

Sur l'analyticité des applications CR lisses à valeurs dans un ensemble algébrique réel

Bernard COUPET ^a, Sylvain DAMOUR ^a, Joël MERKER ^a, Alexandre SUKHOV ^b

^a LATP, UMR 6632, Université de Provence, 39 rue Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13, France

^b LAGAT, UMR 8524, Université de Lille 1, Cité scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

Courriel : {coupet,damour,merker}@cmi.univ-mrs.fr; sukhov@agat.univ-lille1.fr

(Envoyée le 13 février 2002)

Résumé. Soit $f : M \rightarrow M'$ une application CR de classe C^∞ entre une sous-variété $M \subset \mathbb{C}^n$ analytique réelle générique et un sous-ensemble $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ algébrique réel. On démontre que si M est minimale en un point p et si M' ne contient pas de courbe complexe, f est analytique réelle en p . © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On analyticity of smooth CR maps into a real algebraic set

Abstract. Let $f : M \rightarrow M'$ be a C^∞ -smooth CR mapping between a generic real analytic submanifold $M \subset \mathbb{C}^n$ and a real algebraic subset $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. We prove that if M is minimal at a point p and if M' does not contain complex curves, then f is real-analytic at p . © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction et énoncés des résultats

Soit M une sous-variété générique analytique réelle de \mathbb{C}^n ($n \geq 2$) et soit M' un sous-ensemble algébrique réel de $\mathbb{C}^{n'}$. Dans cette Note, nous étudions l'analyticité des applications de Cauchy-Riemann (CR) de classe C^∞ de M à valeurs dans M' . Notamment, nous établissons une estimation supérieure de leur degré de transcendance, en fonction de la dimension maximale des feuilletages holomorphes locaux contenus dans M' .

On peut supposer que la variété générique M de codimension d est définie au voisinage d'un point $p \in M$ dans \mathbb{C}^n par des équations $r_k(z, \bar{z}) = 0$, $k = 1, \dots, d$, où les r_k sont des fonctions analytiques réelles satisfaisant $\partial r_1 \wedge \dots \wedge \partial r_d \neq 0$ en p . Soit $m := n - d$ la dimension CR de M . D'après le théorème des fonctions implicites, on peut écrire les équations de M au voisinage de p sous la forme $\bar{y}_k = \phi_k(\bar{x}, x, y)$, $k = 1, \dots, d$, où $\mathbb{C}^n \ni z = (x, y) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$, $p = (x_p, y_p)$, et les ϕ_k sont des fonctions holomorphes au voisinage de (\bar{x}_p, x_p, y_p) . Les opérateurs $L_j := \partial/\partial \bar{x}_j + \sum_{k=1}^d [\partial \phi_k / \partial \bar{x}_j] \partial/\partial \bar{y}_k$, $j = 1, \dots, m$, forment une base de champs CR tangents à M . L'ensemble algébrique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ est défini par des équations polynomiales réelles $P'_k(z', \bar{z}') = 0$, $k = 1, \dots, d'$. Soit $f : M \rightarrow M'$ une application CR de classe C^∞ au voisinage de p sur M , i.e. $L_j f = 0$, pour tout j . Rappelons que M est dite *minimale* en p (au sens de Tumanov) s'il n'existe pas de sous-variété CR stricte contenue dans M , passant par p et de dimension CR égale à m . Le premier résultat de cette Note est le suivant :

Note transmise à Pierre LELONG

S0764-4442(01)0????-?/FLA

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

B. Coupet et al.

THÉORÈME 1. – *Si M est minimale en p et si M' ne contient pas de morceau ouvert de courbe complexe, f est analytique réelle en p .*

Soit \mathcal{M}_p le corps des germes en p des fonctions méromorphes au voisinage de p dans \mathbb{C}^n et $\mathcal{M}_p(f) := \mathcal{M}_p(f_1, \dots, f_{n'})$ son extension engendrée par les fonctions composantes $f_1, \dots, f_{n'}$ de f . Soit $\text{deg. tr}_p f$ le degré de transcendance de cette extension ([?, ?, ?, ?, ?]). Rappelons que le *degré de transcendance* d'une extension de corps est le cardinal commun à toutes les bases de transcendance ([?, Chap. I et II]), et que l'application f est analytique réelle en p si et seulement si $\text{deg. tr}_p f = 0$ ([?, [?, Lem. 3.4]). Cette notion algébrique se traduit géométriquement par :

