

Sur l’algébrisabilité locale de sous-variétés analytiques réelles génériques de \mathbb{C}^n

Hervé GAUSSIER ^a, Joël MERKER ^a.

^a LATP, UMR 6632, Université de Provence, 39 rue Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13, France
Courriel : {gaussier,merker}@cmi.univ-mrs.fr

(11 octobre 2002)

Résumé. On établit que le (pseudo)groupe local des biholomorphismes stabilisant une sous-variété algébrique réelle, minimale, finiment non dégénérée de \mathbb{C}^n , est un groupe de Lie local algébrique réel. On en déduit des conditions nécessaires pour l’algébrisabilité locale de tubes analytiques réels rigides de codimension quelconque dans \mathbb{C}^n . © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On the local algebraizability of real analytic generic submanifolds in \mathbb{C}^n

Abstract. We prove that the local (pseudo)group of biholomorphisms stabilizing a minimal, finitely nondegenerate real algebraic submanifold in \mathbb{C}^n is a real algebraic local Lie group. We deduce necessary conditions for the local algebraizability of real analytic rigid tubes of arbitrary codimension in \mathbb{C}^n . © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Une sous-variété analytique réelle de \mathbb{C}^n est dite *algébrique* (au sens de Nash, cf. [2]) si elle est définie localement par l’annulation de polynômes réels et *localement algébrisable* en un de ses points p s’il existe un système de coordonnées holomorphes locales centré en p dans lequel elle est algébrique. S’il est clair que toute sous-variété analytique réelle de dimension k dans \mathbb{R}^{2n} est localement équivalente, par une transformation analytique réelle, à un plan de dimension k , il n’en va pas de même pour l’algébrisabilité au moyen d’une transformation holomorphe. X. Huang, S. Ji et S.T. Yau ont récemment présenté dans [7] le premier exemple explicite $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \text{Im } w = \exp(z\bar{z})\}$ d’une hypersurface analytique réelle Levi non dégénérée de \mathbb{C}^2 , algébrisable en aucun de ses points. La démonstration dans [7] repose sur la méthode dite d’équivalence due à É. Cartan [3] et développée par S.-S. Chern et J.K. Moser [4] pour classifier les hypersurfaces strictement pseudoconvexes de \mathbb{C}^n au moyen d’invariants différentiels. La complexité des calculs formels ne permet apparemment pas de dégager une obstruction concrète de non algébrisabilité locale, partagée par tous les éléments d’une famille de sous-variétés de dimension quelconque dans \mathbb{C}^n .

On présente dans cette Note des conditions nécessaires d’algébrisabilité locale de sous-variétés analytiques réelles génériques de \mathbb{C}^n . L’argument clé consiste à observer que le (pseudo)groupe des biholomorphismes locaux de \mathbb{C}^n stabilisant une sous-variété générique algébrique réelle est, sous certaines hypothèses de non dégénérescence, un groupe de Lie local pour lequel la loi de multiplication est algébrique.

Note transmise à Étienne GHYS

????(01)0????-?/FLA

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

2. Énoncé des résultats

Soit M une sous-variété analytique réelle locale de codimension d dans \mathbb{C}^n , passant par l'origine, définie par les équations $r_k(t, \bar{t}) = 0$ pour $k = 1, \dots, d$, où $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n$ et où les $r_k(t, \bar{t}) \in \mathbb{C}\{t, \bar{t}\}$ satisfont $r_k(0, 0) = 0$, $r_k(t, \bar{t}) \equiv r_k(\bar{t}, t)$ et $dr_1 \wedge \dots \wedge dr_d(0) \neq 0$. On suppose M générique, c'est-à-dire que $T_0M + iT_0M = T_0\mathbb{C}^n$. Dans ce cas, $T^{(0,1)}M := T_0M \cap T^{(0,1)}\mathbb{C}^n$ est un fibré complexe de rang $(n - d)$. Soit $\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{n-d}$ une base de $T^{(0,1)}M$. On dit que M est *minimale en 0* si l'orbite (au sens de Sussmann) de l'origine sous l'action des champs $\operatorname{Re} \bar{L}_1, \operatorname{Im} \bar{L}_1, \dots, \operatorname{Re} \bar{L}_{n-d}, \operatorname{Im} \bar{L}_{n-d}$ contient un voisinage de l'origine dans M . On dit que M est *holomorphiquement non dégénérée* (cf. [9]) s'il n'existe pas de champ de vecteurs non nul de type $(1, 0)$, à coefficients holomorphes, tangent à M . Dans ce cas, d'après [1], il existe un sous-ensemble analytique réel strict V de M tel que, pour tout point p de $M \setminus V$, on a $\operatorname{Vect} \{ \bar{L}^\beta \nabla_t(r_k)(p, \bar{p}) : \beta \in \mathbb{N}^{n-d}, k = 1, \dots, d \} = \mathbb{C}^n$, où l'on note $\nabla_t(r_k)(t, \bar{t})$ le gradient holomorphe de r_k et $\bar{L}^\beta := (\bar{L}_1)^{\beta_1} \dots (\bar{L}_{n-d})^{\beta_{n-d}}$. On dit alors que M est *finiment non dégénérée en p* .

