\bullet$  pour chaque  $\Lambda_{\alpha,\beta}$  est majoré par (substituer au trapèze d'exposants le rectangle qui lui est exinscrit) :

$$\leq d [d + dm + em].$$

Comme le nombre de polynômes  $\Lambda_{\alpha,\beta}$  est égal à :

$$m+1,$$

on conclut que :

$$\boxed{\text{nombre de contraintes linéaires en les } A_\bullet \leq (m+1) d [d + dm + em].}$$

Prenons maintenant pour quasiment optimiser :

$$m := \text{Ent} \left( \frac{d}{12} \right),$$

de telle sorte que :

$$\frac{d}{12} - 1 \leq m \leq \frac{d}{12}.$$

Les degrés de libertés sont alors minorés par :

$$\begin{aligned} \text{degrés de liberté} &= \frac{(d - 4m)^2}{2} \frac{m^3}{6} \\ &\geq \frac{1}{12} \left( d - \frac{4d}{12} \right)^2 \left( \frac{d}{12} - 1 \right)^3 \\ &= \frac{1}{12} \frac{4}{9} d^2 \left( \frac{d}{12} - 1 \right)^3, \end{aligned}$$

tandis que les contraintes sont majorées par :

$$\left( \frac{d}{12} + 1 \right) d \left[ d + d \frac{d}{12} + e \frac{d}{12} \right] \geq \underbrace{(m + 1) d [d + dm + em]}_{\text{contraintes}}.$$

Puisque tout système linéaire dont le nombre d'inconnues excède celui d'équations admet automatiquement des solutions, il suffit donc que ce premier minorant auxiliaire majore ce second majorant auxiliaire, à savoir il suffit que :

$$\frac{1}{12} \frac{4}{9} d^2 \left( \frac{d}{12} - 1 \right)^3 \geq \left( \frac{d}{12} + 1 \right) d \left[ d + d \frac{d}{12} + e \frac{d}{12} \right],$$

En supposant maintenant comme cela a été stipulé dans l'énoncé du théorème que :

$$\begin{aligned} d \leq e &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{27} \frac{1}{12} d^2 \\ &= \frac{1}{648} d^2, \end{aligned}$$

on assure que le coefficient rationnel de la puissance maximale  $d^3$  est positif dans l'inégalité suffisante (après suppression de  $d^2$ ) :

$$\frac{1}{12} \frac{4}{9} d^2 \left( \frac{d}{12} - 1 \right)^3 \geq \left( \frac{d}{12} + 1 \right) d^2 \left[ 1 + \frac{d}{12} + \frac{d^2}{2 \cdot 27 \cdot 12 \cdot 12} \right],$$

inégalité qui devient après placement à gauche de tous les termes :

$$\frac{1}{93312} d^3 - \frac{61}{7776} d^2 - \frac{17}{108} d - \frac{28}{27} \geq 0,$$

inégalité qui s'avère être satisfaite à partir de :

$$d \geq 752,$$

ce qui conclut la démonstration du théorème.  $\square$

### RÉFÉRENCES

- [1] Bérczi, G. : *Moduli of map germs, Thom polynomials and the Green-Griffiths conjecture*, Contributions to algebraic geometry, 141–167, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2012.
- [2] Brotbek, D. : *Variétés projectives à fibré cotangent ample*, Thèse de l'Université de Rennes 1, octobre 2011, 114 pp.
- [3] Brotbek, D. : *Hyperbolicity related problems for complete intersection varieties*, Compos. Math., to appear, [arxiv.org/abs/1101.3394](https://arxiv.org/abs/1101.3394)
- [4] Brückmann, P. : *The Hilbert polynomial of the sheaf  $\Omega^T$  of germs of  $T$ -symmetrical tensor differential forms on complete intersections*, Math. Ann. **307** (1997), 461–472.
- [5] Darondeau, L. : *Fiber integration on the Demailly tower*, [arxiv.org/abs/1312.0109](https://arxiv.org/abs/1312.0109), 26 pp.
- [6] Debarre, O. : *Varieties with ample cotangent bundle*, Compos. Math. **141** (2005), no. 6, 1445–1459.
- [7] Demailly, J.-P. : *Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 62, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 285–360.
- [8] Demailly, J.-P. : *Holomorphic Morse inequalities and the Green-Griffiths-Lang conjecture*, Pure and applied Math. Quarterly, **7** (2011), 1165–1208.
- [9] Diverio, S. : *Existence of global invariant jet differentials on projective hypersurfaces of high degree*, Math. Ann. **344** (2009), no. 2, 293–315.
- [10] Diverio, S. ; Rousseau, E. : *A survey on hyperbolicity of projective hypersurfaces*, Publicações Matemáticas do IMPA, Rio de Janeiro, 2011. x+109 pp.
- [11] Griffiths, Ph. A. : *Introduction to algebraic curves*. Translated from the Chinese by Kuniko Weltin. Translation of Mathematical Monograph, 76, AMS, Providence, 1989, x+221 pp.
- [12] Masuda, K. ; Noguchi, J. : *A construction of hyperbolic hypersurface of  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$* , Math. Ann. **304** (1996), no. 2, 339–362.
- [13] Merker, J. : *Complex projective hypersurfaces of general type : towards a conjecture of Green and Griffiths*, [arxiv.org/abs/1005.0405](https://arxiv.org/abs/1005.0405)
- [14] Mourougane, C. : *Families of hypersurfaces of large degree*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **14** (2012), no. 3, 911–936.
- [15] Păun, M. : *Techniques de construction de différentielles holomorphes et hyperbolicité [d'après J.-P. Demailly, S. Diverio, J. Merker, E. Rousseau, Y.-T. Siu...]*, Séminaire Bourbaki, Octobre 2012, no. 1061, 35 pp.
- [16] ROUSSEAU, E. : *Weak analytic hyperbolicity of generic hypersurfaces of high degree in  $\mathbb{P}^4$* , Annales Fac. Sci. Toulouse **XIV** (2007), no. 2, 369–383.
- [17] Siu, Y.-T. : *Hyperbolicity problems in function theory*, Five decades as a mathematician and educator, 409–513, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995.
- [18] Siu, Y.-T. : *Hyperbolicity in complex geometry*, The legacy of Niels Henrik Abel, 543–566, Springer, Berlin, 2004.
- [19] Siu, Y.-T. : *Some recent transcendental techniques in algebraic and complex geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002), 439–448, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

- 
- [20] Siu, Y.-T. : *Hyperbolicity of generic high-degree hypersurfaces in complex projective spaces*, [arxiv.org/abs/1209.2723](https://arxiv.org/abs/1209.2723), 89 pages.
- [21] Siu, Y.-T. ; Yeung, S.-K : *Hyperbolicity of the complement of a generic smooth curve of high degree in the complex projective plane*, *Invent. Math.* **124** (1996), 573–618.