THÉORÈME 2. – *Si M est minimale en p et si $\text{deg. tr}_p f = s$, alors M' contient un morceau ouvert de variété analytique complexe de dimension s .*

On note $\text{rg. max}_p f$ le rang maximal de f sur un voisinage de p ; comme f se prolonge holomorphiquement à un wedge, d'après les théorèmes de Trépreau [?] et Tumanov [?], f atteint son rang maximal presque partout. On dit que M' est (r, s) -plat en $q' \in M'$ (cf. [?, ?]) s'il contient une sous-variété analytique réelle de dimension r passant par q' et biholomorphe au produit cartésien $N \times \Delta^s$, où $N \subset \mathbb{C}^\nu$ ($\nu \geq 0$) est une variété analytique réelle et Δ^s est le polydisque unité dans \mathbb{C}^s . Cette notion permet de préciser le théorème ?? :

THÉORÈME 3. – *Supposons que M est minimale en p et que $\text{deg. tr}_p f = s$. Alors il existe un entier $r \geq \text{rg. max}_p f$ et un ouvert V dense au voisinage de p dans M tels que pour tout point $q \in V$, l'ensemble M' est (r, s) -plat en $f(q)$.*

Notre approche est basée sur la méthode algébrique développée pour les hypersurfaces dans [?, ?, ?, ?]. Pour passer à la codimension supérieure, nous utilisons certains résultats récents de [?]. Dans le cas où M' est une variété analytique réelle, une approche géométrique pour le problème d'analyticité des applications CR lisses est développée dans les travaux fondamentaux de Diederich-Webster [?] et Diederich-Fornæss [?].

Notre méthode permet aussi d'étudier le problème général de l'analyticité des fonctions vectorielles vérifiant des équations des équations analytiques :

THÉORÈME 4. – *Soient $M \subset \mathbb{C}^n$ une variété analytique réelle générique minimale en p et $f : M \rightarrow \mathbb{C}^{n'}$ une application CR de classe C^∞ telles que $\text{deg. tr}_p f = s$. Supposons que f vérifie les équations $P'_k(z, \bar{z}, f, \bar{f}) = 0$, $z \in M$, $k = 1, \dots, d'$ où $P'_k(z, \bar{z}, z', \bar{z}') = \sum c_{\alpha\beta}(z, \bar{z}) z'^\alpha \bar{z}'^\beta$ sont des polynômes en $z', \bar{z}' \in \mathbb{C}^{n'}$ à coefficients $c_{\alpha\beta}(z, \bar{z})$ analytiques réels au voisinage de p dans \mathbb{C}^n . Alors pour tout voisinage V de $(p, f(p))$, l'ensemble analytique réel $N := \{(z, z') \in V : P'_k(z, \bar{z}, z', \bar{z}') = 0, z \in M\}$ contient (éventuellement, après une permutation des coordonnées dans $\mathbb{C}^{n'}$) une sous-variété de la forme $\{(z, z') : z'_j = H_j(z, z'_1, \dots, z'_s), j = s + 1, \dots, n', z \in M\}$, où les H_j sont des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s$.*

Les théorèmes ??, ?? et ?? se ramènent au cas particulier du théorème ?? où les coefficients des polynômes P'_k sont constants.