On étudie la structure du (pseudo)groupe des biholomorphismes locaux de \mathbb{C}^n stabilisant M . Ce groupe est de dimension infinie lorsque M n'est nulle part minimale ou holomorphiquement dégénérée (cf. [9]). La notion de *groupe de Lie local* (de dimension finie) est présentée par exemple dans le chapitre 8 de [10]. On appelle *groupe de Lie local algébrique* un groupe de Lie local pour lequel la loi de multiplication (cf. [10], pp. 176–177) est algébrique (au sens de Nash).

THÉORÈME 1. – *Soit M une sous-variété générique algébrique réelle de \mathbb{C}^n , passant par l'origine, minimale et finiment non dégénérée en 0. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

(a) *Le (pseudo)groupe G_M des biholomorphismes locaux de \mathbb{C}^n définis sur le polydisque $\Delta_n(0, \varepsilon)$ et stabilisant M est un groupe de Lie local algébrique réel de dimension finie m ne dépendant que de la géométrie locale de M au voisinage de l'origine.*

(b) *Il existe $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ et une application algébrique H_M , constructible algorithmiquement à partir des équations définissantes de M , définie au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^m$, à valeurs dans \mathbb{C}^n , vérifiant $H_M(t, 0) \equiv t$, et telle que toute application holomorphe $h : \Delta_n(0, \varepsilon') \rightarrow \Delta_n(0, \varepsilon)$ suffisamment proche de l'identité, stabilisant M , vérifie $h = H_M(\cdot, e_h)$ pour un unique $e_h \in \mathbb{R}^m$.*

(c) *L'application $(t, e) \mapsto H_M(t, e)$ définit un groupe de Lie local algébrique de biholomorphismes algébriques stabilisant M .*

La démonstration du Théorème 1 fait intervenir les jets en 0 de biholomorphismes locaux, voir [6].

On considère maintenant la famille \mathcal{T}_n^d des sous-variétés analytiques réelles génériques de \mathbb{C}^n , définies au voisinage de l'origine, de codimension d , minimales et finiment non dégénérées en 0, dont le groupe G_M est commutatif, de dimension n . Il existe alors, pour tout élément M de \mathcal{T}_n^d , un système local de coordonnées holomorphes centré à l'origine $(z, w) = (x + iy, u + iv) \in \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^d$ et d fonctions analytiques réelles $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ s'annulant en 0, tels que M soit représenté au voisinage de 0 par les équations $v_1 = \varphi_1(y), \dots, v_d = \varphi_d(y)$. Dans ce cas, M est finiment non dégénéré en 0 si et seulement s'il existe $(n - d)$ multiindices $\beta^1, \dots, \beta^{n-d} \in \mathbb{N}^{n-d}$ de longueur strictement positive et des entiers $1 \leq k_1, \dots, k_{n-d} \leq d$ tels que l'application réelle

$$(1.1) \quad \psi(y) := \left(\frac{\partial^{|\beta^1|} \varphi_{k_1}(y)}{\partial y^{\beta^1}}, \dots, \frac{\partial^{|\beta^{n-d}|} \varphi_{k_{n-d}}(y)}{\partial y^{\beta^{n-d}}} \right)$$

est de rang $(n - d)$ à l'origine dans \mathbb{R}^{n-d} (cf. [6] Lemme 3.2). On note $y' \mapsto (\psi'_1(y'), \dots, \psi'_{n-d}(y'))$ l'application réciproque de ψ . Le second résultat de cette Note est le théorème suivant :