2. Extension méromorphe et dépendance algébrique

Soit $\mathcal{R}_p(M)$ l'anneau des germes en p des fonctions C^∞ sur M de la forme $h(z) = H(z, \bar{z}, \overline{g(z)})$, où $g = (g_1, \dots, g_s)$, $s \geq 0$, sont des germes en p de fonctions CR de classe C^∞ sur M et H est une fonction holomorphe au voisinage de $(p, \bar{p}, \overline{g(p)})$. Les opérateurs L_j sont des dérivations de l'anneau $\mathcal{R}_p(M)$. D'après le principe d'unicité pour les fonctions de $\mathcal{R}_p(M)$ ([?, ?]), cet anneau est intègre. On note alors $\widehat{\mathcal{R}}_p(M)$ le corps des fractions de $\mathcal{R}_p(M)$. Le résultat suivant, qui est une version généralisée du principe de réflexion de Lewy-Pinchuk, a été démontré dans [?] pour M une hypersurface et dans [?] pour le cas général.

LEMME 1. – *Si une fonction $\psi = h_1/h_2 \in \widehat{\mathcal{R}}_p(M)$ est CR en dehors du fermé d'intérieur vide $\Sigma := \{z \in M : h_2(z) = 0\}$, elle se prolonge méromorphiquement à un voisinage de p dans \mathbb{C}^n .*

Une famille finie de fonctions g_1, \dots, g_s de classe C^∞ et CR au voisinage de p dans M est dite *algébriquement dépendante* sur $\widehat{\mathcal{R}}_p(M)$ (resp. \mathcal{M}_p) s'il existe un polynôme non nul $Q \in \widehat{\mathcal{R}}_p(M)[X_1, \dots, X_s]$ (resp. $Q \in \mathcal{M}_p[X_1, \dots, X_s]$) tel que $Q(g_1, \dots, g_s)$ est identiquement nul au voisinage de p dans M en dehors de la réunion des lieux singuliers de ses coefficients (cf. [?, ?]).

LEMME 2. – *La famille (g_1, \dots, g_s) est algébriquement dépendante sur $\widehat{\mathcal{R}}_p(M)$ si et seulement si elle est algébriquement dépendante sur \mathcal{M}_p . Dans ce cas, $\deg. \text{tr}_p g < s$.*

Démonstration. – Supposons qu'il existe des fonctions $\alpha_J \in \widehat{\mathcal{R}}_p(M)$, $J \in \mathbb{N}^s$, $|J| \leq A$ non toutes nulles telles que $\sum \alpha_J g^J = 0$ au voisinage de p sur M , en dehors des lieux singuliers des α_J . Considérons une équation de ce type comportant un nombre de monômes *minimal* et possédant un coefficient unitaire, disons $\alpha_{J_0} = 1$. En appliquant les opérateurs L_j , on obtient les équations $\sum_{J \neq J_0} L_j(\alpha_J) g^J = 0$, pour $j = 1, \dots, m$. Ici, $L_j(\alpha_J) \in \widehat{\mathcal{R}}_p(M)$. Par l'absurde, s'il existe un coefficient $L_{j_1}(\alpha_{J_1})$ non nul, on divise par ce coefficient et on obtient une contradiction avec le fait que l'équation initiale comportait un nombre minimal de monômes. Par conséquent, chaque α_J est CR en dehors de son lieu singulier ; le lemme 1 permet de conclure. \square

LEMME 3. – *Soit $g = (g_1, \dots, g_s)$, $s \geq 1$, une famille de fonctions CR de classe C^∞ au voisinage de p dans M et $P(z, \zeta, u, \omega)$ une fonction holomorphe en $(z, \zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ et polynomiale en $(u, \omega) \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^s$ au voisinage de $(p, \bar{p}, g(p), \overline{g(p)})$. On suppose que $P(z, \bar{z}, g(z), \overline{g(z)}) \equiv 0$ sur M au voisinage de p et que $P(z, \bar{z}, u, \omega) \not\equiv 0$ sur $M \times \mathbb{C}^{2s}$ au voisinage de $(p, g(p), \overline{g(p)})$. Alors, on a l'estimation : $\deg. \text{tr}_p g < s$.*

Démonstration. – On peut supposer que $p = 0$ et $g(p) = 0$. Écrivons P sous la forme $P(z, \zeta, u, \omega) = \sum \alpha_J(z, \zeta, \omega) u^J$, où les α_J , $J \in \mathbb{N}^s$, $|J| \leq A$, sont holomorphes en (z, ζ) et polynomiales en ω au voisinage de $(0, 0, 0)$. S'il existe J_0 tel que $\alpha_{J_0}(z, \bar{z}, \overline{g(z)}) \not\equiv 0$ sur M au voisinage de 0, alors g_1, \dots, g_s sont algébriquement dépendantes sur $\widehat{\mathcal{R}}_p(M)$, donc sur \mathcal{M}_p d'après le lemme 2. Si au contraire $\psi_J(z) := \alpha_J(z, \bar{z}, \overline{g(z)}) \equiv 0$ sur M au voisinage de 0 pour tout J , développons $\overline{\psi_J(z)} = \sum \beta_{IJ}(z, \bar{z}) g(z)^I$ sous forme polynomiale. Comme $P(z, \bar{z}, u, \omega) \not\equiv 0$, il existe des multi-indices I_0 et J_0 tels que $\beta_{I_0 J_0}(z, \bar{z}) \not\equiv 0$ sur M au voisinage de 0. Alors, $\psi_{J_0}(z) \equiv 0$ sur M au voisinage de p signifie à nouveau que g_1, \dots, g_s sont algébriquement dépendantes sur $\widehat{\mathcal{R}}_p(M)$. \square

3. Démonstration des théorèmes

Dans la situation du théorème 4, on pose $s = \deg. \text{tr}_p f$. On peut supposer que f_1, \dots, f_s est une base de transcendance du corps $\mathcal{M}_p(f)$ sur \mathcal{M}_p . Notons $f = (g, h) \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^t$, $t = n - s$, et $z' = (u', v') \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^t$. Pour tout $j = 1, \dots, t$, il existe une fonction non identiquement nulle $Q_j(z, u', v'_j)$ polynomiale en $(u', v'_j) \in \mathbb{C}^{s+1}$ et holomorphe en z au voisinage de p , telle que $Q_j(z, g(z), h_j(z)) \equiv 0$ sur M au voisinage de p . Soit $\mathcal{Q}_p(f)$ le sous-ensemble analytique complexe de $\mathbb{C}^{n+n'}$ défini au voisinage de (p, p') par les équations $Q_j(z, u', v'_j) = 0$, $j = 1, \dots, t$. Notons $\pi : \mathbb{C}^{n+n'} \rightarrow \mathbb{C}^n$ et $\pi' : \mathbb{C}^{n+n'} \rightarrow \mathbb{C}^{n'}$ les projections canoniques, et $\mathcal{Q}_p(f)|_M$ l'ensemble analytique réel $\mathcal{Q}_p(f) \cap \pi^{-1}(M)$. Le graphe Γ_f de f est inclus dans $\mathcal{Q}_p(f)|_M$. Soit $\Delta_j(z, u')$ le discriminant de $Q_j(z, u', v'_j)$ par rapport à v'_j et soit $\Sigma := \{z \in M : \Delta_j(z, g(z)) = 0, j = 1, \dots, t\}$. Il faut remarquer que $\Delta_j(z, g(z)) \not\equiv 0$ au voisinage de p sur M , $j = 1, \dots, t$, car g_1, \dots, g_s est une base de transcendance.

Appliquons maintenant la méthode de [?, ?, ?]. Soit $\mathcal{M}_p[u']$ l'anneau des polynômes en u' à coefficients méromorphes au voisinage de p . D'après le théorème des fonctions implicites, pour tout point $q \in M \setminus \Sigma$, il existe des fonctions $H_j(z, u')$ ($1 \leq j \leq t$) définies sur un voisinage de $(q, f(q))$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'}$, holomorphes par rapport à z et algébriques par rapport à u' , telles que $Q_j(z, u', H_j(z, u')) \equiv 0$ pour (z, u') dans un voisinage de $(q, g(q))$, i.e. les fonctions $H_j(z, u')$ sont algébriques sur $\mathcal{M}_p[u']$. Considérons la substitution $r'_k(z, u', \bar{z}, \bar{u}') := P'_k(z, \bar{z}, u', H(z, u'), \bar{u}', \overline{H(z, u')})$. L'algébricité des $H_j(z, u')$ sur $\mathcal{M}_p[u']$ implique qu'il existe un polynôme non nul $\sum_{l=0}^N A_l(z, u', \bar{z}, \bar{u}') X^l$ avec des coefficients analytiques réels par rapport à (z, \bar{z}) dans un voisinage Ω de (p, \bar{p}) et polynomiaux par rapport à (u', \bar{u}') tel que