THÉORÈME 2. – *Soit M appartenant à \mathcal{T}_n^d , définie par les équations $v_1 = \varphi_1(y), \dots, v_d = \varphi_d(y)$, minimale et finiment non dégénérée en 0. Si M est localement algébrisable à l'origine, les dérivées partielles $\partial \psi'_j / \partial y'_l$ sont algébriques réelles pour $1 \leq j, l \leq n - d$.*

Cette condition d'algébrisabilité locale s'exprime très simplement lorsque M est une hypersurface Levi non dégénérée de \mathbb{C}^n , définie par l'équation $v = \varphi(y)$: il est équivalent de dire que les fonctions $\partial\psi'_j/\partial y'_l$ sont algébriques réelles pour $1 \leq j, l \leq n-1$ et que les dérivées partielles secondes $\partial^2\varphi/\partial y_j\partial y_l$ sont des fonctions algébriques des dérivées partielles premières $\partial\varphi/\partial y_1, \dots, \partial\varphi/\partial y_{n-1}$ pour $1 \leq j, l \leq n-1$. Le Théorème 2 montre qu'un élément de \mathcal{T}_n^d pour lequel une dérivée $\partial\psi'_j/\partial y'_l$ n'est pas algébrique réelle (ce qui est génériquement le cas au sens de Baire) n'est pas localement algébrisable à l'origine. Le Corollaire 1 exhibe une famille explicite d'exemples de sous-variétés analytiques réelles de \mathbb{C}^n , qui ne sont pas localement algébrisables à l'origine :

COROLLAIRE 1. – [6] **(a)** Soient $\chi_1, \dots, \chi_{n-1}$ des fonctions analytiques réelles arbitraires, définies au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$. L'hypersurface M de \mathbb{C}^n d'équation $v = \sum_{k=1}^{n-1} [y_k^2 + y_k^6 + y_k^9 y_1 \cdots y_{k-1} + y_k^{n+8} \chi_k(y_1, \dots, y_{n-1})]$ appartient à la famille \mathcal{T}_n^1 . De plus, pour un choix générique (au sens de Baire) de $\chi_1, \dots, \chi_{n-1}$, M n'est pas localement algébrisable à l'origine.

(b) Les hypersurfaces de \mathbb{C}^2 d'équations $v = \sin(y^2)$, $v = \sinh(y^2)$ et $v = \exp(\exp(y) - 1) - 1$ appartiennent à \mathcal{T}_2^1 et ne sont pas localement algébrisables à l'origine.

Pour vérifier l'appartenance de M à la famille \mathcal{T}_n^1 , on utilise la théorie analytique des symétries des équations aux dérivées partielles (cf. [8] Chapitre 2), appliquée à la géométrie CR dans [11, 12, 5].

Dans le même état d'esprit, le théorème suivant donne un éclairage différent du résultat de [7] :

THÉORÈME 3. – [6] Soit $M : v = \varphi(z\bar{z})$ une hypersurface analytique réelle, Levi non dégénérée dans \mathbb{C}^2 , passant par l'origine, dont l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux est engendrée par $\partial/\partial w$ et $iz\partial/\partial z$. Si M est localement algébrisable à l'origine, la dérivée de φ est algébrique. Ainsi, les hypersurfaces de \mathbb{C}^2 d'équations $v = e^{z\bar{z}} - 1$, $v = \sin(z\bar{z})$ et $v = \sinh(z\bar{z})$ ne sont pas localement algébrisables à l'origine.

3. Résumé de la démonstration du Théorème 2

Soit $M \in \mathcal{T}_n^d$ et soit Φ un biholomorphisme local, vérifiant $\Phi(0) = 0$, tel que $M' := \Phi(M)$ est algébrique, minimale et finiment non dégénérée en 0. L'algèbre de Lie réelle des automorphismes infinitésimaux de M étant engendrée par les champs $\partial/\partial t_1, \dots, \partial/\partial t_n$, l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de M' est commutative, de dimension n , engendrée par les champs $X'_1 = \Phi_*(\partial/\partial t_1), \dots, X'_n = \Phi_*(\partial/\partial t_n)$. On commence par redresser algébriquement les feuilletages holomorphes induits par X'_1, \dots, X'_n , en utilisant l'algébricité de l'application $H_{M'}$ et la commutativité du groupe $G_{M'}$ données dans le Théorème 1. La démonstration est standard, voir [6].