B. Coupet et al.

$\sum_{l=0}^N A_l(z, u', \bar{z}, \bar{u}') [r'_k(z, u', \bar{z}, \bar{u}')]^l \equiv 0$ (cf. [?, Lem. 6.4]). Par construction, $r'_k(z, g(z), \bar{z}, \overline{g(z)}) = 0$ pour tout z proche de q . Le lemme suivant est similaire au Lemme 6.5 de [?] :

LEMME 4. – On a $r'_k(z, u', \bar{z}, \bar{u}') \equiv 0$ pour tout $(z, u') \in M \times \mathbb{C}^s$ au voisinage de $(q, g(q))$.

Démonstration. – Raisonnons par l'absurde : si $r'_k(z, u', \bar{z}, \bar{u}')$ est non identiquement nul, on peut supposer que $A_0(z, u', \bar{z}, \bar{u}') = \sum g(z)^J A_{0,J}(z, \bar{z}, \bar{u}')$ est non identiquement nul et que $A_0(z, \bar{z}, g(z), \overline{g(z)}) \equiv 0$ pour tout z dans un voisinage U_q de q . Si tout les $A_{0,J}(z, \bar{z}, \overline{g(z)}) \equiv 0$ sur U_q , d'après le principe d'unicité pour les éléments de $\widehat{R}_p(M)$ ([?], [?]), on a $A_{0,J}(z, \bar{z}, \overline{g(z)}) \equiv 0$ dans un voisinage de p , ce qui contredit l'indépendance algébrique de (g_1, \dots, g_s) d'après le lemme 3. S'il existe $A_{0,J_0}(z, \bar{z}, \overline{g(z)}) \not\equiv 0$ sur U_q , considérons toutes les équations $\sum \alpha_J g^J = 0$ satisfaites sur un ouvert dense $V_q \subset U_q$ avec $\alpha_J \in \widehat{R}_p(M)$ comportant un nombre *minimal* de monômes et possédant un coefficient α_{J_0} égal à 1. Comme dans le lemme 2, les α_J sont CR sur V_q . Alors les α_J se prolongent méromorphiquement à un voisinage de p dans \mathbb{C}^n . En effet, un examen direct de la preuve fournie dans [?], [?, Prop. 2.5] démontre qu'il suffit que $\psi \in \widehat{R}_p(M)$ soit seulement CR sur un ouvert non vide de M pour que la conclusion du lemme 1 soit vraie. Donc (g_1, \dots, g_s) est algébriquement dépendante sur \mathcal{M}_p , ce qui contredit la définition de g . \square

L'annulation des $r'_k(z, g(z), \bar{z}, \overline{g(z)})$ s'interprète géométriquement de la façon suivante :

LEMME 5. – Pour tout point $q \in M \setminus \Sigma$ suffisamment proche de p , il existe un voisinage Ω_q de $(q, f(q))$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'}$ tel que $\mathcal{Q}_p(f)|_M \cap \Omega_q \subset N = \{(z, z') : P'_k(z, \bar{z}, z', \bar{z}') = 0, z \in M\}$.

Fixons un point $q \in M \setminus \Sigma$ suffisamment proche de p . Les équations de $\mathcal{Q}_p(f)$ s'écrivent dans un voisinage $\Omega = U \times V \times W$ de $(q, g(q), h(q))$ sous la forme d'un graphe $v'_j = H_j(z, u')$, où les fonctions H_j sont holomorphes sur $U \times V$. Cela démontre le théorème 4.

Le lemme suivant permet de conclure la démonstration du théorème 3 qui implique les théorèmes 1 et 2 (cf. [?, ?, ?, ?, ?]).