PROPOSITION 1. – Il existe un biholomorphisme algébrique complexe Ψ , défini au voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^n , et n fonctions algébriques complexes c_1, \dots, c_n , vérifiant $c_j(0) = 1$, tels que l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de $M'' := \Psi(M')$ est engendrée par les champs $X''_j := \Psi_*(X'_j) = c_j(t_j)\partial/\partial t_j$, $1 \leq j \leq n$.

D'après [4], il existe des coordonnées $t = (z_1, \dots, z_{n-d}, w_1, \dots, w_d)$ dans lesquelles on peut représenter M'' par les équations $w_k = \bar{\Theta}_k(z, \bar{z}, \bar{w})$, $k = 1, \dots, d$, où $\bar{\Theta}_k$ est une fonction algébrique complexe. On note maintenant, $(\Psi \circ \Phi)^{-1} = (f_1, \dots, f_{n-d}, g_1, \dots, g_d)$ et $(c_1, \dots, c_n) = (a_1, \dots, a_{n-d}, b_1, \dots, b_d)$. L'application $\Psi \circ \Phi$ vérifiant $(\Psi \circ \Phi)_*(\partial/\partial t_j) = c_j(t_j)\partial/\partial t_j$, on a les identités $a_j(z_j)(\partial f_j/\partial z_j)(z_j) \equiv b_k(w_k)(\partial g_k/\partial w_k)(w_k) \equiv 1$, ce qui montre que $\partial f_j/\partial z_j$ et $\partial g_k/\partial w_k$ sont algébriques pour $1 \leq j \leq n-d$ et $1 \leq k \leq d$. La condition $(\Psi \circ \Phi)(M) = M''$ donne, pour $k = 1, \dots, d$, les identités suivantes dans $\mathbb{C}\{z, \bar{z}, \bar{w}\}$:

$$(1.2) \quad \frac{g_k(\bar{\Theta}_k(z, \bar{z}, \bar{w})) - \bar{g}_k(\bar{w}_k)}{2i} \equiv \varphi_k \left(\frac{f_1(z_1) - \bar{f}_1(\bar{z}_1)}{2i}, \dots, \frac{f_{n-d}(z_{n-d}) - \bar{f}_{n-d}(\bar{z}_{n-d})}{2i} \right).$$

En différentiant (1.2) par rapport à z_j pour $j = 1, \dots, n-d$, on obtient :

$$(1.3) \quad \frac{a_j(z_j)(\partial \bar{\Theta}_k/\partial z_j)(z, \bar{z}, \bar{w})}{b_k(\bar{\Theta}_k(z, \bar{z}, \bar{w}))} \equiv \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j} \left(\frac{f_1(z_1) - \bar{f}_1(\bar{z}_1)}{2i}, \dots, \frac{f_{n-d}(z_{n-d}) - \bar{f}_{n-d}(\bar{z}_{n-d})}{2i} \right).$$

H. Gaussier et J. Merker

Le membre de gauche de l'équation (1.3) est une fonction algébrique complexe (l'algébricité est stable par différentiation, cf. [2]), indépendante de la variable w . Pour $1 \leq l \leq n-d$, on applique l'opérateur $\partial^{|\beta^l|}/\partial z^{\beta^l}$ à l'identité (1.2) avec $k = k_l$. Il existe des fonctions algébriques réelles A_{k_l, β^l} vérifiant :

$$(1.4) \quad A_{k_l, \beta^l}(z, \bar{z}) \equiv \frac{\partial^{|\beta^l|} \varphi_{k_l}}{\partial y^{\beta^l}} \left(\frac{f_1(z_1) - \bar{f}_1(\bar{z}_1)}{2i}, \dots, \frac{f_{n-d}(z_{n-d}) - \bar{f}_{n-d}(\bar{z}_{n-d})}{2i} \right).$$