LEMME 6. – Pour tout point $q \in M \setminus \Sigma$ suffisamment proche de p , il existe un voisinage Ω_q de $(q, f(q))$ dans $\mathbb{C}^{n+n'}$ tel que $\pi'(\mathcal{Q}_p(f)|_M \cap \Omega_q)$ est une variété analytique réelle de dimension supérieure ou égale à $\text{rg. max}_p f$, passant par $f(q)$ et biholomorphe au produit cartésien $N \times \Delta^s$, où $N \subset \mathbb{C}^\nu$ ($\nu \geq 0$), est une variété analytique réelle et $\Delta^s \subset \mathbb{C}^s$ le polydisque unité.

Démonstration. – Le lemme 5 implique $\pi'(\mathcal{Q}_p(f)|_M \cap \Omega_q) \subset M'$. En tant que graphe, la variété analytique réelle $\mathcal{Q}_p(f)|_M \cap \Omega$ est biholomorphe au produit cartésien $(M \cap U) \times V$, c'est-à-dire qu'elle est feuilletée par des morceaux ouverts de variétés complexes de dimension s . Soit $\Psi : (M \cap U) \times V \rightarrow \mathbb{C}^{n'}$, $(z, u') \mapsto (u', H(z, u'))$, avec $H = (H_1, \dots, H_t)$. L'application analytique réelle Ψ est biholomorphe sur les fibres $\{z\} \times V$, $z \in M \cap U$. De plus, elle est de même rang générique r que $\pi'|_{\mathcal{Q}_p(f)|_M}$; et $r \geq \text{rg. max}_p f$ puisque $\Gamma_f \subset \mathcal{Q}_p(f)|_M$. Par le théorème du rang (analytique réel), on conclut que pour tout $q' \in M \setminus \Sigma'$ suffisamment proche de p , où $\Sigma' \subset M$ est un fermé d'intérieur vide, il existe un voisinage $\Omega' = U' \times V' \times W'$ de $(q', g(q'), h(q'))$ tel que $N' := \Psi((M \cap U') \times V') = \pi'(\mathcal{Q}_p(f)|_M \cap \Omega')$ est une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^{n'}$ de dimension r . De plus, il existe une sous-variété analytique réelle $N \subset M \cap U'$ telle que $\Psi|_{N \times V'}$ est un difféomorphisme analytique réel sur N' . Finalement, on peut prolonger $\Psi|_{N \times V'}$ en un biholomorphisme local de l'espace ambiant. \square

Références bibliographiques

- [1] Coupet B., Meylan F., Sukhov A., Int. Math. Res. Not. (1999) 1–29.
- [2] Coupet B., Pinchuk S., Sukhov A., Analyticité des applications CR, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 329 (1999) 489–494.
- [3] Coupet B., Pinchuk S., Sukhov A., On partial analyticity of CR mappings, Math. Z. 235 (2000) 541–557.
- [4] Damour S., On the analyticity of smooth CR mappings, Michigan Math. J. 49 (2001) 583–603.
- [5] Diederich K., Fornæss J.E., Proper holomorphic mappings between real-analytic pseudoconvex domains in \mathbb{C}^n , Math. Ann. 282 (1988) 681–700.

Analyticité des applications CR lisses

- [6] Diederich K., Webster S.M., A reflection principle for degenerate real hypersurfaces, *Duke Math. J.* 47 (1980) 835–843.
- [7] Merker J., On the partial algebraicity of holomorphic mappings between two real algebraic sets, *Bull. Soc. Math. France* 129 (2001) 547–591.
- [8] S.Pinchuk, Thèse d'état, Moscou, 1980.
- [9] Trépreau J.-M., Sur le prolongement holomorphe des fonctions CR définies sur une hypersurface réelle de classe C^2 dans \mathbb{C}^n , *Invent. Math.* 83 (1986) 583–592.
- [10] Tumanov A., Extension of CR functions into a wedge from a manifold of finite type, *Mat. Sb.* 136 (1988) 128–139.
- [11] Zariski O., Samuel P., *Commutative algebra*, Vol. 1, D. van Nostrand Company, 1958.