L'application ψ donnée par l'équation (1.1) étant de rang $n-d$, on obtient pour $j = 1, \dots, n-d$ l'identité $f_j(z_j) - \bar{f}_j(\bar{z}_j) \equiv 2i \psi'_j(A_{k_1, \beta^1}(z, \bar{z}), \dots, A_{k_{n-d}, \beta^{n-d}}(z, \bar{z}))$. La différentiation de cette identité par rapport à z_j et à z_m pour $m \neq j$ fournit le système linéaire :

$$(1.5) \quad \begin{cases} \frac{1}{2i a_j(z_j)} \equiv \sum_{l=1}^{n-d} \frac{\partial \psi'_j}{\partial y_l'}(A_{k_1, \beta^1}(z, \bar{z}), \dots, A_{k_{n-d}, \beta^{n-d}}(z, \bar{z})) \frac{\partial A_{k_l, \beta^l}}{\partial z_j}(z, \bar{z}), \\ 0 \equiv \sum_{l=1}^{n-d} \frac{\partial \psi'_j}{\partial y_l'}(A_{k_1, \beta^1}(z, \bar{z}), \dots, A_{k_{n-d}, \beta^{n-d}}(z, \bar{z})) \frac{\partial A_{k_l, \beta^l}}{\partial z_m}(z, \bar{z}), \quad m \neq j. \end{cases}$$

Puisque $a_j(0) = 1$ pour tout $1 \leq j \leq n-d$, la matrice $((\partial A_{k_l, \beta^l} / \partial z_j)(0, 0))_{1 \leq j, l \leq n-d}$ est inversible et il existe donc des fonctions algébriques complexes $B_{j,l}(z, \bar{z})$, définies pour $1 \leq j, l \leq n-d$, telles que $(\partial \psi'_j / \partial y_l')(A(z, \bar{z})) := (\partial \psi'_j / \partial y_l')(A_{k_1, \beta^1}(z, \bar{z}), \dots, A_{k_{n-d}, \beta^{n-d}}(z, \bar{z})) \equiv B_{j,l}(z, \bar{z})$. Enfin, la fonction A_{k_l, β^l} étant réelle et la matrice $((\partial A_{k_l, \beta^l} / \partial z_j)(0, 0))_{1 \leq j, l \leq n-d}$ étant inversible, le jacobien à l'origine de l'application $y \mapsto A(iy, -iy) =: y'$ est non nul. Il existe donc une application algébrique réelle C telle que $(\partial \psi'_j / \partial y_l')(y') \equiv B_{j,l}(iC(y'), -iC(y'))$, ce qui prouve l'algébricité de $\partial \psi'_j / \partial y_l'$ pour $1 \leq j, l \leq n-d$. \square

Références bibliographiques

- [1] Baouendi, M.S., Ebenfelt, P., Rothschild, L.P., Rational dependence of smooth and analytic CR mappings on their jets, *Math. Ann.* 315 (1999), 205–249.
- [2] Bochnak, J., Coste, M., Roy, M.F., *Real algebraic geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1998. x+430 pp.
- [3] Cartan, É., Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes, I, *Annali di Mat.* 11 (1932), 17–90, II, *Annali Sc. Norm. Sup. Pisa* 1 (1932), 333–354.
- [4] Chern, S.S., MOSER, J.K., Real hypersurfaces in complex manifolds, *Acta Math.* 133 (1974), no. 2, 219–271.
- [5] Gaussier, H., Merker, J., A new example of uniformly Levi degenerate hypersurface in \mathbb{C}^3 , *Ark. Mat.* (to appear).
- [6] Gaussier, H., Merker, J., Nonalgebraizable real analytic tubes in \mathbb{C}^n , *Prépublication LATP* (2002), no. 02–17, 36 pp.
- [7] Huang, X., Ji, S., Yau, S.S., An example of a real analytic strongly pseudoconvex hypersurface which is not holomorphically equivalent to any algebraic hypersurface, *Ark. Mat.* 39 (2001), no. 1, 75–93.
- [8] Olver, P.J., *Applications of Lie groups to differential equations*, Springer Verlag, Heidelberg, 1986.
- [9] Stanton, N., Infinitesimal CR automorphisms of real hypersurfaces, *Amer. J. Math.* 118 (1996), no. 1, 209–233.
- [10] Stormark, O., *Lie's structural approach to PDE systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [11] Sukhov, A., Segre varieties and Lie symmetries, *Math. Z.* 231 (2001), no. 3, 483–492.
- [12] Sukhov, A., On maps of CR manifolds and transformations of differential equations, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* 333 (2001), 545–550.